

МОИ



КНИГА-ПОБЕДИТЕЛЬ
конкурса рукописей
учебной, научно-технической
и справочной литературы по энергетике,
посвященного 90-летию МЭИ
и 100-летию плана ГОЭЛРО

Книга издана
при поддержке
ООО «Газпром энергохолдинг»



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Под редакцией Д.А. Иванова

Москва
Издательство МЭИ
2021

УДК 53
ББК 22.3
К 937

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Рецензенты: О.С. Еркович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф.
физики МГТУ им. Н.Э. Баумана;
В.С. Булыгин, канд. техн. наук, проф. каф.
общей физики МФТИ

Авторы: М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов,
И.В. Иванова, В.В. Манухин, В.С. Спивак

К 937 Курс общей физики: учеб. пособие / М.К. Губкин, А.В. Дедов,
Д.А. Иванов и др.; под ред. Д.А. Иванова. – 2 изд., перераб.
и доп. – М.: Издательство МЭИ, 2021. – 512 с.

ISBN 978-5-7046-2429-5

В пособии изложено развернутое и расширенное содержание лекций, которые читаются по курсу общей физики в НИУ «МЭИ».

Для аудиторных и самостоятельных занятий студентов младших курсов, а также для самостоятельных занятий студентов, обучающихся дистанционно. Может быть полезно преподавателям при подготовке к проведению лекционных и практических занятий.

**УДК 53
ББК 22.3**

ISBN 978-5-7046-2429-5

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Введение	8
Часть I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	11
1. Кинематика поступательного движения материальной точки... ..	11
2. Динамика поступательного движения твердого тела.....	22
3. Работа и энергия в механике поступательного движения... ..	33
4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела	44
5. Работа по вращению тела и кинетическая энергия вращения... ..	57
6. Собственные свободные и затухающие механические колебания	65
7. Вынужденные механические колебания. Резонанс.....	75
8. Элементы специальной теории относительности.....	79
9. Основные понятия молекулярной физики макросистем. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.....	93
10. Элементы статистической физики.....	104
11. Первое начало термодинамики.....	115
12. Понятие теплоемкости. Применение первого начала термодинамики для идеального газа	119
13. Тепловые машины. Цикл Карно.....	128
14. Второе начало термодинамики. Энтропия.....	133
15. Явления переноса в газах	138
16. Реальные газы.....	150
Часть II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.....	161
17. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность поля.....	161
18. Работа сил электростатического поля. Разность потенци- алов. Потенциал.....	170
19. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме	176
20. Электрическое поле в диэлектриках.....	188
21. Проводники в электростатическом поле. Энергия элект- ростатического поля	203
22. Постоянный электрический ток.....	219
23. Магнитное поле постоянного тока. Магнитная индукция и способы ее расчета	232
24. Действие магнитного поля на движущийся заряд и проводник с током	249
25. Электромагнитная индукция	263

26. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Энергия магнитного поля	272
27. Магнитное поле в веществе. Напряженность магнитного поля.....	281
28. Диа-, пара- и ферромагнетики	289
29. Собственные свободные и затухающие электромагнитные колебания в контуре.....	302
30. Вынужденные электромагнитные колебания в контуре. Резонанс напряжений	311
31. Уравнения Максвелла	317
32. Электромагнитные волны и их свойства.....	330
Часть III. ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ.....	345
33. Интерференция.....	345
34. Полосы равной толщины и полосы равного наклона.....	355
35. Дифракция Френеля.....	361
36. Дифракция Фраунгофера.....	374
37. Дифракционная решетка.....	382
38. Поляризация	393
39. Оптическая анизотропия.....	403
40. Интерференция поляризованного света	414
41. Дисперсия и поглощение света	422
42. Распространение сигналов в среде с дисперсией.....	433
43. Тепловое излучение.....	444
44. Квантовые свойства света.....	456
45. Волны де Бройля	465
46. Квантовая механика.....	476
47. Бозоны и фермионы	487
48. Ядерная физика	498
Физические константы.....	510
Список рекомендуемой литературы.....	511

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой второе издание «Курса общей физики», разработанного на кафедре общей физики и ядерного синтеза (ОФиЯС) Национального исследовательского университета «МЭИ». Изучаемый материал представлен в книге в виде 48 разделов, скомпонованных в соответствии с действующей программой курса общей физики для технических университетов и охватывающих все основные темы этой программы. Изложение теоретического материала дополнено множеством примеров, иллюстрирующих основные физические законы, соотношения и правила, используемые для описания физических явлений. Некоторые из этих примеров и задач входили в ранее изданные издательством МЭИ учебные пособия и задачки по отдельным разделам курса общей физики. Каждый раздел завершается списком контрольных вопросов, поиск ответов на которые поможет студенту глубже усвоить изучаемый материал.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов 1–2 курсов и может быть широко использована для самостоятельной работы.

Предыдущее издание «Курса общей физики» вышло в свет в 2010 г. Настоящее издание существенно переработано и дополнено с учетом 40-летнего опыта преподавания физики на кафедре ОФиЯС. Названия изучаемых тем и разделов максимально соответствуют программе проведения лекционных и практических занятий по курсу. Существенно переработано содержание теоретического материала, уточнены формулировки законов, определения и обозначения физических величин. Приведены новые примеры решения задач.

Издание может оказаться полезным не только студентам энергетических вузов, но и других учебных заведений и технических университетов. Обсуждение содержания всех разделов сборника задач на методических семинарах кафедры помогло сформировать комплексный и логически непротиворечивый целостный подход к изложению курса общей физики на таком уровне подачи материала, который выделяет главные, фундаментальные основы физических явлений и законов, описывающих эти явления, и способствует наилучшему закреплению полученных знаний.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Физика – одна из основных фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров. Кроме того, физика играет роль базы, без которой невозможна успешная деятельность инженера в любой области современной техники. На протяжении последних трех столетий развитие техники неразрывно связано с физической наукой, которая научно обосновывала принципиально новые направления в технике. Фундаментальные законы, лежащие в основе физической науки, являются общими для описания всех наблюдаемых в природе и технике физических явлений.

С одной стороны, одна из важнейших задач курса общей физики состоит в формировании у студентов представлений о современной физической картине мира. С другой стороны, физика явилась научным фундаментом, на котором выросли такие новые области техники, как электро- и радиотехника, космическая техника и приборостроение, электронная и вычислительная техника, теплоэнергетика и ядерная энергетика. С третьей стороны, именно технические потребности общества создали предпосылки для развития отдельных областей физической науки: механики, термодинамики, оптики.

Важность и необходимость изучения курса общей физики в техническом университете можно определить следующим образом:

1) изучение курса важно для формирования представлений о явлениях и процессах, происходящих в природе, т.е. для выработки научного мировоззрения;

2) физика является базовой дисциплиной для большинства общеинженерных и специализирующих дисциплин;

3) развитие любой отрасли современного производства неразрывно переплетается с физикой, поэтому инженер любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы быть в состоянии активно и со знанием дела применять достижения научно-технического прогресса в своей деятельности.

Программа курса общей физики в технических университетах соответствует тем целям и задачам, которые возникли в современном инженерном образовании в связи с развитием совре-

менной техники. В результате изучения курса общей физики студент должен научиться постановке и выбору алгоритмов решения конкретных задач из различных физических областей, приобрести начальные навыки для самостоятельного овладения новыми методами и теориями, необходимыми в практической деятельности современного специалиста. Знания, умения и навыки, полученные при успешном освоении курса общей физики, являются основой и базой для последующего изучения теоретической механики, динамики и прочности машин, прикладной механики, электротехники и электроники, технической термодинамики, теории тепло- и массообмена, механики жидкости и газа. Безусловно, подготовка современного грамотного специалиста в области теплоэнергетики и теплотехники, обладающего необходимыми компетенциями в сфере своей профессиональной деятельности, невозможна без успешного освоения курса общей физики.

В современных условиях техническое образование должно рассматриваться не только и не столько как овладение необходимым объемом учебной информации, а как развитие у студентов в процессе обучения потребностей и способностей к самостоятельному получению новых общих и профессиональных знаний и умений при использовании многообразных источников информации.

Кафедра общей физики и ядерного синтеза Национального исследовательского университета «МЭИ» ведет преподавание курса общей физики более 40 лет. За это время на кафедре сложилась устойчивая научно-методическая система преподавания дисциплины и накоплен большой опыт организации лекционных, практических и лабораторных занятий. Для методического сопровождения учебного процесса на кафедре разработан и успешно используется учебно-методический комплекс по курсу общей физики для студентов, обучающихся по образовательным программам в области энергетики. Основу комплекса составляют учебные пособия, посвященные изучению теоретических основ дисциплины, выполнению лабораторного практикума и получению практических навыков по решению задач.

Предлагаемый «Курс общей физики» – составной элемент учебно-методического комплекса, во многом рассчитанный на самостоятельную работу. Цель пособия – помочь студенту в глу-

боком усвоении основных положений курса общей физики. Как показывает практика, большие трудности в правильном усвоении многих разделов курса общей физики возникают не из-за сложности в понимании дисциплины «физика» как таковой, а в следствие отсутствия навыков самостоятельного анализа изучаемых явлений, исходя из их комплексного рассмотрения.

Предлагаемая книга состоит из 48 разделов, посвященных рассмотрению физических законов, явлений и процессов, которые входят в программу изучения трех основных частей курса общей физики: «Механика. Молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и элементы квантовой физики».

В каждом разделе авторы стремились дать последовательное изложение основных положений теории, опираясь на которые обучающийся сможет научиться отвечать на вопросы, связанные с пониманием и объяснением явлений окружающего мира, и решать основные типы задач по физике. Примеры и задачи с решениями, приводимые одновременно с изложением теоретических основ, позволят обучающемуся обратить внимание на важнейшие аспекты этого материала, в том числе на факты и соотношения, которые при первом чтении понимаются недостаточно глубоко. Приводимые в каждом разделе контрольные вопросы необходимы для усвоения и понимания изученного материала. Основной своей задачей авторы считали такое изложение курса общей физики, которое вызывает минимальные трудности при самостоятельной работе студента.

Часть I

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Механика – это раздел физики, который рассматривает простейшую форму движения материи: перемещение различных тел относительно друг друга и изменение формы тела. Основные законы механики были в значительной степени выяснены Г. Галилеем и окончательно сформулированы И. Ньютоном. Механика Галилея – Ньютона получила название классической. Ее законы и выводы справедливы при одновременном выполнении двух условий (границы применимости):

1) рассматриваемые тела – макроскопические;

2) $\frac{v}{c} \ll 1$, где v – скорость тела, а $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с – ско-

рость света в вакууме (универсальная, т.е. мировая постоянная).

Классическая механика делится на три части: кинематику, динамику и статику. **Кинематика** изучает движение тел в пространстве и времени без рассмотрения причин, вызывающих это движение. **Динамика** изучает движение тел в связи с причинами (силами), которые обуславливают тот или иной характер движения. **Статика** изучает равновесие тел и в нашем курсе не рассматривается.

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В механике широко пользуются двумя моделями: материальная точка и материальное тело. **Материальная точка** – это тело нулевых размеров, т.е. абстрактная физическая модель. Тело можно считать материальной точкой, если его размерами можно пренебречь в условиях данной задачи. Любое тело можно представить как совокупность материальных точек. **Абсолютно твердым телом** называется такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется.

Важным вопросом в кинематике является задание положения тела в пространстве. Свободное пространство является однородным (в нем нет точек, обладающих особыми свойствами) и изотропным (в нем нет выделенных направлений). Поэтому в свободном пространстве нельзя определить положение материальной точки или тела. **Тело отсчета** – это абсолютно твердое тело, относительно которого можно задать положение произвольного объекта в пространстве.

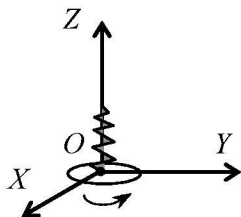


Рис. 1.1

Все физические процессы протекают в пространстве и во времени. С телом отсчета связывают **систему координат**, которая позволяет задать положение точки или тела в пространстве. Мы будем использовать декартову прямоугольную (правую) систему координат (рис. 1.1). В такой системе координат ось OZ направлена в сторону поступательного движения правого винта, который вращается от оси OX к оси OY по кратчайшему углу.

Время – мера длительности и последовательности процессов. Для его отсчета требуются часы. Тело отсчета, система координат и часы образуют **систему отсчета**. В нашем курсе будут использованы два способа задания положения точки в пространстве: векторный и координатный.

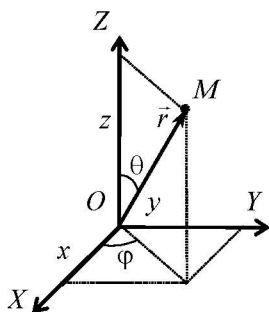


Рис. 1.2

Вся физическая информация о положении точки M в пространстве передается с помощью радиуса-вектора \vec{r} , который проводится из начала координат в точку M (рис. 1.2). Для того, чтобы задать радиус-вектор \vec{r} , необходимо указать:

1) начало системы координат – т. O ;

2) модуль $|\vec{r}|$;

3) направление радиуса-вектора в пространстве, определяемое двумя независимыми углами.

Векторный способ. Положение материальной точки M задается с помощью радиуса-вектора \vec{r} , который проводится из начала координат в точку M (рис. 1.2). Для того, чтобы задать радиус-вектор \vec{r} , необходимо указать:

1) начало системы координат – т. O ;

2) модуль $|\vec{r}|$;

3) направление радиуса-вектора в пространстве, определяемое двумя независимыми углами.

Используя векторы единичной длины, сонаправленные с осями координат (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, можно представить \vec{r} следующим образом:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}. \quad (1.1)$$

Для случая, изображенного на рис. 1.2, можно записать:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$$

Координатный способ. Положение материальной точки M задается с помощью координат x, y, z и записывается в виде: $M(x, y, z)$.

Замечание. Минимальное число независимых параметров, которое однозначно определяет положение физической системы в пространстве, называется числом ее степеней свободы. Таким образом, материальная точка имеет три степени свободы.

Линия, которую описывает движущаяся точка в пространстве, называется траекторией. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим равномерное движение точки по радиусу равномерно вращающегося диска от центра к краю (рис. 1.3). Относительно системы координат (X', Y', Z') , свя-

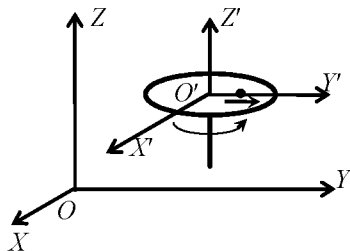


Рис. 1.3

занной с вращающимся диском, траектория точки будет прямой линией. Относительно системы координат (X, Y, Z) , связанной с Землей, траектория точки будет спиралью Архимеда.

В зависимости от вида траектории различают прямолинейное и криволинейное движения. Для описания движения материальной точки необходимо задавать кинематический закон движения – уравнение или систему уравнений, определяющих положение тела в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. В случае векторного способа задания положения точки в пространстве кинематический закон ее движения имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а при координатном способе он может быть записан в виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

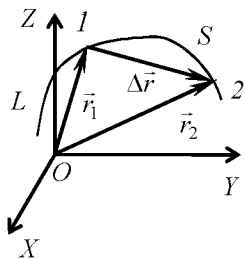


Рис. 1.4

Если из соотношений (1.2) исключить время t , то получим уравнение, которое будет описывать траекторию материальной точки.

Рассмотрим движение точки по траектории L (рис. 1.4). Пусть в момент времени t точка находилась в положении 1, определяемом радиусом-вектором \vec{r}_1 , а в момент времени $t + \Delta t$ в положении 2, определяемом радиусом-вектором \vec{r}_2 . Вектор, проведенный из начального положения точки в конечное, называется **вектором перемещения** $\Delta \vec{r}$. Как видно из рис. 1.4, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, т.е. вектор перемещения равен изменению (или приращению) радиуса-вектора. Расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль траектории, называется **путем** S .

При стремлении Δt к нулю конечное приращение радиуса-вектора $\Delta \vec{r}$ заменяется на бесконечно малое приращение радиуса-вектора $d\vec{r}$. При этом, направление вектора $d\vec{r}$ будет совпадать по направлению с единичным вектором $\vec{\tau}$, направленным по касательной к траектории в сторону движения точки.

Для определения быстроты изменения положения материальной точки в пространстве вводят понятие скорости. Рассмотрим отношение вектора перемещения $\Delta \vec{r}$ к времени перемещения Δt . Малому времени будет соответствовать элементарное перемещение $d\vec{r}$. Отношение элементарного перемещения к малому времени определяет производную (рис. 1.5). **Мгновенной скоростью** материальной точки называется производная ее радиуса-вектора по времени:

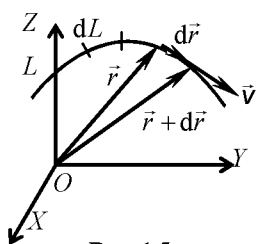


Рис. 1.5

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (1.3)$$

где точкой сверху будем обозначать производную по времени.

Направление вектора мгновенной скорости \vec{v} определяется направлением вектора перемещения $d\vec{r}$. С учетом выражения (1.1) вектор мгновенной скорости может быть представлен в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Таким образом, компоненты вектора скорости определяются как соответствующие производные:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (1.4)$$

Тогда модуль скорости может быть найден следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью, т.е. $|\vec{v}| = \text{const}$.

Определим путь, проходимый телом за время t при движении по произвольной траектории из положения 1 в положение 2 (рис. 1.6). Разобьем траекторию на такие малые участки (в дальнейшем называемые элементарными), чтобы можно было считать скорость на этих участках неизменной. Тогда длина траектории i -го участка (путь) будет выражаться формулой

$$\Delta L_i = v_i \Delta t_i,$$

где v_i – модуль скорости на i -м участке; Δt_i – время его прохождения.

Весь путь можно найти как сумму длин всех элементарных участков. При этом значение пути будет определено тем точнее, чем меньше рассматриваемые элементарные участки ΔL_i , т.е. чем меньше промежутки времени Δt_i :

$$\Delta L_i = v_i S = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \Delta L_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v_i \Delta t_i = \int_0^t |v(t)| dt. \quad (1.5)$$

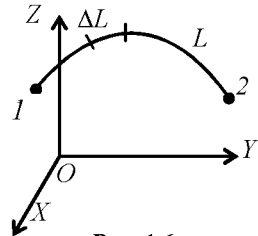


Рис. 1.6

Значение пути определяется площадью под графиком зависимости скорости от времени (геометрический смысл интеграла).

Важной векторной кинематической величиной является **ускорение** – производная мгновенной скорости по времени, которое характеризует быстроту изменения вектора скорости (как по величине, так и по направлению):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}; \quad \vec{a} \uparrow \uparrow d\vec{v}.$$

В проекциях на оси координат получим следующие выражения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.6)$$

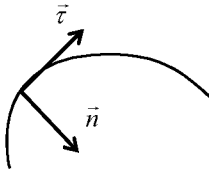


Рис. 1.7

В общем случае направление вектора ускорения тела неизвестно. Для его нахождения выберем в каждой точке траектории два единичных вектора, $\vec{\tau}$ и \vec{n} . Вектор $\vec{\tau}$ направим по касательной к траектории в сторону движения точки, а вектор \vec{n} – по нормали в сторону вогнутости траектории (рис. 1.7).

Проекция вектора \vec{a} на направление \vec{n} называется **нормальным** (центростремительным) **ускорением**, а на направление $\vec{\tau}$ **тангенциальным** (касательным) **ускорением**

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}, \quad (1.7)$$

где a_τ и a_n – модули тангенциального и нормального ускорений.

Выясним физический смысл этих ускорений. Для этого представим скорость следующим образом:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}.$$

Определим ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v. \quad (1.8)$$

Из сравнения первых слагаемых в формулах (1.7) и (1.8) видно, что

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости.

Найдем модуль и физический смысл второго слагаемого выражения (1.8).

Напомним, что скалярным произведением векторов называется скалярная величина, определяемая как произведение модулей векторов и косинуса угла между векторами. Поскольку

$(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1 = \text{const}$, то $\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = 0$. Производную по времени выражения

$(\vec{\tau}, \vec{\tau})$ можно найти следующим образом:

$$\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} \vec{\tau} = 2\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Поэтому $\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$, а следовательно

$\vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Итак, второе слагаемое выражения (1.8) – это вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}$, направленный по нормали к касательной, т.е. это – вектор нормального ускорения, характеризующий быстроту изменения направления вектора скорости.

Рассмотрим частный случай равномерного движения материальной точки по окружности радиуса R (рис. 1.8, а). Пусть за промежуток времени Δt точка, двигаясь из положения 1 в положение 2,

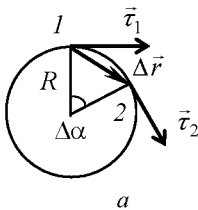
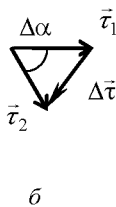


Рис. 1.8



совершила перемещение $\Delta \vec{r}$.

Вектор $\vec{\tau}$ за это время изменил направление, повернувшись вместе с точкой на угол $\Delta \alpha$. Изобразим вектор $\Delta \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$ (рис. 1.8, б). Из подобия равнобедренных треугольников следует

$$\frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\tau} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{R},$$

откуда $\Delta \tau = \frac{1}{R} \Delta r$. Устремим промежуток времени Δt к 0. Тогда

$\Delta \tau \rightarrow d\tau$, $\Delta r \rightarrow dr$, а поэтому $d\tau = \frac{1}{R} dr$. Разделив на dt , получаем

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{R} v.$$

Поэтому модуль второго слагаемого в (1.8)

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} v \right| = \frac{1}{R} v^2. \text{ Таким образом, получено, что } a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Если движение по окружности будет неравномерным, то

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.9)$$

В случае произвольной плоской траектории (рис. 1.9) в каждой ее точке можно провести так называемую соприкасающуюся окружность, которая достаточно хорошо в этом месте траектории совпадает с самой траекторией. Радиус этой окружности назовем радиусом кривизны траектории ρ . В этом случае нормальное ускорение запишется в виде

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

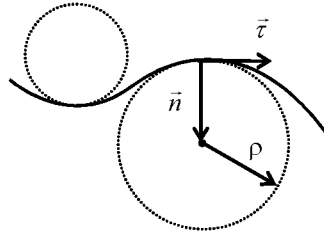


Рис. 1.9

Определим кинематический закон движения материальной точки в случае постоянного ускорения. Если вектор ускорения остается постоянным по модулю и направлению, то такое движение называется **равнопеременным**. Из определения ускорения следует $d\vec{v} = \vec{a} dt$. После интегрирования этого выражения получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t, \quad (1.10)$$

где \vec{v}_0 – начальная скорость в момент времени $t = 0$; \vec{v} – скорость в момент времени t .

Воспользуемся выражением (1.3), которое запишем в виде $d\vec{r} = \vec{v}dt$. После подстановки значения скорости из (1.10) и интегрирования при $\vec{a} = \text{const}$ получаем:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad (1.11)$$

где \vec{r}_0 – радиус-вектор, определяющий положение тела в момент времени $t = 0$.

Используя (1.2), запишем законы изменения координат тела:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}. \quad (1.12)$$

Поставим перед собой следующую задачу – выяснить законы преобразования скорости и ускорения при переходе к другой системе отсчета. Имеются две произвольные системы отсчета (X, Y, Z) и (X', Y', Z') , движущиеся относительно друг друга. Известны скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} некоторой точки M в системе отсчета (X, Y, Z) . Необходимо выяснить соответствующие значения скорости \vec{v}' и ускорения \vec{a}' этой точки в системе (X', Y', Z') .

В рамках классической механики длины пространственных и временных отрезков считаются абсолютными (одинаковы в различных системах отсчета). Свойство физических величин сохранять свои значения неизменными в разных системах отсчета называется инвариантностью, а сами такие величины – инвариантами.

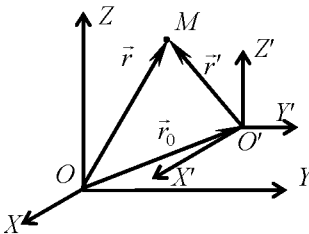


Рис. 1.10

Пусть положение точки M в системе (X, Y, Z) задается радиусом-вектором \vec{r} , а в системе (X', Y', Z') радиусом-вектором \vec{r}' (рис. 1.10). Будем считать систему (X, Y, Z) неподвижной (абсолютной), а систему (X', Y', Z') – движущейся относительно нее (относительной). Если положение движущейся системы относительно неподвижной

задается радиусом-вектором \vec{r}_0 , то

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Таким образом, преобразования координат и времени при переходе из одной системы отсчета в другую в классической механике описываются системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \\ z = z_0 + z', \\ t = t'. \end{cases} \quad (1.13)$$

Данная система уравнений носит название преобразований Галилея.

Если перемещение точки M за время dt происходит в неподвижной системе, то оно складывается из перемещения относительно движущейся системы $d\vec{r}'$ и перемещения самой движущейся системы $d\vec{r}'_0$:

$$d\vec{r} = d\vec{r}'_0 + d\vec{r}'.$$

Разделив последнее выражение на dt , получим формулу преобразования скорости

$$\vec{v} = \vec{v}'_0 + \vec{v}'. \quad (1.14)$$

Данное выражение называется **классическим законом сложения скоростей**. Если соотношение (1.14) продифференцировать по времени, то найдем формулу преобразования ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}'_0 + \vec{a}'. \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что из условия $\vec{a}'_0 = 0$ следует, что $\vec{a} = \vec{a}'$. Таким образом, при поступательном движении двух систем отсчета без ускорения друг относительно друга ускорения точки M в таких системах будут одинаковыми.

Рассмотрим пример решения задачи. Стальной шарик отпускают в поле тяжести на высоте $h = 3$ м от массивной стальной плиты, движущейся вверх со скоростью $v = 2$ м/с. Определите время τ между двумя последовательными абсолютно упругими ударами шарика о плиту.

Эту задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с движущейся плитой. В такой системе отсчета формулировка задачи будет иметь вид: «С высоты h со скоростью v , направленной вниз, на неподвижную плиту бросают шарик». Найдем скорость

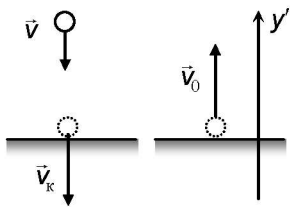


Рис. 1.11

v_k , с которой шарик подлетит к плите (рис. 1.11), по формуле $v_k^2 - v^2 = 2gh$, откуда $v_k = \sqrt{v^2 + 2gh}$. Скорость v_0 , с которой шарик отскочит от плиты, равна по модулю v_k , так как удар абсолютно

упругий. В момент $\frac{\tau}{2}$ после отскока скорость шарика обратится в 0 (время подъема равно времени спуска). Запишем это условие в проекции на ось y' : $v'_y = v_0 - g\frac{\tau}{2} = 0$. Следовательно, искомое

время получится таким: $\tau = \frac{2}{g}v_0 = 2\sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. На каких аксиомах и свойствах пространства основывается классическая механика?
2. В каких случаях модуль перемещения точки равен длине пути, пройденного точкой за тот же промежуток времени?
3. Как движется точка, если скорость этой точки все время перпендикулярна ее ускорению?
4. Что можно сказать о траектории точки, двигающейся по плоскости, если:
 - а) радиус-вектор частицы меняется только по модулю;
 - б) меняется только по направлению;
 - в) меняется только проекция на ось OX ?
5. Какой физический смысл тангенциального и нормального ускорений?
6. Нарисуйте векторы скорости и ускорения материальной точки для следующих типов движения:
 - а) прямолинейное ускоренное;
 - б) криволинейное ускоренное;
 - в) движение по окружности с постоянной по модулю скоростью.

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Законы механики в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различный вид, поэтому возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Опыт показывает, что причиной появления ускорения материальной точки могут быть как действия других тел на данную точку, так и свойства самой системы отсчета. Можно предположить, что существует такая система отсчета, в которой ускорение тела целиком обусловлено только его взаимодействием с другими телами. Свободная материальная точка, не подверженная действию других тел, движется относительно такой системы отсчета без ускорения, т.е. равномерно и прямолинейно (или покоится). Утверждение, что такие системы отсчета существуют, составляет содержание первого закона динамики – закона инерции.

Первый закон Ньютона – существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния. Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, также является инерциальной. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называют неинерциальными.

Для инерциальных систем отсчета справедлив принцип относительности Галилея, согласно которому все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Это означает, что никакими механическими опытами, проводимыми в данных системах, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется. Основные законы механики, которыми определяются изменения характера движения тел, во всех инерциальных системах отсчета одни и те же.

Изучая на опыте различные движения, можно обнаружить, что в инерциальных системах отсчета любое ускорение тела вызывается действием на него каких-либо других тел. Мера механического взаимодействия тел называется **силой**. Сила – векторная физическая величина, характеризующаяся модулем, направлением и точкой приложения к телу. Действие силы на тело выражается в сообщении телу ускорения и (или) деформации тела.

Опыт показывает, что любое тело «оказывает сопротивление» попыткам изменить его скорость – как по модулю, так и по направлению. Свойство материальных тел сохранять свою скорость неизменной при отсутствии действующих на тело сил, и постепенно изменять скорость, когда на тело начинают действовать силы, называется **инертностью**. Мера инертности тела называется **массой** тела. При действии одинаковых сил на два различных тела отношение масс тел обратно отношению ускорений, сообщаемых телам равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.1)$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна и та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнить массу любого тела с этим эталоном. В рамках классической механики масса обладает двумя важнейшими свойствами:

- 1) масса – величина аддитивная, т.е. масса тела равна сумме масс его частей;
- 2) масса – величина постоянная, не изменяющаяся при движении тела.

Второй закон Ньютона утверждает, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

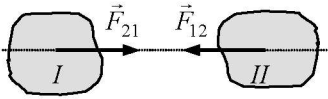


Рис. 2.1

Если рассматриваемое тело взаимодействует с несколькими телами, то суммарный результат действия отдельных тел можно представить как действие на данное тело векторной суммы сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}, \quad (2.2)$$

где \vec{F}_i – сила взаимодействия i -го тела с данным.

Единицей силы в СИ является ньютон (Н). 1 ньютон – это такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 .

Общее свойство всех сил взаимодействия постулируется **третьим законом Ньютона**: силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга в инерциальной системе отсчета, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, т.е.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (2.3)$$

Эти силы приложены к разным телам и являются силами одной природы.

Современный взгляд на природу возникновения сил устанавливает три типа взаимодействий: 1) гравитационное; 2) электрослабое (электромагнитное и слабое); 3) сильное (или ядерное).

Взаимодействие тел может происходить при «контактном» действии (силы трения, сила упругости, сила натяжения нити, реакция опоры, вес и т.д.) и при действии на расстоянии, посредством поля (сила тяжести, сила Кулона, сила Лоренца и т.д.).

Однако такое разделение сил имеет условный характер: и при непосредственном контакте силы взаимодействия обусловлены наличием тех или иных полей, создаваемых атомами или молекулами тел. Под **полем** мы будем понимать объективную реальность, посредством которой осуществляются взаимодействия.

Поле – форма существования материи, которая в отличие от вещества не локализовано в пространстве.

Рассмотрим некоторые виды сил, которые встретятся нам при изучении задач механики.

1. **Гравитационное взаимодействие** является универсальным взаимодействием между любыми видами материи. Если две материальные точки движутся со скоростями $v \ll c$, то справедлив **закон всемирного тяготения Ньютона**, согласно которому эти точки притягиваются друг к другу с силой, вычисляемой по формуле

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.4)$$

где r – расстояние между точками. Коэффициент пропорциональности G называется **гравитационной постоянной**, и был впервые экспериментально определен английским ученым Г. Кавендишем в 1798 г. По современным данным $G = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$. Фигурирующие в этом законе массы называют **гравитационными** в отличие от **инертной** массы, входящей во второй закон Ньютона. Из опыта установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела равны.

При рассмотрении движения тела массой m в поле тяготения Земли, если высота тела над поверхностью планеты меняется незначительно по сравнению с радиусом Земли, выражение для силы тяготения (2.3) удобно заменить на формулу **однородной силы тяжести**

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения тела в поле тяжести.

2. В механике вводится понятие **веса тела** \vec{P} – силы, с которой тело действует на опору (или подвес), неподвижную относительно данного тела.

3. Рассмотрим так называемое **внешнее трение**, которое обычно называют просто трением в отличие от внутреннего трения, о котором будет сказано в разделе «Молекулярная физика».

Внешнее трение – механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух прижатых друг к другу тел при их относительном перемещении или попытке к перемещению. В первом случае говорят о наличии **силы трения скольжения**, во втором – о наличии **силы трения покоя**. Направление силы трения противоположно относительному перемещению трущихся поверхностей или возможному перемещению.

Возникновение силы трения объясняется, во-первых, изменением поверхностного слоя (разрушением), а, во-вторых, преодолением молекулярных связей. В дальнейшем будем рассматривать силу трения скольжения, действующую на тело,двигающееся по шероховатой поверхности. Ее модуль определяется выражением

$$F_{\text{тр. ск}} = \mu N, \quad (2.5)$$

где N – модуль силы нормальной реакции, приложенной к телу со стороны опоры; μ – коэффициент трения.

Модуль силы трения покоя не превышает модуля силы трения скольжения и определяется внешней силой.

4. Свойство тел изменять свою форму и размеры под действием нагрузок и самопроизвольно восстанавливать исходную конфигурацию при снятии внешних воздействий называется **упругостью**. Упругость тел обусловлена электрическими силами взаимодействия атомов и молекул, из которых они построены. Упругие деформации (возникающие, например, при растяжении или сжатии пружин) подчиняются **закону Гука**, который гласит, что

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}, \quad (2.6)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; k – **коэффициент жесткости**, численно

равный модулю силы, вызывающей единичное удлинение.

Знак “–” в законе Гука показывает, что упругая сила и перемещение пружины (ее деформация) имеют противоположные направления. На рисунке 2.2 показаны направление силы упругости при одномерном растяжении пружины и зависимость проекции силы упругости на направление деформации пружины от деформации.

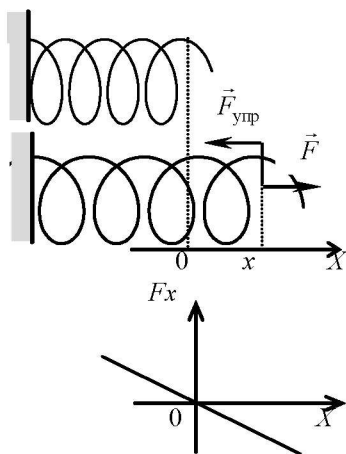


Рис. 2.2

Рассмотрим выражение второго закона Ньютона (2.2) для материальной точки, на которую действует несколько сил. Если учесть определение ускорения, то из формулы $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ можно получить, что

$$d(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.7)$$

Данное соотношение представляет собой иную форму записи второго закона Ньютона. В правой его части находится произведение суммы всех сил, действующих на материальную точку, на временной интервал их действия. Эта величина носит название импульса сил. В левой части (2.7) определяется изменение векторной физической величины, равной произведению массы тела на его скорость. Эта величина называется импульсом тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.8)$$

Таким образом, второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: изменение импульса материальной точки равно суммарному импульсу всех сил, к ней приложенных.

Рассмотрим теперь систему N материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_N , которые могут взаимодействовать друг с другом и с внешними телами, не входящими в данную систему (рис. 2.3). Положение каждой материальной точки в системе задается радиусом-вектором \vec{r}_i в выбранной системе отсчета. Пусть на i -ю точку со стороны k -й действует сила \vec{f}_{ik} . Тогда по третьему закону

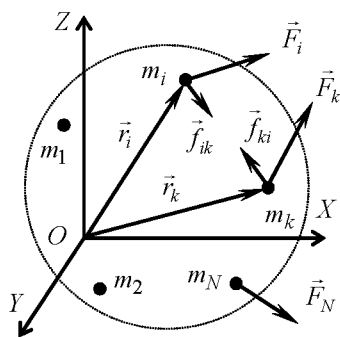


Рис. 2.3

Ньютона на k -ю точку со стороны i -й действует сила \vec{f}_{ki} , причем $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Силы, с которыми тела, входящие в рассматриваемую систему тел, взаимодействуют друг с другом называются внутренними силами. Силы, с которыми тела, не входящие в рассматриваемую систему тел, действуют на материальные точки

рассматриваемой системы называются внешними силами (на рис. 2.3 такие силы обозначены \vec{F}_i). В общем случае на любую материальную точку системы могут действовать как внутренние, так и внешние силы. Запишем второй закон Ньютона для каждой точки:

$$\begin{aligned}d\vec{p}_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{f}_{1N})dt, \\d\vec{p}_i &= (\vec{F}_i + \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i3} + \dots + \vec{f}_{iN})dt, \\d\vec{p}_N &= (\vec{F}_N + \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \dots + \vec{f}_{N,N-1})dt,\end{aligned}$$

где \vec{F}_i – равнодействующая всех внешних сил, действующих на i -ю точку.

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt,$$

причем во втором слагаемом правой части полученного выражения отсутствуют члены с индексами $i = k$. **Импульсом системы** материальных точек называется геометрическая сумма импульсов всех ее тел:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (2.9)$$

Тогда, поскольку $\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = d \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$, то

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} = 0$,

поэтому

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что импульс системы материальных точек могут изменить только внешние силы, если их геометрическая сумма не равна нулю. Система называется **изолированной**, если на

систему не действуют внешние силы, и замкнутой, если внешние силы, действующие на систему, скомпенсированы. Сформулируем закон сохранения импульса системы материальных точек: импульс изолированной или замкнутой системы материальных точек сохраняется:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}, \text{ или } \vec{p}_{1\text{сист}} = \vec{p}_{2\text{сист}}, \quad (2.11)$$

где $\vec{p}_{1\text{сист}}$ – импульс системы тел до начала рассматриваемого взаимодействия; $\vec{p}_{2\text{сист}}$ – импульс системы тел после окончания рассматриваемого взаимодействия.

Часто в задачах рассматривается случай, когда внешние силы не скомпенсированы, но сумма их проекций на какое-либо направление равна нулю. Такая система тел называется **условно замкнутой** в данном направлении и можно сказать, что проекция импульса системы на это направление не меняется. В некоторых задачах взаимодействие тел происходит за очень малое время (удар, взрыв), причем внешние силы малы. Тогда начальный импульс системы примерно равен конечному импульсу системы.

В любой системе тел имеется одна замечательная точка, называемая центром масс, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение центра масс относительно начала O координатной системы определяется радиусом-вектором \vec{r}_C :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (2.12)$$

где m_i и \vec{r}_i – масса и радиус-вектор i -й материальной точки; M – масса всей системы тел.

Центр масс системы совпадает с ее центром тяжести (точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на все части системы, которая не изменяет своего положения при любых поворотах системы), если поле сил тяжести в пределах данной системы тел можно считать однородным.

Найдем скорость центра масс, продифференцировав (2.12) по времени:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i.$$

Если скорость центра масс равна нулю, то говорят, что система в целом покоится. Сама же скорость центра масс имеет смысл скорости движения всей системы как целого. Из последней формулы следует, что

$$\vec{P}_{\text{сист}} = M \vec{v}_C, \quad (2.13)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Понятие центра масс позволяет придать уравнению (2.10) иную форму, которая часто бывает более удобной. Для этого достаточно подставить (2.13) в (2.10) и учесть, что масса системы тел – постоянная величина. Тогда получим

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (2.14)$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Выражение (2.14) называется уравнением движения центра масс системы тел. Согласно этому уравнению центр масс любой системы тел движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке, и к ней были бы приложены все внешние силы системы.

Из (2.14) следует, что если $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$, а значит, что $\vec{v}_C = \text{const}$. Кроме того, в этом случае и импульс системы $\vec{P}_{\text{сист}} = \text{const}$.

Таким образом, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, то импульс системы сохраняется в процессе движения. Справедливо и обратное утверждение.

Уравнение (2.14) является обобщением основного уравнения динамики материальной точки на систему частиц: ускорение системы как целого пропорционально результирующей всех внешних сил и обратно пропорционально суммарной массе системы.

Ранее мы говорили, что основное уравнение динамики (2.2) справедливо только в инерциальных системах отсчета. Между тем имеется много случаев, когда решение интересующей задачи

необходимо получить в неинерциальных системах (например, движение математического маятника в ускоренно движущемся лифте).

Рассмотрим случай, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с постоянным ускорением \vec{a}_0 . Воспользуемся формулой преобразования ускорений (1.15), в соответствии с которой $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$, где \vec{a}' – ускорение точки в неинерциальной системе, \vec{a} – ускорение той же точки в инерциальной системе. Умножив это выражение на массу тела, и воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим формулу, описывающую движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (2.15)$$

Это и есть основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета. Из него видно, что даже при $\vec{F} = 0$ тело будет двигаться в этой системе с ускорением, в общем случае отличным от нуля. При этом на тело в неинерциальной системе отсчета как бы действует сила

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0, \quad (2.16)$$

называемая **силой инерции**. Направление силы инерции противоположно направлению \vec{a}_0 .

Поскольку сила инерции не является мерой взаимодействия тел, то понятие «сила инерции» не попадает под определение понятия «сила». Уравнение (2.15) показывает, что введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики и для неинерциальных систем: слева – произведение массы тела на его ускорение (но уже в неинерциальной системе отсчета), справа – сумма сил. Отметим основные особенности сил инерции.

1. Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется.

2. Эти силы существуют только в неинерциальных системах отсчета.

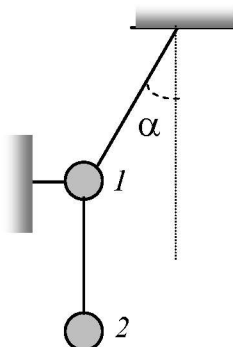


Рис. 2.4

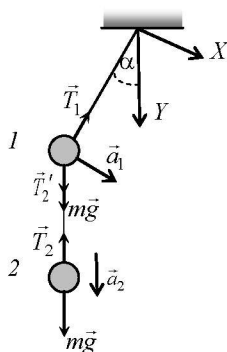


Рис. 2.5

3. Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в однородном поле сил инерции, как и в поле тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

Рассмотрим пример решения задачи.

Два одинаковых груза с помощью идеальных нитей удерживаются в положении, показанном на рис. 2.4. Найдите ускорения грузов сразу после пережигания горизонтальной нити. Угол α известен.

Покажем систему сразу после пережигания нити на рис. 2.5. Начальные скорости тел равны 0, поэтому нормальное ускорение груза 1 равно 0. Следовательно, ускорение этого груза направлено по касательной к траектории его дальнейшего движения, т.е. перпендикулярно силе \vec{T}_1 . На груз 2 действуют вертикально направленные силы, поэтому его ускорение направлено вертикально вниз. Таким образом, выберем оси X и Y вдоль направлений ускорений \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .

Векторные уравнения второго закона Ньютона для каждого груза: $m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}'_2$ и $m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}'_2$. Проекция этих уравнений на выбранные оси имеют вид: $ma_1 = (mg + T'_2)\sin \alpha$, $ma_2 = mg - T'_2$. Если считать нить невесомой, то $T'_2 = T_2$. Кроме того, если нити нерастяжимы, то проекции ускорений крайних точек нити на ось Y связаны соотношением: $a_1 \sin \alpha = a_2$.

Совместное решение всех составленных уравнений дает

$$a_1 = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} g, \quad a_2 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} g.$$

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается принцип относительности Галилея?
2. Сформулируйте уравнения движения центра масс системы тел.
3. На полу лифта лежит тело массой m . Чему равен вес тела:
 - а) при равномерном движении лифта вниз;
 - б) при свободном падении лифта;
 - в) при подъеме лифта вверх с ускорением?
4. В чем состоит закон изменения импульса механической системы?
5. При каких условиях импульс системы не меняется?
6. Брусok массой m неподвижно лежит на горизонтальной плоскости. Определите минимальную силу, которая необходима для того, чтобы сдвинуть брусok с места при помощи идеальной нити, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ .

3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ В МЕХАНИКЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Понятие энергии является одним из основных понятий в физике. В этом смысле понятие энергии относится к числу первичных понятий физики. Можно сказать, что энергия – это **общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи**. Различным формам движения материи соответствуют и различные виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и т.д. Фундаментальным законом природы является **общефизический закон сохранения энергии**: в изолированной системе энергия может переходить из одной формы в другую, но ее количество остается постоянным.

Этот закон относится к числу строгих законов (применимых как в макромире, так и в микромире), не имеющих в настоящее время никаких отступлений. Окончательно закон был сформулирован в середине XIX в. в трудах выдающихся ученых Р. Майера, Д. Джоуля и Г. Гельмгольца.

В курсе механики нас будет интересовать **механическая энергия** тела $W_{\text{мех}}$, которая определяется как сумма потенциальной $W_{\text{п}}$ и кинетической $W_{\text{к}}$ энергий:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{к}}. \quad (3.1)$$

Механическая энергия системы может меняться под действием сил, действующих как внутри системы, так и на нее. Для количественного описания изменения механической энергии вводится понятие работы силы. Энергия характеризует состояние системы, а работа – количественная характеристика преобразования энергии в физических процессах.

Рассмотрим прямолинейное движение тела из положения 1 в положение 2 под действием постоянной силы \vec{F} (рис. 3.1). Если тело совершило перемещение $\Delta\vec{r}$, то **механической работой постоянной силы** называется скалярное произведение силы на вектор перемещения:

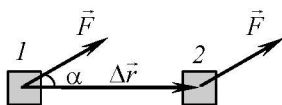


Рис. 3.1

$$A(F) = (\vec{F} \Delta\vec{r}) = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Если известны проекции векторов \vec{F} и $\Delta\vec{r}$, то (3.2) можно переписать в виде

$$A(F) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$

Рассмотрим теперь перемещение тела вдоль произвольной траектории, если к телу приложена сила \vec{F} , изменяющаяся во времени (рис. 3.2). Разобьем траекторию на такие малые участки, чтобы на каждом участке силу можно было считать постоянной. Тогда на i -м участке малая работа силы \vec{F}_i (обозначим ее δA_i) может быть вычислена по формуле

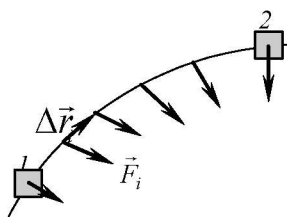


Рис. 3.2

быть вычислена по формуле $\delta A_i = (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i)$. Вся работа силы по перемещению тела из положения 1 в положение 2 будет равна сумме работ на отдельных участках: $A = \sum_i \delta A_i = \sum_i (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i)$.

Совпадение вычисленного результата с истинным будет тем более полным, чем меньшие векторы $\Delta\vec{r}_i$ будем рассматривать. Поэтому определение **механической работы произвольной силы** при движении тела можно представить следующим образом:

$$A = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i (\vec{F}_i \Delta \vec{r}_i) = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (3.3)$$

Такой интеграл носит название **криволинейного интеграла** вдоль траектории. Если выбрана система координат, и начальному 1 и конечному 2 положениям тела соответствуют радиусы-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , то можно записать, что

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

Единицей измерения работы в СИ является джоуль (Дж). Джоуль – это работа, совершаемая силой 1 Н по перемещению тела на 1 м в направлении действия силы. Работа – величина алгебраическая, ее знак определяется знаком косинуса угла между направлением силы и направлением перемещения тела.

Пусть на материальную точку действуют несколько сил \vec{F}_i , где $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда равнодействующая \vec{R} этих сил определяется как $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$. Умножим это равенство скалярно на $d\vec{r}$:

$(\vec{R} d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i d\vec{r})$. Если точка перемещается из положения, определенного радиусом-вектором \vec{r}_1 , в положение, определенное радиусом-вектором \vec{r}_2 , то полученное соотношение можно проинтегрировать в пределах:

$$\int_{r_1}^{r_2} (\vec{R} d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}_i d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i).$$

Это выражение доказывает следующую теорему: **работа равнодействующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой из сил в отдельности.**

Силовым полем называется часть пространства (ограниченная или неограниченная), в каждой точке которой на помещенное туда материальное тело действует сила, модуль и направление которой зависят либо только от координат этого тела, либо от координат и времени. В первом случае силовое поле называется **стационарным**, во втором – **нестационарным**. Если же сила во всех точках силового поля имеет одно и то же значение и направление, то силовое поле называется **однородным**.

Существует особый класс полей, называемых **потенциальными**. Сила поля, действующая на тело, называется потенциальной, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения тела.

Пусть материальная точка перемещается в потенциальном поле из положения 1 в положение 2 (рис. 3.3). Работа силы поля \vec{F} на траектории “a” равна работе силы поля \vec{F} на траектории “b” по определению: $A_{1-a-2}(F) = A_{1-b-2}(F)$.

Но, поскольку $\cos\alpha = -\cos\beta$, то $A_{1-b-2}(F) = -A_{2-b-1}(F)$. Тогда не-

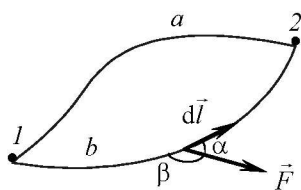


Рис. 3.3

трудно получить, что $A_{1-a-2}(F) + A_{2-b-1}(F) = 0$,

т.е. $A_{1-a-2-b-1}(F) = 0$. Таким образом, работа

потенциальной силы по замкнутой траектории $1-a-2-b-1$ равна нулю. Так как траектории “a” и “b” были произвольными, то можно сказать, что **работа**

потенциальной силы на любой замкнутой траектории L всегда равна нулю. Эту фразу можно коротко записать следующим образом:

$$\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = 0. \quad (3.4)$$

Такой интеграл носит название **циркуляции** вектора \vec{F} по замкнутому контуру L , а полученное выражение дает критерий потенциальности поля сил.

Существует особый класс сил, линия действия которых проходит всегда через одну и ту же точку (**центр**), а модуль этих сил зависит только от расстояния до этой точки. Такие силы называются **центральными**. Примеры таких сил – сила тяжести, кулоновская, сила упругости и др. Центральные силы являются потенциальными.

Пусть материальная точка движется из положения 1, где она имела скорость \vec{v}_1 , в положение 2, где скорость стала равной \vec{v}_2 . Обозначим равнодействующую всех сил, приложенных к точке, через \vec{R} , и найдем ее работу по перемещению тела. Учтем соотношение (2.10) и получим

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{R} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_1^2 d\vec{p} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 \vec{v} d\vec{p}.$$

Поскольку скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату модуля этого вектора: $\vec{v}\vec{v} = v^2$, то

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{v} d(m\vec{v}) = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.5)$$

В приведенном выводе рассмотрен нерелятивистский случай движения ($v \ll c$), поэтому $m = \text{const}$.

Величина $\frac{mv^2}{2}$ называется **кинетической энергией** W_k материальной точки. Так как работа равнодействующей силы равна сумме работ сил, то можно записать, что

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i). \quad (3.6)$$

Таким образом, доказана **теорема об изменении кинетической энергии**: изменение кинетической энергии материальной точки равно алгебраической сумме работ всех приложенных к ней сил.

Рассмотрим теперь систему материальных точек. Кинетической энергией системы тел называется сумма кинетических энер-

гий всех тел, входящих в эту систему. Запишем теорему об изменении кинетической энергии для каждой точки, входящей в эту систему. Тогда для j -й точки получаем уравнение

$$\Delta W_{kj} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_{ij}) + \sum_{i=1}^N A(\vec{f}_{ij}),$$

в котором \vec{F} – внешние силы, действующие на эту точку, а \vec{f}_i – внутренние силы. Сложив все уравнения, получим

$$\Delta W_{\text{к. сист}} = \sum A(\vec{F}) + \sum A(\vec{f}). \quad (3.7)$$

Изменение кинетической энергии системы материальных точек определяется работой как внутренних, так и внешних сил. Напомним, что изменение импульса системы материальных точек определяется импульсом только внешних сил.

Если система материальных точек под действием потенциальных сил перешла из одного состояния в другое, то потенциальные силы совершили работу, которая не зависит от того, каким образом осуществилось изменение состояния системы. Работа потенциальных сил зависит только от начального и конечного состояний системы. Поэтому эту работу можно взять в качестве характеристики изменения состояния системы тел.

Введем **потенциальную энергию** системы тел $W_{\text{п}}$, которая связана с работой потенциальных сил по следующему правилу:

$$W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}), \quad (3.8)$$

где $W_{\text{п1}}$ – потенциальная энергия системы тел в состоянии 1; $W_{\text{п2}}$ – потенциальная энергия системы тел в состоянии 2; $A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}})$ – работа потенциальных сил взаимодействия при переходе системы из состояния 1 в состояние 2. Это правило можно переписать в виде:

$$\Delta W_{\text{п}} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}) \text{ или } dW_{\text{п}} = -\delta A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}).$$

Из последнего выражения видно, что работа потенциальных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии системы. **Изменение потенциальной энергии системы тел, между которыми действуют потенциальные силы, равно взятой с обратным знаком работе этих сил при переходе системы из одного состояния в другое.**

Физический смысл имеет только изменение потенциальной энергии, однако часто говорят о потенциальной энергии системы в данном состоянии. В этом случае потенциальная энергия в одном из состояний условно принимается за нуль (нулевой потенциальный уровень). Пусть $W_{п1} = 0$, тогда $W_{п2} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{п}) = = A_{2 \rightarrow 1}(f_{п})$. Таким образом можно сказать, что потенциальная энергия системы в некотором состоянии равна работе потенциальных сил при переходе системы из этого состояния в состояние, в котором значение потенциальной энергии условно принято за нулевое.

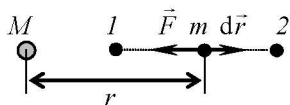


Рис. 3.4

В качестве примера рассмотрим изменение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами M и m при удалении их друг от друга (рис. 3.4).

Допустим, что тело массой M создает гравитационное поле, а тело массой m перемещается в этом поле из точки 1 в точку 2, которые находятся на расстояниях r_1 и r_2 соответственно от массы, создающей поле. Поскольку гравитационная сила – центральная, то перемещение массы m может осуществляться по любой траектории. Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории движения тела, а рассчитывать ее удобнее при прямолинейном движении. На малом перемещении $d\vec{r}$ элементарная работа

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \pi = -F dr .$$

Тогда изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{п} = -\int_1^2 \delta A = \int_1^2 F dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

Рассмотрим на данном примере выбор нулевого уровня потенциальной энергии.

1 способ. В физике часто встречаются силы, модуль которых с увеличением расстояния между взаимодействующими телами уменьшается и при $r \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремится к нулю. К таким силам относится сила гравитационного взаимодействия. В таких задачах обычно потенциальную энергию принимают равной нулю «на бесконечности», т.е. в положении системы,

когда тела удалены друг от друга бесконечно далеко. Пусть в рассматриваемом примере точка 2 находится «на бесконечности», тогда $W_{п2} = 0$. В этом случае получим

$$W_{п1} = -\frac{GMm}{r_1}, \text{ или } W_{п} = -\frac{GMm}{r}.$$

Этой зависимости потенциальной энергии гравитационного взаимодействия материальной точки m , находящейся на произвольном расстоянии r от массы M , соответствует график, показанный на рис. 3.5, *а*.

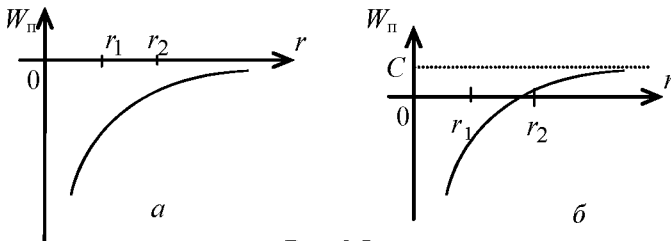


Рис. 3.5

2 способ. Примем теперь потенциальную энергию системы равной нулю во втором положении системы, т.е. при $r = r_2$. Тогда

$$W_{п1} = -\frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{r_2}, \text{ причем второе слагаемое в этой формуле –}$$

некоторая постоянная величина: $\frac{GMm}{r_2} = C$. Потенциальная энер-

гия гравитационного взаимодействия на произвольном расстоянии r между телами может быть представлена в виде

$$W_{п} = -\frac{GMm}{r} + C. \text{ График, соответствующий этой зависимости,}$$

представлен на рис. 3.5, *б*.

Из последней формулы видно, что потенциальная энергия определена с точностью до некоторой постоянной величины, значение которой зависит от выбора нулевого потенциального уровня. Этот выбор в каждой конкретной задаче осуществляется индивидуально.

В качестве еще одного примера рассмотрим гравитационное поле Земли, радиус которой R , а масса M . Можно показать, что если расстояние до центра Земли $r > R$, то гравитационное поле, создаваемое Землей такое же, как если бы вся масса Земли была бы сосредоточена в ее центре. Пусть тело массы m перемещается из точки 1, находящейся на расстоянии $r_1 = R$ от центра Земли в точку 2, находящуюся на высоте h над поверхностью планеты ($r_2 = R + h$). Найдем изменение его потенциальной энергии. Выберем нулевой потенциальный уровень на поверхности Земли в точке 1. Тогда $W_{п1} = 0$. Следовательно, $W_{п2} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$.

Если $h \ll R$, то $W_{п2} = \frac{GMmh}{R^2}$, а так как $g = \frac{GM}{R^2}$, то $W_{п2} = mgh$.

Ранее была получена интегральная связь между изменением потенциальной энергии и потенциальной силой:

$$\Delta W_{п} = - \int_1^2 \vec{F}_{пот} d\vec{r}.$$

Решим обратную задачу: зная значение потенциальной энергии (по отношению к заранее выбранному нулевому уровню), которой обладает материальная точка, помещенная в силовое потенциальное поле, найдем величину потенциальной силы. Рассмотрим бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$. Изменение потенциальной энергии на этом перемещении будет

$$dW_{п} = -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Пусть перемещение тела происходит только вдоль оси Ox так, что $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Тогда $F_x = -\frac{dW_{п}}{dx}$. Производная функции, когда при дифференцировании по одной из переменных (в нашем случае по x) остальные переменные считаются постоянными,

ными, называется **частной производной** и обозначается $\frac{\partial}{\partial x}$. Та-

ким образом, $F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}$. Аналогично, $F_y = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}$ и $F_z = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}$.

Тогда вектор силы можно представить следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\left(\vec{i}\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}\right) = -\text{grad}W_{\text{п}}. \quad (3.9)$$

Вектор, компоненты которого равны соответствующим частным производным скалярной величины по координатам, носит название **градиента скалярной функции** (обозначается символом grad) и направлен в сторону максимального возрастания функции $W_{\text{п}}$.

Рассмотрим систему материальных точек, между которыми могут действовать как потенциальные, так и непотенциальные силы. Эти силы могут быть как внешними (обозначим их \vec{F}), так и внутренними (обозначим их \vec{f}). Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для системы материальных точек (3.6):

$$\Delta W_{\text{к}} = A(\vec{f}_{\text{пот}}) + A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{пот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}),$$

где $\Delta W_{\text{к}}$ – изменение кинетической энергии рассматриваемой системы; $A(\vec{f}_{\text{пот}})$ – сумма работ всех внутренних потенциальных сил; $A(\vec{f}_{\text{непот}})$ – сумма работ всех внутренних непотенциальных сил; $A(\vec{F}_{\text{пот}})$ – сумма работ всех внешних потенциальных сил; $A(\vec{F}_{\text{непот}})$ – сумма работ всех внешних непотенциальных сил.

Перепишем равенство следующим образом:

$$\Delta W_{\text{к}} + [-A(\vec{f}_{\text{пот}})] + [-A(\vec{F}_{\text{пот}})] = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}).$$

Слагаемые $[-A(\vec{f}_{\text{пот}})]$ и $[-A(\vec{F}_{\text{пот}})]$ представляют собой изменение потенциальной энергии взаимодействия тел системы за счет работы внутренних и внешних потенциальных сил. Тогда теорему об изменении кинетической энергии можно записать следующим образом:

$$\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}).$$

Поскольку сумма кинетической и потенциальной энергии называется механической энергией, то окончательно можно сформулировать равенство:

$$\Delta W_{\text{мех}} = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}). \quad (3.10)$$

Таким образом, изменение механической энергии системы материальных точек равно сумме работ внутренних и внешних непотенциальных сил. Выражение (3.10) является математической записью закона изменения механической энергии.

Закон сохранения механической энергии утверждает, что если работа внутренних и внешних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы не меняется.

Рассмотрим пример решения задачи. Брусок массой M покоится на идеально гладком столе. Частица массой m налетает на брусок со скоростью v , образуя угол α с поверхностью бруска. С какой скоростью u частица отскочит от бруска после абсолютно упругого удара? Поверхность бруска идеально гладкая.

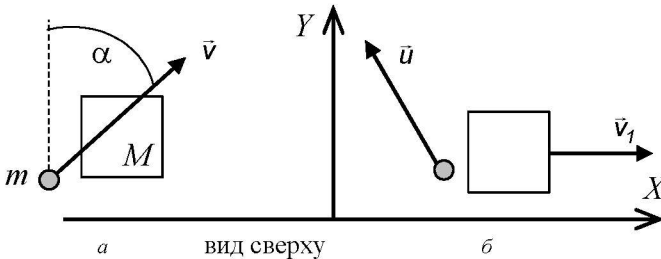


Рис. 3.6

На виде сверху (рис. 3.6) показаны положения системы тел до и после удара. По условию задачи эта система тел замкнута и консервативна. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси OX и OY и закон сохранения энергии: $p_{1x} = p_{2x}$, $p_{1y} = p_{2y}$, $W_1 = W_2$. Эти соотношения имеют вид:

$$mvsin\alpha = mu_x + Mv_1, \quad mv\cos\alpha = mu_y, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2}.$$

Из этих уравнений получаем ответ:

$$u = \sqrt{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Каков смысл понятия «механическая работа»?
2. Как классифицируются силы по характеру и значению совершаемой ими работы?
3. Можно ли найти силу, действующую на тело в какой-либо точке траектории, если известно значение потенциальной энергии тела в этой точке?
4. Какую работу над окружающими телами совершит материальная точка массой m , движущаяся со скоростью v в некоторой системе отсчета, если она остановится в этой системе отсчета?
5. При каких условиях сохраняется механическая энергия системы?
6. Первоначально покоившееся на горке тело массой m очень медленно сползает с высоты h на горизонтальную поверхность. Определите работу, которую должна совершить внешняя сила, чтобы медленно втащить тело на горку на прежнее место.

4. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращательным движением абсолютно твердого тела называется такое, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

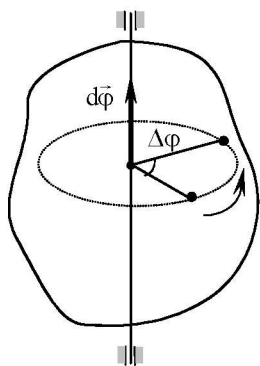


Рис. 4.1

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 4.1). За бесконечно малый промежуток времени dt все точки тела повернутся на бесконечно малый угол $d\varphi$. Будем считать **угол поворота** вектором, который направлен по оси вращения тела в сторону, определяемую правилом правого винта (правилом буравчика). Согласно этому правилу, если правый винт вращать по направлению враще-

ния твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью вращения тела, то направление поступательного движения винта дает направление вектора угла поворота тела $d\vec{\varphi}$.

Рассмотрим поворот тела на малый угол $d\vec{\varphi}$ за время dt . **Угловой скоростью** тела называется производная угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (4.1)$$

причем направление вектора $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, т.е. также определяется по правилу правого винта. Размерность угловой скорости $[\omega] = \text{рад/с}$. Вращение называется **равномерным**, если модуль угловой скорости при вращении тела остается постоянным. В этом случае $\varphi = \omega t$.

В качестве характеристик равномерного вращения используют такие: период (T) – время, за которое тело совершает один оборот; частота (ν) – число оборотов за единицу времени. Между этими величинами существует очевидная связь: $\nu = \frac{1}{T}$.

При **неравномерном** вращении тела вводится **угловое ускорение** – производная угловой скорости по времени. Это – векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Сравним угловые скорости $\vec{\omega}_1$ в момент времени t и $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + d\vec{\omega}$ в момент времени $t+dt$. Из рисунка 1.12 видно, что векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены при ускоренном (рис. 4.2, а) и противоположны при замедленном вращении тела (рис. 4.2, б). Таким образом, направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется направлением вектора приращения угловой скорости $d\vec{\omega}$.

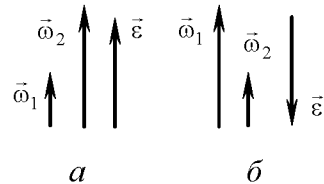


Рис. 4.2

Если модуль углового ускорения сохраняет постоянное значение, то **вращение** называется **равнопеременным**. В этом случае кинематический закон вращения запишем в виде

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\epsilon}t, \\ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\epsilon}t^2}{2}, \end{cases}$$

где $\vec{\omega}_0$ и $\vec{\varphi}_0$ – начальные угловая скорость и угол поворота.

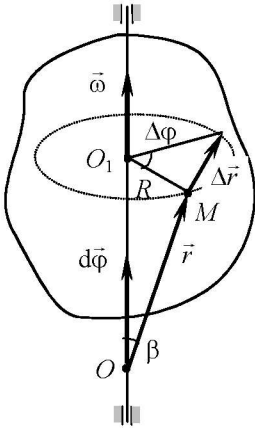


Рис. 4.3

Если твердое тело вращается относительно оси, то каждая точка тела имеет определенную линейную скорость \vec{v} . Найдем связь между \vec{v} и $\vec{\omega}$. Пусть твердое тело повернулось на угол $d\vec{\varphi}$ (рис. 4.3). Тогда произвольная точка тела M совершила перемещение $d\vec{r}$. Напомним, что вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки M и при малом $d\vec{\varphi}$ направление $\Delta\vec{r}$ стремится к направлению $d\vec{r}$.

Выберем на оси вращения произвольную точку O , называемую **полюсом**, и поместим в нее начало координат. Положение точки M задается радиусом-вектором \vec{r} , который в общем случае составляет с осью вращения угол β . Отметим, что

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (4.2)$$

Действительно, векторы $d\vec{r}$, $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} подчиняются правилу правого винта. Найдем модуль векторного произведения:

$$d r = R d \varphi = r \sin \beta d \varphi,$$

где R – радиус окружности, по которой движется точка M .

Если продифференцировать по времени обе части равенства (4.2), то с учетом (1.3) и (4.1) можно получить

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (4.3)$$

Заметим, что выбор полюса O может быть произвольным (положение точки O никак не влияет на вывод формулы). Если в качестве полюса выбрать точку O_1 , то из (4.3) следует, что

$$v = \omega R.$$

Последнее равенство связывает модули угловой и линейной скоростей точки твердого тела с радиусом окружности, по которой движется рассматриваемая точка.

Найдем ускорение точки M , для чего продифференцируем выражение (4.3) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в (4.4) – это вектор, направленный по касательной к траектории точки M , т.е. тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (4.5)$$

его модуль $a_\tau = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon R$.

Второе слагаемое в (4.4) – это вектор, направленный к центру окружности, по которой движется точка M , т.е. нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = a_n \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (4.6)$$

его модуль $a_n = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$.

Рассмотрим вращение материальной точки массой m вокруг некоторой оси по окружности радиусом R под действием силы \vec{F} (рис. 4.4). Положение точки определяется радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из произвольного полюса O , лежащего на оси вращения.

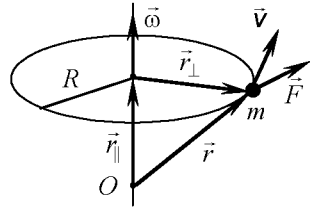


Рис. 4.4

Запишем для данной точки выражение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на \vec{r} :

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.7)$$

Левую часть полученного выражения можно представить в виде

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

Векторное произведение радиуса-вектора материальной точки, проведенного из полюса, на импульс этой точки называется моментом импульса материальной точки относительно полюса:

$$\vec{l}_O = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (4.8)$$

Таким образом, левая часть выражения (4.7) определяет скорость изменения момента импульса материальной точки относительно полюса.

Момент импульса материальной точки относительно полюса может быть представлен как сумма двух составляющих (параллельной $\vec{l}_{O\parallel}$ и перпендикулярной $\vec{l}_{O\perp}$ оси вращения):

$$\vec{l}_O = \vec{l}_{O\parallel} + \vec{l}_{O\perp} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega} - mr_{\parallel} \vec{\omega} \vec{r}_{\perp}. \quad (4.9)$$

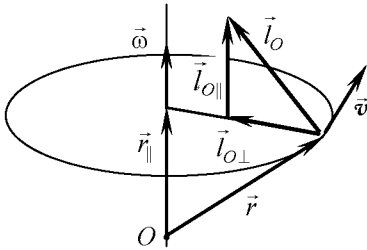


Рис. 4.5

Последнее равенство проиллюстрировано на рис. 4.5. Размерность момента импульса в СИ: $[l_O] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Вернемся к выражению (4.7) и рассмотрим его правую часть. **Векторное произведение радиуса-вектора точки, проведенного из полюса, на вектор**

силы называется моментом силы относительно полюса, которое обозначается \vec{M}_O :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.10)$$

Модуль момента силы (рис. 4.6)

$M_O = rF \sin \alpha = Fh$, где $h = r \sin \alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы – называется **плечом силы**. Рассмотрим основные свойства вектора \vec{M}_O .

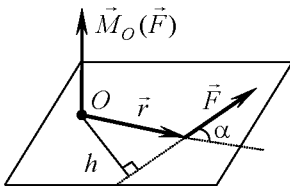


Рис. 4.6

1. Момент силы относительно полюса не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, поскольку при этом не меняется плечо силы.

2. Момент равнодействующей нескольких сил равен сумме моментов каждой силы относительно полюса. Действительно, согласно свойству дистрибутивности векторного произведения

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}.$$

Таким образом, выражение (4.7) может быть записано в виде

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}, \quad (4.11)$$

т.е. скорость изменения момента импульса материальной точки равна суммарному моменту сил, действующих на нее. Соотношение (4.11) называется **основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки или уравнением моментов**.

Составим для системы материальных точек основное уравнение динамики вращения вокруг общей оси. Запишем для каждой точки системы соотношение (4.8):

$$\frac{d\vec{l}_{O_i}}{dt} = [\vec{r}_i, \vec{R}_i], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где \vec{l}_{O_i} – момент импульса i -й точки; \vec{r}_i – ее радиус-вектор; \vec{R}_i – равнодействующая всех сил на i -ю точку; N – число точек системы.

Просуммируем все составленные уравнения. Тогда левая часть полученной суммы будет выражена в виде

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Моментом импульса системы точек относительно полюса называется векторная сумма моментов импульсов каждой материальной точки системы относительно этого полюса:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{O_i} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (4.12)$$

Тогда

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{R}_i]. \quad (4.13)$$

Равнодействующая всех сил, действующих на i -ю точку системы, определяется векторной суммой внешних \vec{F}_i и внутренних \vec{f}_{ik} сил:

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik}.$$

Поэтому (4.10) перепишем в виде

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i, \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right].$$

Второе слагаемое в последнем уравнении определяет суммарный момент внутренних сил системы, который, исходя из третьего закона Ньютона, равен нулю.

Таким образом, получили следующее выражение:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M}_{O \text{ внеш}}. \quad (4.14)$$

Данное уравнение называется **основным уравнением динамики вращательного движения системы материальных точек** или **уравнением моментов**: скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна суммарному моменту внешних сил, действующих на нее.

Из выражения (4.14) следует, что **если суммарный момент внешних сил, действующих на систему точек, равен нулю, то момент импульса такой системы остается постоянным**. Это – **закон сохранения момента импульса системы материальных точек**. Изменить момент импульса системы могут не внешние силы, а их момент. Вспомним, что отсутствие внешних сил, действующих на систему, приводит к постоянству ее импульса (2.10).

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг оси OZ (рис. 4.5). Выбрав произвольный полюс на этой оси (точка O), найдем вектор \vec{l}_O – момент импульса данной точки относительно этого полюса. **Моментом импульса точки относительно оси**

называется скалярная величина l_z – проекция на данную ось момента импульса точки относительно произвольного полюса, принадлежащего этой оси:

$$l_z = \text{Pr}_{Oz} \vec{l}_O. \quad (4.15)$$

Ранее (4.9) мы показали, что $\vec{l}_{O||} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$. Поэтому

$$l_z = mr_{\perp}^2 \omega_z. \quad (4.16)$$

Подставив это в (4.11), получим

$$\frac{dl_z}{dt} = mr_{\perp}^2 \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.17)$$

Вспомним определение углового ускорения и перепишем (4.17) в виде:

$$mr_{\perp}^2 \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}, \text{ или } \varepsilon_z = \frac{\sum_{i=1}^N M_{zi}}{mr_{\perp}^2}.$$

Проекция углового ускорения материальной точки на ось вращения пропорциональна проекции на эту ось суммы моментов сил, действующих на точку. Коэффициентом пропорциональности в этом соотношении выступает величина mr_{\perp}^2 . Произведение массы материальной точки на квадрат расстояния точки до оси вращения называется **моментом инерции материальной точки относительно оси**:

$$I_z = mr_{\perp}^2, \quad (4.18)$$

где индекс “z” указывает на выбранную ось. Момент инерции – скалярная величина, его размерность в СИ $[I_z] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Теперь можно записать (4.17) в виде

$$I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.19)$$

Это иная форма записи **основного уравнения динамики вращательного движения** материальной точки (4.11) в скалярном виде. Из этого соотношения следует физический смысл момента инерции. Момент инерции – **мера инертности материальной точки во вращательном движении**, он определяет момент сил, который должен быть приложен к телу для придания ему

определенного углового ускорения. Вспомним, что при рассмотрении поступательного движения мерой инертности тела выступает масса тела.

Введение понятия момента инерции позволяет (4.16) записать таким образом: $l_z = I_z \omega_z$. Сопоставив это выражение с определением импульса материальной точки, можно также рассмотреть аналогию понятий: импульс – момент импульса, масса – момент инерции, скорость – угловая скорость.

Поскольку твердое тело представляет собой совокупность материальных точек, то при его вращении вокруг какой-либо оси для каждой точки тела можно записать:

$$l_{zi} = dm_i r_{\perp i}^2 \omega_z,$$

где dm_i – масса материальной точки, на которые разбивается твердое тело. Здесь учтено, что при вращении твердого тела угловые скорости всех его точек одинаковы. Тогда, просуммировав (проинтегрировав) эти выражения по всему телу, получим

$$L_z = \int_{\substack{\text{по массе} \\ \text{тела}}} dL_z = \left(\int_{(M)} r_{\perp}^2 dm \right) \omega_z = I_z \omega_z,$$

где r_{\perp} – расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Отсюда следует, что **момент инерции твердого тела** – это сумма моментов инерции отдельных материальных точек, его составляющих, вычисляемая по формуле

$$I_z = \int_{(M)} r_{\perp}^2 dm. \quad (4.20)$$

Таким образом, момент инерции обладает свойством аддитивности: момент инерции системы точек равен сумме моментов инерции каждой точки в отдельности. Кроме того, из (4.20) видно, что значение момента инерции для системы точек (и твердого тела в том числе) зависит от выбора оси вращения системы, т.е. от ее места расположения и ориентации в пространстве.

Для примера определим моменты инерции однородного длинного тонкого цилиндра при его вращении относительно разных осей. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси вращения, проходящие через центр масс цилиндра массой M радиусом R и высотой L (рис. 4.7), причем $L \gg R$.

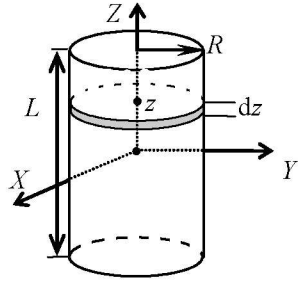


Рис. 4.7

При повороте цилиндра вокруг осей X и Y моменты инерции получатся одинаковыми, поскольку такие вращательные движения ничем не отличаются друг от друга. Для того, чтобы воспользоваться формулой (4.17), разобьем цилиндр на точечные элементарные массы dm – одинаковые тонкие диски, параллельные основаниям цилиндра. Толщина дисков составит dz , а удаление диска от оси вращения z . Обозначив плотность цилиндра через ρ , определим массу такого тонкого диска: $dm = \rho\pi R^2 dz$. При подобном разбиении $r_{\perp} = z$. Тогда

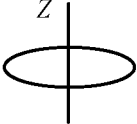
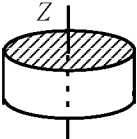
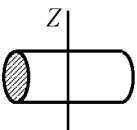
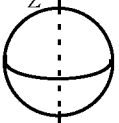
$$I_x = I_y = \int z^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 \rho\pi R^2 dz = \rho\pi R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} \rho\pi R^2 L^3.$$

Поскольку масса цилиндра $M = \rho\pi R^2 L$, то $I_x = I_y = \frac{1}{12} ML^2$.

Как видно, радиус цилиндра при его вращении вокруг этих осей не влияет на величину момента инерции, поэтому данная формула справедлива и для определения момента инерции тонкого стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню.

Запишем в виде таблицы выражения, полученные для расчета моментов инерции различных тел, обладающих осью симметрии (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Тело	Расположение оси вращения Z	Параметры тела	Момент инерции
Кольцо		Масса M , радиус R	$I_z = MR^2$
Диск, цилиндр		Масса M , радиус R	$I_z = \frac{1}{2}MR^2$
Стержень		Масса M , длина L	$I_z = \frac{1}{12}ML^2$
Шар		Масса M , радиус R	$I_z = \frac{2}{5}MR^2$

Поскольку расположение оси вращения относительно тела может быть в общем случае произвольным, то моментов инерции у твердого тела может быть бесконечно много (в то время как масса – только одна). Нельзя ли воспользоваться полученными результатами и связать момент инерции тела относительно произвольной оси с моментом инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс? Ответ на этот вопрос дает теорема Гюйгенса – Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

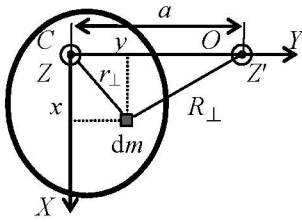


Рис. 4.8

Рассмотрим твердое тело, способное вращаться вокруг оси Z , проходящей через точку C – центр масс тела (рис. 4.8). Допустим, что известен I_{zC} – момент инерции тела относительно этой оси. Если мы хотим определить $I_{z'}$ – момент инерции тела при его вращении вокруг оси Z' , проходящей через точку

O параллельно оси Z на расстоянии a от нее, то с целью его определения разобьем тело на элементарные точечные массы dm . Положение такой элементарной массы в изображенной на рис. 4.8 системе координат задается координатами x и y . Тогда, в соответствии с (4.20),

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_M R_{\perp}^2 dm = \int_M [x^2 + (a - y)^2] dm = \\ &= \int_M [x^2 + y^2] dm + \int_M a^2 dm - 2 \int_M ay dm. \end{aligned}$$

Вспомнив определение центра масс системы материальных точек (2.12), нетрудно увидеть, что последнее слагаемое полученного выражения связано с координатой центра масс y_C , которая в нашем случае равна нулю. А значит, последнее слагаемое обращается в нуль. Тогда

$$I_{z'} = \int_M r_{\perp}^2 dm + a^2 \int_M dm - 2a \int_M y dm = I_{zC} + a^2 M.$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера: $I_{z'} = I_{zC} + Ma^2$ – доказана.

Рассмотрим задачу о вращении тела. Пусть на массивный блок, выполненный в виде диска радиусом R и массой M и закрепленный на оси, намотана нерастяжимая невесомая нить, к концу которой привязан груз массой m (рис. 4.9). Как определить ускорение груза при его движении вниз?

Расставим силы, действующие на тела этой системы. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . На блок действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции \vec{N} и сила натя-

жения нити \vec{T} . Уравнение второго закона Ньютона для поступательного движения груза записывается в виде: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. Блок не совершает поступательного движения, а вращается вокруг оси.

Укажем на рис. 4.9, что направление оси Z – это направление вдоль оси диска «на нас». Тогда из всех сил, действующих на блок момент относительно этой оси создает только сила \vec{T} : $M_{Tz} = TR$. Поскольку другие силы проходят через ось вращения, то их плечи равны нулю. Заметим также, что вектор момента силы натяжения направлен «на нас» (предлагаем доказать это вам самостоятельно, используя определение векторного произведения). Кроме того, при ускоренном вращении блока в направлении против часовой стрелки, вектор его углового ускорения $\vec{\epsilon}$ также направлен «на нас». Таким образом, проекции векторов \vec{M}_{Tz} и $\vec{\epsilon}$ на направление выбранной оси Z положительны.

Основное уравнение динамики вращения для блока запишется следующим образом: $M_{Tz} = I_z \epsilon_z$. Чтобы учесть связь линейного ускорения движения груза и углового ускорения вращения блока, воспользуемся соотношением (4.5): $\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$. В результате таких рассуждений получаем систему уравнений в векторном и скалярном виде:

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \\ M_{Tz} = I_z \epsilon_z, \\ \vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}, \end{cases} \quad \begin{cases} ma = mg - T, \\ TR = \frac{1}{2}MR^2\epsilon, \\ a = \epsilon R. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $T = \frac{1}{2}MR\epsilon$, а с учетом третьего уравнения системы $T = \frac{1}{2}Ma$. Подставляя это

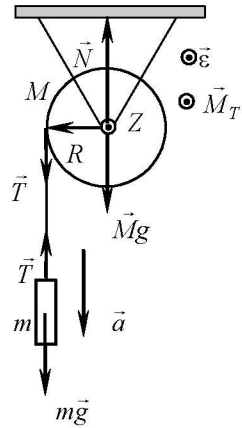


Рис. 4.9

выражение в первое уравнение системы, находим

$ma = mg - \frac{1}{2}Ma$. Из этого уравнения находим ускорение груза:

$$a = \frac{2m}{2m + M}g.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Как связаны кинематические характеристики вращательного движения твердого тела со скоростями и ускорениями точек этого тела?

2. Как связаны между собой момент импульса системы тел относительно полюса и момент относительно того же полюса всех сил, действующих на систему?

3. При каких условиях момент импульса системы тел относительно оси не меняется?

4. От чего зависит момент инерции твердого тела, и какую роль он играет при вращении тела?

5. Сколько моментов инерции может быть у твердого тела? Почему?

6. Определите момент инерции тонкой сферической оболочки массой m и радиусом R относительно оси симметрии.

7. Определите момент инерции диска массой m и радиусом R относительно его диаметра.

5. РАБОТА ПО ВРАЩЕНИЮ ТЕЛА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и определим кинетическую энергию тела. Поскольку центр масс при таком движении тела не совершает поступательного движения, то кинетическая энергия вращения относительно центра масс, может быть определена как:

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{1}{2} \int_M \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v} \vec{v}) dm,$$

где \vec{v} – линейная скорость материальной точки dm при ее вращении вокруг центра масс. Если вращение совершается по окружности радиуса r с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то, согласно (4.3) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Тогда

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}, [\vec{\omega}, \vec{r}]) dm.$$

Используя свойство смешанного произведения векторов, получаем

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{v}]) dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, dm\vec{v}]) = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, d\vec{L}).$$

Поскольку при вращении тела угловые скорости всех его материальных точек одинаковы, то

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \int_M d\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_z L_z.$$

Так как $L_z = I_z \omega_z$, то

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (5.1)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равна половине произведения момента инерции тела относительно этой оси на квадрат угловой скорости вращения вокруг этой оси.

Попробуем получить этот результат иначе, исходя из теоремы об изменении кинетической энергии. Разобьем тело на элементарные массы, каждая из которых при вращении имеет скорость \vec{v}_i и совершает за время dt перемещение $d\vec{l}_i$. Тогда элементарная работа равнодействующей силы по перемещению i -й точки будет $\delta A_i = (\vec{R}_i, d\vec{l}_i) = (\vec{R}_i, \vec{v}_i dt)$. Поскольку равнодействующая всех сил определяется векторной суммой внешних и всех внутренних сил, действующих на i -ю точку, то

$$\delta A_i = ((\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ik}), \vec{v}_i dt) = (\vec{F}_i, \vec{v}_i dt) + (\sum_k \vec{f}_{ik}, \vec{v}_i dt).$$

Поскольку $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, то $\delta A_i = (\vec{F}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt) +$
 $+(\sum_k \vec{f}_{ik}, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt)$, или

$$\delta A_i = (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) + \left(\vec{\omega}, \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right), \quad (5.2)$$

что следует из свойства смешанного произведения векторов.

Просуммируем последнее выражение по всем точкам тела. Вычислим сумму всех первых слагаемых (5.2):

$$\sum_i (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) = \vec{\omega} \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt.$$

Сумму всех вторых слагаемых (5.2) можно вычислить так:

$$\sum_i \left(\vec{\omega}, \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right) = \vec{\omega} \sum_i \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внутр}} dt = 0,$$

поскольку суммарный момент внутренних сил системы материальных точек равен нулю. Тогда

$$\delta A = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} \vec{\omega} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} d\vec{\varphi},$$

где $d\vec{\varphi}$ – угловое перемещение тела за время dt .

Элементарная работа по вращению тела вокруг оси Z :

$$\delta A = M_{\text{внеш}} d\varphi = I_z \varepsilon_z \omega dt = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega.$$

Проинтегрировав полученное выражение, можно найти полную работу

$$A = \int_1^2 dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega d\omega = I_z \left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} \right).$$

По теореме об изменении кинетической энергии $A = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$, поэтому кинетическая энергия вращательного движения

$$W_k = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (5.3)$$

Рассмотрим кинематику и динамику частного случая плоского движения, а именно качение. **Плоским** называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения явля-

ется качение симметричного тела (цилиндра, шара, диска) по плоскости. Пусть качение происходит без проскальзывания. В этом случае скорость точек катящегося тела, соприкасающихся с плоскостью, равна нулю ($\vec{v}_A = 0$). Как уже говорилось, любое движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного и вращательного. Например, качение цилиндра (рис. 5.1, *a*) можно представить как сумму поступательного движения его со скоростью, равной скорости центра масс C (рис. 5.1, *б*), и одновременного вращения относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр масс (рис. 5.1, *в*).

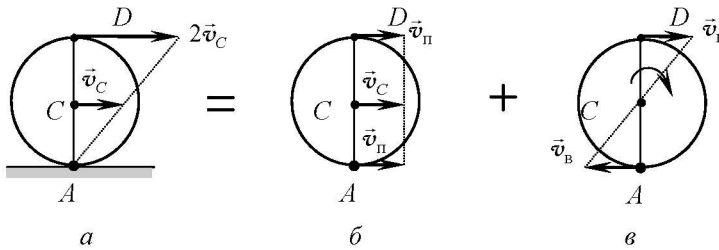


Рис. 5.1

Скорость любой точки катящегося цилиндра можно представить в виде $\vec{v} = \vec{v}_\Pi + \vec{v}_B$. Здесь \vec{v}_Π – скорость поступательного движения, которая одинакова для любой точки и равна скорости центра масс \vec{v}_C , а \vec{v}_B – скорость вращательного движения относительно оси Z , направленной на рис. 5.1, *в* «от нас» и проходящей через точку C . Так как $\vec{v}_A = 0$, а векторы \vec{v}_B и \vec{v}_Π в точке A противоположны, то модули этих векторов одинаковы: $v_B = v_\Pi$. В точке D векторы \vec{v}_B и \vec{v}_Π сонаправлены, поэтому $v_D = 2v_\Pi$.

Найдем кинетическую энергию катящегося цилиндра. Для этого разобьем цилиндр на множество элементарных масс и найдем кинетическую энергию каждой элементарной массы. Поскольку скорость любой i -й элементарной массы $\vec{v}_i = \vec{v}_{\Pi i} + \vec{v}_{B i}$, то

$$W_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\Pi i} + \vec{v}_{B i})^2 = \frac{1}{2} m_i (v_{\Pi i}^2 + v_{B i}^2 + 2\vec{v}_{\Pi i} \cdot \vec{v}_{B i}).$$

Для определения кинетической энергии катящегося цилиндра необходимо сложить кинетические энергии всех элементарных масс, поэтому

$$W_k = \sum_i W_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi i}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{B i}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{\Pi i} \vec{v}_{B i}. \quad (5.4)$$

Поскольку скорость поступательного движения всех точек одинакова и равна скорости центра масс, то

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi}^2 = v_{\Pi}^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i = \frac{1}{2} m v_{\Pi}^2.$$

Согласно (5.3), второе слагаемое (5.4) вычислим так:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{B i}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

где I_z – момент инерции цилиндра относительно оси вращения Z .

Наконец, третье слагаемое (4.23) преобразуется к виду

$$\sum_i m_i \vec{v}_{\Pi i} \vec{v}_{B i} = \sum_i m_i v_{\Pi} v_{B i} \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{v}_{\Pi i}$ и $\vec{v}_{B i}$.

Для любой элементарной массы m_i всегда найдется симметрично расположенная масса m_k , такая, что $\cos \beta = -\cos \alpha$ (рис. 5.2). Следовательно, при суммировании третье слагаемое (5.4) обращается в нуль. Таким образом,

$$W_k = \frac{1}{2} m v_{\Pi}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (5.5)$$

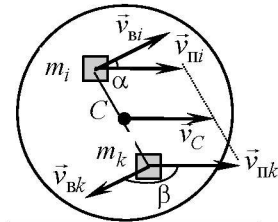


Рис. 5.2

т.е. кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Можно показать, что данное утверждение справедливо не только для качения, но и для любого плоского движения.

Определим, как изменяется кинетическая энергия тела при переходе из одной системы координат в другую. Поскольку ранее уже были показаны особые свойства центра масс, то свяжем одну из систем отсчета с центром масс C (рис. 5.3) и рассмотрим кинетическую энергию материальной точки массой dm в системе от-

счета (X, Y, Z) . Скорость точки в этой системе отсчета определена как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, где \vec{r} – радиус-вектор точки. Положение центра масс в этой системе определяется радиусом-вектором \vec{r}_C , а положение точки относительно центра масс – радиусом-вектором \vec{r}_1 . Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}_1$, то $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_1$, где \vec{v}_C – скорость центра масс в системе (X, Y, Z) , а \vec{v}_1 – скорость материальной точки относительно центра масс. Тогда кинетическая энергия точки в системе (X, Y, Z) вычислится следующим образом:

$$dW_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm.$$

Определим кинетическую энергию тела массой M , состоящего из совокупности материальных точек:

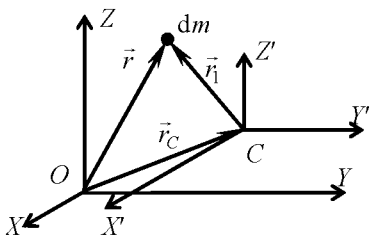


Рис. 5.3

$$\begin{aligned} W_k &= \int_M \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_C \vec{v}_1 + \vec{v}_C^2) dm. \end{aligned}$$

Вспомним, что, в произвольной системе координат скорость центра масс равна $\vec{v}_{C1} = \frac{1}{M} \int_M \vec{v}_1 dm$. Тогда

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M 2\vec{v}_C \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \vec{v}_C \int_M \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \vec{v}_C M \vec{v}_{C1} + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm, \end{aligned}$$

где \vec{v}_{C1} – скорость центра масс относительно центра масс, очевидно равная нулю. Поэтому

$$W_k = \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm = W_{\text{котн}} + W_{\text{кцм}}. \quad (5.6)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетической энергии ее движения относительно центра масс и кинетической энергии, которой обладала бы она, двигаясь поступательно со скоростью центра масс. Это выражение получило название **теоремы Ф. Кенига**.

Учитывая последнее утверждение, в случае сложного движения, полная механическая энергия будет описываться выражением:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{к отн}} + W_{\text{к цм}} + W_{\text{п}}. \quad (5.7)$$

Поэтому, применяя закон сохранения механической энергии (или теорему об изменении механической энергии) к сложному движению, необходимо использовать именно это выражение.

Любое плоское движение твердого тела описывается двумя векторными уравнениями (2.2) и (4.14), которые объединим в систему

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{F_i}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Система векторных уравнений (5.8) в проекциях на оси трехмерной системы координат эквивалентна шести скалярным уравнениям, поэтому говорят, что твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Рассмотрим скатывание цилиндра массой m и радиусом r без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 5.4). На такой цилиндр действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции опоры \vec{N} , трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Под действием этих сил центр масс цилиндра движется вниз по наклонной плоскости с ускорением \vec{a}_C , а сам цилиндр вращается вокруг оси Z , проходящей через центр масс с угловым ускорением $\vec{\epsilon}$. Направления векторов \vec{a}_C , $\vec{\epsilon}$ и оси Z указаны на рис. 5.4. Вращение цилиндра обеспечивается дей-

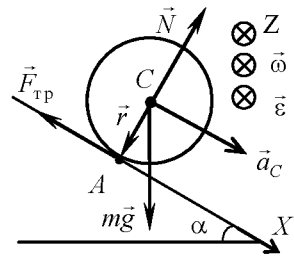


Рис. 5.4

ствие трения покоя. Вращение цилиндра обеспечивается дей-

ствием момента силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ относительно оси Z , так как моменты сил $m\vec{g}$ и \vec{N} относительно этой оси равны нулю (силы проходят через центр масс). Уравнения системы (5.8) выглядят так:

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{F_{\text{тр}}C}. \end{cases}$$

Эти уравнения записываются в проекциях на оси X и Z следующим образом:

$$\begin{cases} ma_C = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ I_z \varepsilon_z = F_{\text{тр}} r. \end{cases}$$

Воспользовавшись связью линейного и углового ускорений (4.5), имеем: $a_C = \varepsilon r$. Момент инерции цилиндра относительно оси Z $I_z = \frac{1}{2}mr^2$. Совместно решая составленные уравнения, можно определить ускорение центра масс цилиндра при его скатывании: $a = 2g \sin \alpha / 3$.

Рассмотрим решение задачи. Цилиндр скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости высотой h . Найти скорость центра масс цилиндра внизу наклонной плоскости. Качение происходит без проскальзывания.

Поскольку качение происходит без проскальзывания, то работа непотенциальных сил равна нулю (в том числе работа силы трения покоя), а значит можно воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Пусть потенциальная энергия цилиндра в конечном положении $W_{\text{п2}} = 0$.

Тогда механическая энергия в начальном и конечном состояниях будут определяться выражениями:

$$W_{\text{мех1}} = mgh, \quad W_{\text{мех2}} = W_{\text{квр}} + W_{\text{кпост}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Учитывая, что момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс $I_z = \frac{1}{2}mr^2$, а также, что при качении без проскальзывания $v_C = \omega r$, приравнивая начальную и конечную механические энергии, получаем

$$v_C = \sqrt{4gh/3}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна работа сил при повороте тела на угол φ ?
2. Чему равна кинетическая энергия катящегося без проскальзывания обруча массой m и радиусом r со скоростью центра масс v ?
3. Что понимают под качением без проскальзывания?
4. Какое движение называется плоским?
5. Чему равна работа силы трения при качении без проскальзывания? Почему?
6. Определите высоту, на которую закатится по наклонной плоскости шар, если начальная скорость его центра масс v и он катится без проскальзывания.

6. СОБСТВЕННЫЕ СВОБОДНЫЕ И ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), в той или иной степени повторяющиеся во времени. В зависимости от природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают: **механические колебания** (колебания маятников, струн, частей машин, мостов и других сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука и т.п.); **электромагнитные колебания** (колебания переменного электрического тока в цепи, колебания векторов напряженности электрического и магнитного поля); **электромеханические колебания** (колебания мембраны телефона) и пр. Система, совершающая колебания, называется **колебательной системой**.

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникающие вследствие начального отклонения системы от положения устойчивого равновесия. **Вынужденными колебаниями** называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Колебания называются **периодическими**, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

Частотой периодических колебаний называется величина $\nu = \frac{1}{T}$, равная числу колебаний, совершающихся за единицу времени. Циклической (круговой) частотой колебаний называется величина $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени.

Пусть отклонение колебательной системы от положения равновесия характеризует величина s . Периодические колебания величины $s(t)$ называются **гармоническими колебаниями**, если $s(t)$ меняется по гармоническому закону

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

где A – амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся величины).

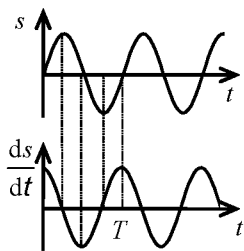


Рис. 6.1

Значение s в произвольный момент времени определяется значением **фазы** колебаний $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$; φ_0 – начальная фаза, т.е. значение $\Phi(t)$ в момент времени $t = 0$.

Из (6.1) видно, что первая и вторая производные $s(t)$ по времени также совершают гармонические колебания той же частоты:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned} \quad (6.2)$$

причем амплитуды $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d^2s}{dt^2}$ соответственно равны $A\omega$ и $A\omega^2$.

Видно, что $\frac{ds}{dt}$ опережает s по времени на $\frac{T}{4}$, а по фазе на $\frac{\pi}{2}$;

$\frac{d^2s}{dt^2}$ опережает $s(t)$ по времени на $\frac{T}{2}$, а по фазе на π . Графики $s(t)$

и $\frac{ds}{dt}$ при $\varphi_0 = 0$ приведены на рис. 6.1. Из (6.2) следует, что гар-

монически колеблющаяся величина s удовлетворяет дифференциальному уравнению 2

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0, \quad (6.3)$$

которое называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**.

Гармонические колебания параметра $s(t)$, которые описываются уравнением $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, можно изобразить графически с помощью вращающегося на плоскости вектора (рис. 6.2).

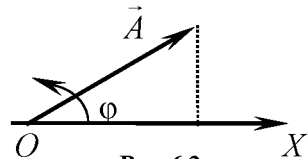


Рис. 6.2

Для этого из начала координат на плоскости проводят вектор \vec{A} , модуль которого равен амплитуде колебаний. Вектор \vec{A} составляет с осью OX угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, равный фазе колебаний в данный момент времени t . С течением времени угол увеличивается так, что вектор вращается вокруг центра координат с угловой скоростью, равной циклической частоте гармонических колебаний. Проекция вектора на ось OX совершает гармонические колебания по закону $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Графическое изображение гармонических

колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды называется **методом векторных диаграмм**. Им широко пользуются, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний.

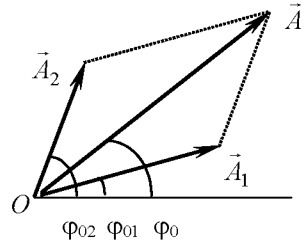


Рис. 6.3

Рассмотрим сложение двух колебаний, одно из которых совершается по закону $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$, а другое по закону $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$. В результате сложения этих колебаний получается тоже гармоническое колебание вида $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Это нетрудно доказать с помощью метода векторных диаграмм (рис. 6.3). Если каждому из данных колебаний поставить в соответствие вращающийся вектор, то результирующее колебание определится вращением суммы векторов. Из рисунка 6.3 видно, что амплитуда результирующего колебания находится по теореме косинусов следующим образом:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (6.4)$$

Начальную фазу результирующего колебания можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Сумма двух векторов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями, будет вращаться с той же угловой скоростью. Таким образом, мы доказали, что в результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих в одном направлении, получается гармоническое колебание той же частоты, причем его амплитуда удовлетворяет условию $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$.

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний из уравнений, описывающих колебательный процесс. Рассмотрим колебания пружинного маятника – груза массой m , подвешенного на идеальной невесомой пружине жесткостью k (рис. 6.4).

На такой груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости растянутой пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. В положении равновесия модули этих сил одинаковы: $mg = F_{\text{упр}}$.

Если обозначить через Δl статическое растяжение пружины от недеформированного состояния, то, согласно закону Гука, в положении равновесия $F_{\text{упр}} = k\Delta l = mg$. При выведении груза из положения равновесия модуль силы упругости изменяется с

учетом деформации пружины. Растянем пружину вниз на x , тогда $F_{\text{упр}} = k(\Delta l + x)$. Если пренебречь действием сопротивления воздуха, то при отпускании груза он начнет совершать гармонические колебания. Докажем это. Уравнение второго закона Ньютона в проекции вертикальную ось для движущегося груза можно записать следующим образом:

$$ma = mg - F_{\text{упр}} = mg - k(\Delta l + x) = mg - k\Delta l - kx = -kx.$$

Поскольку $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, то из этого уравнения получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (6.5)$$

Если рассматривать смещение груза от положения равновесия в качестве параметра колебаний, то уравнение (6.5) совпадает с дифференциальным уравнением (6.3), т.е. является уравнением собственных колебаний пружинного маятника. Частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.6)$$

В отсутствие трения пружинный маятник колеблется по гармоническому закону с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

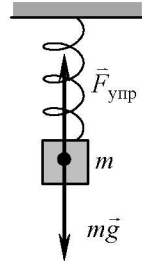


Рис. 6.4

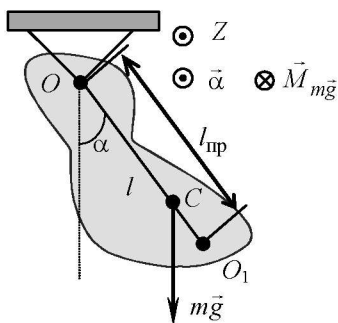


Рис. 6.5

Рассмотрим теперь **физический маятник** – твердое тело, которое совершает колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести тела и называемой осью качания маятника (рис. 6.5). Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс C . Точка O пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника, называется **точкой подвеса маятника**.

Если пренебречь силами трения в подвесе маятника и силой трения о воздух, то момент относительно оси качания создает только сила тяжести $m\vec{g}$. При отклонении маятника на угол α от положения равновесия момент силы численно равен $mgl \sin \alpha$, где l – расстояние между центром масс и точкой подвеса. Этот момент возвращает маятник в положение равновесия, поэтому его направление противоположно угловому перемещению. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника имеет вид:

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha,$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси качания.

Рассматривая малые колебания тела, при которых $\sin \alpha \approx \alpha$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z} \alpha = 0, \quad (6.7)$$

т.е. угол α удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний (6.3). Следовательно, в отсутствие трения малые колебания физического маятника являются гармоническими, причем в уравнении колебаний в качестве параметра колебаний выступает угол отклонения маятника от положения равновесия.

Частота собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}, \quad (6.8)$$

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$.

Материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, называется **математическим маятником**. Математический маятник – частный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс, так что $I_z = ml^2$, поэтому для математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.9)$$

Если сопоставить (6.8) и (6.9), то видно, что математический маятник с длиной нити подвеса $l_{\text{пр}} = \frac{I_z}{ml}$ имеет тот же период колебаний, что и физический маятник массы m , моментом инерции I_z и расстоянием между точкой подвеса и центром масс l . Длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический маятник, называется **приведенной длиной физического маятника**. Точка O_1 , лежащая на прямой OC на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса маятника (рис. 6.5), называется **центром качаний маятника**. Центр качаний и точка подвеса обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы его ось качаний проходила через точку O_1 , то точка O будет совпадать с новым центром качаний маятника, т.е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.

Рассмотрим механические колебания пружинного маятника, совершающего свободные гармонические колебания, описываемые уравнением $x(t) = A \cos(\omega t)$. Полная механическая энергия такого маятника в произвольный момент времени является суммой потенциальной энергии сил упругой деформации пружины $W_{\text{п}}$ и кинетической энергии груза $W_{\text{к}}$.

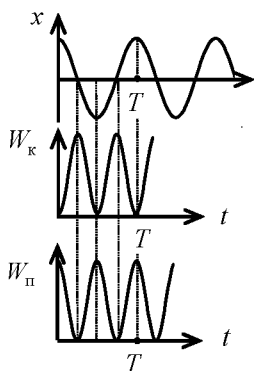


Рис. 6.6

Выразим кинетическую энергию груза на пружине:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \\ = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t).$$

Найдем потенциальную энергию упругодеформированной пружины:

$$W_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t).$$

Графики зависимостей потенциальной и кинетической энергии гармонических колебаний от времени показаны на рис. 6.6. Следует отметить, что частота колебаний энергии $\omega^* = 2\omega$, а ее максимальное значение пропорционально квадрату амплитуды смещения материальной точки. Полная механическая энергия в случае свободных колебаний не изменяется:

$$W_{\text{мех}} = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const},$$

поскольку в системе отсутствуют диссипативные силы.

Рассмотрим пружинный маятник, на который действует сила сопротивления, линейно зависящая от скорости $F_{\text{тр}} = -\mu v = -\mu \frac{dx}{dt}$. Векторное уравнение второго закона Ньютона в этом случае примет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Проецируя это уравнение на вертикальную ось

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x) - \mu \frac{dx}{dt},$$

получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0,$$

где $\frac{\mu}{m} = 2\beta$ (β – коэффициент затухания); $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (ω_0 – собственная частота свободных гармонических колебаний).

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы в общем случае имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Если затухание невелико ($\beta < \omega_0$), решением этого однородного линейного дифференциального уравнения является функция

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. затухающие колебания не являются периодическими, однако величина $x(t)$ обращается в нуль, а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (6.10)$$

где T – период затухающих колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Величина $x(t) = A_0 e^{-\beta t}$ называется **амплитудой затухающих колебаний**; A_0 – начальная амплитуда. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β .

Если сравнить амплитуды колебаний системы в моменты времени t и $t + \tau$, то можно получить, что

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = e^{\beta\tau}.$$

Если за промежуток времени τ амплитуда колебаний уменьшается в e раз, то $\beta = 1/\tau$, т.е. **коэффициент затухания** – величина, обратная промежутку времени τ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.

Также для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится понятие **логарифмического декремента** δ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Если за время NT система совершит N колебаний, и их амплитуда уменьшится в e раз, то $\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$. Таким образом, логарифмический декремент – безразмерная величина, обратная числу колебаний N , в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

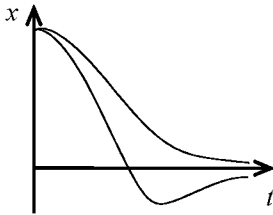


Рис. 6.7

Из выражения (6.10) следует, что при $\omega_0^2 \leq \beta^2$ колебания в системе не возникают. В этом случае наблюдается **апериодический процесс** (рис. 6.7), в результате которого вся запасенная в системе механическая энергия расходуется на работу против сил сопротивления. В зависимости от начальных условий апериодический процесс может выглядеть по-разному (рис. 6.7).

Рассмотрим пример решения задачи. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с собственной частотой ω . Амплитуда колебаний равна A . Определите максимальную скорость груза.

Гармонические колебания описываются уравнением $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, если найти первую производную по времени $\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$, то, исходя из определения скорости, это

уравнение будет описывать закон изменения скорости при гармонических колебаниях. Множитель $A\omega$ представляет собой амплитуду колебаний скорости, а значит максимальное значение скорости будет равно $v_{\max} = A\omega$.

Контрольные вопросы и задания

1. От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний?
2. Что определяет логарифмический декремент затухания?
3. Чему равны:
 - а) сила, действующая на пружинный маятник, совершающий гармонические колебания, при прохождении им положения равновесия;
 - б) скорость пружинного маятника в тот момент, когда его амплитуда максимальна?
4. Как влияет коэффициент затухания на условный период затухающих колебаний системы?
5. С каким сдвигом фаз меняются по времени кинетическая и потенциальная энергии математического маятника?

7. ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Вынуждающей силой называется переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее вынужденные механические колебания. Пусть вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Тогда дифференциальное уравнение **вынужденных колебаний** запишем следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7.1)$$

Общее решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\omega t). \quad (7.2)$$

В этом выражении первое слагаемое играет роль только на начальной стадии установления процесса колебаний. В дальнейшем этой составляющей решения можно пренебречь. Второе слагаемое (7.2) описывает установившиеся вынужденные колебания.

Подставим $x(t) = A \cos(\omega t)$ в уравнение (7.1). Для этого найдем производные $x(t)$ по времени: $\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) =$

$$= A\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi).$$

Тогда получим

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \pi) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Используя метод векторных диаграмм, представим

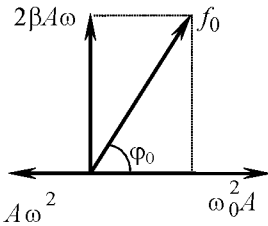


Рис. 7.1

левую часть последнего уравнения в виде суммы трех векторов (рис. 7.1), модули которых указаны на рисунке. Результат сложения этих трех векторов – вектор, модуль которого равен f_0 . Из рисунка 7.1 следует, что сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Используя теорему Пифагора, найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует, что при $\omega = 0$ амплитуда колебаний принимает значение $A = \frac{f_0}{\omega_0^2}$, и в системе происходит статическое смещение из положения равновесия под действием постоянной силы F_0 (рис. 7.2).

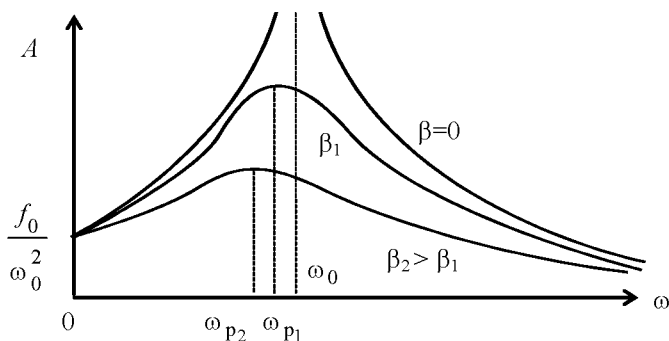


Рис. 7.2

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ($\omega \rightarrow \infty$) амплитуда колебаний стремится к нулю, $\operatorname{tg} \varphi_0 \rightarrow 0$ и $\varphi_0 \rightarrow -\pi$.

Дифференцируя выражение (7.3) по переменной ω , и приравнявая полученную производную к нулю, можно определить такую частоту внешнего воздействия $\omega = \omega_p$, при которой амплитуда колебаний достигает максимума: $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется резонансом. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания системы приведен на рис. 7.2. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания. Чем меньше β , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании ($2\beta^2 > \omega_0^2$) выражение для резонансной частоты становится мнимым, при этих условиях резонанс не наблюдается – с увеличением частоты амплитуду вынужденных колебаний монотонно убывает. Из формулы (7.3) следует, что амплитуда при резонансе

$$A_{\max} = A(\omega_p) = \frac{F_0}{2m\beta\omega}.$$

Разделив амплитуду при резонансе на статическое смещение, получим величину, которая носит название добротность

$$Q = \frac{F_0 m \omega_0^2}{2m\beta \omega_0 F_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}.$$

Добротность показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуду вынуждающей силы.

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различных сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий, иначе может произойти разрушение конструкции. Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т.д.

Контрольные вопросы и задания

1. Когда в колебательной системе возникают вынужденные колебания?
2. Как резонансная частота зависит от коэффициента затухания?
3. Чему равна частота установившихся вынужденных колебаний?
4. Как зависит амплитуда вынужденных колебаний от коэффициента затухания?
5. На сколько отстают по фазе вынужденные колебания от вынуждающей силы при частоте равной собственной частоте колебательной системы?
6. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и объясните физический смысл его слагаемых.

8. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности Галилея утверждает эквивалентность всех инерциальных систем отсчета (ИСО) лишь для механических явлений. Поэтому этот принцип не может быть основой всей физической науки, так как выделяет механические явления как особые и, таким образом, не отражает материального единства различных физических явлений. Физическая теория, которая рассматривает пространственно-временные закономерности для любых физических процессов, называется **теорией относительности**. Она была создана А. Эйнштейном и в основном завершена к 1915 г. В основе этой теории лежит фундаментальный физический закон, согласно которому все законы физики (а не только законы механики) имеют одинаковую форму записи во всех ИСО. Теория относительности делится на две части: общую теорию относительности, изучающую неинерциальные системы отсчета и поля тяготения, и частную теорию относительности, изучающую инерциальные системы отсчета в отсутствии полей тяготения. В современной литературе частную теорию относительности называют специальной теорией относительности (СТО) или релятивистской механикой. Основные выводы именно этой теории мы рассмотрим в нашем курсе.

Наши понятия о пространстве и времени сформировались из повседневного опыта, в котором мы имели дело с макротелами при не слишком больших скоростях. Явления же, рассматриваемые СТО, протекают в лабораторных экспериментах, и у нас нет навыка и опыта в их описании.

Инварианты преобразований Галилея

Объединив уравнения (1.13) и (1.15) в систему, можно получить преобразования Галилея при переходе от одной ИСО к другой:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t, \\ t = t', \\ \vec{a} = \vec{a}', \end{cases} \quad (8.1)$$

где \vec{v} – скорость одной ИСО относительно другой.

Зададимся вопросом: одинаково ли выполняются законы механики в этих ИСО? Для Галилея было очевидно, что $m = m'$ (масса тела не меняется при переходе от одной ИСО к другой). Проверим справедливость основного закона механики, т.е. второго закона Ньютона. Пусть на тело в одной ИСО действует сила \vec{F} , а в другой – сила \vec{F}' . Все силы в механике делятся на потенциальные (т.е. функции относительного положения тел) и непотенциальные (они зависят от скорости движения тел относительно друг друга). Исходя из первого уравнения системы (8.1), можно записать:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}'_1 + \vec{v}t, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}'_2 + \vec{v}t,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}', \quad (8.2)$$

т.е. относительные расстояния между точками в разных ИСО одинаковы, если они измеряются в один момент времени. Это означает, что потенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, будут одинаковыми. Продифференцировав (8.2) по времени, получим $\vec{v} = \vec{v}'$, т.е. непотенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, также будут одинаковыми. Поэтому для любых сил выполняется равенство $\vec{F} = \vec{F}'$. Именно поэтому в различных ИСО второй закон Ньютона имеет одинаковый вид (одинаковую форму записи):

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad m'\vec{a}' = \vec{F}'.$$

Закон сохранения импульса также сохраняет свой вид при переходе от одной ИСО к другой.

Рассмотрим инварианты преобразований Галилея.

1. Длина отрезка

В классической физике пространство обладает так называемой евклидовой метрикой. Это означает, что расстояние между двумя точками с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (8.3)$$

Пусть две ИСО движутся друг относительно друга вдоль оси OX . Тогда преобразования Галилея (8.1) имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Отсюда следует, что длина отрезка между данными точками во второй ИСО будет определяться по формуле

$$l' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} = l.$$

Таким образом, длина отрезка, измеренная в неподвижной ИСО, равна длине того же отрезка, измеренной в движущейся ИСО, если измерения проводились в один момент времени.

2. Временной интервал

Поскольку в классической физике время не меняется при переходе от одной ИСО к другой, то временной интервал между двумя событиями $\Delta t = t_1 - t_2$, измеренный в неподвижной ИСО, в точности равен интервалу между этими событиями в движущейся ИСО:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2 = \Delta t.$$

3. Изменение импульса и работа

Поскольку радиус-вектор материальной точки, а, следовательно, и ее скорость зависят от выбора начальных условий в различных ИСО, то они не являются инвариантами. Значит, импульс тела и его энергия не являются инвариантами. Рассмотрим изменение импульса и изменение энергии.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$d\vec{p} = \vec{F}dt = \vec{F}'dt' = d\vec{p}',$$

а это означает, что изменение импульса инвариантно.

Работа по перемещению тела равна изменению его кинетической энергии:

$$dA = (\vec{F}d\vec{r}) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right). \quad (8.4)$$

Записав преобразования Галилея в виде $d\vec{r} = d\vec{r}' + d\vec{R}$,
 $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$, получим, что

$$(\vec{F}d\vec{r}) = (\vec{F}d\vec{r}') + (\vec{F}d\vec{R}). \quad (8.5)$$

Воспользовавшись формулой (1.14), вычислим

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2}(\vec{V}' + \vec{v})^2\right) = \frac{m}{2}d(\vec{V}'^2 + 2\vec{V}'\vec{v} + \vec{v}^2) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + d(m\vec{V}'\vec{v}) + d\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (md\vec{V}'\vec{v}) + (m\vec{V}'d\vec{v}) + \frac{m}{2}2\vec{v}d\vec{v}. \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{v} = \text{const}$, то $d\vec{v} = 0$, а поэтому

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (md\vec{V}'\vec{v}) = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (m\vec{a}'d\vec{t}\vec{v}) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (\vec{F}'d\vec{R}). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Тогда, подставляя (8.5) и (8.6) в (8.4), получаем

$$(\vec{F}d\vec{r}') + (\vec{F}d\vec{R}) = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (\vec{F}'d\vec{R}),$$

откуда следует, что $(\vec{F}d\vec{r}') = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right)$, т.е. работа инвариантна.

Данный вывод показывает справедливость одинаковой записи законов сохранения импульса и энергии в различных ИСО.

Постулаты Эйнштейна

В 1860–1865 гг. английский ученый Д. Максвелл создал теорию электромагнитного поля и предсказал существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (волн), которое распространяется со скоростью света. Это дало ему возможность предположить, что свет представляет собой один из видов электромагнитного излучения. В то время считалось, что электромагнитное излучение распространяется в особой невесомой среде (эфире), которая пронизывает все тела. Считалось, что с этим эфиром можно связать систему координат и получить особую

(абсолютную) систему отсчета, в которой по предположению справедливы уравнения Максвелла для электромагнитных волн. Однако оказалось, что принцип относительности Галилея несовместим с уравнениями Максвелла (эти уравнения не были инвариантными относительно преобразований Галилея). Кроме того, в 1880 г. американские физики Майкельсон и Морли поставили эксперимент, который опровергал гипотезу неподвижного эфира и доказал, что эфир не может быть принят в качестве абсолютной системы отсчета. Они экспериментально доказали, что скорость света не зависит от скорости источника или приемника излучения. Это также противоречило преобразованиям Галилея.

Указанные противоречия удалось разрешить великому немецкому физiku Альберту Эйнштейну (1879–1955). Больше всего его беспокоила несовместимость уравнений Максвелла с классической физикой. Эйнштейн видоизменил определения массы, энергии, импульса, свойства пространства и времени. При построении своей теории он исходил из двух постулатов.

1. Принцип относительности Эйнштейна – все физические законы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, а поэтому они должны быть сформулированы в виде, инвариантном относительно преобразований координат, отражающих переход от одной ИСО к другой.

2. Принцип постоянства скорости света – существует предельная скорость распространения взаимодействий, величина которой во всех ИСО одинакова и равна скорости электромагнитной волны в вакууме и не зависит ни от направления ее распространения, ни от движения источника и приемника.

Ясно, что второй постулат не согласуется с преобразованиями Галилея. Пусть система (X', Y', Z') движется со скоростью \vec{v} относительно системы (X, Y, Z) вдоль оси OY (рис. 8.1). Пусть источник света M , находящийся в системе (X', Y', Z') посылает световой сигнал со скоростью \vec{c} относительно системы (X', Y', Z') . Тогда,

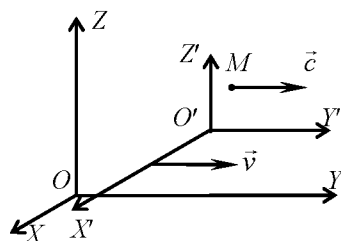


Рис. 8.1

согласно преобразованиям Галилея, скорость света относительно системы (X, Y, Z) должна быть равна $\vec{v} + \vec{c}$, что согласуется со «здравым смыслом». Заслуга Эйнштейна как раз и состоит в том, что он первый пришел к выводу об изменяемости свойств пространства и времени и о зависимости этих свойств от движения тел, с которыми связываются ИСО. Таким образом, мы вынуждены отказаться от преобразований Галилея и использовать другие преобразования, относительно которых скорость света оставалась бы инвариантной величиной.

Преобразования Лоренца

Получим новые преобразования координат, исходя из следующих предположений. Поскольку любая новая теория, которая имеет более широкую область применения, чем старая теория, должна включать последнюю как предельный случай (принцип соответствия), то получаемые преобразования должны отличаться от галилеевских на некоторый коэффициент. Кроме того, учтем возможное изменение свойств времени в разных ИСО, т.е. $t' \neq t$. Поскольку прямые и обратные преобразования Галилея имели вид

$$x = x' + vt', \quad x' = x - vt,$$

то будем искать новые прямые и обратные преобразования в виде

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt).$$

Коэффициент γ в этих уравнениях одинаков в силу равноправия и эквивалентности прямых и обратных преобразований (ИСО равноправны). Дополним последние выражения уравнениями движения света в двух ИСО, учтя постоянство скорости света: $x = ct, x' = ct'$. Мы получили систему четырех уравнений. Решая ее, можно найти

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

а поэтому

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & x' &= \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\
 t &= \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & t' &= \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

Эти выражения были впервые получены в 1892 г. голландским физиком Х.А. Лоренцем (1853–1928). Уравнения Максвелла инвариантны относительно данных преобразований, но впервые физическую интерпретацию математических результатов Лоренца дал Эйнштейн.

Следствия преобразований Лоренца

1. Относительность одновременности событий

Пусть в системе (X, Y, Z) в точках с координатами x_1 и x_2 одновременно ($t_1 = t_2$) произошли два события (допустим, зажглись две лампочки). Зажгутся ли они одновременно в системе (X', Y', Z') ? Для ответа на вопрос найдем разность $t'_2 - t'_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - x_2 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{t_1 - x_1 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{(x_1 - x_2) \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0.$$

Таким образом, два события, одновременные в одной ИСО, могут быть не одновременными в другой ИСО. В связи с этим возникает вопрос: не может ли случиться так, что в одной из ИСО следствие предшествует причине? Можно доказать, что при условии, что никакое материальное воздействие не может передаваться со скоростью большей, чем скорость света в вакууме, следствие никогда не может предшествовать причине.

2. Длительность события в разных ИСО

Пусть в системе (X', Y', Z') в точке с координатой x' произошло событие длительностью $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, где t'_1 и t'_2 – начало и конец события по часам, покоящимся в системе (X', Y', Z') . Наблюдатель в системе (X, Y, Z) по своим часам отметит начало и конец этого события в моменты времени t_1 и t_2 , которые равны

$$t_1 = \frac{t'_1 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Длительность события в системе (X, Y, Z) составит

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Время, которое измеряется по часам, связанным с движущимся телом, называется **собственным временем**. В нашем случае это интервал $\Delta t'$. Поскольку $\gamma > 1$, то $\Delta t > \Delta t'$, т.е. в движущейся ИСО время идет медленнее.

Эффект замедления времени в движущейся системе отсчета хорошо согласуется с опытными наблюдениями над элементарными частицами (π -мезонами), которые движутся в космических лучах со скоростями, близкими к скорости света.

3. Длина отрезка в разных ИСО

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси OX' системы (X', Y', Z') и неподвижный относительно этой системы координат. **Собственной длиной стержня** называется величина $l_0 = x'_2 - x'_1$, т.е. длина, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Длина его в системе (X, Y, Z) будет $l = x_2 - x_1$, причем измерения координат x_1 и x_2 проводятся в один и тот же момент времени по часам системы (X, Y, Z) . Поскольку эти два события – измерения координат x_1 и x_2 , одновременные в системе (X, Y, Z) , – будут неодновременными в си-

стеме (X', Y', Z') , то удобнее воспользоваться обратными преобразованиями Лоренца (второе уравнение в выражении (8.7)). Тогда

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Поэтому длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется, составит

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Наблюдатель в системе (X, Y, Z) находит, что длина движущегося стержня в $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ раз меньше его собственной длины.

4. Закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется в системе (X', Y', Z') . Поскольку ее координата вдоль оси OX' в данной системе определяется соотношением

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (8.8)$$

то ее скорость относительно данной системы координат

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}. \quad (8.9)$$

Из (7.8) находим

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(u - v)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (8.10)$$

где u – скорость точки относительно системы (X, Y, Z) .

Из последнего выражения в (8.7) определим

$$\frac{d t'}{d t} = \frac{1 - u \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (8.11)$$

Подставив (8.10) и (8.11) в (8.9), получим

$$u' = \frac{u - v}{1 - \left(\frac{uv}{c^2}\right)}. \quad (8.12)$$

Из этого выражения следует, что

$$u = \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)}. \quad (8.13)$$

Напомним, что в классической физике выражениям (8.12) и (8.13) соответствовали $u' = u - v$ и $u = u' + v$ (см. (1.13)).

Применим релятивистский закон сложения скоростей к движению света в разных ИСО. Пусть свет распространяется в системе (X, Y, Z) : $u = c$. Тогда

$$u' = \frac{c - v}{1 - \left(\frac{cv}{c^2}\right)} = \frac{c - v}{c^2 - cv} c^2 = c.$$

Таким образом, в любой инерциальной системе отсчета скорость света постоянна и равна c , что и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

Пусть в системе (X', Y', Z') материальная точка движется со скоростью $u' < c$, а сама система движется относительно (X, Y, Z) со скоростью $v < c$. Если, к примеру $u' = 0,9c$, и $v = 0,9c$, то классический закон сложения скоростей даст нам, что скорость точки относительно системы (X, Y, Z) составит $u = u' + v = 1,8c$. Теория относительности дает другой результат:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)} = \frac{c^2}{c} - \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)} = \frac{(c - v)(c - u')}{c \left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)} > 0,$$

откуда следует, что $u < c$, т.е. в любой инерциальной системе отсчета скорость тела не может превысить c .

5. Пространственно-временной интервал

Поскольку пространство и время в СТО являются взаимосвязанными, то время выступает в преобразованиях Лоренца как равноправная четвертая координата. Можно представить существование четырехмерного пространства-времени, в котором оси x, y, z, ct взаимно перпендикулярны. Заметим, что координата по оси времени берется с множителем c , чтобы все координаты имели одинаковую размерность. Геометрическому расстоянию между двумя точками в обычном трехмерном пространстве, которое определяется по теореме Пифагора (8.3), в СТО соответствует пространственно-временной интервал между событиями:

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}.$$

Можно показать, что интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Релятивистская динамика

Поскольку выражение $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ инвариантно относительно преобразований Лоренца, то его можно представить как квадрат модуля (длину) некоторого вектора

$$\vec{\rho} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + ict\vec{e}_4,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Таким образом, рассмотрим четырехмерное пространство координат, в котором сохраняется длина этого вектора, а преобразования Лоренца осуществляют лишь его поворот.

Выберем такой случай движения двух ИСО, при котором $y = y'$, $z = z'$, что позволит упростить математические выкладки. В этом случае ограничимся рассмотрением двумерного вектора

$\vec{p} = x\vec{e}_1 + ict\vec{e}_4$. Основной закон классической динамики записывается в виде $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$. Найдем выражение для релятивистского импульса.

Поскольку при нахождении преобразований Лоренца в преобразования Галилея вводился множитель γ , то введем этот множитель сейчас в выражение для классического импульса:

$$\vec{p} = m_0\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Вычислим силу:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\frac{dx}{dt}\vec{e}_1\right) + \frac{d}{dt}(m_0\gamma ic\vec{e}_4) = f_1\vec{e}_1 + f_4\vec{e}_4. \quad (8.14)$$

Импульс определяется по следующей формуле:

$$\vec{p} = m_0\gamma\frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + m_0\gamma ic\vec{e}_4 = m_0\gamma v\vec{e}_1 + m_0\gamma ic\vec{e}_4. \quad (8.15)$$

Выясним смысл слагаемых выражения (7.14). Обратим внимание, что при $\gamma = 1 (v \ll c)$ первое слагаемое дает выражение второго закона Ньютона (если $m_0 = m$). Квадрат модуля импульса тела остается постоянным:

$$p^2 = (m_0\gamma v)^2 + (m_0\gamma ic)^2 = (m_0\gamma)^2 (v^2 - c^2) = \frac{m_0^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (v^2 - c^2) = -m_0^2 c^2.$$

Поэтому производная по времени от квадрата импульса равна нулю: $\frac{dp^2}{dt} = \frac{d(\vec{p}\vec{p})}{dt} = 2\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. С учетом (8.14) получаем

$$\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0\gamma v f_1 + m_0\gamma ic f_4 = 0.$$

Тогда $f_4 = -\frac{vf_1}{ic} = i\frac{v}{c}f_1$. Видно, что при $v \ll c$ величина $f_4 \rightarrow 0$, т.е. \vec{f}_4 — исключительно релятивистский компонент силы. Его модуль

$$f_4 = \frac{d}{dt}(m_0\gamma ic) = i\frac{v}{c}f_1,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = f_1 v.$$

Таким образом, аналогом второго закона Ньютона в релятивистской динамике выступает система уравнений

$$\begin{cases} f_1 = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v), \\ f_1 v = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2). \end{cases} \quad (8.16)$$

Выражение

$$m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (8.17)$$

называется **релятивистской массой** тела. Отметим, что при скорости движения тела $v=0$ его масса $m = m_0$ (**масса покоя**). При любой скорости движения $v>0$ масса тела больше массы покоя. При $v=c$ масса тела неограниченно растет, что означает отсутствие массы покоя у таких материальных объектов (фотонов).

Связь массы и энергии

Рассмотрим второе уравнение системы (8.16):

$$f_1 \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2), \text{ откуда следует, что } f_1 dx = d(m_0 \gamma c^2).$$

Левая часть последнего равенства представляет собой элементарную работу по перемещению тела, поэтому правая часть должна быть равна полному дифференциалу энергии тела:

$$W = m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} c^2 = mc^2. \quad (8.18)$$

Данное выражение определяет полную энергию тела в релятивистской механике. Рассмотрим, что дает это выражение при классическом характере движения тела ($v \ll c$), для чего воспользуемся пределом $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$:

$$W = m_0 c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Первое слагаемое полученного выражения $W_0 = m_0 c^2$ носит название энергии покоя тела. Второе слагаемое – его кинетическая энергия. Таким образом, кинетическая энергия тела – это разность полной энергии тела и его энергии покоя.

Выражение (8.18) устанавливает взаимосвязь между массой и энергией. Хорошо известно, что в природе происходит непрерывное превращение энергии из одной формы в другую. Как показывает опыт, форма существования массы тоже меняется. Например, при столкновении электрона и позитрона (которые обладают массами покоя), они могут аннигилировать, в результате чего образуются два гамма-кванта (порции электромагнитного излучения), не обладающих массами покоя. Однако гамма-квант обладает инертной массой, которая проявляется при столкновении с препятствием (например, давление света). При различных взаимопревращениях форм энергии и массы ни энергия, ни масса не исчезают и не возникают вновь, они только переходят из одной формы в другую так, что соблюдается выражение (8.18). Так, если два одинаковых шара из абсолютно неупругого материала движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, то в результате удара они останавливаются. При этом исчезает кинетическая энергия макроскопического движения и увеличивается масса покоя этой системы.

Контрольные вопросы и задания

1. Что нового внесла СТО в наши представления о свойствах пространства и времени?
2. Как зависят от скорости материальной точки ее релятивистский импульс и кинетическая энергия?

3. Объясните смысл закона взаимосвязи массы и энергии.
4. Какие вам известны величины, сохраняющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой?
5. Соблюдается ли закон сохранения импульса в СТО?
6. Определите скорость частицы, если её кинетическая энергия равна ее энергии покоя.
7. Определите массу и скорость электрона, полная энергия которого равна 10 МэВ.

9. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ МАКРОСИСТЕМ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим системы, состоящие из большого числа частиц (молекул и атомов), называемые **макросистемами**. Примером подобной системы является газ. Физические величины, характеризующие состояние систем, называются параметрами **состояния**.

Примерами параметров являются давление, объем, концентрация, температура и др. **Давлением** называется физическая величина

$p = \frac{dF_n}{dS}$, где dF_n – модуль силы, действующей на малый участок поверхности тела площадью dS перпендикулярно этой поверхности.

Поведение макросистем изучается **термодинамическим и молекулярно-статистическим методами**. Раздел физики, в котором свойства макроскопических систем изучаются с помощью термодинамического метода, называется **термодинамикой**. В основе термодинамики лежат фундаментальные законы (т.н. начала термодинамики), полученные из обобщения опытных фактов. В основе молекулярно-статистического метода лежит представление об атомно-молекулярном строении вещества, свойствах молекул и атомов и взаимодействия между ними. Математическая основа этого метода – теория вероятности.

Масса и размеры молекул. Относительной атомной массой элемента A_r называется отношение массы атома этого элемента к $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6C$. Относительной молекулярной массой вещества M_r называется отношение массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6C$. Относительные атомная и молекулярная массы являются безразмерными величинами. Единица массы, равная $1/12$ массы изотопа углерода $^{12}_6C$, называется **атомной единицей массы** (а.е.м.). Если ее обозначить как $m_{\text{ед}}$, то масса атома может быть вычислена как $A_r m_{\text{ед}}$, а масса молекулы как $M_r m_{\text{ед}}$.

Количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов и т.д.), равное числу атомов в $0,012$ кг углерода ^{12}C , называется **молем**. В 1 моле любого вещества содержится одно и то же число молекул. Опытным путем было установлено, что это число, называемое **числом Авогадро** N_A , составляет $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$. Если обозначить массу одной молекулы как m_0 , то масса произвольного количества вещества, содержащего ν молей, равна $m = m_0 N_A \nu = \mu \nu$. Величина $\mu = m_0 N_A$ называется **молярной массой** вещества. Она равна массе всех молекул 1 моля вещества, или отношению массы вещества к содержащемуся в нем количеству вещества. Для углерода ^{12}C молярная масса $\mu = 0,012$ кг/моль, а масса атома равна $12m_{\text{ед}}$. Следовательно, $0,012 = N_A 12m_{\text{ед}}$, откуда $m_{\text{ед}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса любого атома равна $1,66 \cdot 10^{-27} \cdot A_r$ кг, а масса любой молекулы составляет $1,66 \cdot 10^{-27} \cdot M_r$ кг. Поскольку $N_A m_{\text{ед}} = 0,001$ кг/моль, то масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.

В совокупном поведении большого числа частиц, образующих макросистему проявляются особые статистические закономерности. Раздел теоретической физики, в котором с помощью статистического метода изучаются физические свойства макроскопических систем, называется **статистической физикой**.

Термодинамической системой называется любая выделенная макроскопическая система. Тела, не включенные в состав выделенной системы, называются **внешними телами** или **внешней средой**. Термодинамические системы, не обменивающиеся ни энергией, ни веществом с внешними телами, называются **изолированными**.

Равновесным состоянием термодинамической системы называется состояние, в котором все параметры системы имеют определенные, одинаковые во всех частях системы значения, не меняющиеся со временем. В противном случае говорят о **неравновесном состоянии** системы. При неизменных внешних условиях термодинамическая система приходит в равновесное состояние. **Термодинамическим процессом** называется переход системы из одного состояния в другое. Процесс всегда связан с нарушением равновесного состояния. **Равновесным** называется такой термодинамический процесс, который проходит бесконечно медленно и состоит из последовательности равновесных состояний. Реальные процессы изменения состояния системы происходят с конечной скоростью и поэтому не могут быть равновесными. Реально близким к равновесному является процесс, протекающий настолько медленно, что отклонения значений параметров состояния от равновесных пренебрежимо малы. Такие процессы называются **квазистатическими**.

Понятие температуры является одним из ключевых в физике макросистем. Если при тепловом контакте тел, одно из них передает энергию другому посредством теплопередачи, то в таком случае первое тело имеет большую температуру, чем другое. В состоянии термодинамического равновесия тела имеют одинаковую температуру. Постоянство или изменение температуры тела можно определить по изменению величин, характеризующих его физические свойства. Практически все свойства тел – объем, электрическое сопротивление, излучательная способность и т.п. – зависят от температуры. Удобное для измерения свойство может быть использовано для количественного определения температуры. Наибольшее распространение получили приборы, измеряющие температуру:

- по изменению объема (термометры – ртутные, газовые, спиртовые и пр.);
- по изменению электрического сопротивления (термометры сопротивления, термисторы);
- термопары (провода из разнородного материала, спаянные друг с другом, так, что спаи находятся при разных температурах, при этом в цепи возникает термоЭДС, пропорциональная разности температур спаев);
- бесконтактные пирометры, тепловизоры, термометры (изменение излучательной способности тел).

Чтобы отсчитать температуру необходимы **температурные шкалы**. При построении опытных температурных шкал помогает природа – существуют хорошо повторяемые температуры (т.н. реперные точки) – например температуры фазовых переходов. Так, например, поступил А. Цельсий в 1742 г., выбрав в качестве измеряемого свойства объем тела. Приведя тело, выбранное для измерения температуры (термометрическое тело), в тепловое равновесие с тающим льдом, измерил объем тела V_0 и приписал телу в этом случае температуру 0° . Затем привел это же тело в тепловое равновесие с кипящей при атмосферном давлении водой, измерил объем тела V_{100} и приписал телу в этом состоянии температуру 100° . Приняв, что объем тела изменяется с температурой по линейному закону, состоянию, в котором тело будет иметь объем V , следует приписать температуру

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100^\circ.$$

Проградуированный по этой шкале (теперь называемой шкалой Цельсия) термометр можно использовать для измерения температуры произвольного тела, если приводить термометр в состояние теплового равновесия с телом, температуру которого необходимо измерить. Как исторический факт можно отметить, что первоначально А. Цельсий использовал перевернутую шкалу (100° соответствовали температуре тающего льда). Понятно, что можно построить сколь угодно много опытных температурных шкал. Наибольшее распространение имеют также шкалы Фаренгейта и Реомюра.

Оказывается, может быть выбрана шкала, не зависящая от свойств термометрического тела. Эта шкала называется **термодинамической шкалой температур**. Введение термодинамической шкалы основано на использовании второго начала термодинамики. Температура T , отсчитанная по этой шкале, связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением $T = t + 273,15$.

Единицу термодинамической (абсолютной) температуры называют кельвин (обозначается К). Температуру по шкале Цельсия измеряют в градусах Цельсия ($^\circ\text{C}$). Значения кельвина и градуса Цельсия одинаковы. Температура, равная 0 К, называется

абсолютным нулем, ему соответствует $t = -273,15^\circ\text{C}$. До 2019 г. кельвин определялся как $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды. В настоящее время определяется через значение постоянной Больцмана $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

В дальнейшем будет показано, что температура выражает среднюю кинетическую энергию молекул вещества. В этом заключается физический смысл температуры.

Как показывает опыт в состоянии термодинамического равновесия параметры состояния связаны между собой уравнением, называемым **уравнением состояния**:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (9.1)$$

Конкретный вид функции f в термодинамике предполагается известным из опыта. Теоретический вывод уравнения состояния проводится методами статистической физики.

Простейшим объектом, для которого в термодинамике может быть рассмотрено уравнение состояния, является идеальный газ. **Идеальным** называется такой газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. При условиях, близких к **нормальным условиям**, т.е. при давлении $p_0 = 101\,325$ Па и температуре $T_0 = 273,15$ К, многие газы (водород, гелий, неон, азот, кислород, воздух и др.) можно с хорошим приближением считать идеальными. Как показывает опыт для них уравнение состояния (9.1) имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (9.2)$$

В форме записи (9.2) уравнение состояния идеального газа называется **уравнением Клапейрона–Менделеева**. Говорят, что газ, в точности подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона – Менделеева, называется идеальным. В (9.2) $R = 8,31$ Дж/(моль·К) называют **универсальной газовой постоянной**, $\nu = \frac{m}{\mu}$ – отношение массы газа к молярной массе – число молей.

Уравнение (9.2), при использовании постоянной Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$ может быть записано в виде:

$$p = nkT, \quad (9.3)$$

где n – концентрация газа.

Примерами простейших термодинамических процессов, происходящих с неизменной массой идеального газа, могут служить следующие процессы:

а) **изотермический процесс**, при котором температура системы не меняется ($T = \text{const}$);

б) **изобарный процесс**, при котором давление в системе не меняется ($p = \text{const}$);

в) **изохорный процесс**, при котором объем системы не меняется ($V = \text{const}$).

Эти процессы, были изучены экспериментально, уравнение Клапейрона–Менделеева обобщает следующие **законы идеального газа**.

Закон Бойля–Мариотта: если данная масса газа совершает изотермический процесс ($T = \text{const}$), то произведение давления газа на его объем не изменяется:

$$pV = \text{const}.$$

Закон Гей-Люссака: если данная масса газа совершает изобарный процесс ($p = \text{const}$), то объем газа изменяется пропорционально его температуре:

$$V = \text{const} \cdot T.$$

Закон Шарля: если данная масса газа совершает изохорный процесс ($V = \text{const}$), то давление газа изменяется пропорционально его температуре:

$$p = \text{const} \cdot T.$$

Изохорный, изобарный и изотермический процессы графически изображаются кривыми (соответственно изохорами, изобарами и изотермами) в различных системах координат: (p, V) ; (p, T) ; (V, T) . На рисунке 9.1 изображены изотермы данной массы газа в координатах (p, V) , изобары данной массы газа в координатах (V, T) , изохоры данной массы газа в координатах (p, T) .

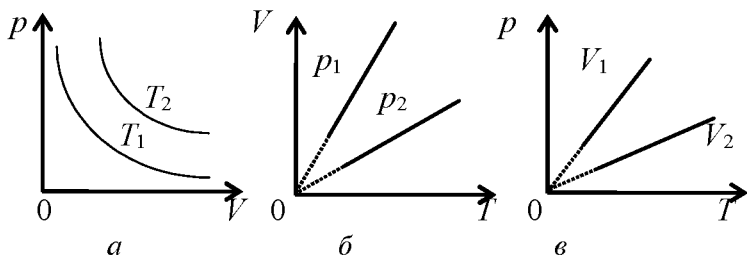


Рис. 9.1

График любого изопроцесса разбивает координатную плоскость на две части:

1) во всех состояниях, которые на диаграмме (p, V) изображаются точками, лежащими выше изотермы T_1 (рис. 9.1, а), температура газа больше, чем T_1 , т.е. $T_2 > T_1$;

2) во всех состояниях, которые на диаграмме (V, T) изображаются точками, лежащими ниже изобары p_1 (рис. 9.1, б), давление газа больше, чем p_1 , т.е. $p_2 > p_1$;

3) во всех состояниях, которые на диаграмме (p, T) изображаются точками, лежащими ниже изохоры V_1 (рис. 9.1, в), объем газа больше, чем V_1 , т.е. $V_2 > V_1$.

При рассмотрении смеси N идеальных газов, находящихся в одном сосуде, уравнение состояния (9.2) можно записать в виде:

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_N}{\mu_N} \right) RT = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{\mu} \right)_i RT.$$

Вместе с тем смесь идеальных газов можно представить таким идеальным газом, для которого будет справедливо соотношение $pV = \frac{m_{\text{см}}}{\mu_{\text{см}}} RT$. Учтем, что масса смеси $m_{\text{см}} = \sum_{i=1}^N m_i$, тогда получим

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{\mu} \right)_i}. \quad (9.4)$$

Выражение (9.4) определяет **эффективную молярную массу смеси идеальных газов** – молярную массу такого идеального газа, который, имея массу, равную массе смеси газов, в объеме, равном объему смеси, создает давление, равное давлению смеси при температуре, равной температуре смеси.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим движение молекул идеального газа в сосуде и определим давление молекул на стенки сосуда. Считаем, что газ находится в равновесном состоянии и взаимодействие молекул со стенкой происходит по законам абсолютно упругого удара.

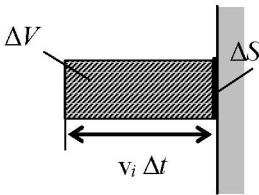


Рис. 9.2

Оценим число ударов молекул о стенки сосуда в единицу времени. Движение молекул является хаотичным, все направления движения равновероятны, скорость молекул меняется в пределах от нуля до некоторой максимальной. Разобьем молекулы по группам скоростей, тогда в i -группе число молекул в единице объема Δn_i , а скорости лежат в диапазоне $[v_i, v_i + \Delta v]$. По направлению к стенке движется $1/6$ часть молекул (число молекул, двигающихся вдоль каждой из трех координат, составляет $1/3$ от общего числа молекул, вдоль условно положительного направления (т.е. по направлению к стенке) будет двигаться половина от этого числа молекул, т.е. $1/6$ от общего числа молекул в сосуде). За время Δt до стенки долетят молекулы, находящиеся на расстоянии не далее $v_i \Delta t$ (см. рис. 9.2), число соударений в единицу времени с единичной поверхностью ΔS выражается через число молекул i группы N_i долетевших до стенки:

$$v_i = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{1/6 \Delta n_i \Delta V}{\Delta S \Delta t} = \frac{1/6 \Delta n_i v_i \Delta t \Delta S}{\Delta S \Delta t} = \frac{\Delta n_i v_i}{6}. \quad (9.5)$$

Просуммируем по всем группам молекул:

$$v = \sum v_i = \frac{\sum \Delta n_i v_i}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sum \Delta n_i v_i}{n} \right) n = \frac{n \langle v \rangle}{6}, \quad (9.6)$$

где $\langle v \rangle = \left(\frac{\sum \Delta n_i v_i}{n} \right)$ – средняя скорость молекул.

Оценим число соударений для воздуха при нормальных условиях. Считая $n \sim 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $\langle v \rangle \sim 10^3 \text{ м/с}$, получим $v \sim 10^{28} \text{ л/с} \cdot \text{м}^2$.

Оценим давление газа на стенку. Давление газа на стенку есть совокупное действие многих молекул. Считаем, что при абсолютно упругом соударении со стенкой сосуда молекула, налетающая на стенку нормально, имеет импульс $\vec{p}_1 = m_0 \vec{v}$, а после соударения $\vec{p}_2 = -m_0 \vec{v}$ и изменяет свой импульс на величину $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -m_0 \vec{v} - m_0 \vec{v} = -2m_0 \vec{v}$, где модуль изменения импульса $\Delta p = 2m_0 v$. За время Δt до стенки долетит N_i молекул в i -й группе (см. 9.5) $N_i = \frac{\Delta n_i v_i}{6} \Delta S \Delta t$, которые передадут импульс

$\Delta p N_i = 2m_0 v_i \frac{\Delta n_i v_i}{6} \Delta S \Delta t = \frac{1}{3} m_0 v_i^2 \Delta n_i \Delta S \Delta t$. Просуммируем приращение импульса по всем группам, помножим и поделим на концентрацию молекул:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \sum \Delta p N_i = \left(\sum \frac{1}{3} m_0 v_i^2 \Delta n_i \Delta S \Delta t \right) \frac{n}{n} = \\ &= \frac{1}{3} m_0 n \Delta S \Delta t \sum \left(\frac{\Delta n_i v_i^2}{n} \right) = \frac{1}{3} m_0 n \Delta S \Delta t \langle v^2 \rangle. \end{aligned}$$

Выразим давление, как импульс, передаваемый в единицу времени единичной площадке:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle.$$

Полученное выражение можно представить в виде:

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle, \quad (9.7)$$

где $\langle W_k \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle$ – среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул газа.

Полученное уравнение (9.7) носит название **основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов**: давление газа определяется средней кинетической энергии поступательного движения молекул газа.

Надо заметить, что выражение (9.7) несмотря на значительные упрощения является точным. Коэффициент $1/3$ получался как произведение 2 и $1/6$, тогда как точное решение задачи дает коэффициент $1/3$ как произведение $1/4$ (число ударов) и $4/3$ (передаваемый импульс).

Сопоставляя уравнения (9.2) и (9.7) получаем, что **среднюю кинетическую энергию** поступательного движения молекул можно выразить как:

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (9.8)$$

Выражение (9.8) позволяет определить **физический смысл температуры**: температура есть мера средней кинетической энергии молекул.

Из (9.8) можно получить выражение для **средней квадратичной скорости** $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, или с учетом связи $k = R/N_A$:

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (9.9)$$

Число степеней свободы тела (молекулы) называется минимальное число независимых переменных, однозначно определяющих положение тела (молекулы) в пространстве.

Для молекулы одноатомного газа, необходимы три переменных (координаты), чтобы однозначно определить положение молекулы в пространстве (молекула совершает поступательное движение, вращение молекулы не изменяет ее положение в пространстве). Тогда число степеней свободы молекулы одноатомного газа $i=3$ (рис. 9.3 а). Если молекула двухатомная, то в модели жесткой «гантели» (отсутствуют колебания и перемещения атомов относительно друг друга) кроме трех поступательных степеней свободы молекула имеет и две вращательные, поворот относительно еще одной оси не изменяет положение в пространстве (рис. 9.3 б), $i=5$. Для трехатомной молекулы с жесткими связями $i=6$ (3 поступательных и три вращательных степени свободы), рис. 9.3 в. Если в двух и более атомных молекулах связи не жесткие, то у молекул появляются **колебательные степени свободы**.

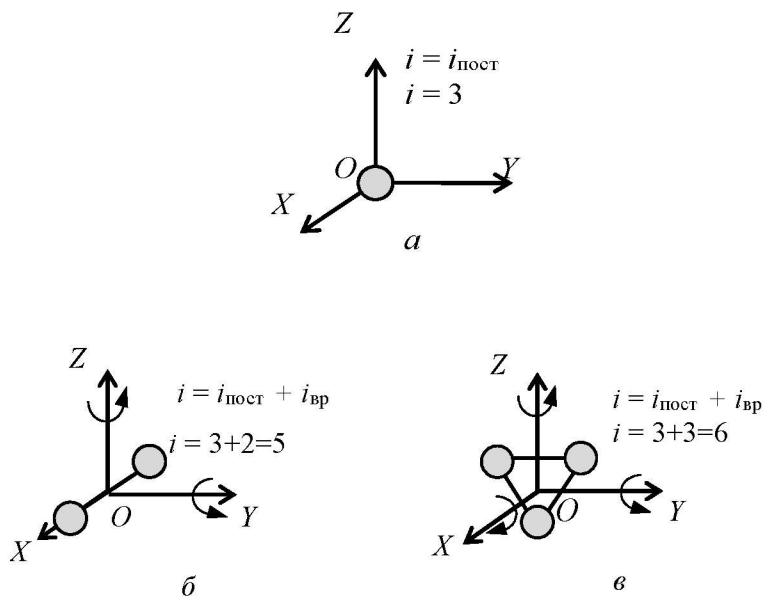


Рис. 9.3

С понятием степеней свободы связан один из важнейших законов молекулярно-кинетической теории – теорема о равнораспределении средней энергии молекул по степеням свободы. Больцман предположил, что энергия молекулы равномерно распределена по степеням ее свободы. Действительно из (9.8) при трех поступательных степенях свободы на **каждую степень свободы приходится в среднем энергия $kT/2$** . Тогда выразить среднюю энергию молекулы можно как:

$$\langle W \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (9.10)$$

В формуле (9.10) число i совпадает с числом степеней свободы только для молекул с жесткими связями.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите характеристики теплового движения молекул в различных агрегатных состояниях.
2. Чем отличается статистический метод исследования от термодинамического?
3. Какая форма уравнения состояния идеального газа наиболее удобна для определения концентрации частиц этого газа?
4. Можно ли в координатах (p, V) ; (p, T) ; (V, T) изобразить неравновесный процесс?
5. Чем определяются количество степеней свободы молекулы?
6. Сколько степеней свободы имеют молекулы гелия, азота, аргона, воздуха?
7. Чем определяется давление идеального газа согласно молекулярно-кинетической теории?
8. Сравните среднеквадратичные скорости молекул азота и кислорода при одной и той же температуре.

10. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Элементарные сведения из теории вероятностей

Макроскопические свойства систем, состоящих из очень большого числа частиц, изучаются статистическим методом. В подобных системах существуют некоторые средние значения физических величин, которые характеризуют всю совокупность частиц в целом (в газе это средние значения скоростей теплового движения молекул, их энергий и т.д.). Про такие величины говорят, что они имеют статистический характер и подчиняются определенным закономерностям, не свойственным отдельным частицам. Подобные закономерности называются статистическими или вероятностными. Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем. Познакомимся с основными понятиями теории вероятностей.

Событием (случаем) в теории вероятностей называют явление, о котором можно говорить, что оно либо произошло, либо нет. Можно различать события достоверные и невозможные, случайные и равновозможные и др. **Вероятностью** данного события P называется отношение числа n благоприятных исходов опытов (таких, в которых интересующее нас событие произошло) к полному числу опытов N , когда полное число опытов стремится к бесконечности:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

В теории вероятностей доказываются две теоремы, заключающейся в том, что если P_A – вероятность события A , P_B – вероятность события B , то операции сложения и умножения вероятностей выполняются так:

1) $P_{A \text{ или } B} = P_A + P_B$, где $P_{A \text{ или } B}$ – вероятность двух несовместимых событий A и B , заключающаяся в том, что произошло либо событие A , либо событие B ;

2) $P_{AB} = P_A P_B$, где P_{AB} – вероятность двух независимых событий A и B , состоящая в появлении совместно и события A , и события B .

В статистической физике важным является понятие среднего значения. Рассмотрим это понятие на следующем примере. Пусть выполнено N однотипных измерений величины a . В n_1 случаях значение составило a_1 , в n_2 случаях a_2 , и т.д., в n_m случаях a_m , $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$. **Среднее значение величины a :**

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_m n_m}{N}.$$

В пределе, при $N \rightarrow \infty$, $P_1 = n_1 / N$, $P_2 = n_2 / N$, $P_m = n_m / N$ и среднее значение равно:

$$\langle a \rangle = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_m P_m,$$

где $P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1$.

Полученное выражение справедливо для событий конечно-го числа, как поступать в случаях, если множество событий бесконечно и непрерывно? Необходимы функциональные зависимости, задающие распределение нужных величин во всей рассматриваемой области изменения параметров функций. Рассмотрим

макроскопическую систему. Говорят, что частицы системы образуют **статистический ансамбль**. Пусть каждый из элементов системы имеет определенное значение какого-либо физического параметра z . **Функцией распределения $f(z)$** элементов системы по параметру z называется отношение:

$$f(z) = \frac{dN}{N dz}, \quad (10.1)$$

где dN – число частиц, у которых физический параметр лежит в пределах от z до $z + dz$; N – полное число частиц ансамбля.

Отношение dN/N по определению является вероятностью $dP_z = \frac{dN}{N}$, задающей возможность для частиц иметь значение параметра z в пределах $[z \div z + d z]$. С учетом (10.1) $dP_z = f(z) dz$. Вероятность имеет простую наглядную интерпретацию: на графике зависимости $f(z)$, пример которого приведен на рис. 10.1, она равна элементарной площади $f(z) dz$.

Для вероятности выполняется **условие нормировки**: $\int_z dP_z = 1$ (также как и для конечного значения событий сумма всех вероятностей равна единице), тогда условие нормировки функции распределения запишется в виде:

$$\int_z f(z) dz = 1. \quad (10.2)$$

Зная функцию распределения, можно найти **среднее значение параметра z** по системе:

$$\langle z \rangle = \int_{z_1}^{z_2} z f(z) dz, \quad (10.3)$$

где z_1 и z_2 – минимальное и максимальное значения параметра в системе.

Среднее значение произвольной функции $\varphi(z)$ параметра z :

$$\langle \varphi(z) \rangle = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f(z) dz. \quad (10.4)$$

Рассмотрим поведение молекул идеального газа в замкнутом объеме. В квазистатическом состоянии тепловое движение молекул представляет собой беспорядочное (хаотическое) движение. Все направления скоростей молекул равновероятны, а модули скоростей не могут быть одинаковыми в силу столкновения молекул. Задача о распределении молекул газа по скоростям была поставлена и решена Д. Максвеллом в 1859 г.

Пусть газ состоит из большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии хаотического теплового движения при определенной температуре. Силовые поля, действующие на газ, отсутствуют. Необходимо определить распределение молекул по скоростям движения.

Существует формальный способ, облегчающий решение задачи. Примем произвольную точку пространства за начало координат. Отложим от нее в произвольный момент времени векторы скоростей всех молекул газа, модули которых изменяются от некоторой минимальной скорости, до некоторой максимальной. Концы векторов скоростей («скоростные точки») образуют трехмерное пространство, называемое **пространством скоростей**. Введем в этом пространстве прямоугольные координаты v_x, v_y, v_z , проекции векторов скоростей на эти оси являются координатами скоростных точек. В силу равновероятности направлений движения молекул расположение точек относительно начало координат будет сферически симметричным. Все молекулы, значения модулей скоростей которых лежат в интервале $v \div v+dv$, в пространстве скоростей характеризуются набором векторов \vec{v} , у которых концы лежат внутри объема dV . Этот объем образует сферический слой dV (на рис. 10.2 сечение этого слоя показано штриховкой). Слой имеет радиус v и толщину dv . Относительное число точек dN/N , попавших внутрь выделенного объема dv , представляет собой для молекул вероятность иметь скорость в выделенном интервале:

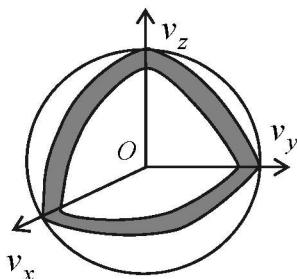


Рис. 10.2

$$dP_v = \frac{dN}{N} = f(v)dV = f(v)4\pi v^2 dv = F(v)dv,$$

где $f(v)$ является объемной плотностью вероятности, $F(v)$ функция распределения молекул по модулям скоростей. Вид функции $F(v)$ и был впервые установлен Максвеллом. Сокращенно повторим вывод. Обозначим вероятность того, что выбранная молекула имеет значение модуля проекции скорости на направление OX в интервале $v_x \div v_x + dv_x$ как $dP_{v_x} = f(v_x)dv_x$. Аналогично определяются вероятности и для направлений OY , OZ dP_{v_y} , dP_{v_z} . Тогда вероятность dP_v можно выразить $dP_v = dP_{v_x} dP_{v_y} dP_{v_z} = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z = f(v)dv_x dv_y dv_z$, где:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (10.5)$$

Мы воспользовались теоремой об умножении вероятностей, считая, что события, заключающиеся в нахождении проекций скоростей в заданных интервалах, являются статистически независимыми. Это предположение строго доказывается исходя их хаотичности теплового движения. Понятно, что функции распределения по проекциям скоростей подобны, поиск функции $f(v)$ сводится к отысканию функции распределения по проекции скорости, например $\varphi(v_x)$. Пользуясь формальными математическим подходом (прологарифмировать (10.5), затем найти частную производную по v_x и выполнить обратные операции) можно показать, что функция $\varphi(v_x)$ подчиняется распределению Гаусса:

$$\varphi(v_x) = A \cdot e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}. \quad (10.6)$$

Для нахождения постоянных A и α необходимы два уравнения. Одним является условие нормировки функции распределения вероятности (10.2), в качестве второго используют (9.4). Окончательно функция распределения по проекции скорости $\varphi(v_x)$ имеет вид:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}. \quad (10.7)$$

Используя (10.5) выразим функцию распределения по модулям скоростей $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$:

$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (10.8)$$

График функции $F(v)$ представлен на рис. 10.3. Вид графика определяет произведение двух зависимостей от v – убывающей экспоненциальной и возрастающей квадратичной, функция имеет максимум. Поскольку $dP_v = F(v)dv$, то площадь под элементом графика $F(v)$ будет определять вероятность обнаружения молекулы со скоростью, численное значение которой лежит в интервале $v \div v+dv$ (на рис. 10.3 эта площадь заштрихована). С изменением температуры распределение плотности вероятности от скорости изменяет свой вид. На рисунке 10.4 показано, что с увеличением температуры максимум функции становится менее выраженным и переходит в область больших скоростей. Это означает, что увеличивается доля молекул, обладающих большими скоростями.

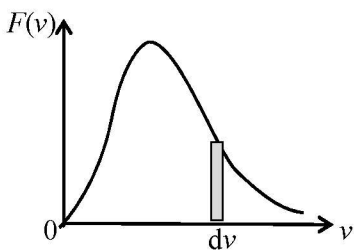


Рис. 10.3

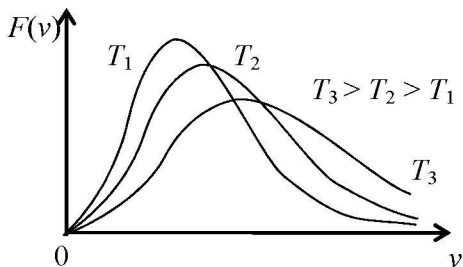


Рис. 10.4

Запишем закон распределения молекул газа по модулям скоростей, который определяет, какое число dN молекул газа из общего числа его молекул N в единице объема имеет при данной температуре скорости, заключенные в интервале от v до $v+dv$:

$$dN = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv. \quad (10.9)$$

С помощью такого распределения можно, например, рассчитать среднюю кинетическую энергию молекул. Воспользуемся определением (10.4). Кинетическая энергия молекулы – это функция ее скорости $\varphi(z) = \frac{m_0 v^2}{2}$, поэтому

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} f(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 dv = \frac{3}{2} kT.$$

Проанализируем поведение функции распределения молекул по скоростям. Найдем, при какой скорости наблюдается максимальное значение функции $F(v)$. Такую скорость $v_{\text{н.в.}}$ называют **наиболее вероятной скоростью молекул**. Для того, чтобы найти $v_{\text{н.в.}}$ продифференцируем выражение (10.8):

$$F'(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left[2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(-\frac{2vm_0}{2kT} \right) \right].$$

Приравняв полученную производную к 0, найдем значение $v_{\text{н.в.}}$:

$$2v_{\text{н.в.}} - \frac{v_{\text{н.в.}}^3 m_0}{kT} = 0 \Rightarrow v_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (10.10)$$

Средняя арифметическая скорость молекул рассчитывается в соответствии с (10.3):

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^3 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (10.11)$$

Среднеквадратичной скоростью молекул называется скорость, равная квадратному корню из среднего значения квадрата скоростей молекул $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. По определению (10.4) найдем:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \int_0^{\infty} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^4 dv = \frac{3kT}{m_0}. \quad (10.12)$$

Тогда

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (10.13)$$

При расчете в (10.11) и (10.12) использованы пределы не от минимальной до максимальной скорости молекул газа, а от нуля до бесконечности, такое упрощение позволяет просто рассчитать интегралы и не вносит ошибки в расчеты.

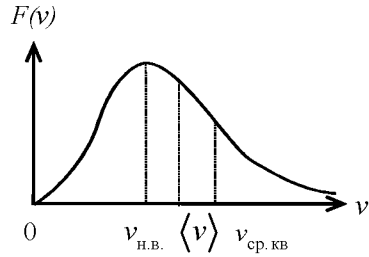


Рис. 10.5

Сравнивая между собой (10.10), (10.11), и (10.13), отметим, что $v_{н.в.} < \langle v \rangle < v_{ср.кв.}$. Эти скорости нанесены на график плотности вероятности на рис. 10.5.

Подводя итоги рассмотрению, важно отметить, что функция распределения плотности вероятности (10.9) позволяет найти не число молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, а только долю от общего числа молекул. Распределение Максвелла можно представить и в виде распределения молекул по кинетической энергии поступательного движения, выполнив соответствующую замену в (10.9). Для примера использования полученных выражений рассмотрим азот при температуре $T = 273$ К. Молярная масса азота $\mu = 0,028$ кг/моль. При такой температуре наиболее вероятная скорость молекул, в соответствии с (10.10), составит:

$$v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{0,028}} = 403 \text{ м/с.}$$

Подставим выражение для наиболее вероятной скорости (10.14) в функцию распределения (10.11):

$$F(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} v_{н.в.}} \right)^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2;$$

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{н.в.}^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Используя последнее выражение, очень легко находить ответы на вопросы о распределении частиц по скоростям. Найдем

долю молекул азота, скорости которых принимают значения от 403 м/с до 413 м/с (ширина интервала скоростей составляет 10 м/с, а середина интервала – 408 м/с):

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{403}^{413} F(v) dv = \int_{403}^{413} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{н.в.}^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{н.в.}^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv.$$

Для вычисления последнего интеграла учтем, что показатель экспоненты можно записать следующим образом:

$$\frac{m_0 v^2}{2kT} = \frac{v^2}{v_{н.в.}^2}.$$

Кроме того, воспользуемся теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{н.в.}^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{v^2}{v_{н.в.}^2}} dv = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{403^3} \cdot 408^2 \cdot e^{-\frac{408^2}{403^2}} \cdot (413 - 403) = 0,02. \end{aligned}$$

Таким образом, только 2% от общего числа молекул имеют скорости, значения которых лежат в выбранном интервале. Если сместить интервал в другой участок скоростей, например, выбрать диапазон 1000÷1010 м/с (ширина интервала скоростей по-прежнему составляет 10 м/с, а середина интервала – 1005 м/с), то только 0,07% от общего числа молекул попадут в этот интервал скоростей.

Рассмотрим идеальный газ в однородном поле силы тяжести. Газ находится в состоянии термодинамического равновесия при некоторой температуре. Получим распределение молекул по потенциальным энергиям.

Рассмотрим равновесие некоторого объема газа, находящегося на высоте h от поверхности Земли, уровень которой выберем за условный ноль отсчета потенциальной энергии (рис. 10.6). Атмосферное давление на данном уровне обозначим как p_0 . Пусть объем газа – это цилиндр высотой dh . На рисунке 10.6 указаны

давления, действующие на рассмотренный газовый цилиндр со стороны вышестоящих и нижележащих слоев атмосферы. Поскольку столбик газа находится в равновесии, то

$$(p + dp)S + dm - pS = 0,$$

где S – площадь основания столбика; dm – его масса.

Выразив массу объема газа через его плотность как $dm = \rho S dh$, получим дифференциальное уравнение:

$$\rho S g dh + dp S = 0. \quad (10.14)$$

Плотность газа, в соответствии с уравнением состояния идеального газа, определяется как $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$, тогда уравнение (10.14) запишется в виде:

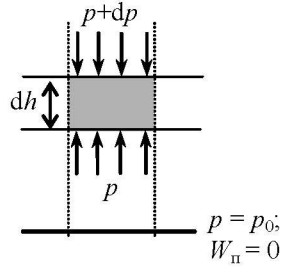
$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g dh.$$

Знак “–” в этом уравнении показывает, что давление газа уменьшается с ростом высоты слоя от поверхности Земли. Разделим переменные в уравнении: $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$, а потом проинтегрируем левую и правую части:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{\mu g}{RT} dh; \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu gh}{RT}; \quad p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Так как $\frac{\mu}{R} = \frac{m_0}{k}$, а $m_0 gh = W_{II}$, то последнее выражение перепишем следующим образом:

$$p = p_0 e^{-\frac{W_{II}}{kT}}. \quad (10.15)$$



Полученное соотношение (10.15) и есть барометрическая формула, которая определяет зависимость давления идеального газа от потенциальной энергии его молекул (от высоты), это распределение было получено Больцманом. Поскольку $p = nkT$, то (10.15) можно записать в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{W_{II}}{kT}}. \quad (10.16)$$

Уравнение (10.16) описывает распределение концентрации молекул в зависимости от их потенциальной энергии. Из него следует, что наибольшая концентрация молекул там, где $W_{II} = 0$,

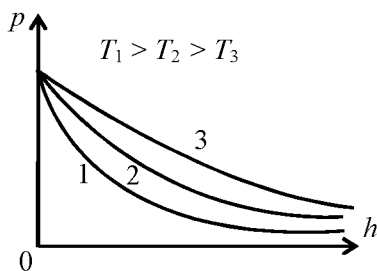


Рис. 10.7

т.е. вблизи поверхности Земли. График зависимости (10.15) представлен на рис. 10.7. Ж. Перрен в 1908 г. применил барометрическую формулу к распределению по высоте частичек эмульсии, что позволило ему экспериментально определить значение постоянной Больцмана.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие предположения делаются при выводе закона распределения молекул по скоростям теплового движения?
2. Что происходит с максимальным значением функции распределения Максвелла при увеличении температуры?
3. Каков физический смысл площади под кривой распределения?
4. Может ли планета неограниченно долго удерживать изотермическую атмосферу?
5. Определите давление молекул идеального газа на стенки сосуда кубической форсы, если распределение молекул по проекциям скоростей описывается распределением Максвелла, а температура газа и концентрация молекул известны.

11. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Полная энергия термодинамической системы включает в себя кинетическую энергию механического движения системы как целого, потенциальную энергию системы во внешнем потенциальном поле и внутреннюю энергию U – энергию всех видов движения и взаимодействия частей системы, зависящую только от внутреннего строения системы.

В дальнейшем будем рассматривать термодинамические системы, которые макроскопически неподвижны и не находятся во внешних полях. Для таких систем полная и внутренняя энергия совпадают.

В термодинамике под внутренней энергией понимают лишь кинетическую энергию теплового движения молекул, потенциальную энергию взаимодействия атомов в молекуле, а также потенциальную энергию взаимодействия молекул между собой. Внутренняя энергия является однозначной **функцией состояния** термодинамической системы. Это означает, что значение внутренней энергии в каком-либо произвольно выбранном состоянии не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иначе говоря, изменение внутренней энергии ΔU_{12} при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода. В частности, если в результате какого-либо процесса система возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии равно нулю.

Внутренняя энергия идеального газа. В соответствии с определением идеального газа его внутренняя энергия будет представлять лишь кинетическую энергию движения молекул, поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул в идеальном газе отсутствует. Средняя кинетическая энергия молекулы газа определяется соотношением (9.6). Для ν молей идеального газа кинетическая энергия его молекул:

$$W_k = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} N_A kT.$$

Это соотношение можно переписать для внутренней энергии как:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (11.1)$$

Внутренняя энергия заданного числа молей идеального газа – однозначная функция его температуры. Она зависит только от состояния идеального газа и не зависит от того, каким образом газ пришел в данное состояние. Изменение внутренней энергии данной массы идеального газа в произвольном процессе

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad (11.2)$$

Обмен энергией между термодинамической системой и внешними телами может осуществляться двумя различными способами: совершением работы и теплообменом. **Работой**, совершаемой над системой, называется энергия, передаваемая термодинамической системе при силовом взаимодействии с ней. **Количеством теплоты (теплотой)** называется энергия, передаваемая термодинамической системе внешними телами путем теплообмена.

Теплообмен происходит между телами или частями одного и того же тела, нагретыми до различной температуры. Способы осуществления теплообмена – конвекция, теплопроводность и излучение.

Работа газа. При расширении или сжатии газа, заключенного в сосуд с подвижным невесомым поршнем площадью S можно определить работу, совершаемую внешними силами F по изменению объема газа. Если при действии внешних сил на поршень он совершает перемещение dx , то по определению элементарная работа внешних сил будет равна $\delta A' = F dx$, где F – проекция вектора равнодействующей внешних сил на перемещение поршня. В равновесном процессе при изменении объема газа в каждый момент силы давления газа уравновешивают внешние силы, а давление газа равно внешнему давлению. Тогда газ совершает элементарную работу $\delta A = pS dx = p dV$, где $dV = Sdx$ – изменение объема газа. Окончательно элементарная работа газа:

$$\delta A = p dV. \quad (11.3)$$

Если изобразить процесс изменения объема газа на диаграмме (p, V) , то элементарная работа газа численно определяется площадью под бесконечно малым участком этого графика (рис. 11.1). Работа идеального газа в произвольном процессе будет численно равна площади под графиком этого процесса на диаграмме (p, V) :

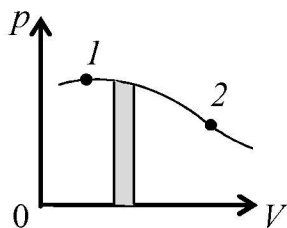


Рис. 11.1

$$A = \int_1^2 p dV. \quad (11.4)$$

Работа будет положительной, если газ увеличивает свой объем. Работа газа против внешних сил, когда газ уменьшает свой объем будет отрицательна. Работа идеального газа процессом перехода газа из одного состояния в другое.

В отличие от внутренней энергии системы, которая является однозначной функцией состояния этой системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками процесса. Работа и теплота не являются функциями состояния системы. Поэтому обозначение элементарной (бесконечно малой) работы, совершенной над системой, и элементарного (бесконечно малого) количества теплоты, переданного системе, соответственно δA и δQ . Бесконечно малое изменение внутренней энергии системы будем обозначать dU , поскольку бесконечно малое изменение функции состояния может быть определено как ее дифференциал.

Первое начало термодинамики является одним из основополагающих физических законов, полученным обобщением опытных фактов и устанавливает математическую связь между количеством теплоты, работой и приращением внутренней энергии термодинамической системы в произвольном процессе 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}, \quad (11.4)$$

количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на приращение внутренней энергии этой системы и на совершенные системой работы над внешними телами.

При сообщении системе бесконечно малого количества теплоты первое начало термодинамики записывается следующим образом:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (11.5)$$

Все физические величины, входящие в (11.5), могут быть как положительными, так и отрицательными. Если к системе подводится теплота, то $\delta Q > 0$, если теплота отводится, то $\delta Q < 0$. Общее количество теплоты, сообщаемое системе в процессе 1–2, равно алгебраической сумме количеств теплоты, сообщаемых системе на всех участках процесса:

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q.$$

Если система совершает работу над внешними телами, то считается, что $\delta A > 0$, если же над системой внешние силы совершают работу, то $\delta A < 0$. Работа, совершаемая системой в процессе 1–2, равна алгебраической сумме работ, совершаемых системой на всех участках процесса:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A.$$

Рассмотрим произвольный замкнутый процесс, совершаемый идеальным газом. **Циклом** называется процесс изменения состояния системы, в результате которого она возвращается в исходное состояние. На рисунке 11.2 изображен такой цикл – процесс 1-а-2-б-1.

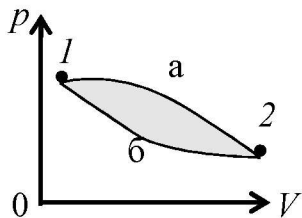


Рис. 11.2

Для отдельных процессов цикла можно записать выражение первого начала термодинамики следующим образом:

$$Q_{1a2} = A_{1a2} + \Delta U_{1a2}, \quad Q_{2б1} = A_{2б1} + \Delta U_{2б1}.$$

Если просуммировать почленно эти уравнения, то получим $Q_{ц} = A_{ц}$. Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния, то ее суммарное изменение за цикл равно 0, все количество теплоты, полученное системой в циклическом процессе, идет на совершение работы. Или можно сформулировать и обратное утверждение: для получения работы газа в цикле необходимо подведение теплоты к газу от внешней среды. При этом площадь цикла (заштрихованная на рис. 11.2) численно равна работе газа за цикл. Если цикл на

диаграмме (p, V) совершается по часовой стрелке, то работа газа за цикл положительна. Если цикл на диаграмме (p, V) совершается против часовой стрелки, то работа газа за цикл отрицательна и равна площади цикла, взятой со знаком “-”.

Применительно к циклам можно сформулировать первое начало термодинамики следующим образом: **невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является совершение работы без получения энергии извне.** Механизм, реализующий такой процесс, исторически получил название вечный двигатель первого рода. Следовательно, первое начало термодинамики запрещает создание вечного двигателя первого рода.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните физический смысл понятий работы термодинамической системы и работы над такой системой.

2. В чем заключается качественное различие между работой и теплообменом как формами передачи энергии?

3. Почему малое количество теплоты, сообщаемое термодинамической системе, не является полным дифференциалом?

4. Можно ли ввести функцию состояния «работа»?

5. Определите молярную теплоемкость идеального газа, расширяющегося по закону $p^2V = \text{const}$.

6. Определите теплоемкость одного моля одноатомного газа в некотором процессе, если в этом процессе он совершил работу $A = (p_1V_1 - p_2V_2)$.

12. ПОНЯТИЕ ТЕПЛОЕМКОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Для определения количества теплоты, подведенного к идеальному газу в произвольном процессе можно воспользоваться первым началом термодинамики (11.4). Однако часто бывает удобно рассчитать необходимую величину непосредственно, не

прибегая к расчету работы и приращения внутренней энергии. С этой целью введем понятие теплоемкости. **Теплоемкость тела (системы)** численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу (системе), чтобы изменить его температуру на 1 К в данном процессе:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Из определения теплоемкости следует, что **теплоемкость**, как и количество теплоты зависит от процесса. Чтобы сравнивать между собой теплоемкости различных веществ, вводят понятие **удельной теплоемкости вещества**. Она численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы тела (системы), чтобы изменить ее температуру на 1 К:

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}.$$

Для газов удобно применять понятие **молярной теплоемкости**, которая определяется количеством теплоты, необходимым для изменения температуры 1 моля газа на 1 К:

$$c_m = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (12.1)$$

Рассчитаем молярные теплоемкости идеального газа в изопроцессах. Для этого подставим в (12.1) первое начало термодинамики (11.5):

$$c_m = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{(dU + \delta A)}{dT} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT} \right).$$

Для идеального газа $dU = \frac{i}{2} \nu R dT$, и молярная теплоемкость:

$$c_m = \frac{i}{2} R + \frac{1}{\nu} p \frac{dV}{dT}. \quad (12.2)$$

В **изохорном процессе** объем газа не изменяется, $dV=0$, из (12.2) получаем выражение для молярной теплоемкости идеального газа в изохорном процессе, которую обозначим C_V :

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (12.3)$$

Тогда внутренняя энергия идеального газа может быть также определена по формуле:

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (12.4)$$

В изобарном процессе газ совершает работу и тогда выражение для молярной теплоемкости идеального газа (12.2) в изобарном процессе, которую обозначим C_p для одного моля приобретает вид:

$$C_p = \frac{i}{2} R + p \frac{dV_m}{dT}.$$

Вспользуемся уравнением Клапейрона– Менделеева для 1 моля газа (9.2), продифференцировав его выразим элементарную работу газа в изобарном процессе как $p dV_m = R dT$. Тогда:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (12.5)$$

Нетрудно видеть, что (12.5) можно записать в виде:

$$C_p = C_V + R, \quad (12.6)$$

которое было впервые получено Р. Майером в 1842 г., а поэтому называется уравнением Майера.

В изотермическом процессе газ не изменяет свою температуру, поэтому $dT = 0$. Однако газ расширяется, следовательно, он совершает работу: $\delta A \neq 0$. Тогда молярная теплоемкость идеального газа в изотермическом процессе:

$$C_T = \frac{i}{2} R + p \frac{dV_m}{dT} = \pm \infty.$$

Кроме известных изопроцессов в термодинамике важную роль имеет адиабатический процесс. **Адиабатическим** (или **адиабатным**) процессом называют процесс, который проходит без теплообмена с окружающей средой ($Q=0$). Тогда в этом процессе $C_m = 0$, первое начало термодинамики записывается в виде: $0 = dU + \delta A$, подставив соответствующие значения, получим:

$$0 = c_V v dT + p dV. \quad (12.7)$$

Из первого начала термодинамики, воспользовавшись уравнением Клапейрона-Менделеева (9.2) можно получить уравнение

адиабатного процесса. Для этого продифференцируем (9.2) $p dV + V dp = \nu R dT$ и, выразив νdT , подставим в (12.7). В результате получим уравнение $(p dV + V dp)C_V + R p dV = 0$, которое перепишем в виде: $(C_V + R) p dV + C_V V dp = 0$. Далее разделим уравнение на pV и с учетом (12.6) получим дифференциальное уравнение $\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$. Введя обозначение $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ и выполнив интегрирование, получим $\gamma \ln V + \ln p = \text{const}$ или $\ln p V^\gamma = \text{const}$. Откуда получается:

$$p V^\gamma = \text{const} . \quad (12.8)$$

Это уравнение адиабатного процесса впервые было получено французским математиком и механиком С. Пуассоном, называется уравнением Пуассона. Показатель степени в этом уравнении называется показателем Пуассона для идеального газа (или показателем адиабаты). Нетрудно увидеть, что, согласно (12.3) и (12.5), следует:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} . \quad (12.9)$$

Из (12.9) следует что всегда $\gamma > 1$ и в сравнении с изотермой график зависимости (12.8) будет идти круче изотермы в координатах (p, V) . Отметим, что в соответствии с (12.9) показатель адиабаты может принимать следующие значения:

– для одноатомного газа ($i=3$) $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1,67$;

– для двухатомного газа ($i=5$) $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$;

– для трехатомного газа ($i=6$) $\gamma = \frac{4}{3} \approx 1,33$.

Во всех рассмотренных изопроцессах и адиабатном процессе молярные теплоемкости идеального газа постоянны и зависят только от внутреннего строения его молекул. Процесс, в котором теплоемкость вещества не изменяется, называется политропным. Получим уравнение такого процесса для идеального газа. Используем первое начало термодинамики в виде:

$C_m \nu dT = \frac{i}{2} \nu R dT + p dV$, где $\nu = \frac{m}{\mu}$. Продифференцировав уравнение Клайперона–Менделеева (9.2), получим $p dV + V dp = \nu R dT$. Тогда

$$C_m \frac{pdV + Vdp}{R} = C_V \frac{pdV + Vdp}{R} + p dV,$$

$$pdV(C_m - C_V - R) = Vdp(C_V - C_m).$$

Воспользовавшись (12.6) и получим:

$$pdV(C_m - C_p) = Vdp(C_V - C_m).$$

Полученное дифференциальное уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dV}{V} \frac{C_m - C_p}{C_V - C_m} = \frac{dp}{p}.$$

Обозначим:

$$n = \frac{C_m - C_p}{C_m - C_V}, \quad (12.10)$$

тогда

$$n \ln V = -\ln p + \text{const}$$

или

$$pV^n = \text{const}. \quad (12.11)$$

Полученное соотношение (12.11) является уравнением политропного процесса, в котором теплоемкость газа остается постоянной величиной. Величина n , определяемая по (12.10), называется **показателем политропы** для данного газа. Если из (12.10) выразить молярную теплоемкость газа C_m в политропном процессе, то найдем:

$$C_m = C_V \frac{n - \frac{C_p}{C_V}}{n - 1} = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}. \quad (12.12)$$

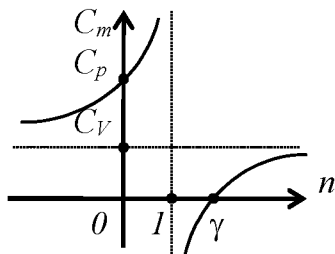


Рис. 12.1

График зависимости теплоемкости газа в политропном процессе от показателя политропы изображен на рис. 12.1. Нетрудно видеть, что при $n = 0$ из уравнения (12.11) следует $pV^n = pV^0 = p = \text{const}$, т.е. уравнение изобарного процесса. В этом случае, в соответствии с (12.12), $C_m = C_p$.

При $n = 1$ из уравнения (12.11) получаем $pV^n = pV^1 = pV = \text{const}$, т.е. уравнение изотермического процесса. В этом случае, в соответствии с (12.12), $C_m \rightarrow \pm\infty$. При $n = \pm\infty$ из уравнения (12.11), извлекая корень n -й степени, можно получить $\sqrt[n]{p}V = V = \text{const}$, т.е. уравнение изохорного процесса. В этом случае, согласно (12.12), $C_m = C_V$. Следовательно, все изопроцессы идеального газа – частные случаи политропного процесса.

Полученные выражения для молярной теплоемкости газа в изопроцессах, например, в изохорном процессе (12.3) справедливы для идеального газа и дают хорошее согласие с экспериментальными значениями для многих газов при комнатной температуре. При расширении температурного диапазона наблюдаются систематические отклонения. Например, значения молярной теплоемкости азота при постоянном объеме при различных температурах приведены ниже.

T, K	80	150	250	400	600	1000	1500
$C_V, \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$	20,31	21,03	20,87	20,95	21,79	24,39	26,52

Теоретическое же значение молярной теплоемкости азота при постоянном объеме, согласно (12.3), равно 20,8 Дж/(моль·К).

Отклонения обусловлены тем, что эффективный вклад в теплоемкость вносят только некоторые степени свободы. Происходит это из-за того, что молекулярно-кинетическая теория не учитывает квантовый характер движения молекул и атомов в молекулах. При низких температурах у молекулы возбуждаются только степени свободы поступательного движения. На враща-

тельные степени свободы приходится слишком малая энергия, ими пренебрегают. В этих условиях газ ведет себя как одноатомный. С ростом температуры начинают возбуждаться вращательные степени свободы, а затем – колебательные. Молекула перестает быть жесткой, расстояния между атомами в молекуле начинают меняться. Поскольку механическим колебаниям гармонического осциллятора присуща кинетическая и потенциальная энергия, то на колебательную степень свободы приходится энергия

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2} kT. \text{ Это и приводит к заниженным значениям теплоемкости идеального газа, получаемым согласно классической теорией теплоемкости, по сравнению с результатами эксперимента. Строгая количественная теория теплоемкости основывается на законах квантовой механики, где доказывается, что внутренняя энергия атомных систем может принимать дискретные значения.}$$

Выполним рассмотрение изопроцессов идеального газа с помощью первого начала термодинамики. Задачей является расчет работы, приращения внутренней энергии и количества теплоты.

Изохорный процесс. Поскольку в этом процессе $V = \text{const}$, то газ не совершает никакой работы над внешними телами: $A_V = 0$. В соответствии с первым началом термодинамики $Q_V = \Delta U_V$. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, можно выразить изменение внутренней энергии идеального газа следующим образом:

$$\Delta U_V = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p. \text{ Подводимое к газу количество теплоты можно рассчитать как: } Q_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Изобарный процесс. В данном процессе происходит изменение объема газа, поэтому он совершает работу над внешними силами. Поскольку $p = \text{const}$ то, согласно (11.4), $A_p = p \Delta V =$

$$= \frac{m}{\mu} R \Delta T. \text{ Из этого выражения следует физический смысл универсальной газовой постоянной: она численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при повышении его температуры на 1 К. Уравнение первого начала термодинамики}$$

версальной газовой постоянной: она численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при повышении его температуры на 1 К. Уравнение первого начала термодинамики

для изобарного процесса запишем следующим образом: $\delta Q_p = dU_p + \delta A_p$, или $Q_p = \Delta U_p + A_p$. Используя уравнение Клапейрона – Менделеева, выразим приращение внутренней энергии идеального газа следующим образом: $\Delta U_p = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V$.

Подводимое к газу количество теплоты определяется как

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T.$$

Изотермический процесс. Поскольку в этом процессе $T = \text{const}$, то внутренняя энергия идеального газа не изменяется: $\Delta U_T = 0$. Уравнение первого начала термодинамики для такого процесса запишем в виде $\delta Q_T = \delta A_T$, или $Q_T = A_T$. Следовательно, при подведении к газу теплоты ($Q_T > 0$), он расширяется, совершая положительную работу против внешних сил ($A > 0$). Получим выражение для расчета работы газа в изотермическом процессе, проинтегрировав (11.4):

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Поскольку в данном процессе теплоемкость бесконечна, то для расчета подведенного к газу количества теплоты можно использовать лишь выражение первого начала термодинамики. Основной вывод при анализе превращения энергии в изотермическом процессе: получаемая от внешней среды теплота идет не на увеличение температуры газа, а возвращается обратно в среду в виде механической работы.

Адиабатный процесс. В таком процессе газ не получает теплоты из внешней среды: $\delta Q_{\text{ад}} = 0$, поэтому $0 = dU_{\text{ад}} + \delta A_{\text{ад}}$. Поэтому при расширении газа, когда он совершает положительную работу против внешних сил ($A > 0$), изменение внутренней энергии газа отрицательно ($\Delta U < 0$). Следовательно, температура газа уменьшается. Поэтому на диаграмме (p, V) кривая адиабатического расширения газа (адиабата) будет располагаться ниже

кривой изотермического расширения (изотермы), проведенной из той же начальной точки (рис. 12.2). Таким образом, адиабата на диаграмме (p, V) проходит круче, чем изотерма. Расчет совершенной газом работы можно провести в соответствии с первым началом термодинамики: $A_{\text{ад}} = -\Delta U_{\text{ад}}$. Можно получить выражение для расчета

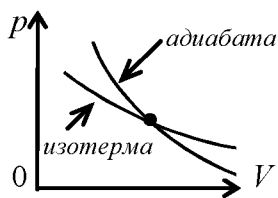


Рис. 12.2

работы в адиабатном процессе и с помощью определения работы (11.4). Для этого воспользуемся уравнением Пуассона $pV_1^\gamma = p_1V_1^\gamma = \text{const}$. Тогда

$$A_{\text{ад}} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} \, dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right].$$

Поскольку $\gamma > 1$, то последнее выражение удобно переписать в виде:

$$A_{\text{ад}} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Реальный адиабатный процесс должен происходить, с одной стороны, достаточно быстро, чтобы в системе не успел произойти теплообмен с окружающей средой, но, с другой стороны, достаточно медленно, чтобы процесс оставался равновесным.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему молярная теплоемкость идеального газа в изобарном процессе всегда больше молярной теплоемкости в изохорном процессе.
2. От каких параметров зависит молярная теплоемкость идеального газа в изобарном процессе?
3. Объясните, почему теплоемкость идеального газа зависит от протекающего в газе процесса.
4. Сформулируйте первое начало термодинамики различными способами.
5. Что такое молярная теплоемкость газа?

13. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ЦИКЛ КАРНО

Первое начало не позволяет определить направление протекания процессов. Например, процесс самопроизвольной передачи теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу, если уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако опыты показывают, что такой процесс не происходит. Обобщение огромного экспериментального материала привело к необходимости расширения термодинамики. Было сформулировано второе начало термодинамики, позволившее превратить термодинамический метод исследования физических явлений в один из самых универсальных методов, применяемых в физике. Однако для того, чтобы можно было перейти к изучению второго закона термодинамики, необходимо рассмотреть предварительно целый ряд вопросов.

Введем понятие обратимого процесса. **Термодинамический процесс, называется обратимым, если он может быть проведен как в прямом, так и обратном направлениях через одни и те же состояния (но в обратной последовательности) так, что после осуществления прямого и обратного процесса в окружающей среде не возникает никаких остаточных изменений.** Процесс, который не удовлетворяет вышеуказанному условию, называется **необратимым процессом.**

Обратимый процесс является квазистатическим. Примерами обратимых процессов являются адиабатный и изотермический квазистатические процессы. Все реальные процессы протекают с конечной скоростью и сопровождаются трением и теплообменом. Следовательно, все реальные процессы, строго говоря, необратимы. Рассматривая в дальнейшем циклы, т.е. замкнутые процессы, происходящие с идеальным газом, будем считать цикл прямым, если на диаграмме (p, V) он осуществляется в направлении по часовой стрелке, и обратным, если против часовой стрелки. Тогда работа газа в прямом цикле будет положительна, а в обратном – отрицательна.

Термодинамика рассматривает превращения энергии в системах в процессах их взаимодействия с окружающими телами. Один из видов таких превращений – превращение теплоты,

переданной системе, в работу. Для осуществления такого превращения созданы специальные устройства – **тепловые машины**. На рисунке 13.1 изображено принципиальное устройство произвольной тепловой машины.

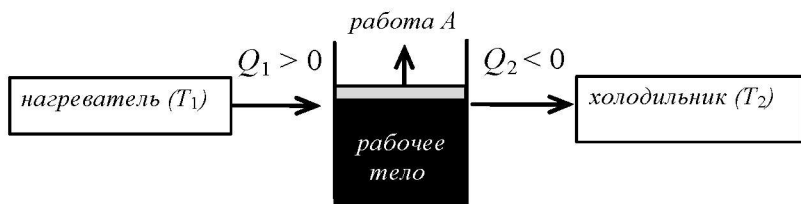


Рис. 13.1

Цель действия тепловой машины – получение работы A , которую над внешними телами будет совершать **рабочее тело**. Это может быть газ, находящийся в сосуде с подвижным поршнем, и т.п. Для совершения рабочим телом работы ему передается некоторое количество теплоты Q_1 от устройства, называемого **нагревателем**. Для постоянного (циклического) совершения работы рабочим телом необходимо привести рабочее тело в исходное состояние, после чего оно вновь сможет получить количество теплоты Q_1 от нагревателя. Возврат рабочего тела в исходное состояние (сжатие газа после его расширения) возможен при отведении от рабочего тела некоторого количества теплоты Q_2 устройству, называемому **холодильником**. Очевидно, что температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2 должны быть разными: $T_1 > T_2$. Мерой эффективности преобразования теплоты, подведенной к рабочему телу, в работу тепловой машины над внешними телами является **коэффициент полезного действия (КПД)** тепловой машины, который равен отношению работы, совершенной рабочим телом за один цикл, к количеству теплоты, полученному рабочим телом от нагревателя в этом цикле:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} \quad (13.1)$$

Применяя первое начало термодинамики к циклу рабочего тела, можно записать: $A_{\text{ц}} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$. Тогда выражение (13.1) будет справедливо и в таком виде:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (13.2)$$

Из последнего выражения следует, что КПД любой тепловой машины всегда меньше 100%, т.е. нельзя в циклическом процессе полностью превратить в работу всю теплоту, полученную рабочим телом от нагревателя. Если процессы теплообмена рабочего тела с нагревателем и холодильником сделать обратимыми, то КПД такой тепловой машины всегда будет выше, чем если бы эти процессы были необратимыми.

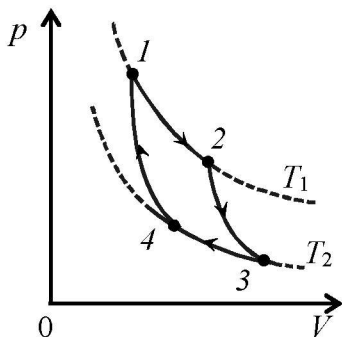


Рис. 13.2

В 1824 г. французский инженер Н.Л.С. Карно (1796–1832) в своей работе «Рассуждения о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу» предложил рассмотреть цикл тепловой машины, составленный только из обратимых процессов. У такой машины КПД должен быть больше, чем КПД любой другой машины, цикл которой состоит из необратимых процессов.

Если для подвода теплоты к рабочему телу необходимо совершить теплообмен с нагревателем, а теплообмен обратим только при равенстве температур рабочего тела и нагревателя, то осуществим теплового контакт рабочего тела с нагревателем в изотермическом процессе. Это первый процесс цикла (на рис. 13.2 кривая 1–2 – изотерма), проходящий при температуре нагревателя T_1 . Чтобы потом обратимо осуществить передачу теплоты холодильнику, т.е. изотермический процесс 3–4 при температуре холодильника T_2 , необходимо перевести рабочее тело с одной изотермы на другую. Единственным обратимым процессом при этом может быть равновесный адиабатный процесс. На диаграмме (p, V) он изображен кривой 2–3. Аналогичный процесс адиабатного

сжатия 4–1 понадобится для возвращения рабочего тела в исходное состояние. Получаемый цикл из четырех процессов носит название цикла Карно. Он является единственно возможным обратимым циклом рабочего тела при одном нагревателе и одном холодильнике в тепловой машине. КПД цикла Карно будет максимальным среди КПД всех возможных циклов, которые рабочее тело может осуществить между нагревателем и холодильником с заданными температурами T_1 и T_2 . КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температуры нагревателя и холодильника. Данные утверждения составляют содержание теоремы Карно.

Рассчитаем КПД цикла Карно η_k . Согласно (13.2):

$$\eta_k = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}. \quad (13.3)$$

Поскольку теплота от нагревателя передается в изотермическом процессе 1–2, то:

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.4)$$

Аналогично, теплоту, передаваемую холодильнику в изотермическом процессе 3–4, определим по формуле:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (13.5)$$

Подставляя (13.4) и (13.5) в (13.3), получаем:

$$\eta_k = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_2}{V_3}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (13.6)$$

Воспользуемся теперь уравнением Пуассона для связи параметров рабочего тела. Точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$. Кроме того, согласно уравнению состояния,

$\frac{p_2 V_2}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_2}$. Из первого соотношения следует, что $\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma$,

а из второго соотношения получим $\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_3 T_1}{V_2 T_2}$. Приравниваем правые части полученных выражений:

$$\frac{V_3 T_1}{V_2 T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma,$$

откуда следует, что:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (13.7)$$

Аналогично для адиабаты 4–1 можно получить, что

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (13.8)$$

Поделим (13.7) на (13.8), тогда:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (13.9)$$

Подставив (13.9) в (13.6), найдем

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (13.10)$$

В соответствии с **теоремой Карно**, эта формула определяет теоретический предел КПД всех возможных тепловых машин с нагревателем, имеющим температуру T_1 , и холодильником, имеющим температуру T_2 . Соответственно тепловая машина, работающая по циклу Карно, называется **идеальной тепловой машиной**.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры процессов, которые приближенно можно считать обратимыми.
2. Будет ли обратимым круговым процессом испарение кипящей жидкости в закрытом сосуде с последующей конденсацией пара в жидкость?
3. Почему тепловую машину, работающую по циклу Карно, называют «идеальной»?
4. Каков физический смысл цикла Карно?

14. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

Первый закон термодинамики не позволяет установить направление протекания процессов. Он также не исключает возможности такого процесса, единственным результатом которого было бы превращение полученной теплоты нацело в работу. Первое начало допускает также построение циклически действующей тепловой машины, совершающей работу за счет охлаждения одного источника теплоты. Такой двигатель называется **вечным двигателем второго рода**.

Обобщение большого количества экспериментальных фактов привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода и получило название **второго начала термодинамики**. Существует несколько эквивалентных друг другу формулировок второго начала термодинамики. Приведем две формулировки.

1. Р. Клаузиус (1850 г.) – невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от тела, менее нагретого к телу, более нагретому.

2. У. Томсон (он же лорд Кельвин, 1851 г.) – невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение нацело в механическую работу всего полученного телом количества теплоты.

Сравнивая два способа расчета КПД цикла Карно, т.е. приравнивая соотношения (13.2) и (13.10) получим:

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Откуда получаем, что $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$, или $\frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1}$.

Назовем отношение количества теплоты, полученного системой в каком-либо процессе, к температуре этого процесса **приведенной теплотой**. В случае цикла Карно $\frac{Q_1}{T_1}$ – приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе нагревания при

температуре T_1 , а $\frac{Q_2}{T_2}$ – приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе теплообмена при температуре T_2 (поскольку $Q_2 < 0$, то это количество теплоты на самом деле передается от рабочего тела). Если переписать последнее соотношение в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (14.1)$$

то его можно сформулировать следующим образом: в равновесном обратимом цикле Карно суммарная приведенная теплота всех процессов равна 0.

Рассмотрим теперь произвольный обратимый цикл $A-B-A$

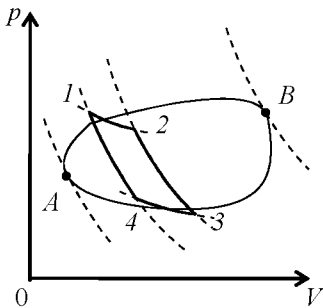


Рис. 14.1

(рис. 14.1). Разобьем этот цикл изотермами и адиабатами так, чтобы исходный цикл превратился в последовательность элементарных циклов Карно 1–2–3–4. Естественно, что чем ближе адиабаты 2–3 и 4–1 будут находиться друг к другу, тем точнее получится приближение последовательности циклов Карно к исходному циклу. Тогда можно сказать, что для осуществления

исходного цикла потребуется множество нагревателей и холодильников. Для каждого из элементарных циклов Карно будет справедливо соотношение (14.1) в виде:

$$\frac{\delta Q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\delta Q_{2i}}{T_{2i}} = 0.$$

Если же просуммировать все эти выражения по исходному циклу, то получим:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

В общем случае для произвольного замкнутого процесса можно получить $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$. Данное утверждение носит название **неравенство Клаузиуса**, в котором знак равенства соответствует обратимым процессам, а неравенства – необратимым.

Математически $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ означает, что выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции S :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (14.2)$$

Такую функцию ввел и дал ей название энтропия (по-гречески «превращение») Р. Клаузиус в 1865 г. Энтропия – функция состояния термодинамической системы, дифференциал в обратимом процессе определяется соотношением (14.2). Для необратимого процесса энтропия вводится как:

$$dS > \frac{\delta Q}{T}. \quad (14.3)$$

Выведем расчетную формулу для изменения энтропии в обратимом процессе идеального газа. Подставим выражение (14.2) в первое начало термодинамики (11.5): $TdS = dU + \delta A = dU + pdV$, или:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}, \quad (14.4)$$

после интегрирования (14.4) в некотором процессе 1–2:

$$\Delta S = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (14.5)$$

Ясно, что если процесс круговой (цикл), то состояния 1 и 2 совпадают, т.е. $T_1 = T_2$ и $V_1 = V_2$, тогда $\Delta S_{\text{ц}} = 0$.

Рассмотрим основные свойства энтропии.

1. Энтропия – функция состояния термодинамической системы. Приращение энтропии ΔS не зависит от процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями системы.

2. Энтропия – величина аддитивная, энтропия макросистемы равна сумме энтропий ее отдельных частей.

3. С использованием энтропии существенно упрощаются термодинамические расчеты. Подставив определение энтропии (14.2) в первое начало термодинамики (11.5) записывают **основное уравнение термодинамики**: $TdS = dU + \delta A$.

4. Адиабатный процесс является изоэнтропным, протекающей при постоянной энтропии, $\delta Q = 0$, $dS = 0$, $S = \text{const}$.

5. В изотермическом процессе через энтропию легко выразить количество теплоты, $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{Q}{T}$, или $Q = T(S_2 - S_1)$.

Если $Q > 0$, то $S_2 > S_1$. На диаграмме (T, S) изотермический процесс отобразится прямой линией, площадь под которой равна количеству теплоты. С учетом простоты цикла Карно в координатах (T, S) , представленного для примера на рис. 14.2, (1–2, 3–4 изотермические процессы при температурах T_1 и T_2 соответственно, 2–3 и 4–1 адиабатные процессы) расчет КПД цикла Карно через энтропию элементарен:

$$\eta_{\text{к}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1(S_2 - S_1) + T_2(S_1 - S_2)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

6. С помощью понятия энтропия может быть сформулирована **теорема Нернста** (1906 г.), называемая **третьим началом термодинамики**: в непосредственной близости к абсолютному нулю температур все процессы в термодинамической системе протекают без изменения энтропии, $T \rightarrow 0, dS \rightarrow 0$.

7. Одно из важнейших свойств энтропии представляет собой еще одну формулировку второго начала термодинамики, это принцип возрастания энтропии изолированных систем: **энтропия изолированной системы не уменьшается** $S_2 \geq S_1$.

Реальные процессы, происходящие в природе, всегда необратимы. Значит, энтропия системы в этих процессах должна возрастать. Рост энтропии продолжается до тех пор, пока в системе не наступит состояние равновесия, после чего все процессы в системе прекращаются.

Распространение второго начала термодинамики, установленного для замкнутых систем, на всю Вселенную неправомерно. Такая экстраполяция может привести к выводу о неизбежности выравнивания температуры всех тел, к идее «тепловой смерти Вселенной» (ее выдвинул Р. Клаузиус). Согласно гипотезе Л. Больцмана, Вселенная все время пребывает в равновесном изотермическом состоянии, но в ее различных частях происходят отклонения от этого состояния. Оказалось, что вследствие тяготения однородное изотермическое распределение вещества во Вселенной не соответствует максимуму энтропии, потому что не является

наиболее вероятным. Поскольку Вселенная нестационарна, она расширяется и первоначально однородное вещество распадается под действием сил тяготения на галактики, звезды, планеты и т.д. Именно эти процессы и происходят с ростом энтропии, что полностью соответствует второму началу термодинамики. Эти процессы и позволяют избежать «тепловой смерти Вселенной».

До сих пор мы использовали термодинамический метод исследования и не интересовались внутренним строением изучаемых систем. Однако существует связь второго начала термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Возвращаясь к вероятностному описанию процессов в термодинамических системах рассмотрим следующий пример. Имеется изолированный сосуд, поделим его мысленно на две половины. Если в сосуде одна молекула, то вероятность оказаться в одной половине $P_1 = 1/2$, если 2 молекулы, то $P_2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, продолжая для N молекул получим $P_N = (1/2)^N$, где $1/2$ представляет собой отношение объемов половины сосуда к полному V/V_0 . Прологарифмировав $P_N = (V/V_0)^N$ получим:

$$\ln P_N = N \ln(V/V_0). \quad (14.6)$$

Используя (14.6) можно говорить о вероятности состояния термодинамической системы. Какие-то состояния являются более вероятными (например, равномерное распределение молекул газа по половинам сосуда), какие-то менее вероятными. Мы можем говорить о переходе системы из менее вероятных состояний в состояния более вероятные. Таким образом появляется по аналогии с энтропией направленность процессов. Л. Больцман доказал, что между энтропией системы и термодинамической вероятностью ее состояния существует связь:

$$S = k \ln P, \quad (14.7)$$

где k – постоянная Больцмана. Эта формула позволяет дать статистическое толкование второго закона термодинамики, утверждающего, что энтропия изолированной системы не убывает: термодинамическая вероятность состояния изолированной системы во всех происходящих в ней процессах не может убывать.

Под P в формуле (14.7) понимают **термодинамическую вероятность состояния системы**. Она равна числу всевозможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям, соот-

ветствующих данному термодинамическому состоянию (макросостоянию). Связь энтропии с вероятностью состояния системы в виде (14.7) можно проследить сравнив (14.6) с изменением энтропии в изотермическом процессе (14.5).

Таким образом, второй закон термодинамики является статистическим законом. Он выражает необходимые закономерности хаотического движения большого числа частиц, входящих в состав изолированной системы. Можно сказать, что энтропия мера упорядоченности (или наоборот хаоса) системы. В состоянии равновесия энтропия достигает максимума, так как это состояние наиболее вероятно. Система, предоставленная сама себе, движется в направлении равновесного состояния.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите все известные вам формулировки второго начала термодинамики.

2. Дайте определение понятию энтропии. Как определяется изменение энтропии в обратимом процессе?

3. Энтропия термодинамической системы является функцией состояния. Как вы понимаете этот термин? Какие еще функции состояния вы знаете?

4. В каком термодинамическом процессе идеального газа энтропия остается неизменной? Почему?

5. Докажите, что для любой термодинамической системы изотерма и адиабата могут пересекаться не более, чем в одной точке.

15. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

Ранее рассматривались равновесные состояния термодинамической системы. При нарушении равновесия возникают потоки вещества и энергии, при этом система стремится вернуться в равновесное состояние. Понятно, что подобные процессы необратимы. Поведение системы при этом можно описать, рассмотрев

потоки массы, импульса, энергии и т.п. Подобные явления, происходящие при нарушении равновесного состояния систем, называются **явлениями переноса**. Рассмотрим некоторые из них.

Молекулы газа, находясь в непрерывном тепловом хаотическом движении сталкиваются друг с другом. Под столкновениями молекул понимают достаточно сложный процесс взаимодействия между молекулами, в результате которого молекулы изменяют направление своего движения. Наличие сил взаимодействия (отталкивания и притяжения) между молекулами приводит к появлению потенциальной энергии их взаимодействия. Зависимость сил

взаимного притяжения и отталкивания молекул от расстояния между ними должна быть различной: на очень близких расстояниях преобладают силы отталкивания, а на более далеких – силы притяжения. На рисунке 15.1 показан примерный характер зависимостей $F_{пр}(r)$ и $F_{от}(r)$. Так обозначены проекции сил притяжения $\vec{F}_{пр}$ и отталкивания $\vec{F}_{от}$ на направление

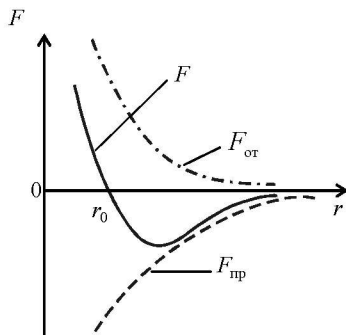


Рис. 15.1

вектора \vec{r} , проведенного в точку нахождения рассматриваемой молекулы из точки, где находится другая молекула, действующая на первую. Здесь же показана зависимость $F(r)$, где $F(r) = F_{пр}(r) + F_{от}(r)$.

Рассмотрим взаимодействие двух молекул. Процесс столкновения молекул можно рассмотреть с помощью зависимости потенциальной энергии от расстояния между центрами молекул (рис. 15.2). Наиболее часто используемый конкретный вид зависимости $W_{п}(r)$ носит название потенциала Леннарда – Джонса и за-

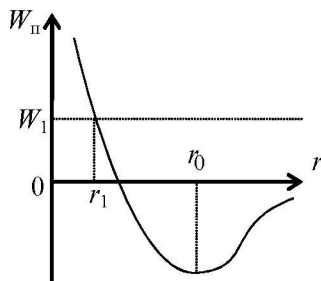


Рис. 15.2

писывается в следующем виде: $W_{\text{п}}(r) = \frac{a_1}{r^{12}} - \frac{a_2}{r^6}$ где a_1 и a_2 – положительные постоянные коэффициенты, зависящие от вида газа.

Поместим начало отсчета в «центр» одной из молекул, рассмотрим сближение молекулы 2 из положения $r = \infty$ с молекулой 1, неподвижно находящейся в положении $r = 0$. Молекула 2 движется с начальной кинетической энергией W_1 . Поскольку силы взаимодействия молекул потенциальны, то, согласно **закону сохранения механической энергии**, $W = \text{const}$. Поскольку $W_{\text{п}}(\infty) = 0$, то кинетическая энергия молекулы 2 на большом удалении молекул друг от друга равна полной энергии: $W_{\text{к}}(\infty) = W$. По мере сближения молекул кинетическая энергия молекулы 2 увеличивается, а $W_{\text{п}}(r)$ уменьшается. При расстоянии между молекулами $r = r_0$ энергия кинетическая энергия достигает максимального значения. Далее молекула 2 попадает в зону преобладания действия сил отталкивания молекул. Следовательно, при дальнейшем сближении молекул ($r < r_0$) кинетическая энергия молекулы 2 падает, а потенциальная энергия $W_{\text{п}}(r)$ растет. В точке $r = r_1$ полная энергия системы равна потенциальной: $W = W_{\text{п}}(r_1)$. В этом положении $W_{\text{к}}(r_1) = 0$. Именно это положение и соответствует наибольшему сближению молекул.

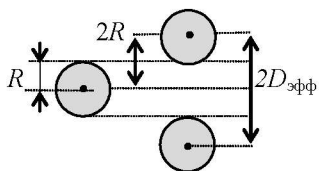


Рис. 15.3

Как оценить расстояние наибольшего сближения молекул? Назовем **эффективным диаметром молекулы** $D_{\text{эфф}}$ минимальное расстояние между центрами молекул, на которое две молекулы сближаются при их столкновении. Площадь поперечного сечения «коридора» (рис. 15.3), в который

должны попасть центры соседних молекул, чтобы столкнуться с данной, называется **эффективным сечением столкновения**:

$$\sigma = \pi D_{\text{эфф}}^2 = 4\pi R^2. \quad (15.1)$$

Очевидно, что $D_{эфф}$ является функцией кинетической энергии, которой обладает молекула, т.е. определяется температурой газа. С увеличением температуры $D_{эфф}$ уменьшается, как и сечение столкновения.

Рассчитаем число столкновений молекул за единицу времени. Пусть одна молекула в сосуде двигается со скоростью $\langle v \rangle$, а остальные неподвижны. Молекулы имеют диаметр $D_{эфф}$ и между столкновениями движутся прямолинейно равномерно. Тогда исследуемая молекула за 1 с испытает соударения со всеми частицами, находящимися в цилиндре длиной $\langle v \rangle \cdot 1$ с и основанием σ (см. рис. 15.3) объемом V . Число таких молекул, а значит и число столкновений будет равно

$$\langle z \rangle = nV = n\sigma \langle v \rangle.$$

Полученный результат с использованием простой модели является приближенным. Для получения точного решения задачи необходимо учесть относительное движение молекул. В статистической физике получается следующий результат для числа столкновений единицу времени:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}n\sigma \langle v \rangle. \quad (15.2)$$

Поскольку все столкновения произошли за 1 с, то промежутки времени между столкновениями равны

$$\tau = \frac{1}{\langle z \rangle}.$$

Назовем **средней длиной свободного пробега** молекулы расстояние, которое она пролетает между двумя последовательными соударениями:

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle \tau = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \quad (15.3)$$

Оценим величину средней длины свободного пробега молекулы азота при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па.

Принимая во внимание, что $R \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м, получаем, согласно (15.3) $\langle l \rangle = 2 \cdot 10^{-7}$ м.

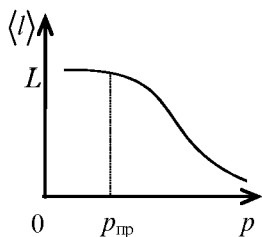


Рис. 15.4

Средняя длина свободного пробега зависит обратно пропорционально от концентрации молекул газа (15.3), а значит и давления газа. График зависимости средней длины свободного пробега $\langle l \rangle$ от давления газа p при постоянной температуре изображен на рис. 15.4. При его построении учтено, что если давление газа снижается ниже давления предельно достижимого вакуума $p_{пр}$, то значение $\langle l \rangle$ соответствует характерному размеру сосуда L , т.е. молекулы будут пролетать весь сосуд без соударения друг с другом.

В соответствии с (15.3) величина $\langle l \rangle$ не должна зависеть от температуры газа T . Однако экспериментально подтверждено, что средняя длина свободного пробега слабо растет с увеличением температуры. Происходит это из-за того, что с ростом температуры уменьшается значение $D_{эф}$, и соответственно сечение столкновения σ .

Диффузия

Рассмотрим неравновесное состояние системы молекул, вызванное нарушением равномерного распределения концентрации молекул по объему системы. При этом система может состоять как из молекул одного вещества (одинаковые молекулы), так и из молекул разных веществ (смесь разных молекул). Опыт показывает, что происходит выравнивание концентрации каждого компонента по всему объему системы. Неравновесный процесс, вызываемый молекулярным тепловым движением и приводящий к установлению равновесного распределения концентраций называется **диффузией**. Диффузия – один из процессов переноса. Поскольку в этом процессе рассматривается перемещение молекул по объему системы, то диффузия – это перенос массы. Диффундировать могут и молекулы примесей (компонентов смеси), и молекулы однокомпонентной системы (т.н. самодиффузия). Диффузия – необратимый процесс, один из источников диссипации (рассеяния) энергии в системе.

Выведем уравнение, позволяющее количественно описать процесс диффузии, на примере самодиффузии. Пусть в направлении оси OX установилось неравномерное распределение концентрации молекул (рис. 15.5). Выделим при $x = x_0$ элемент поверхности S , слева от которого концентрация молекул n_1 , а справа – n_2 .

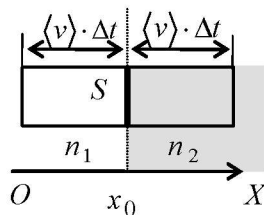


Рис. 15.5

Подсчитаем **поток частиц**, т.е. количество молекул, проходящее в единицу времени через этот элемент поверхности. Если средняя скорость движения молекул $\langle \vec{v} \rangle$ направлена вдоль оси OX , то за время Δt все молекулы, находящиеся слева от этого сечения, из объема $S \langle v \rangle \Delta t$ уйдут вправо. Число таких молекул $n_1 S \langle v \rangle \Delta t$. Аналогично из такого же объема, находящегося справа от сечения, за время Δt все молекулы уйдут влево. Число таких молекул $n_2 S \langle v \rangle \Delta t$. Назовем **плотностью потока молекул** их число, проходящее через единичное сечение, расположенное перпендикулярно вектору скорости, за единицу времени:

$$\Phi = \frac{N}{S \Delta t}. \quad (15.4)$$

Тогда поток частиц слева направо $N_1 = n_1 \langle v \rangle S$, а поток частиц справа налево $N_2 = n_2 \langle v \rangle S$. Поскольку эти потоки частиц идут в разных направлениях, то общий поток в положительном направлении оси OX будет определяться их разностью.

Необходимо учесть, что движение молекул вдоль выбранного направления можно рассматривать прямолинейным, если за время Δt скорость молекул не меняет своего направления. Это возможно, если молекулы пересекают сечение S без столкновений. Следовательно, мы должны учитывать движение только тех молекул, которые удалены от x_0 на расстояние, не превышающее $\langle l \rangle$. Пусть при таком рассмотрении концентрация молекул изменяется

от $n_{x_0-\langle l \rangle}$ до $n_{x_0+\langle l \rangle}$. Тогда суммарная плотность потока частиц через выбранное сечение будет: $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \langle v \rangle (n_{x_0-\langle l \rangle} - n_{x_0+\langle l \rangle})$.

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\langle v \rangle (n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle}) = -\langle v \rangle (n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle}) \frac{2\langle l \rangle}{2\langle l \rangle} = \\ &= -2\langle l \rangle \langle v \rangle \frac{(n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle})}{2\langle l \rangle} = -2\langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \end{aligned}$$

В положительном направлении выбранной оси Ox при хаотичном тепловом движении перемещается только $\frac{1}{6}$ часть всех молекул системы, поэтому окончательно:

$$\Phi = -\frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \quad (15.5)$$

Первые три множителя полученного выражения определяют коэффициент диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (15.6)$$

Окончательно (15.5) можно записать следующим образом:

$$\Phi = -D \frac{dn}{dx}. \quad (15.7)$$

Уравнение (15.7) называется **законом диффузии** (**закон Фика**), который был выведен А. Фиком в 1855 г.: **плотность диффузионного потока частиц пропорциональна градиенту концентрации частиц**. Знак “-” в (15.7) имеет физический смысл: при диффузии поток частиц направлен в сторону убывания их концентрации, т.е. $\Phi > 0$ в таком направлении, когда $\frac{dn}{dx} < 0$. Из (15.7) следует выражение для диффузионного потока частиц:

$$N = -D \frac{dn}{dx} S. \quad (15.8)$$

Если умножить обе части (15.8) на массу одной молекулы m_0 , то определим выражение для потока массы:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S, \quad (15.9)$$

где $\rho = m_0 n$ – плотность вещества.

Единица измерения коэффициента диффузии в СИ $[D] = \text{м}^2 \text{с}^{-1}$.

Проанализируем выражение коэффициента диффузии (15.6). С учетом (15.3) получим

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}.$$

Из этого соотношения видно, что при увеличении давления коэффициент диффузии уменьшается, а с ростом температур увеличивается.

Необходимо различать хаотичное перемещение молекул по объему системы в результате теплового движения и направленное перемещение молекул в сторону уменьшения концентрации частиц в результате диффузии.

Теплопроводность

Опыт показывает, что неравномерное распределение температуры в термодинамической системе приводит к ее выравниванию и установлению состояния теплового равновесия. Молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры, называется **теплопроводностью**. Рассматривая этот процесс, можно ввести понятие плотности теплового потока, аналогично плотности потока частиц (15.4):

$$q = \frac{Q}{S \Delta t}, \quad (15.10)$$

т.е. **плотностью теплового потока** назовем количество теплоты, проходящее через единичную поверхность за единицу времени.

Эмпирический закон теплопроводности носит название **закона Фурье**:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (15.11)$$

плотность теплового потока при теплопроводности пропорциональна градиенту температуры в системе. При этом перенос теплоты осуществляется в направлении снижения температуры.

Коэффициент пропорциональности λ в (15.11) называется коэффициентом теплопроводности. Рассматривая процесс теплопроводности, как одно из явлений переноса (переносимое свойство – средняя кинетическая энергия молекул, поток энергии), по аналогии с диффузией можно получить выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho. \quad (15.12)$$

В системе СИ единицей измерения λ служит Вт/(м·К).

Рассмотрим зависимость λ от давления и температуры для идеального газа. Когда средняя длина свободного пробега много меньше размеров сосуда, из (15.12) следует, что от давления коэффициент теплопроводности не зависит (длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению, плотность прямо пропорциональна). С ростом температуры λ увеличивается, как и все коэффициент переноса.

Сравнение выражений (15.15) и (15.6) позволяет установить связь коэффициента диффузии и коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = D c_V \rho. \quad (15.13)$$

Вязкость жидкостей и газов

Свойство жидкостей и газов, характеризующее сопротивление действию внешних сил, вызывающих их течение, называется **вязкостью** (внутренним трением). Рассмотрим ламинарное течение жидкости (газа), т.е. такое, при котором жидкость(газ) перемещается слоями без перемешивания (lamina – полоска, пластина). Согласно гипотезе И. Ньютона, при таком течении при сдвиге соседних слоев среды относительно друг друга возникает сила противодействия этому сдвигу, которая пропорциональна скорости относительного смещения слоев. Жидкости, для которых эта

гипотеза оказывается верной, **называются ньютоновскими**. Таким образом, в ньютоновских жидкостях возникает сопротивление перемещению слоев относительно друг друга.

При перемещении всей жидкости в каком-то направлении каждая молекула жидкости участвует в двух движениях: хаотичном тепловом, средняя скорость которого $\langle v \rangle$, и направленном упорядоченном, скорость которого u . В силу теплового движения молекул будет происходить их перемещение из слоя в слой, при этом молекулы будут обмениваться своими импульсами. Таким образом, можно рассмотреть вязкость как перенос импульса.

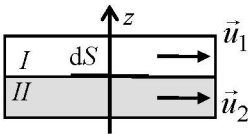


Рис. 15.6

Для количественного описания переноса импульса из одного слоя молекул в другой рассмотрим два соседних слоя бесконечно малой толщиной каждый (рис. 15.6). Скорости направленного движения молекул в этих слоях различны, их модули равны соответственно u_1 и u_2 . Через площадку dS , разделяющую слои, в обе стороны идет поток частиц, вызванный их тепловым движением со скоростью $\langle v \rangle$. Плотность этого потока в обе стороны одинакова: $\Phi = \frac{1}{6}n\langle v \rangle$. Соответственно, число частиц, переносимое через эту площадку за время dt , составляет

$dN = \frac{1}{6}n\langle v \rangle dS dt$. Поэтому из слоя I «уносится» импульс $dp' = dN m u_1$, а «приносится» из слоя II импульс $dp'' = dN m u_2$.

Следовательно, общий баланс изменения импульса в слое составит

$$dp = dp'' - dp' = dN m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6}n\langle v \rangle dS dt m (u_2 - u_1).$$

Плотность потока импульса определим следующим образом:

$$K = \frac{dp}{dS dt} = \frac{1}{6}n\langle v \rangle m (u_2 - u_1). \quad (15.14)$$

Эта формула описывает плотность потока импульса молекул, переносимого из слоя со скоростью u_1 в слой со скоростью u_2 , если эти скорости не изменяются в результате столкновений мо-

лекулу при их движении вдоль оси z . Поскольку минимальное расстояние, на котором скорости молекул остаются неизменными, составляет $\langle l \rangle$, то преобразуем выражение (15.14):

$$K = -\frac{1}{6}n\langle v \rangle m(u_1 - u_2) \frac{2\langle l \rangle}{2\langle l \rangle} = -\frac{1}{3}n\langle l \rangle \langle v \rangle m \frac{du}{dz} = -\frac{1}{3}\rho\langle l \rangle \langle v \rangle \frac{du}{dz}.$$

Обозначим произведение постоянных сомножителей в этом выражении через η и назовем его **коэффициентом внутреннего трения (динамической вязкостью)**:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (15.15)$$

Тогда получим

$$K = -\eta \frac{du}{dz}, \quad (15.16)$$

плотность потока импульса молекул, переносимого в каком-то направлении, прямо пропорциональна градиенту скорости частиц в этом направлении.

Поскольку перенос импульса молекул из слоя в слой, т.е. изменение импульса молекул каждого выбранного слоя, согласно гипотезе Ньютона, связан с действием силы вязкого трения между слоями молекул, то можно определить величину этой силы. Вспомним выражение второго закона Ньютона, связывающее изменение импульса системы с действием внешних сил на систему $dp = F dt$, тогда плотность потока импульса молекул (15.14)

$$K = \frac{dp}{dS dt} = \frac{F}{dS}, \text{ и выражение для силы:}$$

$$F = \eta \frac{dv}{dz} dS, \quad (15.17)$$

где dS – величина поверхности, по которой действует сила F . Вектор направлен вдоль границы слоя, поэтому называется **тангенциальной силой**. Сила, отнесенная к площади действия, в механике называется **напряжением**. Уравнение (15.17) можно записать для тангенциального (касательного) напряжения $\tau = F/dS$:

$$\tau = \eta \frac{du}{dz}. \quad (15.18)$$

Полученные выражения (15.17) и (15.18) являются видами записи закона Ньютона для внутреннего трения.

В СИ единицей измерения η является паскаль-секунда: $[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}$.

Рассмотрим зависимость η от давления и температуры для идеального газа. Из (15.15) следует, что от давления коэффициент теплопроводности не зависит (длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению, плотность прямо пропорциональна). С ростом температуры η увеличивается.

Связь коэффициентов переноса

Неравновесные процессы, рассмотренные нами как явления переноса, связаны с движением молекул. Перенос вещества, энергии и импульса в сплошной среде обусловлен столкновениями молекул друг с другом. Поэтому законы, описывающие явления переноса, аналогичны друг другу по математической форме записи. Коэффициенты в этих законах также оказываются связанными друг с другом, по найденным из опыта значениям коэффициента диффузии можно, например, определить остальные коэффициенты переноса.

Обобщим рассмотренные явления переноса следующим образом.

Явление	Что переносится	Закон	Коэффициент
Диффузия	Масса $dM = -D \frac{dn}{dx} dtdS$	$\Phi = -D \frac{dn}{dx}$	$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle$
Теплопроводность	Энергия $dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dtdS$	$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$	$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho c_V = D \rho c_V$
Вязкость	Импульс $dp = -\eta \frac{dv}{dx} dtdS$	$K = -\eta \frac{dv}{dz}$	$\eta = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho = D \rho = \frac{\lambda}{c_V}$

Формулы для коэффициентов переноса показывают, что коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности не зависят от давления газа. Это было установлено Максвеллом и в свое время вызвало серьезные трудности в признании молекулярно-

кинетической теории газов и ее выводов. Формально все сводится к тому, что в выражениях (15.12) и (15.15) плотность ρ входит и в числитель, и в знаменатель, поскольку средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ обратно пропорциональна плотности. Поэтому коэффициенты переноса η и λ от плотности газа (и его давления) не зависят. Физически это объясняется тем, что для не слишком разреженных газов при неизменной температуре с ростом давления (а, следовательно, и плотности) в переносе импульса и энергии принимает участие все большее число молекул. Однако каждая из них за счет уменьшения средней длины свободного пробега переносит меньший импульс упорядоченного движения (при рассмотрении вязкости) или энергию (при рассмотрении теплопроводности). Поэтому в целом для всей массы газа перенос импульса и энергии не изменяется.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое средняя длина свободного пробега молекул?
2. Как изменится средняя длина свободного пробега молекул, если температуру газа увеличить в 4 раза при: а) постоянной концентрации молекул; б) постоянном давлении?
3. Применимо ли к разреженным газам уравнение состояния идеального газа?
4. Как объяснить независимость динамической вязкости газов от их плотности?
5. Определите вектор плотности потока молекул, если известны вектор градиента концентрации молекул газа и коэффициент диффузии.

16. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Свойства не сильно разреженных газов отличаются от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона–Менделеева (9.2). Например, реальные газы могут быть переведены в жидкое состояние. Уравнение Клапейрона–Менделеева

не описывает подобные процессы. Экспериментальные исследования удельной теплоемкости, вязкости и других свойств газов показали, что эти свойства тоже значительно отличаются от соответствующих свойств идеальных газов. Отступления от законов идеальных газов связаны с тем, что между молекулами газа действуют силы, которые в теории идеальных газов не принимаются во внимание. Во всех реальных телах (твердых, жидких и газообразных) молекулы взаимодействуют друг с другом. Силы взаимодействия между молекулами в сильной степени зависят от расстояния между ними. Своеобразные свойства поверхностного слоя жидкостей, а также способность твердых тел сопротивляться растяжению свидетельствуют о том, что между молекулами вещества действуют силы взаимного притяжения. Малая сжимаемость сильно уплотненных газов, а также способность твердых тел и жидкостей сопротивляться сжатию указывают на то, что между молекулами действуют и силы взаимного отталкивания. Важно, что силы притяжения и отталкивания молекул действуют одновременно. Силы молекулярного притяжения часто называют вандер-ваальсовыми силами по имени нидерландского физика Я.Д. Ван-дер-Ваальса, который впервые начал учитывать межмолекулярное взаимодействие в газах.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить твердым шарикам диаметром d , между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такая модель газа, принятая Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа более совершенное, чем уравнение Клапейрона – Менделеева.

Молекулы реального газа обладают конечными размерами и «собственным объемом», они не могут сблизиться на расстояние меньшее, чем эффективный диаметр молекулы. Учтем это, заменив в уравнении Клапейрона–Менделеева (9.2) полный объем сосуда, занимаемый молекул газа, с V_m на «свободный» объем $V_m^* = V_m - b$, где b – поправка Ван-дер-Ваальса. Значение b определяется собственным объемом молекулы, который равен

$v = \frac{1}{6} \pi d^3$. Рассмотрим сферу радиусом d , центр которой совпадает с центром произвольной молекулы. Центры других молекул, соударяющихся с данной, не могут находиться внутри этой сферы, которая представляет собой «запрещенное пространство» объемом $v_3 = \frac{4}{3} \pi d^3 = 8v$. Поскольку при таком рассмотрении мы дважды учли каждую молекулу (один раз как ударяющуюся, другой раз как ударяемую), то в пересчете на одну молекулу запрещенный объем составляет $\frac{1}{2} v_3 = 4v$. Поправка Ван-дер-Ваальса представляет собой запрещенный объем, приходящийся на все N_A молекул в моле газа: $b = 4vN_A$.

Теперь учтем влияние сил взаимного притяжения молекул газа. Поскольку эти силы быстро убывают с ростом расстояния между молекулами, то можно считать, что каждая молекула взаимодействует только с теми, которые удалены от нее не далее некоторого расстояния R , называемого **радиусом молекулярного действия**. Соответственно, сфера радиусом R вокруг данной молекулы образует **сферу молекулярного действия**. Если рассмотреть молекулу вдали от стенок сосуда, то вся ее сфера молекулярного действия заполнена другими молекулами так, что результирующая сила притяжения для рассматриваемой молекулы равна нулю. У молекул, находящихся вблизи стенок сосуда, сферы молекулярного действия заполнены другими молекулами только частично. Можно показать, что для таких молекул результирующая сила притяжения направлена перпендикулярно стенке сосуда внутрь газа, причем она пропорциональна концентрации молекул газа:

$$F_k = a_k n, \quad (16.1)$$

где коэффициент a_k зависит от химической природы газа и расстояния от центра молекулы до стенки сосуда. Действие таких сил приводит к уменьшению давления реального газа на стенки сосуда по сравнению с давлением системы молекул идеального газа:

$$p = p_{ид} - p^*, \text{ или}$$

$$p_{\text{ид}} = p + p^* , \quad (16.2)$$

где p^* – давление, обусловленное действием сил взаимного притяжения молекул. Это давление можно определить по формуле

$$p^* = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^N F_k = \frac{1}{S} n \sum_{k=1}^N a_k ,$$

где N – общее число всех молекул пограничного слоя газа; S – площадь стенок сосуда.

Общее число молекул в пограничном слое $N = SRn$. Поскольку $\sum_{k=1}^N a_k = N \langle a \rangle$, где $\langle a \rangle$ – среднее значение параметра a , то

$$p = \frac{n}{S} SRn \langle a \rangle = n^2 R \langle a \rangle = n^2 a' .$$

Выразим концентрацию молекул газ) в виде

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\mu}{m_0} \frac{1}{V_m} ,$$

тогда

$$p^* = a' \frac{\mu^2}{m_0^2} \frac{1}{V_m^2} = \frac{a}{V_m^2} . \quad (16.3)$$

Коэффициент Ван-дер-Ваальса a зависит только от химической природы газа.

Подставим в уравнение Клапейрона – Менделеева объем $V_m^* = V_m - b$ вместо V_m и давление $p_{\text{ид}} = p + p^*$ вместо p . Тогда, с учетом (16.3), получим:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT . \quad (16.4)$$

Это уравнение называется **уравнением Ван-дер-Ваальса** по имени ученого, впервые получившего его в 1873 г. Из (16.4) следует уравнение для произвольного числа $\nu = \frac{m}{\mu}$ молей реального газа:

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT. \quad (16.5)$$

Полученное уравнение (16.5) является приближенным для описания реального газа. Газ, в точности следующий этому уравнению называется ван-дер-ваальсовский газ. Существуют и другие уравнения, описывающие реальные газы. Анализ уравнения (16.5) представлен далее.

Изотермы реального газа

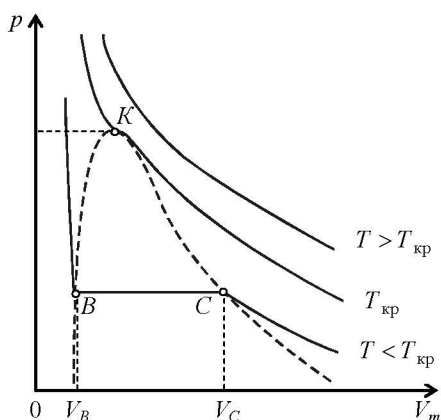


Рис. 16.1

Английский физик Т. Эндрус в 1861–1869 г. систематически экспериментально исследовал зависимость молярного объема углекислого газа от давления при изотермическом сжатии. Результаты этих опытов представлены на рис. 16.1. При температурах, меньших $T_{кр}$, на каждой изотерме имеется горизонтальный участок, на котором постоянна не только температура, но и давление, а молярный объем

может принимать любые значения в некотором интервале от V_B до V_C . Разность $V_C - V_B$ возрастает с понижением температуры. При увеличении температуры эта разность стремится к нулю при приближении температуры к значению $T_{кр}$, которое называют

критической температурой. Точки B и C сливаются в одну точку K – **критическую точку** – на изотерме, соответствующей критической температуре (**критической изотерме**).

Эксперимент показал, что давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема на двух участках изотермы. При значениях молярного объема $V_m > V_C$ углекислый газ находится в газообразном состоянии, а при $V_m < V_B$ – в жидком. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы при малых значениях объема вещества представляет собой почти вертикальную прямую. На участке BC углекислый газ одновременно находится в двух агрегатных состояниях: жидком и газообразном. Точка C соответствует началу конденсации углекислого газа при изотермическом сжатии, а точка B – концу конденсации. Если процесс провести в обратном направлении, то в точке B жидкий углекислый газ начинает кипеть, а в точке C – заканчивает. Поэтому точка B на диаграмме соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка C состоянию сухого насыщенного пара.

Фазой в термодинамике называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом, находящихся в одинаковом состоянии и ограниченных поверхностями раздела. Таким образом, влажный пар (участок BC) представляет собой двухфазную систему, одна фаза которой – кипящая жидкость, а другая – сухой насыщенный пар.

Геометрическое место точек начала и окончания кипения на различных изотермах образует пограничную кривую, разделяющую диаграмму на области. На рисунке 16.1 эта кривая показана штриховой линией, а на рис. 16.2 – сплошной. Кривая bK (рис. 16.2) отделяет однофазную область I

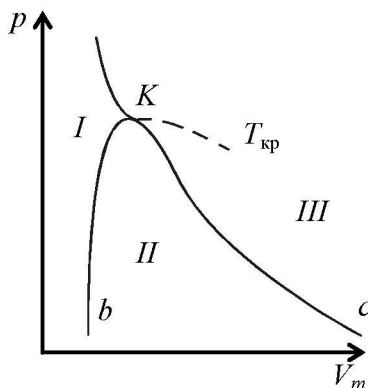


Рис. 16.2

жидкого состояния вещества от двухфазной области II его влажного пара. Кривая cK отделяет двухфазную область II от однофазной области III газообразного состояния вещества. При давлении-

ях, больших критического (давления в точке K), вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними является **критическая изотерма**, т.е. изотерма при такой температуре, выше которой газ нельзя сжатием перевести в жидкое состояние.

Критическая точка – это особое состояние вещества. При приближении к нему исчезают различия между жидким и газообразным состояниями. В критическом состоянии обращаются в нуль разность молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, удельная теплота парообразования и поверхностное натяжение жидкости.

Проанализируем изотермы реального газа с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса (16.4). Это уравнение можно преобразовать так:

$$pV_m^3 - (pb + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (16.6)$$

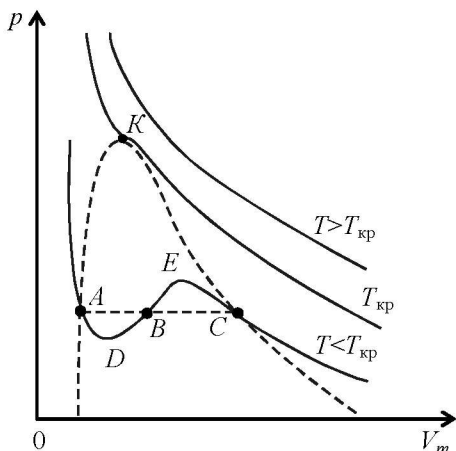


Рис. 16.3

Для конкретного газа это уравнение третьей степени относительно молярного объема может иметь либо один, либо три действительных корня. Изотермы для газа, подчиняющегося уравнению (16.6), показаны на рис. 16.3. При температурах ниже критической каждому значению давления соответствуют три точки изотермы A, B, C .

Волнообразные участки изотерм Ван-дер-Ваальса AD, DE, EC сильно отличаются от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм Эндрюса. Опыты показывают, что участки AD и CE соответствуют **метастабильному состоянию вещества**. AD описывает поведение **перегретой жидкости** (жидкость не закипает в точке B при расширении). Аналогично, при медленном изотермическом сжатии газа можно получить **пере-**

сыщенный пар, соответствующий участку CE . Метастабильные состояния являются неустойчивыми, при внешних воздействиях вещество переходит на участок AC . Участок DE является термодинамически неустойчивым (одновременно возрастают и давление, и объем) и практически неосуществим.

Изотерма $T = T_{кр}$ является критической, а точка перегиба этой изотермы – критической точкой. Значения критических параметров состояния $p_{кр}$, $T_{кр}$ и молярного объема $V_{кр}$ для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, можно выразить следующим образом:

$$p_{кр} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}, V_{кр} = 3b, T_{кр} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}. \quad (16.7)$$

Внутренняя энергия реального газа.

Эффект Джоуля–Томсона

Внутренняя энергия U реального газа равна сумме кинетической энергии U_k хаотического движения молекул и их взаимной потенциальной энергии $U_{п}$:

$$U = U_k + U_{п}. \quad (16.8)$$

Силы взаимного притяжения влияют на движение сравнительно небольшого числа молекул, находящихся вблизи стенок сосуда с газом. Поэтому можно считать, что U_k для моля реального газа совпадает с U_k для моля соответствующего идеального газа при той же температуре. Согласно (12.4) внутренняя энергия 1 моля идеального газа составляет $U_{ид} = C_V T$. Поскольку величина $U_{п}$ обусловлена силами, зависящими от расстояния между молекулами, то значение $U_{п}$ должно зависеть от среднего расстояния между молекулами. Это расстояние однозначно определяется молярным объемом V_m . Для каждого конкретного газа необходимо

рассчитывать значение $U_{\text{п}}$. Исключением является изохорный процесс, для которого $U_{\text{п}} = \text{const}$, а тогда $dU_{\text{п}} = 0$. Можно записать, что в изохорном процессе изменение внутренней энергии реального газа выражается так же, как для идеального газа:

$$dU = C_V dT.$$

Английские физики Д. Джоуль и У. Томсон экспериментально обнаружили, что при адиабатном расширении газа без совершения полезной работы температура газа изменяется. Процесс такого необратимого расширения называется **адиабатным дросселированием**, а явление изменения температуры в этом процессе – **эффектом Джоуля–Томсона**.

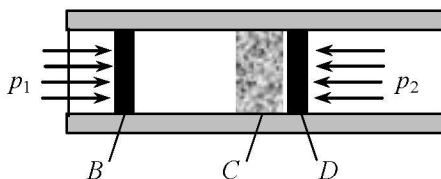


Рис. 16.4

Схема опытов Джоуля и Томсона приведена на рис. 16.4. В теплоизолированную трубу вставлена пористая пробка C (дроссель). С помощью подвижных поршней B и D давления газа слева и справа от пробки поддерживаются постоянными и равными соответственно p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$). Под действием перепада давления газ продавливается через пробку и при этом расширяется от давления p_1 до давления p_2 . При стационарном течении газа устанавливались постоянные температуры T_1 и T_2 соответственно, для всех исследованных газов (за исключением водорода) $T_1 > T_2$, т.е. происходит охлаждение газа. Было установлено, что чем лучше газ следует уравнению Клапейрона-Менделеева, тем T_2 ближе к T_1 , для идеальных газов эффект отсутствует. Совершаемая газом работа расширения практически целиком расходуется на преодоление трения газа в пробке, а выделяющаяся при трении теплота $Q_{\text{тр}}$ нагревает газ.

По первому началу термодинамики изменение внутренней энергии газа при прохождении через дроссель равно $\Delta U = Q + A'$. Сообщаемая газу теплота Q из-за отсутствия теплообмена между

газом и внешними телами равна $Q_{\text{тр}}$. Работа A' , совершаемая внешними силами над газом, равна сумме работ поршня B (работа A'_1), поршня D (работа A'_2) и работы сил трения $A'_{\text{тр}}$: $A' = A'_1 + A'_2 + A'_{\text{тр}}$. Поскольку работа газа против сил трения $A_{\text{тр}} = -A'_{\text{тр}} = Q_{\text{тр}}$, то

$$\Delta U = A'_1 + A'_2. \quad (16.9)$$

Пусть газ занимает объем V_1 между поршнем B и дросселем при давлении p_1 . Тогда работа по вытеснению газа из этого объема равна

$$A'_1 = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 V_1.$$

Аналогично, если V_2 – объем газа между дросселем и поршнем D при давлении p_2 , то

$$A'_2 = - \int_0^{V_2} p_2 dV = -p_2 V_2.$$

Знак «минус» в последней формуле показывает, что поршень D противодействует перетеканию газа через дроссель. Подставляя последние соотношения в (16.9) и учитывая (16.8), получаем

$$\frac{m}{\mu} c_V \Delta T + \Delta U_{\text{н}} = p_1 V_1 - p_2 V_2 = -\Delta(pV).$$

Следовательно, при адиабатном дросселировании изменение температуры реального газа равно

$$\Delta T = - \frac{\mu}{m} \frac{\Delta U_{\text{н}} + \Delta(pV)}{c_V}. \quad (16.10)$$

Формула (16.10) выражает интегральный эффект Джоуля–Томсона для реального газа. В случае идеального газа $U_{II} = 0$, а поэтому

$$\Delta T = -\frac{\mu}{m} \frac{\Delta(pV)}{c_V} = -\frac{\Delta(RT)}{c_V} = -\frac{R}{c_V} \Delta T.$$

Это соотношение справедливо при $\Delta T = 0$, поэтому у идеальных газов эффект Джоуля–Томсона отсутствует.

Контрольные вопросы и задачи

1. Чем отличается реальный газ от идеального?
2. Докажите, что поправка на объем газа в уравнении Ван-дер-Ваальса в 4 раза превосходит объем всех молекул в моле газа.
3. Что такое критическое состояние?
4. При каких условиях в эффекте Джоуля–Томсона наблюдается увеличение температуры реального газа, а при каких – уменьшение?
5. Сравните внутренние энергии реального и соответствующего идеального газов, находящихся в одинаковых объемах при одинаковых температурах.

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами, движущимися произвольным образом относительно инерциальной системы отсчета, осуществляется посредством **электромагнитного поля**, которое представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей: **электрического и магнитного**.

Особенность электрического поля состоит в том, что сила его воздействия на электрически заряженное тело (или частицу) не зависит от скорости движения тела. Поэтому электрическое поле удобно обнаруживать в пространстве по силовому действию на неподвижный электрический заряд. Особенность магнитного поля состоит в том, что сила его воздействия на движущиеся электрически заряженные тела (или частицы) пропорциональна скорости движения тела и направлена перпендикулярно этой скорости. **Электростатика** – раздел науки об электричестве, изучающий взаимодействие электрических зарядов, неподвижных относительно друг друга и систем координат. Электрическое поле, создаваемое заряженными телами, неподвижными относительно инерциальных систем отсчета, называется **электростатическим полем**.

17. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

Электрический заряд – физическая величина, определяющая интенсивность электрических взаимодействий. Электрический заряд – фундаментальное свойство материи. Заряд – инвариантная величина, т.е. не зависит от скорости движения заряженного тела.

Экспериментально обнаружено существование двух типов электрических зарядов. **Положительно** заряженными называют

тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как стекло, натертое кожей или шелком. Отрицательно заряженными называют тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как эбонит или янтарь, натертые шерстью. Положительные и отрицательные заряды по-разному проявляют себя в парном взаимодействии: тела, обладающие зарядами одного типа, отталкиваются друг от друга, а тела, обладающие зарядами разных типов, притягиваются друг к другу.

Поскольку электрический заряд – это мера воздействия на тело других заряженных тел или электрических полей, то он всегда связан с определенным телом или частицей. Электрический заряд дискретен, т.е. существует минимальная величина электрического заряда (элементарный заряд), а электрический заряд любого тела может быть представлен как алгебраическая сумма целого числа элементарных зарядов. Элементарный положительный заряд – это заряд протона, элементарный отрицательный заряд – это заряд электрона (в дальнейшем будем обозначать их p и e соответственно).

Для количественного измерения электрических зарядов в СИ существует единица измерения, называемая кулон (обозначается Кл). 1 кулон – это электрический заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока в проводнике, равной 1 А. Понятие силы тока и определение ее единицы мы введем позднее. Пока подчеркнем лишь то обстоятельство, что в СИ единица электрического заряда является не основной, а производной.

В результате точных электрических измерений было установлено, что $e = -1,60219 \cdot 10^{-19}$ Кл, $p = |e|$. Приведем здесь же значение отношения заряда электрона к его массе: $|e|/m = 1,7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Относительная погрешность определения всех этих величин составляет $\delta = 3 \cdot 10^{-6}$ %.

Система тел или частиц называется электрически изолированной, если между ней и внешними телами нет обмена электрическими зарядами (заряженными частицами). В такой системе могут образовываться новые электрически заряженные частицы, например, электроны при ионизации атомов и молекул. Однако

всегда при этом рождаются частицы, заряды которых противоположны по знаку и в сумме равны нулю. Для электрически изолированной системы тел справедлив фундаментальный закон физики – закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Силы взаимодействия неподвижных электрических зарядов подчиняются основному закону электростатического взаимодействия, который был экспериментально установлен Г. Кавендишем в 1773 г. Впервые этот закон был опубликован в 1785 г. Ш. Кулоном, который исследовал взаимодействие заряженных маленьких шариков с помощью крутильных весов. Такие шарики в опыте Кулона можно было считать материальными точками. Назовем электрически заряженную материальную точку **точечным электрическим зарядом**.

Закон Кулона утверждает, что сила электростатического взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль соединяющей их прямой (рис. 17.1):

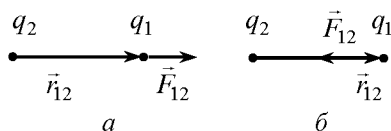


Рис. 17.1

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r}, \quad (17.1)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; \vec{r}_{12} – радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 ; $r = |\vec{r}_{12}|$; k – коэффициент пропорциональности; \vec{F}_{21} – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 ; $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, соединяющий заряд q_1 с зарядом q_2 . Из (17.1) следует, что $\vec{F}_{12} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$ при $q_1 q_2 > 0$ (рис. 17.1, а) – одноименно заряженные тела отталкиваются. При $q_1 q_2 < 0$ $\vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$ (рис. 17.1, б) – разноименно заряженные тела притягиваются.

Коэффициент пропорциональности k в формуле (17.1) зависит от выбора системы единиц. В СИ принято, что

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}^{-2}, \quad (17.2)$$

где ϵ_0 – коэффициент, определяемый из экспериментальных данных, называемый **электрической постоянной**:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2\cdot\text{Н}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}. \quad (17.3)$$

Наличие электрического поля в какой-либо точке пространства можно зарегистрировать по силовому действию поля на помещенный в эту точку заряд. Назовем **пробным электрическим зарядом** положительный точечный заряд настолько малой величины, что его внесение в поле не вызывает изменения значений и перераспределения в пространстве зарядов, создающих исследуемое поле.

Количественной характеристикой силового действия электрического поля на заряженные частицы и тела служит векторная величина \vec{E} – напряженность электрического поля. **Напряженность электрического поля** равна отношению силы, действующей со стороны поля на неподвижный пробный электрический заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к этому заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (17.4)$$

Электростатическое поле называется **однородным**, если во всех его точках векторы напряженности \vec{E} одинаковы, т.е. совпадают по модулю и направлению.

Сила, действующая со стороны электрического поля на помещенный в него произвольный точечный заряд, равна произведению заряда на напряженность поля в этой точке:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (17.5)$$

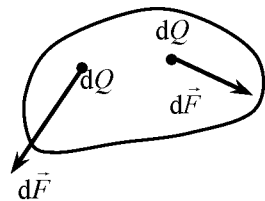


Рис. 17.2

В случае нахождения силы, действующей на заряженное тело конечных размеров, помещенное в произвольное электрическое поле, необходимо поступать следующим образом. Разобьем исследуемое заряженное тело на совокупность материальных точек, т.е. на точечные заряды dQ (рис. 17.2). Элементарная сила со стороны

поля, действующая на каждый точечный заряд определится как $d\vec{F} = \vec{E}dQ$, где \vec{E} – напряженность поля в точке расположения заряда dQ . Тогда общая сила, действующая на весь заряд Q , будет найдена путем суммирования элементарных сил:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{E}dQ, \quad (17.6)$$

где интегрирование проводится по всему объему тела.

Практическое вычисление интеграла (17.6) оказывается удобным, если электрический заряд распределен по всему заряженному телу непрерывно: вдоль некоторой линии, по поверхности или по объему. В этих случаях можно использовать понятия линейной, поверхностной и объемной плотностей заряда (рис. 17.3).

Линейная плотность электрического заряда $\tau = \frac{dQ}{dl}$, где dQ – заряд малого участка заряженной линии (пример: стержень, нить) длиной dl (рис. 17.3, а). Поэтому полный заряд тела можно найти как $Q = \int_L \tau dl$. Если заряд распределен по линии равномерно, то

полный заряд тела будет равен $Q = \tau L$. Размерность линейной плотности заряда в СИ: $[\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$.

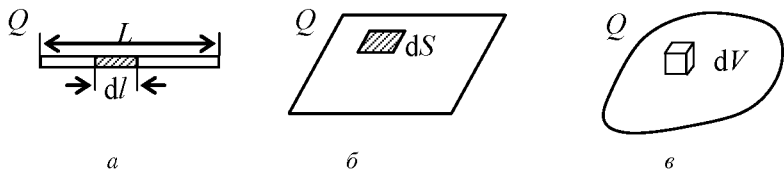


Рис. 17.3

Поверхностная плотность электрического заряда $\sigma = \frac{dQ}{dS}$, где dQ – заряд малого участка заряженной поверхности (пример: заряженная плоскость) площадью dS (рис. 17.3, б). Полный заряд тела можно рассчитать как $Q = \int_S \sigma dS$. При равномерно распре-

ленном по поверхности заряде полный заряд тела будет равен $Q = \sigma S$. Размерность поверхностной плотности заряда в СИ:

$$[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Объемная плотность электрического заряда $\rho = \frac{dQ}{dV}$, где dQ – заряд малого элемента заряженного тела объемом dV (рис. 17.3, в). Полный заряд тела можно рассчитать как $Q = \int_V \rho dV$.

При равномерно распределенном по объему заряде полный заряд тела будет равен $Q = \rho V$. Размерность объемной плотности заряда в СИ: $[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$.

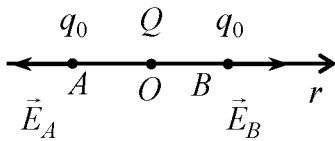


Рис. 17.4

В качестве примера определения напряженности электростатического поля заряженного тела по заданному распределению зарядов рассмотрим нахождение напряженности поля точечного заряда Q (рис. 17.4).

Модуль силы, действующей со стороны такого поля на помещенный в него пробный заряд q_0 , определится, согласно (17.1), как $F = k \frac{Qq_0}{r^2}$, где r – расстояние от источника поля (заряда Q) до исследуемой точки поля (заряда q_0), отсчитываемое вдоль некоторой оси Or . Тогда

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{Q}{r^2}. \quad (17.7)$$

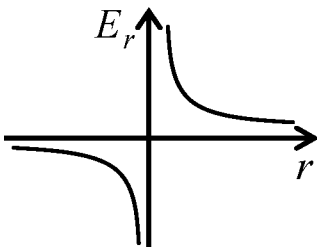


Рис. 17.5

На рисунке 17.4 показаны направления векторов напряженности поля в двух точках выбранной оси. На рис. 17.5 показан график зависимости проекции напряженности поля на выбранное направление оси от расстояния до точечного заряда при $Q > 0$.

Графическое изображение электростатического поля с помощью векторов напряженности \vec{E} в различных точках пространства очень неудобно. Более наглядным оказался метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий, предложенный М. Фарадеем.

Силовая линия – воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряженности поля в этой точке. Силовые линии электростатического поля изображают в соответствии с определенными правилами.

1. Силовая линия считается направленной так же, как вектор \vec{E} в рассматриваемой точке линии.

2. Густота (близость друг к другу) силовых линий в окрестности какой-либо точки пропорциональна $|\vec{E}|$ в данной точке.

3. Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

4. Силовые линии не соприкасаются и не пересекаются, т.к. в каждой точке поля вектор \vec{E} имеет только одно определенное направление. Данное правило справедливо во всех точках пространства, кроме тех, в которых расположены точечные заряды.

5. Силовые линии непрерывны в области пространства, в которой отсутствуют электрические заряды.

На рисунке 17.6 изображены силовые линии электростатического поля системы двух разноименных одинаковых по модулю электрических зарядов, называемой **электрическим диполем**.

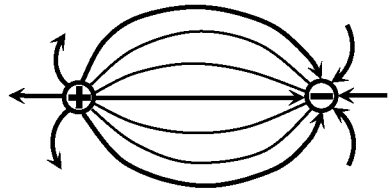


Рис. 17.6

При рассмотрении электростатического поля произвольной системы неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_N было экспериментально показано, что результирующая сила \vec{F} , действующая на пробный заряд q в любой точке поля, равна геометрической сумме сил, действующих на заряд q со стороны каждого из зарядов q_i :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (17.8)$$

Из (17.8) легко получить, что

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (17.9)$$

Последнее соотношение выражает принцип суперпозиции электрических полей (принцип независимости действия электрических полей): напряженность электрического поля, созданного системой зарядов в любой точке пространства, равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности.

Рассмотрим применение этого принципа для расчета напряженности поля системы дискретно и непрерывно распределенных зарядов.

Пример 1. Для электрического диполя (рис. 17.7, а) введем понятие вектора электрического дипольного момента: $\vec{p} = q\vec{l}$, определяемого произведением положительного заряда диполя на плечо диполя \vec{l} . Вектор \vec{l} направлен от отрицательного заряда диполя к положительному.

Для расчета модуля напряженности поля в любой точке A на оси диполя (рис. 17.7, б) выполним следующие действия:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; E_A = E_+ - E_- = kq \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right).$$

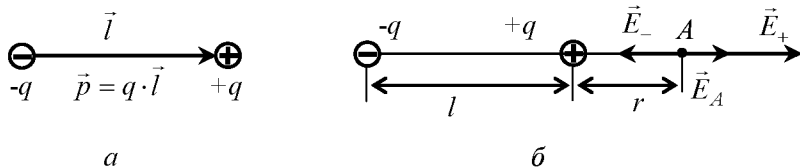


Рис. 17.7

При условии $r \gg l$ последнее равенство приводится к виду

$$E_A = kq \frac{2l}{r^3} = 2k \frac{p}{r^3}.$$

Поскольку в рассматриваемом примере $E_+ > E_-$, то $\vec{E}_A \uparrow \uparrow \vec{E}_+ \Rightarrow \vec{E}_A \uparrow \uparrow \vec{p}$. Поэтому $\vec{E}_A = 2k \frac{\vec{p}}{r^3}$.

При расчете напряженности поля в точке на серединном перпендикуляре к оси диполя (рис. 17.8) геометрическое сложение векторов \vec{E}_+ и \vec{E}_- при том же условии $r \gg l$ дает другой результат:

$$E_D = |\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = 2E_+ \sin \frac{\alpha}{2} \approx \\ \approx E_+ \alpha = E_+ \frac{l}{r} = k \frac{q}{r^2} \frac{l}{r} = k \frac{p}{r^3}.$$

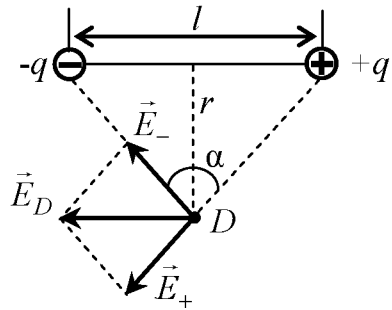


Рис. 17.8

Пример 2. Определим напряженность поля, созданного электрическим зарядом Q , непрерывно распределенным по однородному проволочному кольцу радиусом R , в точке A на оси кольца, удаленной на расстояние z от него (рис. 17.9).

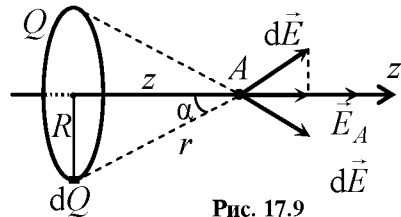


Рис. 17.9

Разобьем кольцо на элементы длиной dl . Тогда на каждом элементе кольца будет находиться элементарный заряд $dQ = \tau dl = \frac{Q}{2\pi R} dl$. Такой электрический заряд создает в точке A электрическое поле напряженностью $d\vec{E}$, причем

$$dE = k \frac{dQ}{r^2} = k \frac{dQ}{R^2 + z^2}.$$

Некоторые векторы $d\vec{E}$, определяемые различными элементами кольца, показаны на рисунке. Поскольку $\vec{E}_A = \int d\vec{E}$, то из условий симметрии очевидно, что,

$$E_A = \int dE \cos \alpha = \int dE \frac{z}{r} = \int dE \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Окончательно получим

$$E_A = \int k \frac{dQ}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dQ = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте условия применимости закона Кулона для определения силы взаимодействия двух заряженных тел.
2. Сформулируйте определение напряженности электростатического поля.
3. Сформулируйте принцип суперпозиции электростатических полей.
4. Как определить силу, действующую на электрический заряд в электрическом поле?
5. Определите силу отталкивания двух одинаковых равномерно заряженных стержней, расположенный вдоль одной прямой, если длины стержней равны a и b , линейные плотности зарядов стержней равны τ_1 и τ_2 , а ближайшие концы стержней находятся на расстоянии x .

18. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПОТЕНЦИАЛ

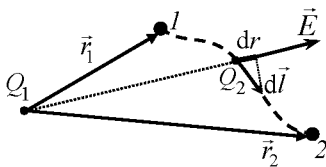


Рис. 18.1

Силы электростатического взаимодействия являются центральными, а, следовательно, консервативными. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным. Определим работу

сил электростатического поля, созданного зарядом Q_1 , по перемещению точечного заряда Q_2 из точки 1 в точку 2 (рис. 18.1).

Элементарная работа сил потенциального поля по перемещению заряда на расстояние dl : $dA = \vec{F} d\vec{l} = Q_2 E dl \cos(\hat{E}, \hat{d\vec{l}}) = Q_2 E dr$. Тогда

$$A = Q_2 \int E dr = Q_2 \int_1^2 k \frac{Q_1}{r^2} dr = k Q_1 Q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (18.1)$$

Если заряды одноименны, то поле совершает положительную работу по их удалению друг от друга и отрицательную работу по их сближению.

Соотношение (18.1) показывает, что работа сил электростатического поля по перемещению заряда не зависит от формы траектории движения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Итак, кулоновские силы консервативны, поэтому циркуляция напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы электростатическое поле было потенциальным. Тогда справедлива связь работы консервативной силы и изменения потенциальной энергии, т.е. работа сил электростатического поля равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{\text{пот}} \Rightarrow A = W_1 - W_2. \quad (18.2)$$

Рассмотрим отношение работы поля по перемещению пробного заряда из одной точки пространства в другую к величине переносимого заряда:

$$\frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2} = \int_1^2 E dr. \quad (18.3)$$

Поскольку полученное отношение не зависит от переносимого заряда и траектории его перемещения, то данная величина может быть принята в качестве характеристики электростатического поля. **Разностью потенциалов между двумя точками электростатического поля называется отношение работы сил поля по перемещению пробного электрического заряда из одной точки в другую к величине этого заряда:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2}. \quad (18.4)$$

С учетом (18.3) и (18.4) получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dr, \quad (18.5)$$

$$A_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) Q_2. \quad (18.6)$$

Введем теперь понятие потенциала точки электростатического поля. Из (18.4) следует, что $\varphi_1 = \frac{W_1}{Q_2}$; $\varphi_2 = \frac{W_2}{Q_2}$.

Потенциалом точки электростатического поля называется энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии пробного электрического заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.

Ранее было отмечено, что потенциальная энергия – физическая величина, которая определена с точностью до некоторого произвольного значения. Следовательно, потенциал электрического поля также определен с точностью до произвольного значения, поэтому в любой точке пространства можно принять его значение, в частности, равным нулю. Если значение потенциальной энергии и соответственно потенциала в точке 2 принять равными нулю, то потенциал точки 1 согласно (18.5)

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad (\varphi_2 = 0). \quad (18.6)$$

Таким образом, потенциал любой точки электростатического поля численно равен удельной работе (работе, отнесенной к величине заряда), совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда из этой точки в ту точку, в которой потенциал поля условно принят равным нулю. Выбор точки с нулевым потенциалом произволен и определяется удобством решения каждой конкретной задачи. Рассмотрим это на некоторых примерах.

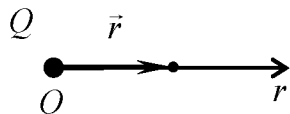


Рис. 18.2

Пример. Определим потенциал произвольной точки пространства, удаленной на расстояние r от точечного заряда Q (рис. 18.2).

Выберем точку, потенциал которой примем равным нулю. Пусть это будет точка, бесконечно удаленная от заряда Q . Поскольку работа по переносу пробного заряда из данной точки в бесконечность не зависит от формы траектории движения, то рассмотрим такое движение пробного заряда, при котором $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ (т.е. вдоль прямой, совпадающей с осью Or).

Тогда при условии $\varphi(\infty) = 0$ получаем зависимость потенциала поля точечного заряда от расстояния

$$\varphi = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty k \frac{Q}{r^2} dr = k \frac{Q}{r}.$$

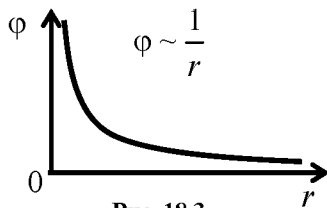


Рис. 18.3

График функции $\varphi(r)$ показан на рис. 18.3.

Пример. Рассмотрим электростатическое поле, созданное системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Тогда потенциал произвольной точки пространства $\varphi = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, при этом $\varphi_2 = 0$. Вектор

напряженности поля \vec{E} в данной точке рассчитываем по принципу суперпозиции и находим искомый потенциал как алгебраическую сумму потенциалов: $\varphi = \int_1^2 \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \varphi_i$.

Сформулируем полученный вывод: потенциал поля, созданного в данной точке системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности, т.е.

$$\varphi = \int_1^2 \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Сформулируем полученный вывод: потенциал поля, созданного в данной точке системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности, т.е.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (18.7)$$

При рассмотрении поля, созданного непрерывно распределенным в пространстве зарядом, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) выделить в объекте элемент заряда dQ , который в условиях данной задачи можно считать точечным;

2) выразить потенциал $d\varphi$ поля этого заряда в рассматриваемой точке;

3) определить потенциал в заданной точке пространства:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad \text{или} \quad \varphi = \int_Q d\varphi.$$

Выясним физический смысл взаимосвязи напряженности (силовой характеристики электростатического поля) и потенциала (энергетической характеристики). Соотношение

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad (\varphi_2 = 0)$$

позволяет по заданной зависимости напряженности произвольной точки поля от ее координат найти зависимость потенциала этой точки от координат и, как следствие, рассчитать потенциал поля в любой точке. При этом потенциал произвольной точки поля определяется напряженностью поля на всем пути от этой точки до точки, где значение потенциала условно принято за нуль. Данное соотношение носит название **интегральной связи напряженности и потенциала электростатического поля**.

Из соотношения (18.5) следует, что $\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi$. Левая часть равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ и $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$, поэтому

$$\vec{E} d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz .$$

Поскольку бесконечно малое приращение потенциала $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$, то для проекций вектора \vec{E} получаем:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Таким образом,

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi . \quad (18.8)$$

Последнее равенство можно записать иначе — в операторной форме:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (18.9)$$

где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$; $\vec{\nabla}$ носит название оператора Гамильтона.

Выражения (18.8) или (18.9) определяют дифференциальную связь напряженности и потенциала электростатического поля. Они позволяют по известной зависимости потенциала от координат определить зависимость напряженности поля от координат и найти напряженность поля в любой точке. Поскольку градиент скалярной функции – это вектор, направленный в сторону ее наибольшего возрастания, то из (18.9) следует, что вектор напряженности электрического поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Поэтому и силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала.

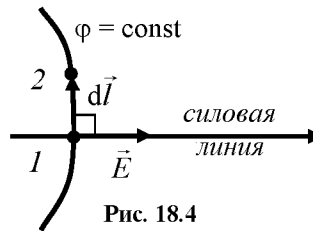


Рис. 18.4

Если известны значения потенциала в различных точках пространства, то через точки с одинаковыми значениями потенциала можно провести поверхности, которые называются эквипотенциальными. Графически представляя электростатическое поле на плоском листе бумаги, будем изображать линии пересечения этих поверхностей с плоскостью листа в виде эквипотенциальных линий (эквипотенциалей). Докажем, что силовые линии перпендикулярны эквипотенциалам.

Разность потенциалов между двумя точками пространства (рис. 18.4) согласно (18.5) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$. Если эти точки принад-

лежат одной эквипотенциали, то $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, а вектор $d\vec{l}$ направлен вдоль эквипотенциали. Равенство скалярного произведения $\vec{E} d\vec{l}$ нулю возможно лишь при

$(\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, соотношение (18.9) позволяет по заданному

распределению потенциала поля в пространстве восстановить картину его силовых линий (рис. 18.5).

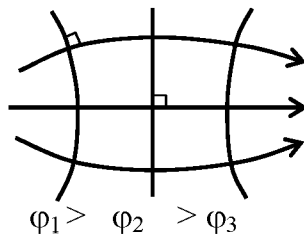


Рис. 18.5

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению точечного электрического заряда?
2. Сформулируйте определения потенциала и разности потенциалов электростатического поля.
3. Как связаны между собой силовая и энергетическая характеристики электростатического поля?
4. Запишите выражения для дифференциальной связи между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Сформулируйте физический смысл записанного выражения.
5. Запишите выражения для интегральной связи между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Сформулируйте физический смысл записанного выражения.

19. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Ранее были введены две физические величины, характеризующие электрическое поле, – напряженность и потенциал. Принцип суперпозиции и соотношение (18.7) позволяют рассчитать эти величины для заданной системы зарядов в пространстве независимо друг от друга, а интегральная и дифференциальная связь между ними дают возможность определить одну из величин, зная другую. Однако практическое вычисление интегралов и может быть весьма затруднительным.

Рассмотрим иной метод определения напряженности электростатического поля – метод, основанный на использовании теоремы Остроградского–Гаусса. Она была выведена в 1828 г. русским математиком М.В. Остроградским для произвольного векторного поля. Немецкий физик и математик К.Ф. Гаусс в 1839 г. применил ее к расчету электростатических полей.

Для рассмотрения этой теоремы введем понятие потока вектора напряженности. Проведем в электрическом поле произвольную поверхность площадью S (рис. 19.1). Назовем элементарным потоком вектора напряженности электростатического поля через малый участок (элемент) поверхности dS величину

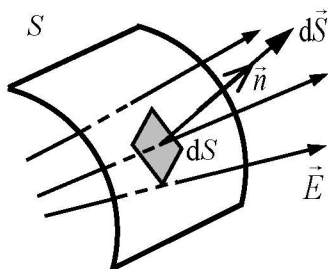


Рис. 19.1

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = Ed \cos(\hat{E}, d\vec{S}) = Ed \cos(\hat{E}, \vec{n}), \quad (19.1)$$

где $d\vec{S}$ – вектор площади элемента поверхности; \vec{n} – вектор единичной нормали к поверхности в месте расположения элемента dS . Справедливы соотношения: $d\vec{S} = \vec{n} dS$; $|d\vec{S}| = |\vec{n}| dS = dS$. Малый элемент поверхности dS выбирается таких размеров, чтобы в его пределах можно было считать поле однородным, а кривизну поверхности можно было бы не учитывать.

Поток вектора напряженности электростатического поля через всю поверхность S находится как алгебраическая сумма потоков сквозь все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (19.2)$$

При вычислениях по формуле (19.2) договоримся направлять все векторы \vec{n} в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S . Например, в случае замкнутой поверхности S в дальнейшем будем считать векторы \vec{n} внешними нормальными к поверхности, т.е. направленными из области, ограниченной этой поверхностью.

Из (15.21) следует, что $\Phi = 0$, если во всех точках поверхности S силовые линии поля перпендикулярны векторам \vec{n} , т.е. «скользят» по поверхности. С другой стороны, поток максимален, если поверхность S расположена перпендикулярно силовым линиям в каждой точке пространства. Таким образом, поток вектора напряженности через поверхность пропорционален числу силовых линий, пересекающих эту поверхность.

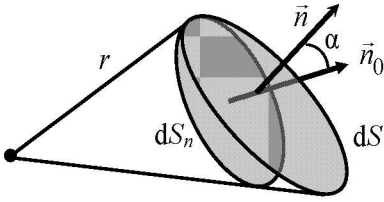


Рис. 19.2

Вспомним понятие телесного угла. Это часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины угла) ко всем точкам замкнутой кривой (рис. 19.2). Мерой телесного угла является отношение площади элемента dS_n , вырезаемого телесным углом на сфере радиусом r с центром в вершине угла, к квадрату радиуса:

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}.$$

Единицей телесного угла в СИ служит угол, опирающийся на сферу радиусом 1 м и вырезающий на ней элемент площадью 1 м². Такой телесный угол равен 1 стерadian (обозначается 1 ср). Поскольку площадь поверхности всей сферы равна $4\pi r^2$, то телесный угол, опирающийся на всю сферу, равен 4π ср.

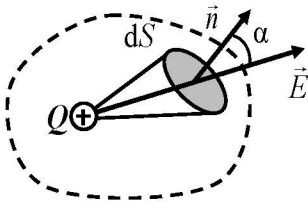


Рис. 19.3

Рассмотрим точечный заряд Q , охваченный произвольной замкнутой поверхностью (рис. 19.3). Выделим на этой поверхности элемент площадью dS , «вырезанный» из нее телесным углом $d\Omega$ с вершиной в заряде. Элементарный поток вектора напряженности поля точечного заряда через элемент dS согласно (19.1) в СИ запишем следующим образом:

$$d\Phi = E dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Полный поток вектора напряженности через замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (19.3)$$

Кружок на значке интеграла означает, что интегрирование производится по замкнутой поверхности. Если произвольная замкнутая поверхность охватывает точечные заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_n , то можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \\ \dots \\ \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}, \end{cases}$$

где \vec{E}_i – напряженность поля каждого из зарядов. Складывая уравнения приведенной выше системы, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}. \quad (19.4)$$

Итак, если электрические заряды находятся внутри замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности через эту поверхность пропорционален алгебраической сумме этих зарядов.

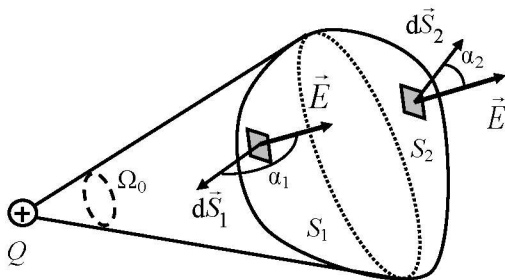


Рис. 19.4

Рассмотрим теперь точечный заряд $Q > 0$, расположенный вне произвольной замкнутой поверхности (рис. 19.4).

В этом случае касательная коническая поверхность с вершиной в точке расположения заряда разбивает поверхность S на две части: S_1 и S_2 . Полный поток напряженности через всю поверхность S равен алгебраической сумме потоков через эти части:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Для всех элементов поверхности S_1 углы между векторами \vec{E} и внешними нормальными \vec{n} (при $Q > 0$) – тупые; для всех элементов поверхности S_2 – острые. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) < 0, \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_2} E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) > 0.\end{aligned}\quad (19.5)$$

Поскольку поверхности S_1 и S_2 видны из точки расположения заряда Q под одним и тем же телесным углом Ω_0 , то согласно (19.3) $|\Phi_1| = |\Phi_2| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_0$. Отсюда с учетом (19.5) получаем

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (19.6)$$

Обобщим полученные выводы. Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \text{ охв}}{\epsilon_0}. \quad (19.7)$$

Полученное утверждение называется **теоремой Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме**. Замкнутую поверхность S , фигурирующую в формулировке теоремы, часто называют **гауссовой поверхностью**. Отметим, что коэффициент пропорциональности между потоком напряженности и суммой зарядов, охваченных этой поверхностью, определен выбором системы единиц физических величин. В СИ этот коэффициент равен $\frac{1}{\epsilon_0}$. В других системах единиц он принимает другие значения.

Теорему Остроградского–Гаусса (19.7) удобно использовать для расчета напряженности электростатических полей, созданных

симметричными системами зарядов. В этих случаях можно так выбрать гауссову поверхность, что поток вектора напряженности поля через нее легко выражается с помощью искомого значения модуля напряженности. Решение задачи о нахождении напряженности электростатического поля в какой-либо точке пространства осуществляется в несколько этапов.

1. Исходя из симметрии распределения заданной системы зарядов в пространстве, построить силовые линии поля, т.е. определить направление вектора \vec{E} в любой точке пространства.

2. Выбрать «удобную» замкнутую гауссову поверхность, отвечающую следующим требованиям:

- а) она должна проходить через исследуемую точку;
- б) площадь поверхности должна быть известна;
- в) модуль напряженности поля должен быть постоянен в точках всей поверхности или хотя бы ее части;
- г) угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности должен быть известен в любой точке поверхности (это обеспечивается выполнением п. 1).

3. Получить выражение для потока напряженности поля через выбранную поверхность. Если выполнено условие п.2в, то

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS + \dots + E_N \int_{S_N} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS,$$

где E_i – постоянный модуль напряженности поля во всех точках части поверхности S_i .

4. Определить алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью S .

5. Применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп.3 и 4 с учетом коэффициента пропорциональности.

Пример 1. Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд $Q > 0$ равномерно распределен в пространстве в виде шара радиусом R .

Исходя из условий симметричного распределения заряда, изобразим силовые линии его электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает сферической симметрией, силовые линии поля будут исходить из центра шара по радиальным направлениям (на рис. 19.5 показаны только 4 силовые линии).

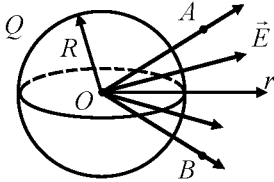


Рис. 19.5

Кроме того, исходя из симметрии системы, можно утверждать, что модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от центра шара, должен быть одинаковым. Это справедливо, например, для точек A и B (см. рис. 19.5), находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии системы.

Следовательно, направление и модуль вектора \vec{E} будут зависеть только от радиальной координаты исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты r выберем произвольную радиальную ось Or , выходящую из центра шара.

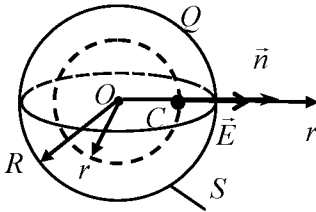


Рис. 19.6

2. Определим напряженность поля в произвольной точке C , находящейся внутри шара на расстоянии r от его центра. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем сферическую поверхность радиусом r , центр которой совпадает с центром заряженного шара. На рисунке 19.6

штриховой окружностью радиусом r показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

Следствием симметрии системы является равенство модуля вектора напряженности поля во всех точках поверхности, и равенство угла между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках поверхности нулю.

3. Определим поток вектора \vec{E} через гауссову поверхность:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S \cos(\vec{E}, d\vec{S}) dS = E \oint_S dS = E4\pi r^2. \quad (19.8)$$

4. Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью S . В данном случае электрический заряд, охваченный гауссовой поверхностью – это часть всего заряда. Определим эту часть заряда через объемную плотность заряда и объем, ограниченный гауссовой поверхностью:

$$Q_{\text{охв}} = \rho V_{\text{охв}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}. \quad (19.9)$$

5. Применим теорему Остроградского–Гаусса, приравняв (19.8) и (19.9) с учетом коэффициента $\frac{1}{\epsilon_0}$: $E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qr^3}{R^3}$.

Отсюда получим, что при $r < R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}. \quad (19.10)$$

Применим эту процедуру для определения напряженности поля вне шарового скопления заряда. Выберем гауссову поверхность в виде сферы радиусом $r > R$, проходящей через произвольную точку D , находящуюся вне зарядов. На рисунке 19.7 штриховой окружностью радиусом r показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

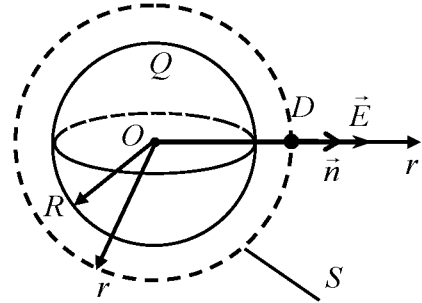


Рис. 19.7

Выражение для потока вектора \vec{E} через гауссову поверхность сохранит прежний вид (19.8). Заряд, охваченный поверхностью, представляет собой полный заряд шара: $Q_{\text{охв}} = Q$. Согласно теореме Остроградского–Гаусса получим, что при $r > R$ имеет место соотношение

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \text{ Отсюда}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (19.11)$$

Окончательный вид зависимости модуля напряженности от координаты r можно представить так:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & \text{при } r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

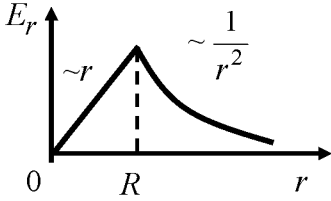


Рис. 19.8

При построении графической зависимости $E(r)$ (рис. 19.8) обратим внимание на то, что выражения (19.10) и (19.11) дают одинаковые значения модуля напряженности поля при $r = R$:

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Пример 2. Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд равномерно распределен с поверхностной плотностью $\sigma > 0$ по поверхности весьма длинного цилиндра с радиусом основания R .

1. Определим из условий симметрии и изобразим графически линии напряженности электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает осевой симметрией, силовые линии поля (если поле существует) будут исходить из точек оси цилиндра по радиальным направлениям (на рис. 19.9 показаны 4 силовые линии электрического поля).

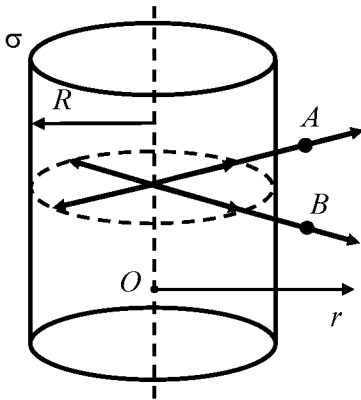


Рис. 19.9

Вследствие осевой симметрии системы, модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от оси системы, должен быть одинаковым: такие точки как, например, точки A и B , находятся на одинаковом расстоянии от оси симметрии системы.

Следовательно, направление и модуль вектора \vec{E} будут зависеть только от радиальной координаты исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты r выберем произвольную радиальную ось Or , направленную перпендикулярно оси цилиндра.

2. Определим напряженность поля в произвольной точке C , находящейся вне цилиндра и имеющей координату $r > R$. Для этого выберем замкнутую поверхность S в виде поверхности цилиндра высотой H и радиусом r , ось которого совпадает с осью заряженного цилиндра (рис. 19.10).

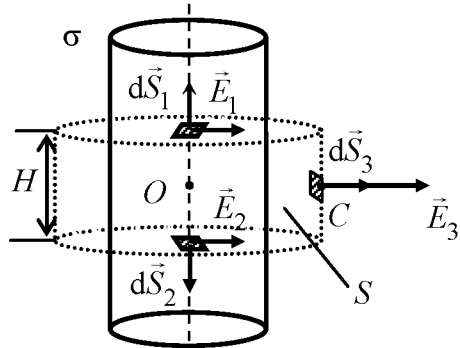


Рис. 19.10

Модуль напряженности поля **постоянен** во всех точках боковой поверхности цилиндра, вследствие симметрии системы. Угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра равен нулю, а во всех точках верхнего и нижнего оснований гауссова цилиндра равен $\frac{\pi}{2}$.

3. Определим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S :

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_1) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_2) dS + E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_3) dS,$$

где S_1 – площадь верхнего основания цилиндра; S_2 – площадь нижнего основания цилиндра; S_3 – площадь боковой поверхности цилиндра; $d\vec{S}_1$, $d\vec{S}_2$, $d\vec{S}_3$ – векторы соответствующих элементарных площадок. Учитывая соображения, изложенные при осуществлении этапа 2, получаем:

$$E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_1) dS = E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_2) dS = 0;$$

$$E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_3) dS = E_3 S_3.$$

Таким образом,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_3 S_3 = E 2\pi r H. \quad (19.12)$$

4. Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью гауссова цилиндра. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности, – это часть полного заряда цилиндра. Эту часть можно найти, умножив площадь боковой поверхности заряженного цилиндра, охваченного гауссовой поверхностью, на поверхностную плотность заряда:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma 2\pi r H. \quad (19.13)$$

5. Приравняв (19.12) и (19.13) с учетом коэффициента \vec{E} , имеем: \vec{E} . Отсюда следует, что $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$.

Повторим все действия для определения напряженности поля внутри заряженного цилиндра. В этом случае выберем гауссову поверхность в виде цилиндрической

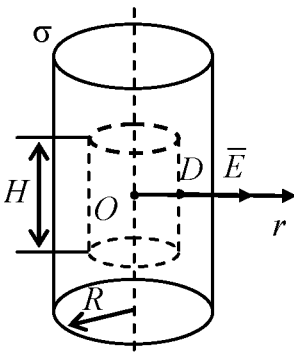


Рис. 19.11

поверхности, боковая поверхность, которой проходит через произвольную точку D , находящуюся на расстоянии $r < R$ (рис. 19.11).

Выражение для потока \vec{E} через гауссову поверхность сохранит прежний вид (19.12). Но в этом случае внутри гауссовой поверхности нет зарядов, поэтому $E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} 0$, откуда следует

значение $E = 0$.

Окончательно зависимость модуля напряженности от радиальной координаты можно представить следующим образом:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

График полученной зависимости изображен на рис. 19.12. Видно, что при значении координаты $r = R$ график имеет разрыв. Отсюда, в частности, можно сделать вывод, что при переходе через поверхность, заряженную с поверхностной плотностью заряда σ , модуль вектора напряженности электрического поля изменяется скачком на $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

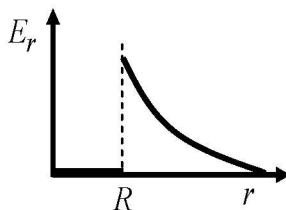


Рис. 19.12

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется поток напряженности электростатического поля в вакууме через замкнутую поверхность?
2. Напряженность каких электростатических полей удобно определять с помощью теоремы Остроградского–Гаусса?
3. Сформулируйте теорему Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме.
4. Объясните порядок применения теоремы Остроградского–Гаусса для определения напряженности электростатического поля.
5. Определите поток напряженности электростатического поля, создаваемого точечным зарядом Q , расположенным в центре куба: а) через полную поверхность куба; б) через одну из граней куба.

20. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Диэлектриками называют вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. В диэлектриках нет свободных носителей зарядов – заряженных частиц, которые под действием электрического поля могли бы прийти в упорядоченное движение и создать электрический ток проводимости. К диэлектрикам относятся все газы (если они не подверглись ионизации), некоторые жидкости и твердые тела. Удельное электрическое сопротивление диэлектриков $\rho \approx 10^6 \dots 10^{15}$ Ом·м, тогда как у металлов $\rho \approx 10^{-8} \dots 10^{-6}$ Ом·м. Особенности поведения диэлектриков в электростатических полях объясняются, прежде всего, их молекулярным строением. Электрически заряженные элементарные частицы, входящие в состав молекул диэлектриков, достаточно прочно связаны друг с другом внутриаомными силами. Электрические заряды, входящие в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой, называются **связанными зарядами**. Заряды, не входящие в состав атомов и молекул вещества, называются **свободными**. Это заряды частиц, способных перемещаться под действием электрического поля (свободные электроны в металлах и полупроводниках, ионы в электролитах и газах, электроны и ионы в плазме), положительные заряды ионов кристаллической решетки металлов, избыточные заряды, сообщенные проводящему телу. Рассмотрение поведения диэлектриков в электростатических полях мы начнем с изучения характеристик связанных зарядов.

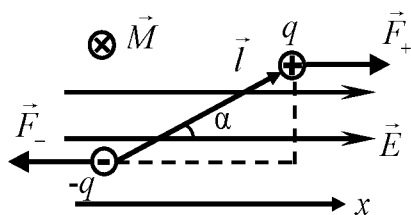


Рис. 20.1

Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер в составе молекул равен нулю. Но молекула обладает электрическими свойствами: ее можно рассматривать как электриче-

ский диполь с дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l}$, где q – положительный заряд всех атомных ядер молекулы, а \vec{l} – вектор, проведенный из «центра тяжести» электронного облака в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомного ядра (рис. 20.1).

Рассмотрим поведение молекулярного диполя в однородном электрическом поле. На заряды диполя в поле будет действовать пара сил:

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}, \quad \vec{F}_- = -q\vec{E},$$

причем

$$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = qE. \quad (20.1)$$

Возникшая пара сил, действуя совместно на заряды диполя, будет создавать вращающий момент $M = M_+ + M_- = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$; направление вектора \vec{M} указано на рис. 20.1 (он перпендикулярен плоскости рисунка). В векторном виде

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (20.2)$$

Действие момента сил будет приводить к повороту диполя таким образом, чтобы направления векторов дипольного момента и напряженности электрического поля совпали.

Этот же результат можно получить из энергетических представлений. Суммарная потенциальная энергия зарядов диполя

$$W = W_+ + W_- = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где φ_+ и φ_- – потенциалы точек расположения положительного и отрицательного заряда диполя соответственно. Учитывая связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного поля, получаем $W = -pE \cos \alpha$.

Действие электрических сил приводит диполь в состояние устойчивого равновесия, когда его потенциальная энергия минимальна, т.е. $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0$.

При внесении диполя в неоднородное электрическое поле, напряженность которого в разных точках пространства различна, силы, действующие на заряды диполя, будут не равны друг другу: $|\vec{F}_+| \neq |\vec{F}_-|$. Проекция на ось x (рис. 20.1) результирующей силы, действующей на диполь,

$$F_x = q(E_1 - E_2) = q \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где E_1 и E_2 – модули напряженности поля в точках расположения зарядов диполя. Таким образом, в неоднородном поле на диполь будет действовать сила $\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} = \nabla(\vec{p}, \vec{E})$.

Из-за теплового движения дипольные моменты молекул любого диэлектрика, не внесенного в поле, ориентированы беспорядочно, так что суммарный дипольный момент молекул такого диэлектрика в любом его объеме равен нулю.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит поляризация диэлектрика, заключающаяся в том, что в любом малом его объеме ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называется **поляризованным**. Объем ΔV предполагается во много раз большим объема одной молекулы. В то же время объем выбирается настолько малым, чтобы внешнее поле в этом объеме можно было бы считать однородным. Тем не менее в таком объеме число молекул достаточно велико, и к ним применим статистический метод.

В **неполярных диэлектриках** (диэлектриках с неполярными молекулами) в отсутствии внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах совпадают, и дипольные моменты равны нулю. Таковы, например, молекулы O_2 , H_2 , N_2 , CCl_4 и др. Во внешнем электрическом поле происходит деформация электронных оболочек атомов, при этом возникает множество диполей. Однако при снятии внешнего поля происходит восстановление прежней структуры молекул, исчезает деформация электронных оболочек и, как следствие, исчезают диполи. **Электронная поляризация** обусловлена упругим смещением и деформацией электронных оболочек. Электрическое поле действует на такую молекулу так, как если бы положительные и отрицательные заряды в ней были бы связаны упругими силами. Молекула ведет себя как упругий диполь.

Определим индуцированный дипольный электрический момент молекулы во внешнем поле. Для примера рассмотрим атом водорода, в котором электрон вращается по круговой орбите радиусом R под действием кулоновской силы притяжения к ядру:

$$m\omega^2 R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (20.3)$$

где m – масса электрона, ω – его угловая скорость при движении по орбите. Во внешнем поле напряженностью \vec{E} на электрон действует сила $F_1 = eE$, вызывающая смещение орбиты на расстояние Δl (рис. 20.2).

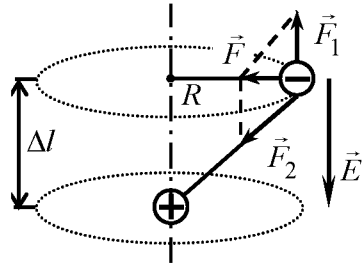


Рис. 20.2

Будем считать, что смещение плоскости орбиты из исходного положения настолько мало, что не вызывает изменения ее радиуса. Движение электрона по орбите в возмущенном состоянии будет определять сумма сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $F_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Как видно из рис. 20.2,

$$\frac{\Delta l}{R} = \frac{F_1}{F} = \frac{eE}{m\omega^2 R}; \quad \Delta l = \frac{eE}{m\omega^2}.$$

С учетом (20.3) получим

$$\Delta l = \frac{E}{e} 4\pi\epsilon_0 R^3. \quad (20.4)$$

Дипольный момент молекулярного диполя, созданного внешним электрическим полем с напряженностью \vec{E} ,

$$p = e\Delta l = 4\pi\epsilon_0 R^3 E. \quad (20.5)$$

Отметим, что модуль дипольного момента пропорционален модулю напряженности внешнего поля, а направление вектора \vec{p} совпадает с направлением \vec{E} , т.е.

$$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (20.6)$$

где коэффициент пропорциональности β называется **поляризуемостью молекулы**. Он зависит от ее размера и является постоян-

ным для рассматриваемого диэлектрика. Тепловое движение неполярных молекул не влияет на возникновение у них дипольных моментов, поэтому поляризуемость не зависит от температуры. Соотношение (20.6) может быть получено и для молекул с большим числом электронов, в которых весь отрицательный заряд равномерно распределен по объему молекулы. Оценим размер получившегося диполя. Поскольку радиус электронной орбиты $R \approx 10^{-10}$ м, а максимальное значение напряженности поля, не вызывающего разрыва молекулярных связей, $E \approx 10^8$ В/м, то согласно (20.4) $\Delta l = 7 \cdot 10^{-14}$ м, что подтверждает наше предположение о том, что значение Δl очень мало.

В полярных диэлектриках (диэлектриках с полярными молекулами) в отсутствии внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах не совпадают и дипольные моменты не равны нулю. Таковы, например, молекулы H_2O , NH_3 , HCl и др. Во внешнем электрическом поле происходит поворот уже существующих молекулярных диполей таким образом, что векторы дипольных моментов ориентируются вдоль силовых линий. Деформация электронных оболочек молекул практически не изменяет дипольные моменты молекул. Полярная молекула по своим электрическим свойствам подобна жесткому диполю с постоянным электрическим моментом. Поляризация диэлектриков с жесткими диполями обусловлена преимущественной ориентацией электрических моментов диполей в одном направлении, поэтому ее часто называют ориентационной поляризацией. Тепловое движение молекул нарушает этот порядок, поэтому средний дипольный момент упорядоченно расположенных диполей зависит от температуры:

$$\langle p \rangle = \varepsilon_0 \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0} E, \quad \langle p \rangle = \varepsilon_0 \beta E, \quad \beta = \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (20.7)$$

Здесь p – модуль дипольного момента молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Соотношение (20.7) впервые вывел голландский физик П. Дебай, получивший в 1936 г. Нобелевскую премию за создание дипольной теории

диэлектриков. Видно, что (20.7) по своему виду соответствует выражению (20.6), но поляризуемость полярного диэлектрика обратно пропорциональна его температуре.

Ионная поляризация происходит в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку (например, NaCl). Внешнее электрическое поле вызывает в таких диэлектриках упругое смещение всех положительных ионов в направлении вектора \vec{E} , а всех отрицательных ионов – в противоположную сторону. При снятии внешнего поля кристалл диэлектрика возвращается в исходное состояние, поэтому поляризуемость такого типа диэлектриков также пропорциональна напряженности внешнего поля.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит **поляризованность** \vec{P} , численно равная отношению электрического дипольного момента малого объема диэлектрика ΔV к этому объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}. \quad (20.8)$$

Здесь \vec{p}_{ei} – электрический дипольный момент i -й молекулы; N – общее число молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть достаточно малым, чтобы в его пределах поле можно было считать однородным. В то же время число молекул в таком объеме должно быть достаточно велико, чтобы к ним можно было применить статистические закономерности. Таким образом, поляризованность диэлектрика численно равна дипольному электрическому моменту единицы объема вещества.

В пределах малого объема ΔV все молекулы диэлектрика имеют одинаковые дипольные моменты \vec{p}_{ei} , поэтому с учетом (20.6) и (20.7) получим

$$\vec{P} = n\vec{p}_{ei} = n\epsilon_0\beta\vec{E}, \quad (20.9)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \quad (20.10)$$

где n – концентрация молекул диэлектрика.

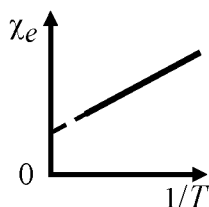


Рис. 20.3

Величина $\chi_e = n\beta$ называется диэлектрической восприимчивостью вещества. Из рассмотрения механизма поляризации неполярных диэлектриков следует, что их диэлектрическая восприимчивость не зависит явным образом от температуры: $\beta = 4\pi R^3$ (20.5), (20.6). Температура может влиять на значение

χ_e только косвенно – через концентрацию молекул.

Диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков обратно пропорциональна температуре (рис. 20.3). Из (20.7) получим, что

$$\chi_{e \text{ полярн}} = \frac{np^2}{3k\epsilon_0 T}. \quad (20.11)$$

Диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков существенно зависит от температуры (рис. 20.3). Хаотическое тепловое движение молекул препятствует выстраиванию электрических моментов полярных молекул по направлению \vec{E} .

В очень сильном электрическом поле и при достаточно низкой температуре электрические моменты всех молекул располагаются практически параллельно напряженности внешнего поля \vec{E} . При этом поляризованность полярного диэлектрика достигает максимального значения. Поэтому линейная зависимость поляризованности от напряженности поля наблюдается только в достаточно слабых полях (пунктирная линия на рис. 20.4).

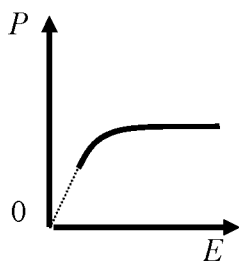


Рис. 20.4

В жидких и газообразных диэлектриках одновременно может происходить и электронная и ориентационная поляризация (молекулярные диполи в таких веществах могут поворачиваться). В твердых диэлектриках наблюдается только электронная поляризация. Молекулы этих веществ достаточно жестко связаны друг с другом, чтобы позволить диполям повернуться. Из этого следует,

что относительная диэлектрическая проницаемость диэлектриков в твердой фазе меньше, чем у тех же веществ в жидкой или газообразной фазе. Например, у льда $\epsilon = 3$, а у дистиллированной воды $\epsilon = 81$.

При поляризации диэлектрика в тонких слоях у его поверхностей возникают нескомпенсированные связанные заряды, называемые **поверхностными поляризационными зарядами**.

Слой неполярного диэлектрика, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью \vec{E} , показан на рис. 20.5. Электрические моменты и оси всех диполей диэлектрика ориентируются одинаково – вдоль направления напряженности. Внешняя нормаль к границе диэлектрика составляет некоторый угол α с направлениями векторов \vec{E} и \vec{P} . Выделим в слое некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания dS и длиной образующей l . Суммарный электрический момент диполей, попавших в этот объем, равен произведению модуля связанного заряда на поверхности диэлектрика $q_{\text{связ}}$ и плеча получившегося диполя l :

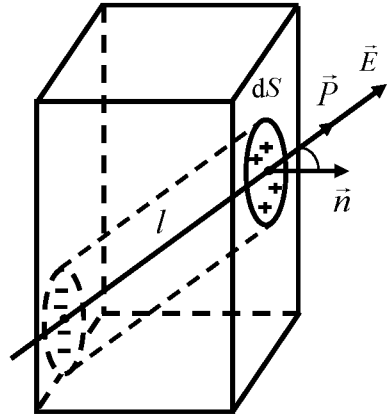


Рис. 20.5

$$\sum p_e = q_{\text{связ}} l = \sigma_{\text{связ}} dS l. \quad (20.12)$$

С другой стороны, в соответствии с (20.8),

$$\sum p_e = |\vec{P}| V = P dS l \cos \alpha = P_n dS l, \quad (20.13)$$

где P_n – проекция поляризованности на нормаль к границе диэлектрика. Сравнение (20.12) и (20.13) дает

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n. \quad (20.14)$$

Таким образом, поверхностная плотность связанных зарядов на границе диэлектрика с другой средой (с другим веществом) равна проекции поляризованности диэлектрика на нормаль к выбранной поверхности.

Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектриках

Электрическое поле в диэлектрической среде создается как свободными, так и связанными зарядами. Согласно принципу суперпозиции (15.9) напряженность поля в веществе равна геометрической сумме напряженностей полей, созданных свободными и связанными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{своб}} + \vec{E}_{\text{связ}}.$$

Теорема Остроградского–Гаусса может быть применена для расчета электростатического поля в диэлектрической среде, если в правой части равенства рассматривать алгебраическую сумму всех свободных и связанных зарядов, охватываемых гауссовой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ свобод}} + \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ связ}} \right).$$

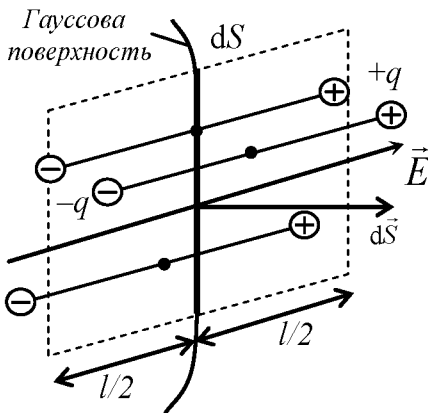


Рис. 20.6

Использование полученного соотношения для расчета напряженности поля, создаваемого заданной системой свободных зарядов в диэлектрической среде, осложняется тем, что заранее не известно распределение связанных зарядов в поле. Поскольку молекулы диэлектрика электрически нейтральны, то вклад в заряд $Q_{\text{связ}}$ внесут только те молекулы, диполи которых «перерезаются» гауссовой поверхностью.

кулы, диполи которых «перерезаются» гауссовой поверхностью.

Для того, чтобы определить их число, рассмотрим однородный поляризованный диэлектрик, диполи которого ориентированы по направлению \vec{E} (рис. 20.6).

На рисунке указан фрагмент гауссовой поверхности. Допустим, что силовые линии электрического поля «выходят» из объема, ограниченного поверхностью. Следовательно, внутри этого объема располагаются отрицательные заряды диполей, «перерезанных» гауссовой поверхностью. Эти отрицательные заряды не скомпенсированы положительными зарядами диполей, так как последние находятся за пределами гауссовой поверхности. Алгебраическая сумма отрицательных зарядов «перерезанных» диполей определяет значение $Q_{\text{связ}}$, входящее в выражение (19.7). Анализируя положения различных диполей, нетрудно увидеть, что гауссова поверхность «перерезает» только те диполи, центры которых (показаны на рис. 20.6 точками) удалены от нее на расстояние не большее чем $l/2$, где l – плечо диполя.

Выберем элемент гауссовой поверхности площадью dS и укажем внешнюю нормаль к нему $d\vec{S}$ (рис. 20.6). Выделим некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания dS , образующая которого параллельна \vec{E} . Пусть длина образующей равна плечу диполя l . Число диполей, находящихся в объеме выделенного цилиндра, $dN = n l dS \cos(\hat{\vec{E}}, \hat{d\vec{S}})$, где n –

концентрация молекул диэлектрика. Суммарный отрицательный заряд этих диполей $dQ_{\text{связ}} = -q n l dS \cos(\hat{\vec{E}}, \hat{d\vec{S}})$. Учтем, что $q l = p_e$,

а $p_e n = P$ согласно (20.9). Тогда $dQ_{\text{связ}} = -P dS \cos(\hat{\vec{E}}, \hat{d\vec{S}}) = -P dS \cos(\hat{\vec{P}}, \hat{d\vec{S}})$; $\vec{P} \uparrow \vec{E}$. В целом в объеме, ограниченном гаус-

совой поверхностью, находится связанный электрический заряд

$$Q_{\text{связ}} = \oint_S dQ_{\text{связ}} = -\oint_S P dS \cos \alpha = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

С учетом полученного соотношения преобразуем выражение (15.26) теоремы Остроградского–Гаусса следующим образом:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}} - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \right),$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}. \quad (20.15)$$

Введем еще одну физическую величину – электрическую индукцию \vec{D} (часто эту величину называют электрическим смещением):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (20.16)$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ – относительная диэлектрическая проницаемость. Теперь (20.15) запишем в виде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}. \quad (20.17)$$

Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью. Поток вектора электрического смещения определяется только свободными зарядами, поэтому в таком виде теорему Остроградского–Гаусса удобно применять в диэлектрических средах.

При расчете напряженности электростатического поля в диэлектрической среде необходимо сначала определить модуль и направление вектора электрического смещения \vec{D} (как это было сделано в разд. 19 \vec{E}). Затем, пользуясь соотношением (20.16), необходимо определять величину и направление вектора напряженности \vec{E} .

Рассмотрим пример 1, приведенный в разд. 19, и определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд $Q > 0$ равномерно распределен по объему диэлектрического шара радиусом R , относительная диэлектрическая проницаемость которого равна ε . Повторяя рассуждения разд. 19, получаем

$$D(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Qr}{R^3}, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

Так как $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$, а $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E}$, то $D = \epsilon\epsilon_0 E$, поэтому запишем

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}, & r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

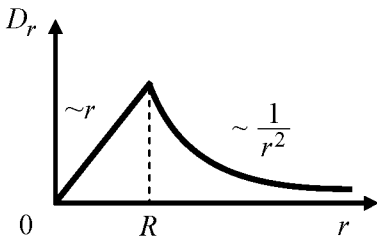


Рис. 20.7

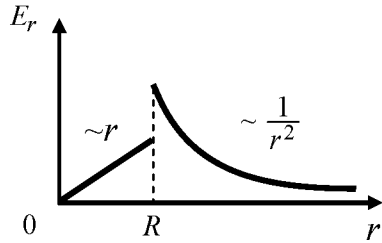


Рис. 20.8

Графики полученных зависимостей $D_r(r)$ и $E_r(r)$ приведены на рис. 20.7 и 20.8. Отметим, что зависимость $E_r(r)$ имеет разрыв на поверхности шара (при $r = R$), так как на этой поверхности находится связанный положительный заряд.

Условия на границе раздела диэлектрических сред

Найдем соотношения между значениями напряженности и электрического смещения в двух граничащих диэлектрических средах. Для этого рассмотрим произвольную точку A на границе раздела двух сред 1 и 2 для случая $\epsilon_2 < \epsilon_1$ (рис. 20.9).

Проведем из точки A единичные векторы, направленные по касательной к поверхности раздела сред ($\vec{\tau}$) и по нормали к ней (\vec{n}). Построим вблизи точки A замкнутый контур L в виде прямоугольника с размерами $\Delta h \times \Delta l$, стороны которого

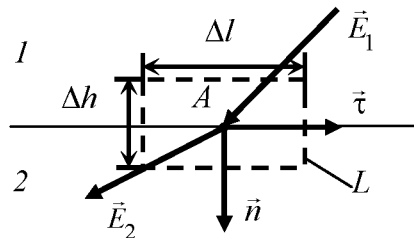


Рис. 20.9

попарно параллельны этим векторам. Из условия потенциальности электростатического поля следует, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль контура L равна нулю: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

Устремим высоту прямоугольного контура Δh к нулю. Тогда длины боковых сторон контура и значения $\int \vec{E} d\vec{l}$ на этих сторонах также стремятся к нулю. При этом верхняя и нижняя стороны контура приближаются к поверхности раздела сред. При обходе контура против часовой стрелки получаем

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{1\tau} \Delta l \cos 0^\circ + E_{2\tau} \Delta l \cos 180^\circ = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) dl = 0. \quad (20.18)$$

Следовательно,

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (20.19)$$

т.е. составляющая вектора напряженности поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность. С учетом (20.20) запишем

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (20.20)$$

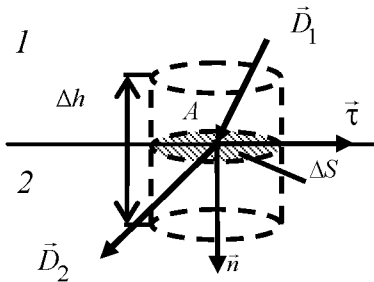


Рис. 20.10

Для определения связи нормальных к поверхности раздела сред проекций вектора напряженности и вектора смещения выберем вокруг точки A участок поверхности раздела сред площадью ΔS (рис. 20.10).

Построим прямой цилиндр с образующей длиной Δh , параллельной нормали \vec{n} к поверхности раздела. По теореме Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}},$$

где $\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}$ – свободный заряд внутри замкнутой поверхности,

т.е. в объеме цилиндра. Устремим высоту цилиндра Δh к нулю.

В таком случае поток вектора смещения через боковую поверхность цилиндра обратится в нуль. Если на поверхности раздела сред нет свободных поверхностных зарядов, то с одной стороны

$$\sum_{i=1}^n Q_{i\text{своб}} = 0. \text{ С другой стороны,}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{2n} \Delta S \cos 0^\circ + D_{1n} \Delta S \cos 180^\circ = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta S.$$

Поэтому

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (20.21)$$

Это означает, что при переходе через границу раздела двух сред, на которой нет поверхностных свободных зарядов, нормальная составляющая электрического смещения не изменяется. С учетом (20.20) запишем

$$E_{2n} = E_{1n} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (20.22)$$

С помощью этого соотношения можно легко пояснить физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества. Если рассматривать преломление силовых линий электрического поля на границе «вакуум – диэлектрик», то из (20.22) следует, что

$$\frac{E_{n\text{вак}}}{E_{n\text{диэл}}} = \epsilon.$$

Относительная диэлектрическая проницаемость равна отношению нормальной составляющей напряженности электрического поля в вакууме к нормальной составляющей напряженности электрического поля в диэлектрике.

Объединяя условия (20.19)–(20.22), можно показать, каким образом преломляются силовые линии электростатического поля при переходе их одного диэлектрика в другой. Для случая $\epsilon_2 > \epsilon_1$ это изображено на рис. 20.11 и 20.12.

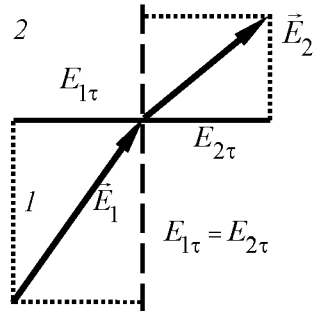


Рис. 20.11

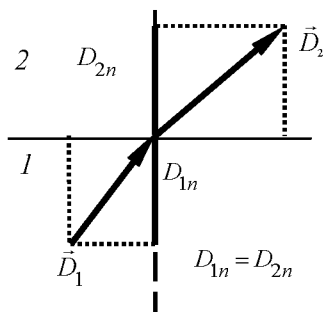


Рис. 20.12

Вектор напряженности поля не изменяется при переходе из одной среды в другую, если поверхность раздела сред касается силовых линий поля. Если поверхность раздела сред совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля, то векторы \vec{E} и \vec{D} перпендикулярны такой поверхности и при переходе через нее не изменяется вектор электрического смещения.

Контрольные вопросы и задания

1. Как происходит поляризация диэлектриков с полярными и с неполярными молекулами?
2. Какие физические величины количественно характеризуют поляризацию диэлектрика?
3. Чем определяется поверхностная плотность поляризационных зарядов?
4. Как диэлектрик влияет на напряженность электростатического поля?
5. В чем заключается физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества?
6. Чему равен поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность, проведенную в электростатическом поле?
7. Определите поляризованность диэлектрического шара из однородного изотропного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ как функцию расстояния до центра шара, если в центре шара расположен точечный заряд Q .

21. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Проводниками называют вещества, содержащие свободные носители заряда, т.е. частицы, которые могут свободно перемещаться по объему проводника под действием сколь угодно малого электрического поля. К данному типу веществ, прежде всего, относят металлы, в которых свободными носителями заряда являются электроны проводимости. В полупроводниках *n*-типа такими частицами выступают свободные электроны, в полупроводниках *p*-типа – положительные заряды, так называемые «дырки». В электролитах проводимость обеспечивается и положительными, и отрицательными ионами. В ионизированном газе (плазме) свободные носители заряда – это электроны и положительно заряженные ионы. При анализе особенностей поведения проводников в электростатическом поле ограничимся лишь рассмотрением металлов.

В отсутствие внешнего электростатического поля свободные электроны хаотично располагаются в металле. При этом электрические поля электронов проводимости и положительных ионов металла взаимно компенсируются. Если проводник внесен во внешнее электростатическое поле напряженностью \vec{E}_0 (рис. 21.1), то под действием этого

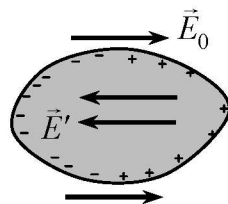


Рис. 21.1

поля электроны проводимости приходят в движение. Они смещаются в сторону, противоположную направлению напряженности внешнего поля \vec{E}_0 , располагаясь на поверхности проводника, а положительные нескомпенсированные заряды ионов металла остаются на противоположной поверхности проводника. **Явление перераспределения свободных зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией.** При этом внутри проводника возникает собственное поле с напряженностью \vec{E}' . В процессе разделения зарядов суммарная напряженность поля в проводнике уменьшается:

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$; $E = E_0 - E'$. Перераспределение зарядов происходит до тех пор пока напряженность результирующего поля в проводнике не станет равной нулю. Если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то перераспределение зарядов (ток в проводнике) вызвало бы нагрев проводника при отсутствии изменения внешнего поля, что противоречило бы **второму началу термодинамики**. Таким образом, в любой точке проводника электрическое поле электронов проводимости и положительных ионов проводника компенсирует внешнее поле.

Поскольку распределение зарядов по поверхности проводника стационарно (заряды неподвижны), то тангенциальная (касательная к поверхности проводника) составляющая напряженности электростатического поля равна нулю. Это означает, что вектор \vec{E} и силовые линии поля перпендикулярны к поверхности проводника. Из этого, в свою очередь, следует, что потенциал поверхности проводника одинаков во всех точках. **Эквипотенциальной поверхностью** называется геометрическое место точек пространства, потенциалы которых равны друг другу. Таким образом, поверхность проводника является эквипотенциальной. Разность потенциалов между любыми двумя точками внутри проводника $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = 0$, так как напряженность внутри проводника равна нулю. Это означает, что весь проводник представляет собой эквипотенциальный объем.

Для определения плотности зарядов на поверхности проводника выделим малый элемент его поверхности площадью S (рис. 21.2). Построим замкнутую гауссову поверхность в виде цилиндра, площадь основания которого равна S , а сами основания расположены по обе стороны поверхности проводника на расстояниях h от нее. Поток напряженности поля через гауссову поверхность определится следующим образом:

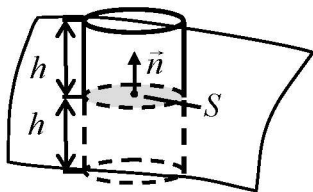


Рис. 21.2

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} &= \int_{(S_{\text{бок}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{верхн}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{(S_{\text{бок}})} E dS \cos 90^\circ + \int_{(S_{\text{верхн}})} E dS \cos 0^\circ = E_n S, \end{aligned}$$

причем $\int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = 0$, так как электрическое поле внутри про-

водника отсутствует. Здесь $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{верхн}}$, $S_{\text{нижн}}$ – соответственно площади боковой поверхности цилиндра, его верхнего и нижнего оснований.

Поскольку выбранная гауссова поверхность охватывает заряд $q_{\text{охв}} = \sigma S$, расположенный на поверхности проводника, то по теореме Остроградского–Гаусса

$$E_n S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S, \quad \sigma = \epsilon_0 E_n, \quad (21.1)$$

т.е. плотность электрического заряда на поверхности проводника прямо пропорциональна напряженности поля вблизи его поверхности. Следствие: при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменяется скачком на $|\Delta E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Как связана поверхностная плотность распределения зарядов с кривизной поверхности проводника? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала заряженный проводящий шар. Если заряд шара равен Q , а радиус – R , то потенциал поверхности шара можно определить так:

$$\varphi = \int_R^{\varphi=0} E dr = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Умножив числитель и знаменатель на R , получим:

$$\varphi = \frac{QR}{\epsilon_0 4\pi R^2} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad (21.2)$$

Поскольку кривизна поверхности шара постоянна ($R = \text{const}$) и потенциал поверхности одинаков в любой точке, то $\sigma = \text{const}$, т.е. заряды по поверхности проводящего шара распределены равномерно.

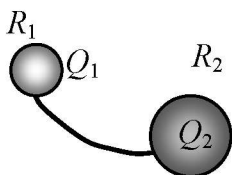


Рис. 21.3

Рассмотрим распределение зарядов по поверхности проводника с различными радиусами кривизны в разных точках поверхности. Пусть два удаленных друг от друга заряженных шара разных радиусов R_1 и R_2 имеют заряды Q_1 и Q_2 (рис. 21.3). После

соединения этих шаров тонкой проволокой образуется один проводник с изменяющейся кривизной поверхности. Заряды перераспределяются между шарами до тех пор пока их потенциалы не станут равны (зарядами на поверхности тонкой проволоки пренебрегаем):

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

где Q'_1 и Q'_2 – новые заряды шаров. Из последнего выражения с учетом (21.2) получаем $\sigma'_1 R_1 = \sigma'_2 R_2$. Таким образом, поверхностная плотность заряда увеличивается на тех участках поверхности проводника, где радиус кривизны поверхности меньше. В результате вблизи острых концов проводников накапливается большой заряд и создается сильное электростатическое поле с большой напряженностью.

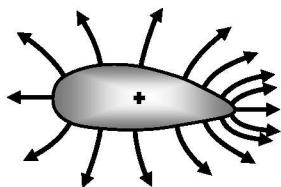


Рис. 21.4

Распределение силовых линий поля, создаваемого заряженным проводником произвольной формы, показано на рис. 21.4. Вблизи острия проводника силовые линии расположены ближе друг к другу, следовательно, модуль напряженности поля вблизи острия принимает самые большие значения.

Сформулируем основные свойства электростатического поля при наличии проводников:

- 1) электростатическое поле внутри проводника отсутствует;
- 2) при помещении проводника в электростатическое поле в проводнике возникают индуцированные заряды, которые располагаются исключительно на поверхности проводника;
- 3) свободные заряды, принесенные на проводник, также распределяются по его поверхности;
- 4) силовые линии электростатического поля вблизи поверхности проводника перпендикулярны к его поверхности;
- 5) все точки проводника имеют одинаковый потенциал;
- 6) поверхностная плотность заряда на поверхности проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности;
- 7) при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменяется скачком на

$$|\Delta E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Найдем связь потенциала проводника с его электрическим зарядом. Рассмотрим проводник произвольной формы, бесконечно удаленный от других проводников. Если сообщить этому проводнику некоторый свободный заряд Q , то он распределится по поверхности проводника. Плотность поверхностного заряда σ в каждой точке поверхности проводника будет пропорциональна заряду Q , а зависимость поверхностной плотности заряда от координат определится функцией $f(\vec{r})$, зависящей от формы проводника:

$$\sigma(\vec{r}) = Qf(\vec{r}). \quad (21.3)$$

Каждая следующая порция заряда, переносимого на проводник, будет распределяться по поверхности с плотностью согласно зависимости (21.3). Вычислим потенциал произвольной точки A заряженного проводника (рис. 21.5), пользуясь методом суперпозиции.

Выделим на поверхности проводника малый элемент dS , который имеет заряд $dQ = \sigma(\vec{r})dS$. Размеры элемента поверхности dS должны быть настолько

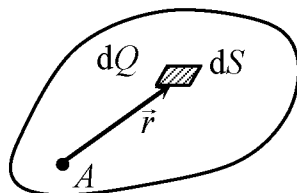


Рис. 21.5

малы, чтобы заряд dQ можно было бы считать точечным. Примем потенциал равным нулю на бесконечности и воспользуемся формулой потенциала точечного заряда:

$$d\varphi_A = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Тогда

$$\varphi_A = \oint_S \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Учитывая (21.3), получаем:

$$\varphi_A = \oint_S \frac{Qf(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = Q \oint_S \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (21.4)$$

Вид функции $f(\vec{r})$, конечно же, зависит от выбора точки начала отсчета (точка A), однако, поскольку потенциалы всех точек проводника равны, значение интеграла в (21.4) должно быть константой. Введем обозначение:

$$\oint_S \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{C},$$

где C – константа, зависящая от формы и размеров проводника.

Теперь потенциал проводника запишем следующим образом:

$$\varphi = \frac{Q}{C}. \quad (21.5)$$

Итак, потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду и обратно пропорционален константе C , определяемой геометрией проводника.

Физический смысл константы C , называемой **электроемкостью**, определим из (21.5):

$$C = \frac{Q}{\varphi}. \quad (21.6)$$

Электроемкостью уединенного проводника называется физическая величина, равная отношению заряда проводника к его потенциалу в поле этого заряда. Электроемкость проводника показывает, какой заряд необходимо сообщить проводнику для того, чтобы его потенциал принял заданное значение. Чем больше заряд проводника, тем больше его потенциал в поле этого заряда. Электроемкость не

зависит ни от величины заряда проводника, ни от значения его потенциала, а зависит только от размера и формы проводника, а также от диэлектрических свойств среды, в которой он находится. Единица измерения электроемкости проводника в СИ

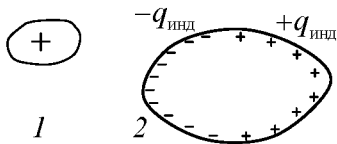


Рис. 21.6

называется фарад (обозначается 1 Ф): $1\text{ Ф} = \frac{1\text{ Кл}}{1\text{ В}}$.

Расчет электроемкости уединенных проводников производится по формуле (21.6) следующим образом:

- 1) задается произвольный заряд проводника Q ;
- 2) с помощью метода суперпозиции или теоремы Остроградского–Гаусса определяется напряженность электрического поля;
- 3) с помощью интегральной связи напряженности и потенциала по известной напряженности определяется потенциал;
- 4) по формуле (21.6) определяется электроемкость:

$$Q \Rightarrow \vec{E}(Q) \Rightarrow \varphi(Q) \Rightarrow C = \frac{Q}{\varphi(Q)}.$$

Подчеркнем, что электроемкость проводника не зависит от его заряда Q .

Пример. Выведем формулу электроемкости проводящего шара радиусом R , находящегося в вакууме. Для этого сообщим шару произвольный заряд Q . Заряд равномерно распределится по поверхности шара с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, которая одинакова в каждой точке поверхности шара. Этот заряд создаст электростатическое поле, напряженность которого определяется следующим образом (см. пример 1, разд. 19):

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Потенциал шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

В соответствии с (21.6) электроемкость шара запишется в виде

$$C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (21.7)$$

Из (21.7) видно, что электроемкость проводника 1 Ф – колоссальная величина: шар с такой электроемкостью должен иметь радиус $9 \cdot 10^9 \text{ м}$, что соответствует радиусу орбиты Меркурия. Поэтому для практического измерения электроемкости проводников используются следующие единицы: 1 мкФ (микрофарад) = 10^{-6} Ф ; 1 нФ (нанофарад) = 10^{-9} Ф ; 1 пФ (пикофарад) = 10^{-12} Ф .

При определении электроемкости проводника описанным выше способом важно, чтобы вблизи него не находились другие проводники, т.е. чтобы проводник был уединенным.

Рассмотрим, как изменится электроемкость проводника, если он будет находиться рядом с незаряженным проводником. Допустим, что проводник 1 обладает положительным зарядом (рис. 21.6). Этот заряженный проводник создает электрическое поле. Поэтому в незаряженном проводнике 2 произойдет разделение зарядов (электростатическая индукция) на отрицательные $-q_{\text{инд}}$ и положительные $+q_{\text{инд}}$, причем алгебраическая сумма индуцированных зарядов будет равна нулю. В свою очередь в электрическом поле индуцированных зарядов перераспределятся и заряды на проводнике 1 . В результате потенциал заряженного проводника изменится. Изменится и его электроемкость. Аналогичный вывод можно сделать и в случае, если вблизи положительно заряженного проводника располагается незаряженное диэлектрическое тело. На поверхности диэлектрика образуются связанные поляризационные заряды, что приведет к изменению потенциала и электроемкости самого проводника.

Таким образом, электроемкость проводника зависит от наличия в пространстве вблизи него любого тела (проводника или диэлектрика).

В случае, если заряженные проводники располагаются таким образом, что электрическое поле существует только в пространстве между ними, то они образуют конденсатор. Сами проводники при этом называются **обкладками** конденсатора. Примеры расположения двух обкладок, образующих конденсаторы, приведены на рис. 21.7, *а–в*.

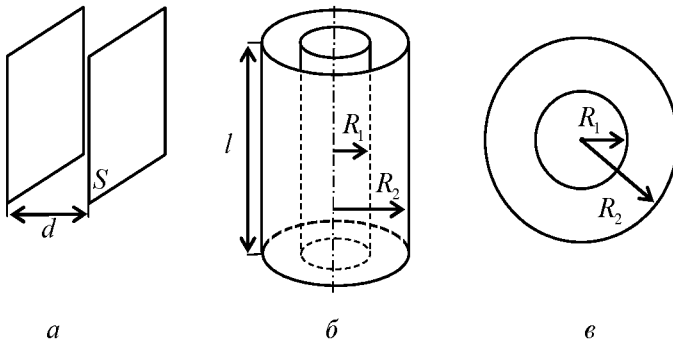


Рис. 21.7

Это соответственно плоский, цилиндрический и сферический конденсаторы. Плоский конденсатор создается системой двух бесконечно больших параллельных пластин площадью S , находящимися на малом расстоянии d друг от друга ($d \ll \sqrt{S}$). Цилиндрический конденсатор образован двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами ($l \gg (R_2 - R_1)$), а сферический – двумя концентрическими сферами. На рисунке 21.7 последний представлен линиями пересечения обкладок (сфер) с плоскостью чертежа. Если обкладки каждой из этих систем зарядить разноименными одинаковыми по модулю зарядами, то электрическое поле образуется только в пространстве между ними. Модуль заряда любой из обкладок называется зарядом конденсатора.

Емкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2}. \quad (21.8)$$

Так же как и емкость проводника, емкость конденсатора не зависит ни от величины заряда конденсатора, ни от разности потенциалов между его обкладками, а зависит только от размера и формы конденсатора, а также от диэлектрических свойств среды между обкладками конденсатора. Емкость конденсатора не зависит от наличия вблизи него других проводящих или диэлектрических тел и электрических полей.

Поскольку емкость величина положительная, а под зарядом конденсатора понимается модуль заряда одной из обкладок, то модуль разности потенциалов между обкладками обозначается символом U . Обычно выражение емкости конденсатора записывается в виде:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Термин «емкость» возник еще в середине XVIII в., когда отсутствовало понятие электрических зарядов, а электрические явления описывались поведением «электрической жидкости», которая «переливалась» из одного проводника в другой по проводам. Таким образом, емкость конденсатора определяла «количество электрической жидкости», которое он может в себя вместить. Поэтому первый конденсатор получил название «лейденская банка» (по названию города Лейден, в котором он был сконструирован).

Пример. Выведем формулу емкости плоского конденсатора, изображенного на рис. 21.7, а.

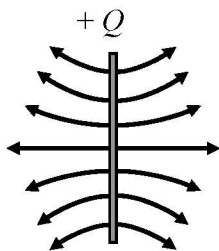


Рис. 21.8

Определим напряженность электростатического поля, создаваемого зарядом $+Q$ одной из пластин площадью S . Силовые линии такого поля изображены на рис. 21.8.

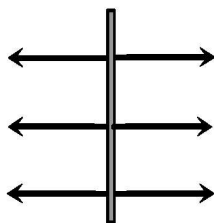


Рис. 21.9

Если рассмотреть точки пространства, расположенные настолько близко к пластине, что расстояние от них до пластины существенно меньше, чем до ее границ (из этих точек пластина будет представляться как бесконечно большая плоскость), то искривлением силовых линий у границ пластины можно пренебречь (рис. 21.9). Таким образом, большая заряженная пластина площадью S создает однородное поле. Исходя из симметричности системы, модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от пластины,

должен быть одинаковым, а направление вектора \vec{E} зависит только от положения исследуемой точки пространства (слева или справа от пластины).

Определим напряженность поля в некоторой точке с координатой x , отсчитываемой вдоль оси Ox , направленной перпендикулярно пластине. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем поверхность цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости, а основание имеет площадь S_1 (рис. 21.10).

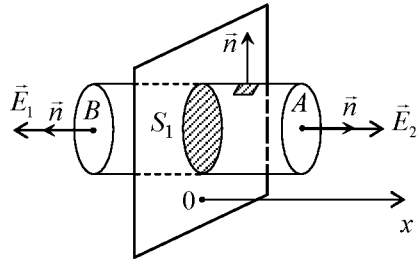


Рис. 21.10

Модуль напряженности поля одинаков во всех точках оснований цилиндра, исходя из симметрии системы. Угол между \vec{E} и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра равен $\pi/2$, а во всех точках левого и правого оснований гауссова цилиндра этот угол равен нулю.

Определим поток напряженности поля через выбранную поверхность:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\vec{E}_1, \hat{d}\vec{S}) dS + \\ + E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\vec{E}_2, \hat{d}\vec{S}) dS + \int_{S_{\text{бок}}} E \cos(\vec{E}, \hat{d}\vec{S}) dS,$$

где $S_{\text{лев}}$ – площадь левого основания гауссова цилиндра; $S_{\text{прав}}$ – площадь правого основания гауссова цилиндра; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности гауссова цилиндра. Получаем

$$E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\vec{E}_1, \hat{d}\vec{S}) dS = E_1 S_1, \quad E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\vec{E}_2, \hat{d}\vec{S}) dS = E_2 S_1,$$

$$\int_{S_{\text{бок}}} E \cos(\vec{E}, \hat{d}\vec{S}) dS = 0. \quad \text{Таким образом, так как } |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}|,$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2ES_1. \quad (21.9)$$

Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных цилиндрической гауссовой поверхностью. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь нее – это заряд «вырезанной» цилиндром части пластины. Его можно найти, умножив площадь основания цилиндра на поверхностную плотность заряда пластины:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma S_1 = \frac{Q}{S} S_1. \quad (21.10)$$

Приравняем (21.9) и (21.10) с учетом коэффициента ϵ_0 и имеем:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}. \quad (21.11)$$

Полученное соотношение определяет модуль напряженности однородного поля бесконечно большой заряженной пластины.

Расположим две разноименно заряженные пластины на малом расстоянии друг от друга так, чтобы выполнялось условие однородности поля каждой из них. На рисунке 21.11 показаны силовые линии поля каждой пластины. Видно, что в пространстве между пластинами напряженности полей пластин совпадают по направлению, а вне пластин противоположны. Поэтому с учетом (21.11) запишем напряженность поля по принципу суперпозиции:

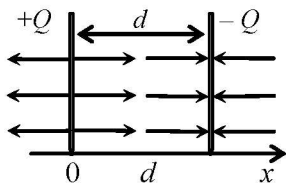


Рис. 21.11

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \quad 0 < x < d;$$

$$E = 0, \quad d < x < 0.$$

В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора можно определить следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d.$$

По определению (21.8) запишем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Следует учесть, что если пространство между обкладками любого конденсатора заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то при том же значении заряда обкладок напряженность поля между обкладками уменьшится в ϵ раз. Поэтому в ϵ раз уменьшится разность потенциалов между ними, а, следовательно, в ϵ раз увеличится емкость конденсатора. Запишем формулу емкости плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ :

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (21.12)$$

Аналогично можно вывести формулу емкости сферического конденсатора:

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Если конденсатор заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (21.13)$$

Подчеркнем еще раз, что емкость конденсатора зависит от его размера, формы обкладок и диэлектрических свойств среды, находящейся между его обкладками.

Энергия электростатического поля.

Объемная плотность энергии

Рассмотрим процесс зарядки проводника. Чтобы его заряд достиг величины Q , будем сообщать проводнику заряд порциями dq , перенося их из бесконечно удаленной точки 1 на поверхность проводника в точку 2 (рис. 21.12).

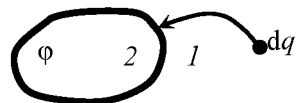


Рис. 21.12

Для передачи проводнику новой порции заряда dq внешние силы должны совершить работу против сил электрического поля:

$$\delta A_{\text{внеш}} = -dA_{\text{поля}} = -dq(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю $\varphi_1 = 0$. Потенциал точки 2 равен потенциалу проводника φ , поэтому

$$\delta A_{\text{внеш}} = dq\varphi.$$

Если проводнику передан заряд q , то его потенциал $\varphi = \frac{q}{C}$. Работу внешних сил по зарядке проводника зарядом Q рассчитаем так:

$$A_{\text{внеш}} = \int_0^Q dq\varphi = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Согласно закону сохранения энергии приращение электрической энергии проводника равно работе внешних сил:

$$W_{\text{пров}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (21.14)$$

Рассмотрим теперь процесс зарядки конденсатора емкостью C от источника ЭДС. Источник в процессе зарядки переносит заряды с одной пластины на другую, причем сторонние силы источника совершают работу по увеличению энергии конденсатора:

$$A_{\text{ист}} = \int_0^Q \varphi dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q – заряд конденсатора после его зарядки. Тогда энергия электрического поля в конденсаторе

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (21.15)$$

Учитывая, что $Q = C|\varphi_1 - \varphi_2|$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$, то энергию

электрического поля можно представить двумя способами:

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{и} \quad W_{\text{поля}} = \frac{C}{2} \left(\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \right)^2.$$

Сопоставление двух соотношений позволяет задать вопрос: с чем связана энергия электрического поля – с электрическим зарядом, создающим поле (первая формула) или с напряженностью поля (вторая формула)? Оба записанных равенства согласуются с результатами экспериментов, т.е. расчет энергии поля можно одинаково правильно осуществлять по обеим формулам. Однако такое наблюдается только в электростатике, т.е. когда осуществляется расчет энергии поля неподвижных зарядов.

При рассмотрении теории электромагнитного поля в дальнейшем (разд. 8) увидим, что электрическое поле может создаваться не только неподвижными зарядами. Электростатическое поле – это частный случай электромагнитного поля. Его энергия распределена в пространстве с определенной плотностью.

Определим энергию электрического поля плоского конденсатора. Подставим в (21.15) выражение для электроемкости $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ и формулу связи разности потенциалов и напряженности однородного поля $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. В результате получим

$$W_{\text{поля}} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd,$$

где $V = Sd$ – объем конденсатора, т.е. объем той части пространства, в которой создано электрическое поле. Введем величину

$$w_3 = \frac{W_{\text{поля}}}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (21.16)$$

которая называется **объемной плотностью энергии поля**. Она равна отношению энергии поля, заключенного в некотором объеме пространства к этому объему.

Следовательно, энергия однородного электрического поля

$$W_{\text{поля}} = w_3 V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V.$$

Если поле неоднородное, то можно выбрать такой элементарный объем пространства dV , в пределах которого значение напряженности поля будет практически одинаковым. Тогда по

аналогии с предыдущей формулой выражение для энергии поля в элементарном объеме: $dW_{\text{поля}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV$. Для всего пространства, в котором присутствует неоднородное поле,

$$W_{\text{поля}} = \oint_{(V)} w_3 dV. \quad (21.17)$$

Пример. Рассчитаем энергию электрического поля, созданного проводящим шаром радиусом R , заряженным зарядом Q , и находящимся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Приведем зависимость напряженности электрического поля, создаваемого заряженным шаром:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & , r < R; \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R. \end{cases}$$

Поскольку напряженность поля зависит только от радиальной координаты r , то она будет практически постоянна в пределах тонкого сферического слоя с радиусом внутренней поверхности слоя r и толщиной dr (рис. 21.13). Объем этого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда энергия поля

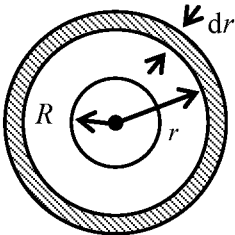


Рис. 21.13

$$\begin{aligned} W_{\text{поля}} &= \oint_{(V)} w_3 dV = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить, если вычислять энергию заряженного шара по формуле (21.15). Воспользовавшись выражением емкости уединенного шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, получаем:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Однако расчет по формуле (21.15) неприменим, если необходимо найти энергию электрического поля, заключенную не во всем объеме пространства, где присутствует поле, а лишь в части объема этого пространства.

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные особенности поведения электростатического поля внутри и у поверхности проводника.?
2. От чего зависит электрическая емкость уединенного проводника?
3. Как влияет на электроемкость проводника приближение к нему других незаряженных тел?
4. Чем определяется электроемкость конденсатора?
5. Как определить электрическую энергию системы заряженных тел? Где локализована эта энергия?
6. Объясните уменьшение силы взаимного притяжения пластин заряженного конденсатора при погружении его в жидкий диэлектрик.

22. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики. Явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов, составляют особую часть учения об электричестве – электродинамику. В электродинамике вводится понятие электрического тока. **Электрическим током** называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Электрический ток возникает в проводниках при условии, что внутри проводника напряженность электрического поля отлична от нуля. нас будет интересовать лишь один класс проводников, а именно металлы. Рассмотрим условия существования непрерывного электрического тока, введем его характеристики – силу тока и плотность тока, познакомимся с основными представлениями классической электронной теории электропроводности металлов, с законом Ома для неоднородного участка цепи.

Электрическим током проводимости называется упорядоченное движение свободных носителей зарядов в веществе или вакууме. В металлах свободными носителями зарядов являются электроны; в жидкостях (электролитах) – положительные и отрицательные ионы; в газах и в вакууме – электроны и ионы; в полупроводниках – электроны и «дырки». Это значит, что электрический ток может быть обусловлен движением как положительно, так и отрицательно заряженных носителей. За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители заряда.

Постоянный электрический ток – электрический ток, не изменяющийся во времени ни по величине, ни по направлению.

Упорядоченное движение свободных носителей зарядов возникает под действием сил электрического поля и характеризуется средней скоростью u . В то же время носители зарядов находятся в тепловом хаотическом движении со средней скоростью v . При наличии электрического тока нарушается равновесное распределение зарядов в проводнике: поверхность проводника уже не является эквипотенциальной, и силовые линии электрического поля не направлены перпендикулярно ей. Для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не равнялась нулю. Такое электрическое поле создается поверхностными зарядами, плотность которых изменяется по длине проводника (существует градиент поверхностной плотности заряда). Внутри проводника поверхностными зарядами создается электрическое поле, силовые линии которого повторяют форму проводника.

Необходимыми условиями для существования постоянного тока являются:

- наличие свободных носителей зарядов, которые могли бы перемещаться на макроскопическое расстояние;
- наличие замкнутой проводящей цепи;
- наличие электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов (для того, чтобы ток был длительным, энергия поля должна все время пополняться, т.е. нужен источник электрической энергии).

Сила тока I – скалярная величина, численно равная заряду, переносимому в единицу времени через поперечное сечение проводника. Если за время dt переносится заряд dq , то по определению сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (22.1)$$

Другой характеристикой тока является векторная величина – плотность тока \vec{j} . Модуль плотности тока равен отношению заряда, переносимого за единицу времени через поверхность, перпендикулярную к направлению движения носителей заряда, к площади этой поверхности.

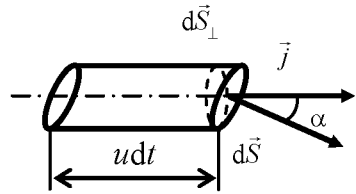


Рис. 22.1

Выделим внутри проводника с током поверхность площадью dS (рис. 22.1). За время dt эту поверхность пересечет заряд

$$dq = enudtdS\cos\alpha = emudtdS_{\perp},$$

где e – заряд электрона; n – концентрация электронов; u – средняя скорость упорядоченного движения; α – угол между нормалью к поверхности dS и направлением движения носителей.

Модуль плотности тока по определению

$$j = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = enu.$$

Направление вектора плотности тока совпадает с направлением вектора средней скорости упорядоченного движения носителей:

$$\vec{j} = en\vec{u}. \quad (22.2)$$

Силу тока через элементарную поверхность dS можно записать так: $dI = jdS_{\perp} = jdS\cos\alpha = \vec{j}d\vec{S}$. Сила тока в проводнике находится интегрированием последнего выражения по всему поперечному сечению проводника:

$$I = \int \vec{j}dS. \quad (22.3)$$

Единица измерения силы тока ампер (А) является одной из основных единиц измерения в СИ. Определение этой единицы измерения будет дано позже при рассмотрении взаимодействия двух параллельных проводников с током.

Линии, вдоль которых движутся носители зарядов в проводниках, называются **линиями тока**. Касательные к линиям тока

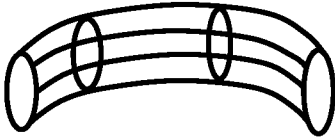


Рис. 22.2

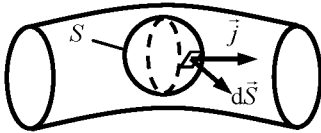


Рис. 22.3

совпадают с направлением вектора \vec{j} в точке касания. Если внутри проводника с током мысленно выделить трубку, боковая поверхность которой образована линиями тока, то носители зарядов не будут пересекать боковую поверхность трубки и не будут ни выходить из трубки наружу, ни входить в трубку извне (рис. 22.2).

Рассмотрим внутри проводника с током произвольную замкнутую поверхность S (рис. 22.3). Пусть j_n – проекция вектора плотности тока \vec{j}

на нормаль к элементу поверхности dS . Величина положительного заряда, уходящего из объема, ограниченного поверхностью S , за единицу времени, равна убыли заряда в этом объеме:

$$\oint_S j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Последнее выражение называется **уравнением непрерывности**. Оно является следствием закона сохранения заряда.

В случае постоянных токов объемное распределение зарядов в проводнике не изменяется. Заряд, вошедший в единицу времени в выделенный объем, равен заряду, вышедшему из него за то же время, т.е. $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$. Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\oint_S j_n dS = 0. \quad (22.5)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, можем записать $\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$. Объем интегрирования V произволен и не равен нулю. Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (22.6)$$

Это уравнение является наиболее общим выражением того факта, что постоянный ток не имеет истоков, т.е. что линии тока всегда либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Электрическое поле постоянных токов, как и поле электростатическое является потенциальным, поэтому вектор напряженности поля \vec{E} может быть выражен через градиент потенциала: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Поскольку распределение зарядов в случае постоянных токов стационарно, то их поле должно быть тождественно с электростатическим полем соответственно распределенных неподвижных зарядов.

В 1826 г. немецкий физик Г. Ом экспериментально установил закон, согласно которому сила тока в однородном металлическом проводнике пропорциональна разности потенциалов на концах проводника:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (22.7)$$

Однородным называется проводник, в котором на носители действуют только силы электростатического происхождения. Величина R , входящая в (22.7), называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей измерения сопротивления служит Ом (обозначается 1 Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при разности потенциалов 1 В существует ток силой 1 А.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для однородного проводника длиной l с площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (22.8)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала. Этот коэффициент называется **удельным электрическим сопротивлением** вещества. В СИ значение ρ измеряется в Ом·м.

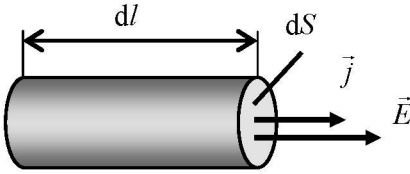


Рис. 22.4

Закон Ома можно записать в **дифференциальной форме**, установив, таким образом, связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Выделим мысленно в окрестностях

некоторой точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем (рис. 22.4) с образующими, параллельными вектору плотности тока \vec{j} в данной точке. Сила тока в цилиндре равна $j dS$; разность потенциалов на торцах цилиндра равна $E dl$, где E – напряженность поля в данной точке. Электрическое сопротивление цилиндра согласно формуле (22.8) равно $\rho \frac{dl}{dS}$. Тогда закон

Ома (22.7) можно записать в виде $j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl$, или $j = \frac{E}{\rho}$.

Носители заряда в каждой точке движутся в направлении вектора напряженности электрического поля, поэтому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (22.9)$$

где γ – величина, называемая **удельной электрической проводимостью** или **просто проводимостью** материала. Применяя закон Ома в дифференциальной форме, выражение (22.6) можно переписать следующим образом: $\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0$.

В случае однородного проводника $\gamma = \text{const}$, тогда $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Сопоставляя этот результат с (3.24), можно сделать вывод, что в случае стационарных токов в однородном проводнике объемная плотность зарядов внутри проводника равна нулю. Заряды, создающие

электрическое поле внутри проводника, находятся только на его поверхности. А поле, в свою очередь, обеспечивает перемещение носителей заряда.

Способность вещества проводить ток характеризуется его удельным сопротивлением ρ или электропроводностью γ . Значения этих величин определяются химической природой вещества и внешними условиями (в частности, температурой), при которых оно находится. Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где ρ_0 – удельное сопротивление при 0°C ; t – температура по шкале Цельсия; α – температурный коэффициент электрического сопротивления, численно равный примерно $\frac{1}{273} (\text{C}^\circ)^{-1}$. Переходя к абсолютной температуре, получаем

$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (22.10)$$

При низких температурах наблюдаются отклонения от этой закономерности (рис. 22.5). В большинстве случаев зависимость ρ от T следует кривой 1. При этом при уменьшении температуры удельное сопротивление стремится к некоторому конечному значению $\rho_{\text{ост}}$. Значение $\rho_{\text{ост}}$ зависит от чистоты материала и остаточных механических напряжений в образце. У абсолютно чистых металлов с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho = 0$.

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких кельвин удельное сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 22.5). Это явление, обнаруженное в 1911 г. голландским физиком Х. Камерлинг–Оннесом, называется **сверхпроводимостью**. Каждый материал этой группы имеет свою критическую температуру $T_{\text{к}}$, при которой наступает сверхпроводимость. Для создания условий сверхпроводимости проводники охлаждаются в жидком гелии при температуре 4 К. Такие

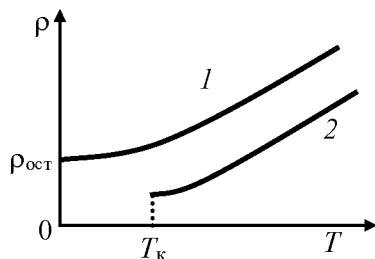


Рис. 22.5

сверхпроводящие системы являются очень дорогими и сложными устройствами, поэтому усилия ученых направлены на создание материалов, обладающих свойствами **высокотемпературной сверхпроводимости**.

Электронная теория проводимости металлов была впервые создана П. Друде в 1900 г. и получила дальнейшее развитие в работах Х. Лоренца. Существование тока в проводнике, сопровождающееся выделением тепла, в рамках классических представлений объясняется следующим образом. Свободные электроны ускоряются электрическим полем, которое имеется внутри проводника. Закон Ньютона для движения электрона имеет вид

$$ma = eE, \quad (22.11)$$

где m , a , e – соответственно масса, ускорение и заряд электрона.

На самом деле движение электрона очень сложно, поскольку электроны находятся в тепловом хаотическом движении. Под влиянием внешнего электрического поля электроны получают одинаковое ускорение и приобретают дополнительную скорость в направлении поля. В результате возникает упорядоченное движение электронов, т.е. электрический ток. Упорядоченное движение электронов накладывается на их хаотическое тепловое движение, причем скорость хаотического движения электронов много больше скорости их упорядоченного движения (дрейфа). Оценки при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и плотности тока $j = 1 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2$ дают следующие значения средней скорости v теплового движения и средней скорости u упорядоченного движения электронов:

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 10^5 \text{ м/с}, \quad u = \frac{j}{en} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}, \quad \text{т.е. } v \gg u.$$

При своем движении электроны взаимодействуют друг с другом и с атомами кристаллической решетки проводника. При взаимодействии с узлами кристаллической решетки электроны передают им часть своей энергии, приобретенной электронами под действием электрического поля. Допустим, что электрон ускоряется в течение времени τ , сталкивается с атомом и отдает ему всю приобретенную в электрическом поле кинетическую энергию. Затем он вновь ускоряется в течение времени τ и вновь сталкивается с атомом, отдавая ему свою энергию.

Определим путь, пройденный электроном в упорядоченном движении, между двумя последовательными столкновениями:

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau^2, \quad (22.12)$$

где $\tau = \lambda/v$. Здесь τ , λ и v – соответственно среднее время между столкновениями, средняя длина свободного пробега между столкновениями и средняя скорость теплового движения электронов.

Средняя скорость упорядоченного движения

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE\lambda}{2m}. \quad (22.13)$$

Согласно выражению (22.2) плотность тока

$$j = enu = \frac{e^2 n \lambda E}{2mv}, \quad (22.14)$$

где n – концентрация электронов.

Сравнивая (22.14) с законом Ома $j = \gamma E$, находим выражение для удельной электрической проводимости:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \lambda}{mv}. \quad (22.15)$$

Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную качественную зависимость плотности тока от напряженности поля. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Главные расхождения теории с экспериментом состоят в следующем.

1. Для того, чтобы по формуле (22.15) получить значения удельной электропроводности, совпадающие с экспериментальными, надо принять среднюю длину свободного пробега λ очень большой (значение λ должно в тысячи раз превосходить межатомные расстояния в металле). Понять возможность таких больших значений длин свободных пробегов затруднительно в рамках классической теории.

2. Экспериментальная зависимость удельной электропроводности от температуры имеет вид $\gamma \sim 1/T$, в то время как из формулы (22.15) следует $\gamma \sim 1/\sqrt{T}$, поскольку

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

3. По теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, что в эксперименте не наблюдается.

Лишь квантовая теория позволяет последовательно разрешить эти противоречия. Квантовая теория учитывает волновые свойства микрочастиц. Важнейшей особенностью волнового движения является способность волн огибать препятствия благодаря дифракции. В результате при своем движении электроны как бы огибают атомы без столкновений, и длины их свободного пробега могут быть весьма большими. Электроны подчиняются статистике Ферми–Дирака, согласно которой в образовании электронной теплоемкости может принимать участие лишь незначительная часть электронов. Решение задачи о движении электрона в проводнике в рамках квантовой механики приводит к зависимости $\gamma \sim 1/T$, что и наблюдается в действительности.

Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Для того, чтобы электрический ток существовал длительное время, необходимо наличие замкнутой цепи, свободных носителей зарядов и сторонних сил. В проводнике заряженные частицы движутся под действием электростатических сил в направлении от точки с большим потенциалом φ_1 к точке с меньшим потенциалом φ_2 .

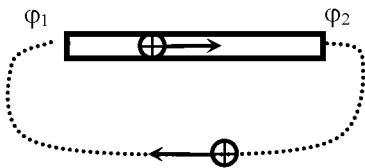


Рис. 22.6

Сторонние силы (силы не электростатического происхождения) непрерывно отводят заряды от конца проводника с меньшим потенциалом φ_2 и подводят их к концу с большим потенциалом φ_1 (рис. 22.6).

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля всегда равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи, наряду с участками, на которых положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала, должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля (см. изображенную пунктиром часть цепи на рис. 22.6).

Рассмотрим участок $l-2$ цепи (рис. 22.7). Предположим, что на этом участке действуют электростатические и сторонние силы, поля которых характеризуются напряженностями $\vec{E}_{\text{эл}}$ и $\vec{E}_{\text{стор}}$. Напряженность

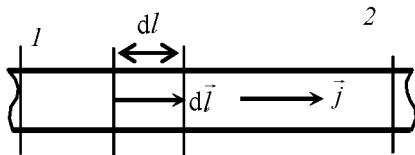


Рис. 22.7

резльтирующего поля, действующего на электроны, равна сумме напряженностей кулоновского поля и поля сторонних сил:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (22.16)$$

Выделим бесконечно малый элемент проводника $d\vec{l}$ и запишем с учетом (22.16) закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (22.17)$$

Умножив левую и правую части выражения (22.17) на $\rho d\vec{l}$, получим:

$$\vec{j} \rho d\vec{l} = \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.18)$$

Учтем, что все векторы в выражении (22.18) коллинеарны, поскольку являются касательными к линиям тока, а модуль плотности тока $j = I / S$, где I – сила тока в проводнике, S – площадь поперечного сечения проводника. Тогда выражение (22.18) можно переписать в виде

$$I \frac{\rho}{S} d\vec{l} = E_{\text{эл}} d\vec{l} + E_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.19)$$

Проинтегрируем выражение (22.19) по длине участка проводника от сечения 1 до сечения 2 с учетом того, что сила тока в каждом сечении проводника одинакова:

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} d\vec{l} = \int_1^2 E_{\text{эл}} d\vec{l} + \int_1^2 E_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.20)$$

Рассмотрим подробнее физический смысл всех слагаемых, входящих в выражение (22.20). Первое слагаемое численно равно удельной работе электростатических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2, т.е. разности потенциалов между этими точками:

$$\int_1^2 E_{\text{эл}} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (22.21)$$

Второе слагаемое численно равно удельной работе электростатических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 и называется **электродвижущей силой (ЭДС) \mathcal{E}_{12}** , действующей на участке цепи 1–2:

$$\int_1^2 E_{\text{стоп}} dl = \mathcal{E}_{12}. \quad (22.22)$$

Электродвижущая сила численно равна удельной работе сторонних сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2. Эта работа совершается источником энергии. Поэтому величину \mathcal{E}_{12} можно назвать электродвижущей силой источника энергии, включенного на участке цепи 1–2.

Падением напряжения на участке цепи 1–2 называется величина IR_{12} , численно равная удельной работе, совершаемой суммарным полем электростатических и сторонних сил при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$IR_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стоп}}) d\vec{l}; \quad (22.23)$$

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (22.24)$$

Падение напряжения на участке цепи равно разности потенциалов только в том случае, если на этом участке не действуют сторонние силы. Величина, определяемая выражением

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12}, \quad (22.25)$$

называется **электрическим сопротивлением** участка цепи между сечениями 1 и 2. Тогда соотношение (22.24) можно записать в виде

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (22.26)$$

Это выражение является математической записью обобщенного закона Ома для участка цепи: произведение сопротивления участка цепи на силу тока в нем равно алгебраической сумме разности потенциалов на этом участке и ЭДС всех источников, включенных на участке.

При выводе уравнения (22.26) выделенный участок цепи обходили в направлении движения положительных зарядов – в направлении электрического тока (вектор $d\vec{l}$ совпадал с плотностью тока \vec{j}). В общем случае при определении IR_{12} и ЭДС \mathcal{E}_i нужно пользоваться следующим правилом знаков. Падение напряжения IR_{12} считается положительным, если направление тока соответствует направлению обхода участка цепи от точки 1 к точке 2. В противном случае падение напряжения IR_{12} считается отрицательным. Значение ЭДС источника \mathcal{E}_i считается положительным, если направление обхода участка цепи от точки 1 к точке 2 соответствует перемещению внутри источника \mathcal{E}_i от отрицательного «-» к положительному полюсу «+». В противном случае \mathcal{E}_i следует считать отрицательным. В самом общем случае, при рассмотрении участка цепи с различными резисторами и различными токами в них, выражение (22.26) следует записывать в виде

$$\sum_k (\pm IR)_k = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i (\pm \mathcal{E})_i .$$

Применим обобщенный закон Ома к участку цепи, изображенному на рис. 22.8. Выберем положительное направление тока, как показано на рисунке, и направление обхода от точки 1 к точке 2.

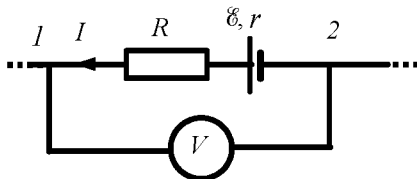


Рис. 22.8

Тогда для участка цепи $1 - R - E - 2$ получим

$$-I(R+r) = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E} , \quad (22.27)$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока. Применив обобщенный закон Ома к участку $1 - V - 2$ (обход через вольтметр), получим

$$I_{\text{В}} R_{\text{В}} = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (22.28)$$

где $I_{\text{В}}$ – сила тока через вольтметр; $R_{\text{В}}$ – сопротивление вольтметра. Произведение $I_{\text{В}} R_{\text{В}}$ равно разности потенциалов, измеренной вольтметром. Следовательно, вольтметр показывает разность потенциалов между точками его подключения.

Контрольные вопросы и задания

1. Каковы условия существования тока проводимости в проводнике?
2. Чему равен поток вектора плотности тока проводимости через поверхность? Чему равен этот поток через замкнутую поверхность в случае постоянного тока?
3. Сформулируйте основные положения классической электронной теории проводимости металлов, укажите недостатки этой теории.
4. Объясните физический смысл электродвижущей силы, напряжения и разности потенциалов на участке электрической цепи.
5. Объясните правило знаков для силы тока и э.д.с. при записи обобщенного закона Ома для участка цепи.

23. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ РАСЧЕТА

Магнитные явления были впервые обнаружены и изучены на естественных магнитах. Этим словом еще в Древней Греции были названы куски породы, добываемые вблизи г. Магнезия на территории современной Турции. Оказалось, что эти «магнитные камни» обладают способностью притягивать к себе куски железа. Однако понимание процессов, происходящих в магните, требует предварительного изучения более простых и фундаментальных явлений и понятий.

До сих пор рассматривались процессы, происходящие внутри проводников с токами. При рассмотрении электропроводности тел

были сформулированы законы постоянного тока. Однако эти законы не описывают всех явлений, наблюдаемых при прохождении электрического тока в проводниках. Опыты показали, что вокруг проводников с током так же, как и вокруг постоянных магнитов, существует силовое поле, которое легко можно обнаружить по его действию на движущиеся электрические заряды, другие проводники с токами и постоянные магниты. **Магнитное поле** – форма существования материи, посредством которой осуществляется действие на движущиеся электрические заряды и постоянные магниты со стороны других движущихся зарядов и постоянных магнитов.

Постоянные магниты оказывают ориентирующее действие на магнитную стрелку, помещенную вблизи них. Постоянное магнитное поле не действует на неподвижные электрически заряженные частицы и тела. В свою очередь эти заряженные частицы и тела не действуют на помещенную вблизи них магнитную стрелку, т.е. не создают магнитное поле.

Исследования электромагнитных явлений были начаты в опытах датского физика Х. Эрстеда в 1823 г. Он обнаружил, что при пропускании по прямолинейному горизонтальному проводнику постоянного тока, находящаяся под ним стрелка компаса поворачивается вокруг своей вертикальной оси, располагаясь перпендикулярно проводнику с током (рис. 23.1).

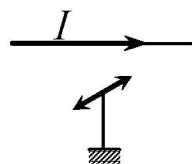


Рис. 23.1

В дальнейшем в аналогичных опытах исследовалось действие на магнитную стрелку электрического тока, протекающего по проводникам различной формы. Экспериментально доказано что **при создании в проводнике электрического тока вокруг проводника возникает магнитное поле, действующее на помещенную в это поле магнитную стрелку.** При этом материал проводника и характер его проводимости (электронный или ионный), а также происходящие в проводнике процессы не влияют на создаваемое им магнитное поле. Поскольку ток в проводнике – это упорядоченное движение электрических зарядов, то **вокруг всякого движущегося заряда должно существовать магнитное поле.** Электрическое поле, существующее вокруг любого электрического заряда, действует как на неподвижные, так и на дви-

жущиеся электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды. Поэтому между двумя движущимися друг относительно друга заряженными частицами существуют и электрическое, и магнитное взаимодействия.

Существование магнитного поля в какой-либо области пространства можно обнаружить по его силовому действию либо на движущуюся заряженную частицу, либо на элемент проводника с током, либо на виток с током (замкнутый ток).

Если через какую-либо точку пространства, в котором существует магнитное поле, движется заряженная частица, то со стороны магнитного поля на нее действует сила, и частица отклоняется от первоначального направления движения. Направление силы зависит от направления скорости частицы и знака ее заряда, а модуль силы определяется зарядом частицы q , модулем ее скорости v и направлением движения частицы в поле. В случае, если вектор скорости частицы направлен определенным образом, модуль силы достигает максимального значения при неизменных q и $|\vec{v}|$. Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению заряда частицы и модуля ее скорости постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{qv} = \text{const} . \quad (23.1)$$

Если в ту же точку магнитного поля поместить прямолинейный элемент проводника длиной l , в котором существует ток силой I , то со стороны магнитного поля на проводник с током будет действовать сила, что можно обнаружить по отклонению проводника от исходного положения. Направление силы зависит от ориентации проводника в поле. Кроме того, в зависимости от ориентации проводника, модуль силы будет принимать различные значения, а в некотором положении на проводник будет действовать сила максимальной величины. Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению силы тока и длины проводника постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{Il} = \text{const} . \quad (23.2)$$

Если в ту же точку магнитного поля поместить виток (рамку) с током малых размеров, то со стороны магнитного поля на нее будет действовать момент сил, поворачивающий рамку вокруг некоторой оси. Направление вращающего момента зависит от направления тока в рамке и ее ориентации, а момент силы зависит от величины силы тока в рамке, ее площади и первоначальной ориентации витка в поле. При определенной ориентации рамки момент силы примет максимальное значение. Отношение модуля максимального момента к произведению силы тока в рамке на ее площадь постоянно в данной точке поля:

$$\frac{M_{\max}}{IS} = \text{const.} \quad (23.3)$$

Постоянная величина, определяемая выражениями (23.1)–(23.3), является характеристикой магнитного поля в исследуемой точке пространства. По своему физическому смыслу она определяет силовое действие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы и называется магнитной индукцией B .

Магнитная индукция – векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля. Как уже было сказано, магнитная индукция определяется одним из трех соотношений:

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}; \quad B = \frac{F_{\max}}{Il}; \quad B = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (23.4)$$

Поскольку в числителях выражений (23.4) стоят модули векторных величин и направления этих векторов экспериментально определены, то и магнитная индукция должна быть векторной величиной, имеющей определенное направление в пространстве.

По результатам экспериментальных исследований была «сконструирована» формула магнитной индукции магнитного поля, возникающего вблизи частицы, обладающей положительным зарядом Q и движущейся со скоростью \vec{v} :

$$\vec{B} = k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (23.5)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от движущегося заряда Q (источника поля) в рассматриваемую точку пространства (рис. 23.2).

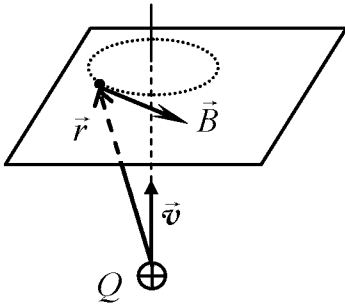


Рис. 23.2

Напомним, что, в соответствии с определением векторного произведения, вектор \vec{B} перпендикулярен каждому из векторов \vec{v} и \vec{r} . Если источником поля будет движущаяся в том же направлении отрицательно заряженная частица, то направление \vec{B} противоположно тому, которое указано на рис. 23.2.

Единица измерения магнитной индукции в СИ называется **тесла** (в честь американского электротехника Н. Тесла) и обозначается Тл. Таким образом, $[B] = \text{Тл}$. Коэффициент пропорциональности k в формуле (23.5) зависит от выбора системы единиц. В СИ принимается, что

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}, \quad (23.6)$$

где μ_0 – коэффициент, называемый **магнитной постоянной**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (23.7)$$

В случае, если магнитное поле создается системой движущихся зарядов, то для нахождения результирующей магнитной индукции в любой точке пространства справедлив принцип **суперпозиции магнитных полей** (принцип **независимости действия магнитных полей**):

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i, \quad (23.8)$$

т.е. магнитная индукция поля, созданного системой движущихся зарядов в любой точке пространства, равна **векторной сумме магнитных индукций полей, созданных каждым движущимся зарядом в этой точке в отдельности**.

Определим с помощью принципа суперпозиции (23.8) и соотношения (23.5) магнитную индукцию поля, создаваемого элементом проводника с током (рис. 23.3) в некоторой точке пространства.

Поскольку электрический ток – это направленное движение заряженных частиц, за направление которого принято направление движения положительных зарядов, магнитное поле в точке M будет создаваться всеми движущимися по проводнику частицами, сосредоточенными в выбранном элементе проводника длиной dl . Если

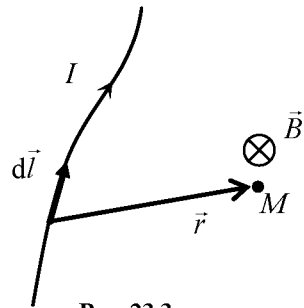


Рис. 23.3

концентрация свободных носителей заряда в проводнике n , то число заряженных частиц в данном элементе проводника $dN = nS dl$. Пусть каждая из частиц обладает зарядом Q . Согласно (23.5) и (23.8) запишем элементарную магнитную индукцию $d\vec{B}$ (т.е. магнитную индукцию поля, созданного элементом проводника) в точке M :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} dN = k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl = \\ &= k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl \frac{v}{v} = k \frac{QnSv}{r^3} \left[\frac{\vec{v}}{v} dl, \vec{r} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку сила тока в проводнике $I = QnSv$, а соотношение $\frac{\vec{v}}{v} dl$ определяет вектор $d\vec{l}$, то $d\vec{B}$ запишется в виде

$$d\vec{B} = k \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (23.9)$$

Магнитная индукция поля, созданного в произвольной точке пространства элементом проводника dl с током силой I прямо пропорциональна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на радиус-вектор, проведенный от этого элемента в точку, и обратно пропорциональна кубу длины радиуса-вектора. Это утверждение называется **законом Био–Савара–Лапласа**. Математическую

$$dB = k \frac{I}{r^3} \left| \left[d\vec{l}, \vec{r} \right] \right| = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha, \quad (23.10)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} . Поскольку элемент $d\vec{l}$ виден из точки M под малым углом $d\alpha$, то $\sin \alpha \approx \sin \beta$, $dl \sin \alpha = d\beta r = r d\alpha$, так как отрезок $r d\alpha$ практически совпадает с дугой окружности радиусом r с центром в точке M . Наконец,

$$r = \frac{x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

Подставляя полученные выше соотношения в (23.10), получаем:

$$dB = k \frac{I}{x} \sin \alpha d\alpha.$$

Тогда

$$B = \int dB = k \frac{I}{x} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = k \frac{I}{x} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (23.11)$$

где α_1 и α_2 – углы между направлением тока в проводнике и направлением на точку M в начале и в конце проводника (см. рис. 23.4).

Из (23.11) можно получить выражение для модуля индукции магнитного поля **бесконечно длинного прямолинейного проводника с током**. Таким объектом будет отрезок прямого провода, если исследуемая точка M находится настолько близко к проводу, что расстояние x во много раз меньше расстояний от точки M до концов отрезка проводника, т.е. границы проводника не видны из точки M . Следовательно $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$. Формула (23.11) в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (23.12)$$

Для определения направления вектора \vec{B} в произвольной точке применимо следующее правило (правило правого винта, или «правило буравчика»): если ввинчивать **правый** винт по направлению тока в прямолинейном проводнике, то направление движения рукоятки винта укажет направление вектора магнитной индукции в каждой точке пространства.

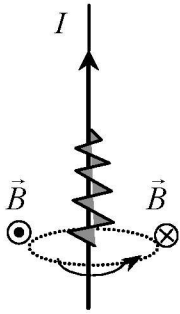


Рис. 23.5

На рисунке 23.5 показано, что во всех точках плоскости рисунка слева от проводника векторы \vec{B} направлены перпендикулярно плоскости рисунка «на нас», а во всех точках справа от проводника – «от нас».

Если рассмотреть направление векторов \vec{B} в различных точках, то можно сделать такой вывод: векторы магнитной индукции магнитного поля прямолинейного бесконечного проводника с током расположены в плоскостях, перпендикулярных проводнику, причем

в точках, равноудаленных от проводника модули векторов одинаковы. Для графического изображения стационарного, т.е. не изменяющегося во времени, магнитного поля пользуются методом линий магнитной индукции.

Линиями магнитной индукции называются воображаемые линии, проведенные так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора \vec{B} в этой точке поля. Линии магнитной индукции можно наблюдать с помощью мелких игольчатых железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам, разворачиваясь вдоль линий магнитной индукции. Подобный метод графической иллюстрации магнитного поля напоминает изображение электрических полей с помощью силовых линий. Так же как и силовые линии электрических полей, линии магнитной индукции не пересекаются и не соприкасаются. Однако есть существенные отличия свойств силовых линий электростатического поля и линий магнитной индукции.

Во-первых, **силовые линии** в каждой точке указывают направление **силы**, действующей на заряд в электрическом поле (отсюда и название), а направление линий магнитной индукции не указывает направление силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле; поэтому их не рекомендуется называть силовыми линиями магнитного поля.

Во-вторых, силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах, а линии магнитной индукции замкнуты.

Будем называть магнитное поле **однородным**, если во всех его точках векторы индукции \vec{B} совпадают по модулю и направлению. В этом случае линии магнитной индукции параллельны друг другу, т.е. замыкаются на бесконечно большом удалении от рассматриваемой точки пространства. Однородным можно считать магнитное поле между полюсами постоянного магнита.

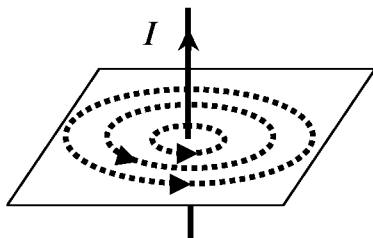


Рис. 23.6

В случае бесконечно длинного прямолинейного проводника с током линии магнитной индукции образуют систему концентрических окружностей, центры которых расположены на проводнике, а плоскости окружностей перпендикулярны проводнику (рис. 23.6). Направления линий магнитной индукции определены по правилу буравчика.

Пример 2. Определим магнитную индукцию магнитного поля кругового витка радиусом R с током силой I (рис. 23.7).

Пусть исследуемая точка M находится на его оси на расстоянии z от плоскости витка. На рисунке 23.7 плоскость витка с током перпендикулярна плоскости рисунка.

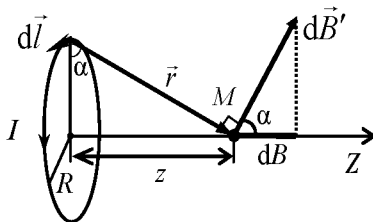


Рис. 23.7

Выделим в витке элемент длиной dl , которому будет соответствовать вектор $d\vec{l}$. Пусть это будет элемент, расположенный так, что вектор $d\vec{l}$ направлен «на нас». Проведем от этого элемента радиус-вектор \vec{r} в точку M . Согласно закону Био–Савара–Лапласа, элементарная магнитная индукция $d\vec{B}'$, создаваемая в точке M этим элементом проводника, будет определяться выражением (23.9). Направление вектора $d\vec{B}'$ определим по правилу векторного произведения: если правый винт вращать по кратчайшему пути от первого сомножителя произведения (вектора $d\vec{l}$) ко второму сомножителю (вектору \vec{r}), то поступательное движение винта укажет направление $d\vec{B}'$.

На рисунке 23.7 показано, что вектор $d\vec{B}'$ направлен в плоскости рисунка перпендикулярно вектору \vec{r} . Если рассмотреть различные элементы витка, то можно сделать вывод, что все элементарные индукции $d\vec{B}'$ будут направлены в точке M под одним и тем же углом α к оси витка, причем их модули будут одинаковы. Из условий симметрии следует, что вектор магнитной индукции поля, создаваемого всем витком с током, будет направлен вдоль оси витка Z . Поэтому нужно суммировать проекции элементарной магнитной индукции на ось Z . Тогда согласно принципу суперпозиции (23.8)

$$|\vec{B}| = \int dB,$$

где $dB = dB' \cos \alpha = k \frac{I dl}{r^2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$; $r^2 = R^2 + z^2$; $\cos \alpha = \frac{R}{r}$. Таким образом

$$B = \int_0^{2\pi R} k \frac{IR dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.13)$$

Это выражение в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.14)$$

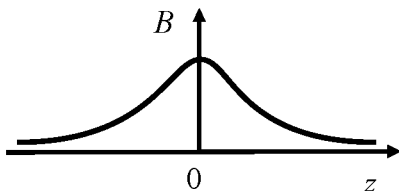


Рис. 23.8

График зависимости модуля магнитной индукции на оси витка от координаты z приведен на рис. 23.8.

Из (23.14) легко получить выражение для модуля магнитной индукции в центре кругового витка с током ($z = 0$):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (23.15)$$

Магнитным моментом витка с током \vec{p}_m называется вектор, модуль которого равен произведению силы тока в витке I на площадь витка S , а направление совпадает с единичным вектором нормали к витку:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (23.16)$$

Направление вектора \vec{n} согласовано с направлением тока в витке по правилу буравчика (рис. 23.9). С учетом \vec{p}_m выражение (23.14) преобразится к виду

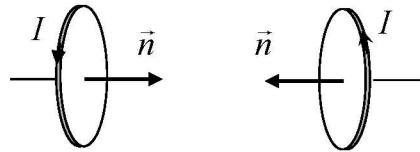


Рис. 23.9

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.17)$$

Определим **циркуляцию магнитной индукции** вдоль произвольного замкнутого контура. Сначала рассмотрим магнитное поле, созданное длинным прямолинейным проводником с током силой I . Линии магнитной индукции поля такого проводника представляют собой окружности, центры которых совпадают с осью проводника. На рисунке 23.10 пунктирной окружностью показана одна из линий магнитной индукции.

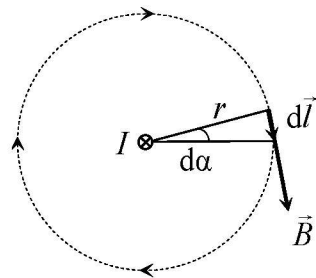


Рис. 23.10

Проводник расположен перпендикулярно плоскости рисунка. Ток в проводнике направлен в плоскость чертежа «от нас».

Модуль магнитной индукции в каждой точке окружности радиусом r определяется по формуле (23.12):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Направление \vec{B} при выбранном направлении тока в проводнике определяется в соответствии с правилом буравчика и указано на рис. 23.10. Вычислим циркуляцию магнитной индукции вдоль контура, совпадающего с линией магнитной индукции,

причем направление обхода контура выберем по часовой стрелке. Элемент окружности $d\vec{l}$ совпадает в каждой точке по направлению с вектором \vec{B} . Тогда

$$\vec{B}d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B}d\vec{l}) = B dl = Br d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол, под которым элемент $d\vec{l}$ виден из центра окружности. Циркуляция магнитной индукции по всему замкнутому контуру определяется следующим соотношением:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I. \quad (23.18)$$

Таким образом, в отличие от циркуляции напряженности электростатического поля, циркуляция магнитной индукции по замкнутому контуру не равна нулю, следовательно, магнитное поле не является потенциальным.

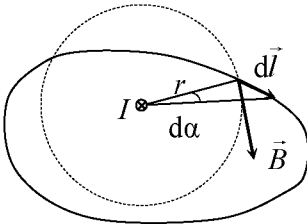


Рис. 23.11

Теперь найдем циркуляцию магнитной индукции вдоль произвольного контура L , не совпадающего с линией магнитной индукции (рис. 23.11). Учитывая, что $dl \cos\alpha = r d\varphi$, можем записать:

$$\vec{B}d\vec{l} = B dl \cos\alpha = Br d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi.$$

Интегрируя по углу φ от 0 до 2π , получаем:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Приведенный вывод повторяет результат, полученный в соотношении (23.18). Отметим, что в случаях, изображенных на рис. 23.10 и 23.11, проводник с током пересекал поверхность, ограниченную контуром L . Такой проводник (или ток) называют **проводником (током), сцепленным с контуром**.

Рассмотрим, чему будет равна циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, не охватывающему ток (рис. 23.12). В этом случае весь контур L разбивается на две

части L_1 и L_2 . На части контура L_1 угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} острый ($\cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) > 0$), а на части контура L_2 угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} тупой ($\cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) < 0$). Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} d\vec{l} &= \int_{L_1} \vec{B} d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} d\vec{l} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Итак, если ток не сцеплен с контуром, то циркуляция магнитной индукции по такому контуру равна нулю.

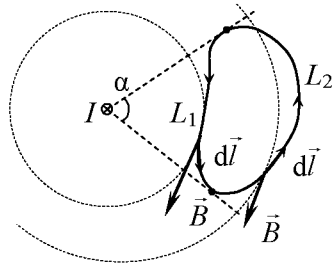


Рис. 23.12

Если магнитное поле создается системой токов, то из принципа суперпозиции магнитных полей следует, что в правой части (23.18) необходимо будет записать алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром. При этом знак тока определяется в соответствии с выбранным направлением обхода контура. Если направление тока и направление обхода контура согласуются с правилом правого винта, то сила тока берется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. Если получено положительное значение циркуляции магнитной индукции, то это означает, что угол между направлениями магнитной индукции и элемента контура $d\vec{l}$ является острым. Рисунок 23.13 и выражение (23.19) иллюстрируют правило знаков:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_3 + I_4). \quad (23.19)$$

Таким образом, циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру прямо пропорциональна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i\text{сц}}. \quad (23.23)$$

Теорему о циркуляции магнитной индукции называют также **законом полного тока** для магнитного поля.

Поскольку циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру в общем случае отлична от нуля, то магнитное поле не является потенциальным. Оно относится к вихревым физическим полям. Вихревой характер поля означает, что его линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, а неподвижные «магнитные заряды», создающие такое поле, в природе отсутствуют.

Рассмотрим методику применения закона полного тока для определения магнитной индукции различных полей. Этот закон удобно использовать для расчета магнитной индукции таких магнитных полей, которые создаются симметричными системами токов. В этом случае можно так выбрать контур интегрирования, что циркуляция магнитной индукции поля по нему легко выражается через искомое значение модуля вектора \vec{B} . Решение задачи о нахождении индукции поля в какой-либо точке пространства должно осуществляться следующим образом:

1) исходя из симметрии распределения заданной системы токов в пространстве, необходимо построить линии магнитной индукции поля, т.е. определить направление вектора \vec{B} в любой точке пространства;

2) выбрать «удобный» замкнутый контур интегрирования, отвечающий следующим требованиям:

а) контур должен проходить через исследуемую точку;

б) длина контура должна быть известна;

в) модуль индукции поля должен быть постоянен в точках всего контура или хотя бы его части;

г) угол между \vec{B} и касательной к контуру должен быть известен в любой точке контура (это обеспечивается выполнением п. 1);

3) определить циркуляцию магнитной индукции по выбранному замкнутому контуру:

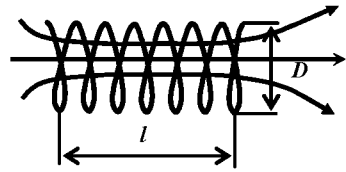
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B_1 \int_{L_1} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl + B_2 \int_{L_2} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl + \dots + B_n \int_{L_n} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl,$$

где B_i – постоянный модуль магнитной индукции во всех точках части контура l_i ;

4) определить алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром;

5) применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп. 3 и 4 с учетом коэффициента пропорциональности μ_0 .

Пример 3. Определим магнитную индукцию поля бесконечно длинного соленоида. Таким термином называется катушка, образованная одинаковыми плотно прилегающими друг к другу витками (рис. 23.14), причем длина катушки существенно больше ее диаметра.



$$D \ll l$$

Рис. 23.14

Изобразим на рис. 23.15 фрагмент центральной части соленоида, указав направления тока в его витках. Выберем контур интегрирования L , состоящий из четырех участков. Первый участок длиной l_1 проведем вдоль оси соленоида. Вблизи оси соленоида магнитное поле можно считать однородным. Здесь линии магнитной индукции параллельны оси, а модуль индукции не изменяется.

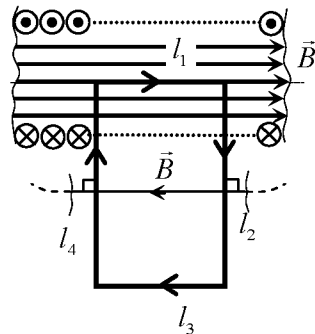


Рис. 23.15

Участки контура l_2 и l_4 проведем так, чтобы они были перпендикулярны линиям магнитной индукции. Замкнем контур участком l_3 настолько далеким от оси соленоида, чтобы магнитную индукцию в точках этого участка контура можно было бы принять равной нулю. При таком выборе контура циркуляция магнитной индукции будет отлична от нуля только на участке l_1 :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{l_1} B dl = Bl_1. \quad (23.21)$$

Алгебраическая сумма токов, сцепленных с контуром L , определится числом токов в витках соленоида, расположенных на длине отрезка l_1 :

$$\sum_{i=1}^n I_{\text{сц}} = Inl_1, \quad (23.22)$$

где n – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины. Применим закон полного тока, приравняв выражения (23.21) и (23.22) с учетом коэффициента μ_0 :

$$Bl_1 = \mu_0 Inl_1. \quad (23.23)$$

Тогда модуль магнитной индукции в центре бесконечно длинного соленоида на его оси

$$B_{\text{центр}} = \mu_0 In. \quad (23.24)$$

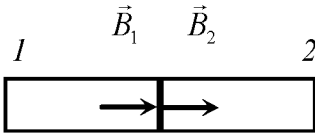


Рис. 23.16

Найдем модуль магнитной индукции в центре основания бесконечно длинного соленоида. Для этого магнитную индукцию в среднем сечении такого соленоида представим суммой магнитных индукций, создаваемых левой 1 и правой 2 бесконечно длинными половинами соленоида (рис. 23.16): $B = B_1 + B_2$. Поскольку $B_1 = B_2 = B_{\text{край}}$,

$$\text{то } B_{\text{край}} = \frac{1}{2} \mu_0 In. \quad (23.25)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется магнитная индукция поля постоянного тока?
2. Запишите выражение закона Био–Савара–Лапласа для определения магнитной индукции, создаваемой элементом проводника с током.
3. В каких случаях магнитную индукцию удобно находить, основываясь на теореме о циркуляции магнитной индукции?
4. Опишите алгоритм определения магнитной индукции с помощью закона полного тока.

24. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖУЩИЙСЯ ЗАРЯД И ПРОВОДНИК С ТОКОМ

Экспериментально обнаружено, что магнитное поле действует на движущиеся в нем частицы, имеющие электрические заряды. В соответствии с (23.4), магнитная индукция равна отношению максимальной силы, действующей со стороны магнитного поля на заряженную частицу, движущуюся со скоростью \vec{v} , к произведению заряда на скорость частицы. Если заряженная частица влетает в магнитное поле (рис. 24.1), то сила \vec{F} , действующая со стороны поля, перпендикулярна скорости частицы и вектору магнитной индукции \vec{B} :

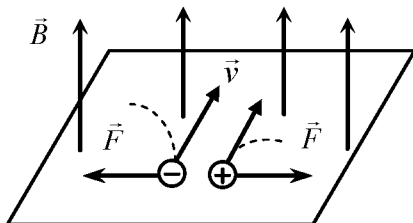


Рис. 24.1

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (24.1)$$

откуда следует, что $\vec{F} \uparrow \uparrow [\vec{v}, \vec{B}]$ при $q > 0$ и $\vec{F} \uparrow \downarrow [\vec{v}, \vec{B}]$ при $q < 0$.

Эти случаи поясняются с помощью рис. 24.1. Направление силы \vec{F} согласно (24.1) можно определить по правилу «левой руки»: если расположить кисть левой руки так, чтобы четыре пальца показывали направление скорости частицы, а линии магнитной индукции входили в раскрытую ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы, действующей на положительно заряженную частицу. Если заряд частицы отрицателен, направление силы будет противоположным.

Поскольку сила, действующая на частицу, перпендикулярна ее скорости, ускорение, сообщаемое этой силой, тоже перпендикулярно скорости частицы и является нормальным ускорением. Под действием этой силы траектория частицы будет искривляться.

Из (24.1) следует, что, если заряженная частица влетает в поле вдоль линий магнитной индукции, сила на частицу не действует. Если же частица влетает в поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, то сила, действующая на частицу, является максимальной: $F = qvB$. Запишем второй закон Ньютона для заряженной частицы, движущейся в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции: $F = ma_n$, или $qvB = m \frac{v^2}{R}$,

где m – масса частицы, а R – радиус кривизны траектории. Если поле однородно ($B = \text{const}$), то R является радиусом окружности

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (24.2)$$

Период обращения частицы по этой окружности не зависит от скорости частицы: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$.

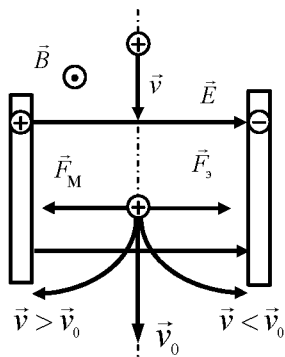


Рис. 24.2

Движение частицы в магнитное поле осуществляется с постоянной скоростью, кинетическая энергия частицы не изменяется. Это является следствием того, что сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, не совершает работы ($\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$).

Если же заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях, то в соответствии с (13.5) и (24.26) на нее действует сила

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (24.3)$$

Эта сила называется **силой Лоренца** (в честь голландского физика Х.-А. Лоренца, получившего в 1902 г. Нобелевскую премию за исследование влияния магнетизма на процессы излучения). Первое слагаемое выражения (24.3) определяет электрический компонент силы Лоренца, а второе – магнитный.

Рассмотрим некоторые примеры практического использования воздействия магнитного и электрического полей на заряженные

частицы. На рисунке 24.2 показана схема работы сепаратора частиц, т.е. устройства, разделяющего пучок частиц по их скоростям или энергиям.

В таком устройстве существует область, в которой созданы однородные электрическое и магнитное поля. Векторы напряженности и магнитной индукции этих полей взаимно перпендикулярны. На рисунке вектор магнитной индукции направлен из плоскости чертежа «на нас», а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости чертежа и направлен вправо. Пусть в сепаратор влетает пучок одинаковых положительно заряженных частиц, имеющих разные скорости. Тогда если частицы движутся так, что $\vec{v} \perp \vec{B}$ и $\vec{v} \perp \vec{E}$, то электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца направлены в противоположные стороны. При определенном значении модуля скорости v_0 эти составляющие равны:

$$qv_0B = qE, \quad v_0 = \frac{E}{B}.$$

Это означает, что все частицы, модули скоростей которых равны v_0 , пролетят сепаратор, не отклоняясь от своего первоначального направления. Частицы пучка, модули скоростей которых больше, чем v_0 , отклонятся влево. Для них $qvB > qE$, т.е. магнитная составляющая силы Лоренца превосходит электрическую составляющую. Остальные частицы отклонятся вправо, так как для них $qvB < qE$. Таким образом, на выходе из сепаратора будет получен **моноэнергетический** пучок частиц, т.е. пучок частиц, обладающих одинаковой кинетической энергией.

Если пучок образован частицами разных масс, то дальнейшее воздействие на него однородного магнитного поля способно разделить частицы по массе. На этом основано действие масс-спектрометра (рис. 24.3).

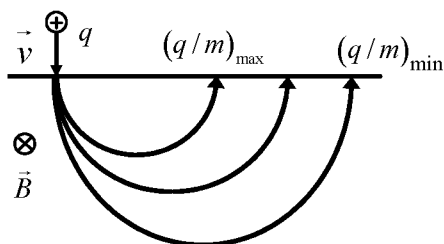


Рис. 24.3

Пусть пучок частиц, прошедших сепаратор, попадает в однородное магнитное поле, магнитная индукция которого перпендикулярна скорости частиц. Тогда частицы пучка, масса которых равна m_i , будут согласно (24.2) в дальнейшем двигаться по окружности радиусом

$$R_i = \frac{m_i v}{qB}.$$

Чем больше удельный заряд частицы (отношение ее заряда к массе $\frac{q_i}{m_i}$), тем меньше радиус ее траектории при той же скорости и индукции магнитного поля. Таким образом, масс-спектрометр позволяет установить состав исследуемого пучка частиц, рассортировав его по значениям удельного заряда.

Воздействие магнитного поля на пучки движущихся частиц приводит иногда к неожиданным экспериментальным результатам. В 1879 г. американский физик Э.Г. Холл обнаружил эффект, названный впоследствии его именем. **Эффектом Холла** называется возникновение в проводнике с током, помещенном в магнитное поле, разности потенциалов в направлении, перпендикулярном векторам плотности тока и магнитной индукции.

Для объяснения этого эффекта рассмотрим фрагмент плоского металлического проводника толщиной b , в котором электрическим полем с напряженностью \vec{E}_{\parallel} создан электрический ток плотностью \vec{j} (рис. 24.4, а). В отсутствие магнитного поля свободные электроны металла упорядоченно движутся со скоростью \vec{u} , направленной противоположно вектору плотности тока \vec{j} . Если проводник поместить в магнитное поле так, что $\vec{B} \perp \vec{j}$, то на электроны будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца \vec{F}_M , направление которой показано на рисунке. Ее действие приведет к поперечному смещению электронов, в результате чего между верхней и нижней поверхностями проводника появится электрическое поле разделенных зарядов. Если проводник достаточно тонкий, то возникшее электрическое поле с напряженностью \vec{E}_{\perp}

можно считать однородным. Процесс смещения электронов прекратится, когда компенсируются силы, действующие на них со стороны магнитного и электрического полей: $euB = eE_{\perp}$. В проводнике установится электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ (рис. 24.4, б). Изменение направления напряженности электрического поля в проводнике приведет к изменению положения эквипотенциальных плоскостей (эквипотенциальные плоскости перпендикулярны \vec{E}). Ранее такая плоскость проходила через точки M и N проводника (рис. 24.4, в). Теперь она пройдет через точки M' и N . Поэтому между точками M и N возникнет разность потенциалов

$$\varphi_N - \varphi_M = E_{\perp} b = uBb.$$

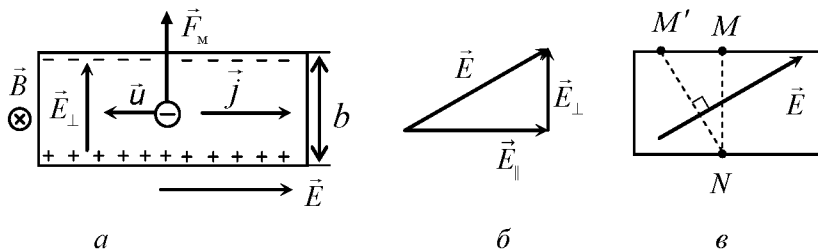


Рис. 24.4

Поскольку $j = uen$, где n – концентрация свободных электронов в металле, то

$$\varphi_N - \varphi_M = \frac{j}{en} Bb. \quad (24.9)$$

Эта разность потенциалов называется **холловской разностью потенциалов**, ее экспериментальное измерение при заданных размерах проводника и силе тока в нем позволяет определить магнитную индукцию поля, в которое помещен **холловский датчик**. Это один из основных методов измерения магнитной индукции постоянных магнитных полей.

Закон Ампера

Согласно закону, экспериментально установленному Ампером, на элемент dl проводника с током действует в магнитном поле сила (рис. 24.5)

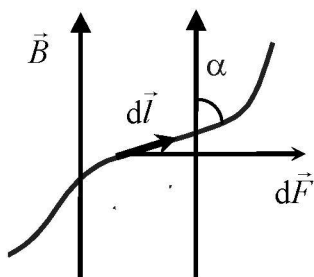


Рис. 24.5

Сила направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Соотношение (24.5) представляет математическую запись закона Ампера: сила, действующая на элемент проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на магнитную индукцию поля. Сила, определяемая по (24.5), называется силой Ампера. Направление силы Ампера можно определить по «правилу левой руки»: если расположить кисть левой руки так, чтобы четыре пальца показывали направление тока в проводнике, а линии магнитной индукции входили в раскрытую ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец

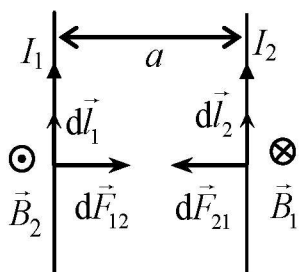


Рис. 24.6

покажет направление силы, действующей на элемент проводника с током.

Найдем силу взаимодействия двух тонких параллельных бесконечно длинных проводников с токами (рис. 24.6).

Если расстояние между проводниками a , то каждый элемент проводника с током I_2 будет находиться в поле,

магнитная индукция которого $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Следовательно, на

элемент проводника длиной dl будет действовать сила

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl. \quad (24.7)$$

Для силы F_{12} , действующей на участок проводника с током I_1 , получается аналогичное выражение. С помощью правила левой руки легко установить, что при одинаковом направлении токов проводники притягивают друг друга, а при различном – отталкивают.

Из (24.7) следует определение основной единицы измерения электрических величин в СИ – ампера. **Один ампер – сила неизменяющегося тока, который, протекая по двум параллельным бесконечно длинным проводникам ничтожно малого кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает между ними силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводников.**

Рассмотрим теперь поведение контура (рамки с током) в магнитном поле. Пусть прямоугольная рамка с током находится в однородном магнитном поле, причем направления магнитного момента рамки и магнитной индукции поля совпадают (рис. 24.7). Со стороны магнитного поля на каждую сторону рамки будет действовать соответствующая сила. Направления всех сил указаны на рисунке. Действие сил приводит к растяжению рамки. Если изменить направление тока (или направление \vec{B}), то действие сил будет приводить к сжатию рамки. Однако в любом случае

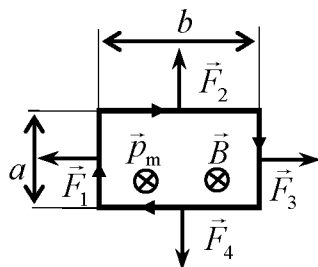


Рис. 24.7

$$F_1 = F_3 = Iba, \quad F_2 = F_4 = IBb.$$

Так как $\sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0$, то рамка в однородном магнитном поле

сохраняет состояние покоя. Таким образом, действие магнитного поля на рамку сводится в данном случае только к ее деформации.

Повернем плоскость рамки на угол α относительно положения, указанного на рис. 24.7. На такой же угол повернется вектор \vec{p}_m относительно вектора магнитной индукции \vec{B} . На рисунке 24.8 представлен вид сверху на рамку (рамка расположена перпендикулярно плоскости чертежа).

Теперь векторы сил \vec{F}_1 и \vec{F}_3 изменили свои направления (мы предлагаем вам самостоятельно убедиться в том, что направления \vec{F}_2 и \vec{F}_4 остались прежними, т.е. эти силы растягивают рамку). Моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_3 будут стремиться повернуть рамку

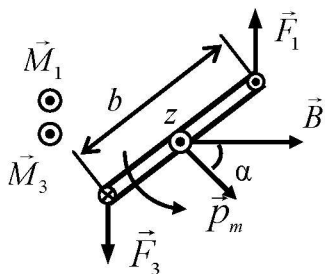


Рис. 24.8

вокруг оси z , перпендикулярной плоскости чертежа, против часовой стрелки. Определим эти моменты:

$$M_{1z} = Iba \frac{b}{2} \sin \alpha, \quad M_{3z} = Iba \frac{b}{2} \sin \alpha.$$

Направления векторов моментов указаны на рис. 24.8. Ясно, что суммарный момент сил, действующих на рамку,

$$M = M_1 + M_2 = Iab \sin \alpha.$$

Поскольку $ab = S$ (площадь рамки), то получаем:

$$M = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B}), \quad \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (24.8)$$

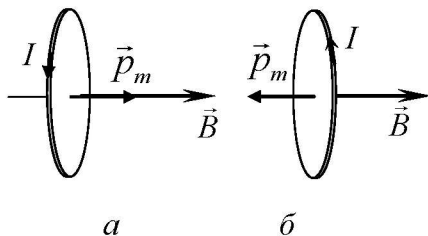


Рис. 24.9

Таким образом, если направления магнитного момента рамки с током \vec{p}_m и магнитной индукции поля \vec{B} не совпадают, то действие поля на рамку приведет к ее повороту вокруг оси, перпендикулярной вектору магнитной индукции в положение устойчивого равновесия (рис. 24.9, а). При выведении рамки из этого положения действие момента сил возвращает рамку обратно (рис. 24.10, а) в положение, указанное штриховой линией. Положение рамки на

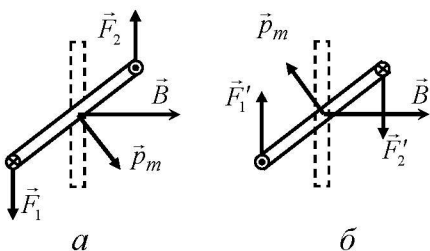


Рис. 24.10

рис. 24.9, б – это положение неустойчивого равновесия. При выведении рамки из этого положения действие момента сил еще более отклоняет рамку от этого положения и приводит ее в положение устойчивого равновесия (рис. 24.10, б).

Для того чтобы угол α между векторами \vec{p}_m и \vec{B} увеличить на $d\alpha$, нужно совершить элементарную работу $\delta A = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha$.

Эта работа внешних сил равна приращению энергии рамки с током в магнитном поле: $dW = \delta A$. Отсюда $dW = p_m B \sin \alpha d\alpha$. Интегрируя, находим, что

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const}.$$

Если положить $\text{const} = 0$, то формула приобретает вид

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (24.9)$$

Рассмотрим поведение плоского контура с током в неоднородном поле. На различные элементы контура будут действовать элементарные силы $d\vec{F}$ в различных направлениях (рис. 24.11). Результирующая всех элементарных сил $d\vec{F}$ ориентирует контур так, что направление его магнитного момента совпадает с направлением магнитной индукции. При этом контур поворачивается, растягивается и втягивается в область более сильного поля.

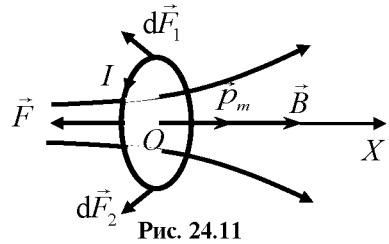


Рис. 24.11

Результирующая сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, может быть найдена через градиент энергии контура в поле:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W.$$

Например, если неоднородность магнитного поля проявляется вдоль какой-либо оси OX , то

$$F_x = p_{mx} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где первый множитель – это проекция магнитного момента на ось OX .

Таким образом, если магнитный момент рамки и индукция поля сонаправлены, то рамка втягивается в область более сильного поля – туда, где $|\vec{B}|$ больше (где густота линий магнитной индукции больше), т.е. влево на рис. 24.11. Если направления магнитного момента рамки и индукции поля противоположны, то рамка выталкивается в область слабого поля.

Суммируя все сделанные выводы, резюмируем: в наиболее общем случае поведение контура с током во внешнем магнитном поле описывается его поступательным движением, вращением и деформацией.

Магнитный поток

Назовем потоком магнитной индукции (магнитным потоком) через элемент поверхности dS величину

$$d\Phi = B dS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}), \quad (24.10)$$

где \vec{n} – вектор единичной нормали к поверхности в месте расположения элемента dS (рис. 24.12).

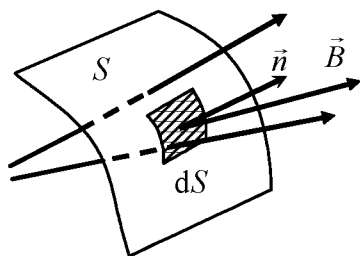


Рис. 24.12

Выражение (24.10) можно преобразовать, если ввести понятие вектора площади элемента поверхности как произведения площади поверхности и единичного вектора нормали к этой поверхности: $d\vec{S} = dS \vec{n}$, причем

$$|d\vec{S}| = dS |\vec{n}| = dS.$$

Тогда магнитный поток можно определить как скалярное произведение вектора площади элемента поверхности на магнитную индукцию:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}.$$

Элемент поверхности dS выбирается таких малых размеров, чтобы его можно было считать практически плоским, а магнитное поле в его пределах можно было считать однородным.

Магнитный поток через всю поверхность S находится как алгебраическая сумма потоков через все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (24.11)$$

Знак магнитного потока определяется относительно произвольно выбранного направления нормали \vec{n} к поверхности. В случае выпуклой или замкнутой поверхности принято использовать внешние нормали \vec{n} , т.е. положительным считается направление из области, ограниченной этой поверхностью. По своему физическому смыслу магнитный поток аналогичен потоку вектора напряженности электрического поля: магнитный поток через поверхность пропорционален числу линий магнитной индукции, пересекающих эту поверхность.

В случае, когда рассматривается контур, состоящий из N одинаковых витков, вводится понятие «потокосцепления». Потокосцепление Ψ есть сумма магнитных потоков, сцепленных со всеми витками:

$$\Psi = N\Phi.$$

Единица измерения магнитного потока в СИ называется вебер (обозначение Вб, принята в честь немецкого физика В.Э. Вебера, предложившего вместе с К.Ф. Гауссом систему единиц для электрических величин): 1 вебер – это поток однородного магнитного поля с индукцией 1 тесла через поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно линиям магнитной индукции; $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$.

Поскольку линии магнитной индукции всегда замкнуты, то при вычислении магнитного потока через любую замкнутую поверхность необходимо учитывать, что число линий магнитной индукции, пересекающих поверхность с одной стороны (входящих в нее), всегда равно числу линий индукции, пересекающих поверхность с другой стороны (выходящих в нее). Поэтому суммарный магнитный поток через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (24.12)$$

Опыты показали, что, разрезая постоянный магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т.е. нельзя получить магнит либо с

одним северным, либо с одним южным полюсом. Физический смысл этого факта и выражения (24.37) заключается в том, что в природе нет магнитных зарядов, т.е. источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции.

Работа сил магнитного поля по перемещению проводника с током

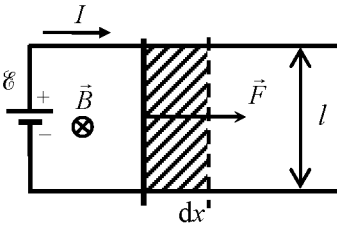


Рис. 24.13

Допустим, что провод с током может свободно перемещаться во внешнем магнитном поле под действием силы Ампера. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 24.13). Внешнее поле будем предполагать однородным.

Направление вектора \vec{B} перпендикулярно к плоскости чертежа.

При указанных на рисунке направлениях тока и вектора \vec{B} сила Ампера, действующая на провод с током, будет направлена вправо. Модуль силы $F = IBl$, где l – длина перемещающегося участка проводника. На пути dx сила Ампера совершает над проводником работу по его перемещению:

$$\delta A = F dx = IBl dx .$$

Произведение $l dx$ равно заштрихованной на рис. 24.13 площади dS , очерчиваемой проводником при его движении, а $B l dx$ – потоку магнитной индукции $d\Phi$ через эту площадку. Поэтому можно записать

$$\delta A = I d\Phi . \tag{24.13}$$

Полученный результат легко обобщить на случай неоднородного поля. Для этого нужно разбить проводник на участки dl и сложить элементарные работы, совершаемые по перемещению каждого участка (в пределах каждой площадки dS магнитную индукцию можно считать постоянной).

Если вектор \vec{B} образует с нормалью к поверхности, очерчиваемой проводником, угол α , отличный от нуля, то направление силы составит с направлением перемещения также угол α . Тогда

$$\delta A = F \cos \alpha \, dx = IB_n \, dl \, dx ,$$

где $B_n = B \cos \alpha$ – составляющая вектора магнитной индукции, совпадающая с направлением нормали к площадке dS . Магнитный поток через площадку, очерчиваемую проводником при его движении, составит $d\Phi = B_n \, dl \, dx$. Таким образом, и в этом случае вновь приходим к формуле (24.13).

Работа сил магнитного поля по перемещению проводника с током равна произведению силы тока в проводнике на магнитный поток через поверхность, очерчиваемую проводником при его движении.

Заметим, что работа по перемещению проводника с током совершается не за счет энергии магнитного поля (сила Лоренца работы не совершает), а за счет энергии источника, поддерживающего ток в электрической цепи, в которую входит рассматриваемый проводник.

Найдем работу, совершаемую над замкнутым контуром при его перемещении в магнитном поле. Пусть контур произвольной формы перемещается из положения $abcd$ в положение $a'b'c'd'$, совершая плоское движение

(рис. 24.14; вектор \vec{B} направлен «от нас», перпендикулярно плоскости чертежа). Разделим контур $abcd$ на две части abc и cda . Найдем работы по перемещению каждой части.

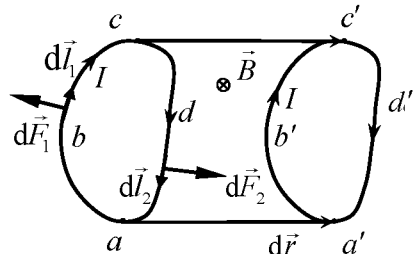


Рис. 24.14

Работу сил Ампера по перемещению части abc согласно (24.13) выразим так: $A_{abc} = -I(\Phi_1 + \Phi_0)$, где Φ_1 – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его начальном положении, Φ_0 – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром $adcc'b'a'$. Знак «-» в этой формуле вызван тем, что векторы перемещения $d\vec{r}$ и силы Ампера $d\vec{F}_1$ образуют друг с другом тупые углы для всех элементов $d\vec{l}_1$ проводника abc .

Работа сил Ампера по перемещению части cda : $A_{cda} = I(\Phi_2 + \Phi_0)$, где Φ_2 – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его конечном положении.

Работа по перемещению всего замкнутого контура:

$$A = A_{abc} + A_{cda} = I(-\Phi_1 - \Phi_0 + \Phi_2 + \Phi_0) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta\Phi.$$

Работа сил магнитного поля по перемещению контура с током равна произведению силы тока в контуре на приращение магнитного потока через площадь, ограниченную контуром:

$$A = I \Delta\Phi. \quad (24.14)$$

Если при вычислении работы сил магнитного поля рассмотреть самый общий случай произвольной ориентации элемента проводника с током и вектора магнитной индукции поля, то выражения (24.13) и (24.14)

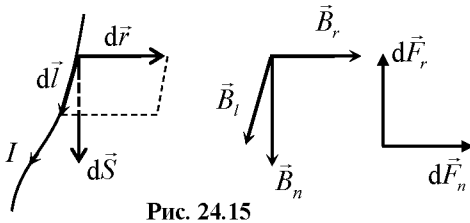


Рис. 24.15

не изменятся. Действительно, произвольно направленный вектор \vec{B} всегда можно разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 24.15) так, что $\vec{B}_r \parallel d\vec{r}$, $\vec{B}_l \parallel d\vec{l}$, $\vec{B}_n \perp d\vec{S}$, где $d\vec{r}$ – перемещение проводника; $d\vec{l}$ – элемент проводника, $d\vec{S}$ – вектор площади поверхности, очерчиваемой проводником. Эти три составляющие магнитной индукции определяют выражения для трех составляющих силы Ампера $d\vec{F}_r$, $d\vec{F}_l$, $d\vec{F}_n$. Однако согласно (24.5)

$$d\vec{F}_r = I [d\vec{l}, \vec{B}_r],$$

причем $d\vec{F}_r \perp d\vec{r}$, а поэтому работа данной составляющей силы Ампера по перемещению проводника будет равна нулю. Кроме того, $d\vec{F}_l = I [d\vec{l}, \vec{B}_l] = 0$. Поэтому работу по перемещению проводника будет совершать только сила $d\vec{F}_n$, а именно этот случай и рассматривался раньше.

Контрольные вопросы и задания

1. За счет какого источника энергии совершают работу силы магнитного поля при перемещении в нем проводника с током?
2. Какие параметры влияют на форму траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле?
3. Чему равен поток магнитной индукции через замкнутую поверхность, проведенную в магнитном поле?
4. От чего зависит сила, действующая со стороны магнитного поля на двигающуюся в нем заряженную частицу?

25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле индуцировать электрический ток? Такой вопрос поставил в начале 1820-х годов М. Фарадей. Он считал, что между электрическими и магнитными явлениями существует тесная взаимосвязь. Ампер, Био и другие выяснили лишь одну сторону этой взаимосвязи, а именно магнитное действие тока. Фарадей считал необходимым установить существование электрического действия магнитного поля. «Представляется весьма необычным, чтобы, с одной стороны, всякий электрический ток сопровождался магнитным действием соответствующей интенсивности, направленным под прямым углом к току, и чтобы, в то же время, в хороших проводниках электричества, помещенных в сферу этого действия, совсем не индуцировался ток, не возникало какое-либо ощутимое действие, эквивалентное по силе току», – так писал Фарадей в своей работе «Экспериментальные исследования по электричеству».

Однако первые опыты с проводником, помещенным в магнитное поле постоянного тока, не дали положительных результатов. Только в 1831 г. после десяти лет упорных поисков Фарадею удалось решить поставленную задачу и осуществить опыты, имевшие огромное значение для дальнейшего развития техники. Открытое Фарадеем явление стало той основой, на базе которой

в последующие годы были созданы электрические двигатели, генераторы и трансформаторы. Поэтому М. Фарадей заслуженно считается одним из основателей электротехники.

Схему опытов Фарадея, которые привели к открытию электромагнитной индукции, можно пояснить следующим образом. Разместим на одном сердечнике две проводящие катушки (рис. 25.1, *а*). Одну из катушек замкнем на гальванометр, а другую будем подключать к источнику тока при помощи ключа *K*. В момент замыкания (или размыкания) цепи ключом *K* гальванометр, включенный в цепь, будет отмечать возникновение электрического тока в цепи второй катушки.

По результатам этого опыта можно сделать вывод, что первая катушка электрически влияет на вторую. Однако, что было причиной появления тока во второй катушке: возникновение (или исчезновение) тока в первой катушке или магнитного поля этого тока?

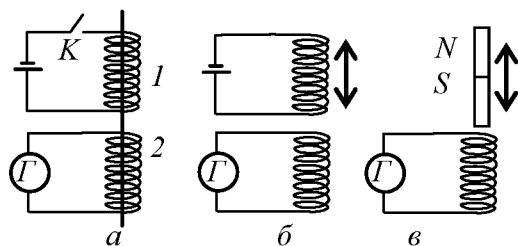


Рис. 25.1

Для ответа на этот вопрос поставим второй опыт (рис. 25.1, *б*). Теперь катушка 1 постоянно подключена к источнику, поэтому ток в ней неизменен. Однако в процессе смещения катушек

друг относительно друга гальванометр дает показания, т.е. причиной появления тока в катушке 2 является изменение магнитного поля, в котором она находилась.

Чтобы подтвердить этот вывод, Фарадей проводит третий опыт (рис. 25.1, *в*), в котором первая катушка заменяется постоянным магнитом. Результаты опыта при смещении магнита относительно катушки 2 полностью аналогичны предыдущим. В этом опыте видно, что причиной всех электрических явлений в катушке 2 является исключительно поведение магнитного поля, в которое она помещена, а источник создания магнитного поля никак не влияет на результат наблюдений.

Общим для всех трех опытов было то, что при осуществлении действий, описанных выше, изменялся магнитный поток через вторую катушку, в которой создавался (индуцировался) электрический ток. Важно также и то, что появление тока наблюдалось только **в процессе** изменения магнитного потока. Как только изменение магнитного потока прекращалось (прекращалось относительное смещение катушек или останавливалось движение магнита), стрелка гальванометра занимала нулевое положение. Если гальванометр заменить вольтметром, то он покажет появление разности потенциалов на концах катушки 2.

Наблюдаемое явление Фарадей назвал **электромагнитной индукцией**, т.е. **явлением возникновения ЭДС индукции (а также индукционного тока в замкнутом контуре) при любом изменении магнитного потока через площадь, ограниченную контуром.**

Экспериментально доказано, что величина возбуждаемой ЭДС определяется только скоростью изменения магнитного потока через контур и не зависит от способа изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (25.1)$$

Это выражение носит название **основного закона электромагнитной индукции (закона Фарадея)**, который формулируется так: **электродвижущая сила электромагнитной индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.**

Знак минус в (25.1) отражает экспериментально установленное правило Э. Ленца: **при всяком изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что магнитное поле тока противодействует изменению магнитного потока через эту поверхность.**

Например, при увеличении силы тока I в контуре 1 (рис. 25.2) будет увеличиваться магнитная индукция поля этого тока и соответственно магнитный поток через

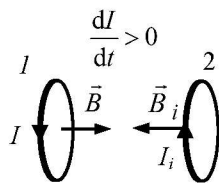


Рис. 25.2

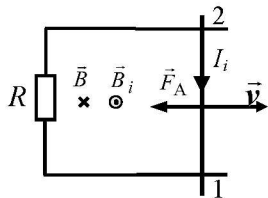


Рис. 25.3

поверхность, ограниченную контуром 2. Это приводит к появлению в контуре 2 ЭДС электромагнитной индукции и индукционного тока I_i . Направление индукционного тока при этом таково, что магнитная индукция \vec{B}_i , создаваемого им магнитного поля направлена противоположно индукции магнитного поля тока I в контуре 1. То есть индукционный ток I_i , возникающий в контуре 2, препятствует увеличению магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром. Если же сила тока I в контуре 1 будет уменьшаться, то в контуре 2 возникнет индукционный ток I_i такого направления, что создаваемое им магнитное поле будет препятствовать уменьшению магнитного потока через поверхность ограниченную контуром 2.

Итак, правило Ленца показывает, что **следствие процесса** (появляющийся индукционный ток) **всегда препятствует причине, его вызывающей** (изменению магнитного потока).

Поясним это еще на одном примере. Поместим в однородное магнитное поле с магнитной индукцией \vec{B} систему двух параллельных проводников, замкнутых на резистор сопротивлением R (рис. 25.3).

Вдоль проводников без нарушения электрического контакта перемещается перемычка 1–2. Тогда при ее движении вправо со скоростью \vec{v} будет увеличиваться площадь проводящего контура, образованного проводниками, резистором и перемычкой. Соответственно будет увеличиваться и магнитный поток через этот контур, что приведет к появлению индукционного тока. Индукционный ток в контуре будет иметь такое направление (против часовой стрелки), что магнитная индукция \vec{B}_i поля тока будет направлена противоположно индукции внешнего магнитного поля \vec{B} . В магнитном поле с индукцией \vec{B} на перемычку с индукционным током будет действовать сила Ампера, направление которой определяется по правилу левой руки (рис. 25.3). Появившаяся сила препятствует перемещению перемычки.

Выведем закон электромагнитной индукции, используя закон сохранения энергии. Для этого рассмотрим проводящий контур (рис. 25.4), образованный двумя параллельными проводниками, замкнутыми свободно двигающейся по ним перемычкой $I-2$. В контур включен источник тока с ЭДС \mathcal{E} и резистор с сопротивлением R . Поместим контур в однородное магнитное поле с магнитной индукцией \vec{B} .

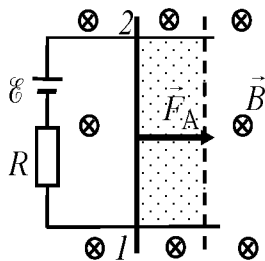


Рис. 25.4

Поскольку в контуре существует электрический ток, на перемычку будет действовать сила Ампера, что вызовет движение перемычки вправо. При движении перемычки площадь контура будет возрастать, а, следовательно, магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, также будет увеличиваться. Это будет причиной возникновения электромагнитной индукции.

Согласно закону сохранения энергии работа, совершенная источником тока за время dt , расходуется на выделение в контуре некоторого количества теплоты и на работу по перемещению перемычки в магнитном поле:

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + \delta A.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{E}dq = I^2 Rdt + Id\Phi,$$

где dq – заряд, перенесенный источником за время dt . Поскольку $dq = Idt$, то

$$\mathcal{E} = IR + \frac{d\Phi}{dt}, \quad I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Согласно закону Ома числитель последнего выражения должен содержать сумму ЭДС в контуре, следовательно, второе слагаемое числителя представляет собой ЭДС индукции, возникающую в контуре:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, получено выражение закона Фарадея для электродвижущей силы индукции.

Это же выражение можно получить на основе электронных представлений, рассмотрев силы, действующие на электроны проводника, движущегося в магнитном поле. Для этого возьмем

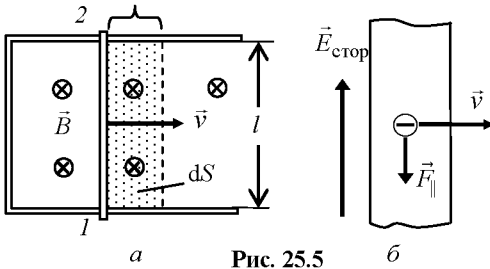


Рис. 25.5

контур, участок которого 1–2 длиной l может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура (рис. 25.5, а).

Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура.

Приведем подвижную часть контура в движение со скоростью \vec{v} . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители заряда в проводнике – электроны. Рассмотрим процессы, происходящие внутри подвижной части контура, движущегося со скоростью \vec{v} в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} так, как это показано на рис. 25.5, б.

Поскольку свободные электроны движутся вместе с участком контура, со стороны магнитного поля на них действует магнитная составляющая силы Лоренца, направленная вдоль провода и равная по модулю

$$F_{\parallel} = e v B,$$

где индекс « \parallel » указывает на то, что сила направлена вдоль провода.

Под действием этой силы электроны смещаются в направлении нижнего (рис. 25.5, б) конца проводника. Действие этой силы эквивалентно действию электрической силы

$$eE_{\text{стоп}} = e v B,$$

обусловленной напряженностью поля $E_{\text{стоп}} = vB$ и направленной так, как указано на рис. 25.5, б. Это поле не электростатического происхождения, оно является полем сторонних сил. Роль сторонней силы в данном случае играет составляющая силы Лоренца, направленная вдоль проводника. Циркуляция вектора напряженности стороннего поля вдоль контура, включающего движущийся проводник, равна электродвижущей силе, индуцируемой в проводнике:

$$\mathcal{E} = \oint E_{\text{стоп}} dl = \int_1^2 E_{\text{стоп}} dl = E_{\text{стоп}} l = vBl. \quad (25.2)$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать:

$$v l B = B \frac{l v dt}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi$ – магнитный поток через поверхность площадью dS , очерчиваемую проводником при его движении за время dt (рис. 25.5. а).

С учетом этих преобразований формулу (25.2) можно переписать:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если проводник движется в неоднородном магнитном поле, то следует выделить его малый элемент длиной dl и определить ЭДС индукции, возникающей в этом элементе,

$$d\mathcal{E} = v B dl, \quad (25.3)$$

а затем проинтегрировать это выражение по всей длине проводника.

Итак, результаты, полученные при выводе выражения для ЭДС электромагнитной индукции из закона сохранения энергии и на основе электронных представлений тождественны. Однако смысл правой части выражения для контура и отрезка проводника различен. В первом случае $d\Phi/dt$ – это скорость изменения магнитного потока, через поверхность, ограниченную контуром. Во втором – это отношение магнитного потока $d\Phi$, через поверхность, очерчиваемую проводником при его движении за бесконечно малый интервал времени, к величине этого интервала dt .

Рассмотрим явление электромагнитной индукции, возникающее в короткозамкнутой катушке. Пусть катушка содержит N витков общим сопротивлением R и ее пронизывает изменяющийся во времени магнитный поток. В катушке возникает ЭДС индукции \mathcal{E}_i . Поскольку витки катушки соединены последовательно, \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом отдельном витке

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sum \Phi).$$

Сумму магнитных потоков, сцепленных со всеми проводниками элемента электрической цепи, назовем **потокосцеплением** Ψ или полным магнитным потоком. Если поток, пронизывающий каждый из витков одинаков, то потокосцепление равно произведению числа витков на магнитный поток, сцепленный с одним витком:

$$\Psi = N\Phi.$$

Воспользовавшись потокосцеплением, выражение для ЭДС, индуцируемой в катушке, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Силу индукционного тока, возникающего в катушке, найдем следующим образом:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

За время существования в катушке индукционного тока (от момента времени t_1 до момента t_2) по катушке пройдет индуцированный (индукционный) электрический заряд

$$Q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}, \quad (25.4)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – значения потокосцепления в начальный и конечный моменты времени. Важно отметить, что величина индукционного заряда определяется лишь начальным и конечным значениями потокосцепления.

С одной стороны, при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную неподвижным контуром, в контуре возникает электродвижущая сила, определяемая скоростью изменения магнитного потока (25.1). С другой стороны, электродвижущая сила равна удельной работе сторонних сил по переносу зарядов в контуре

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (25.5)$$

Объединив выражения (25.1) и (25.5), получим:

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (25.6)$$

Фигурирующий здесь магнитный поток может изменяться по ряду причин: благодаря изменению формы контура и его расположения в поле, а также из-за того, что магнитная индукция зависит от времени. Полная производная $d\Phi/dt$ учитывает все эти причины. В случае неподвижного контура магнитный поток изменяется только вследствие зависимости магнитной индукции от времени, поэтому вместо $d\Phi/dt$ следует брать частную производную $\partial\Phi/\partial t$. Точно также следует поступить, когда проводящий контур вообще отсутствует, и мы рассматриваем вихревое электрическое поле, порождаемое изменяющимся во времени магнитным полем (рис. 25.6). Здесь L – воображаемый контур, по которому вычисляется циркуляция напряженности электрического поля.

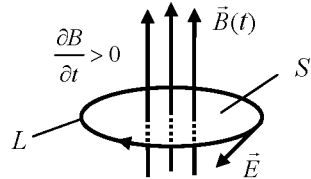


Рис. 25.6

Уравнение (25.6) с учетом того, что $d\Phi = \vec{B}d\vec{S}$, записывают в виде

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (25.7)$$

Стороннее электрическое поле не является кулоновским. Его принципиальные отличия от изученного нами ранее электростатического поля таковы:

- это поле создается не электрическими зарядами, а изменяющимся во времени магнитным полем;
- силовые линии поля являются замкнутыми, т.е. такое электрическое поле является вихревым.

Физический смысл уравнения (25.7) заключается в том, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Сформулируйте и запишите закон Фарадея для электромагнитной индукции.
3. Сформулируйте правило Ленца для электромагнитной индукции.
4. Как определить индуцированный заряд, протекающий в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через площадь этого контура?
5. Напишите уравнение связи циркуляции напряженности вихревого электрического поля с индукцией магнитного поля.

26. ЯВЛЕНИЯ САМОИНДУКЦИИ И ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

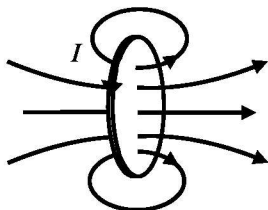


Рис. 26.1

Рассмотрим контур с электрическим током силой I (рис. 26.1). Ток создает полный магнитный поток Ψ , пронизывающий поверхность, ограниченную контуром. Этот магнитный поток называется собственным магнитным потоком. При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и собственный магнитный поток. Это приводит к тому, что в контуре индуцируется электродвижущая сила индукции. Явление возникновения ЭДС электромагнитной индукции в электрической цепи вследствие изменения в ней электрического тока **называется самоиндукцией**.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что сила тока в цепи и создаваемое этим током поточесцепление друг другу пропорциональны:

$$\Psi = LI. \quad (26.1)$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока в цепи и полным магнитным потоком называется **индуктивностью** цепи. Индуктивность L – скалярная величина, численно равна отношению потокосцепления электрической цепи к силе тока в цепи

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (26.2)$$

Индуктивность элемента электрической цепи (например, провода, соленоида, коаксиального кабеля и т.п.) зависит только от его формы, геометрических размеров, числа витков и магнитных свойств среды, в которой этот элемент находится. При неизменности этих величин электродвижущая сила самоиндукции \mathcal{E}_s согласно закону Фарадея определяется выражением

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (26.3)$$

Таким образом, величина ЭДС самоиндукции для любой системы пропорциональна скорости изменения силы тока в ней. В роли коэффициента пропорциональности выступает индуктивность системы. В СИ для измерения индуктивности принята единица, называемая **генри** (обозначение 1 Гн) в честь американского физика Дж. Генри. Независимо от М. Фарадея, но позже него, он открыл закон электромагнитной индукции. В соответствии с (26.2) 1 Гн – это индуктивность такой проводящей системы, в которой при силе тока 1 А создается потокосцепление 1 Вб.

Определим для примера индуктивность длинного соленоида. Пусть его длина l , площадь поперечного сечения S и число витков в нем N . Зададим силу тока I в соленоиде. Магнитная индукция на оси соленоида в его среднем сечении определяется формулой

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Следует отметить, что магнитная индукция в соленоиде убывает как в радиальном направлении (от оси к периферии), так и в осевом (от среднего сечения к торцам соленоида). Сделаем следующие предположения. Во-первых, будем считать магнитную индукцию постоянной по поперечному сечению соленоида. Во-вторых, пренебрежем уменьшением магнитной индукции вблизи

торцов соленоида (для длинного соленоида число витков, находящихся вблизи торцов в области, где магнитная индукция по модулю уменьшается, много меньше числа витков, находящихся в области с постоянной магнитной индукцией). Тогда потокосцепление равно произведению магнитной индукции в среднем сечении на площадь поперечного сечения и число витков соленоида:

$$\Psi = \mu_0 I \frac{N}{l} NS.$$

Для определения индуктивности разделим потокосцепление Ψ на силу тока в соленоиде I

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (26.3)$$

Анализ формулы (26.3) показывает, что индуктивность элемента электрической цепи не зависит от силы тока в нем.

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках, обладающих индуктивностью, вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям силы тока, текущего в проводниках. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании и размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

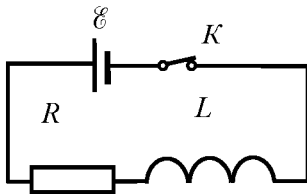


Рис. 26.2

Найдем законы изменения силы тока при замыкании или размыкании электрической цепи.

Допустим, что источник с ЭДС \mathcal{E} замыкается ключом K на цепь, содержащую резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 26.2).

Поскольку сила тока в цепи будет возрастать, в катушке возникнет явление самоиндукции, и в процессе изменения тока в цепи будут существовать две ЭДС – источника \mathcal{E} и самоиндукции \mathcal{E}_s .

Запишем закон Ома для замкнутой цепи: $i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}$, здесь i –

мгновенное значение силы тока. Поскольку $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$, то

$L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} - iR$. Решим полученное дифференциальное уравнение, раз-

делив переменные: $\frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \frac{1}{L} dt$. Умножим левую и правую часть

последнего уравнения на сопротивление цепи R и преобразуем к виду

$$\frac{d(\mathcal{E} - iR)}{\mathcal{E} - iR} = -\frac{R}{L} dt.$$

Проинтегрировав полученное выражение, получим:

$$\ln(\mathcal{E} - iR) = -\frac{R}{L}t + \ln C,$$

где C – постоянная интегрирования, которая может быть найдена из начальных условий. Потенцирование и преобразование этого выражения дает

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (26.4)$$

При замыкании цепи в начальный момент времени при $t = 0$ сила тока равна нулю $i(0) = 0$ и формула (26.4) преобразуется к виду

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R}.$$

Отсюда $C = \mathcal{E}$. Тогда уравнение (26.4) принимает вид

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

При $t \rightarrow \infty$ сила тока в цепи $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, и в результате

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (26.5)$$

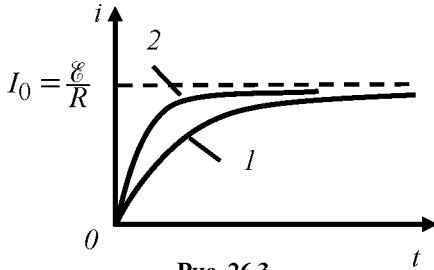


Рис. 26.3

Функция (26.5) описывает нарастание силы тока в цепи после подключения к ней источника ЭДС. График зависимости силы тока от времени для двух электрических цепей, содержащих катушки с различными значениями индуктивности ($L_1 > L_2$), приведен на рис. 26.3. Сила тока в цепи нарастает по экспоненциальному закону. Скорость нарастания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (26.6)$$

которую называют постоянной времени цепи.

С учетом формулы (26.6) формуле (26.5) можно придать вид

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (26.7)$$

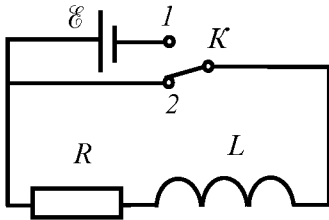


Рис. 26.4

Теперь рассмотрим случай размыкания цепи (рис. 26.4). перебросим ключ K из положения 1 в положение 2, тем самым отключим источник и замкнем цепь, включающую резистор R и катушку индуктивности L . В момент замыкания цепи в катушке индуктивности существовал ток силой I_0 .

Начальные условия для решения уравнения в этом случае будут выглядеть следующим образом: $t = 0$; $i(0) = I_0$; $\mathcal{E}(0) = 0$. Под-

ставим эти значения в (26.4): $I_0 = -\frac{C}{R}e^0 = -\frac{C}{R}$. Отсюда получим,

что $C = -I_0 R$ и соотношение (26.4) преобразуем к виду

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (26.8)$$

Сила тока в цепи при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю по экспоненциальному закону. На рисунке 26.5 приведены графики зависимости силы тока от времени при двух различных значениях индуктивности. Из уравнения (26.8) следует, что за время

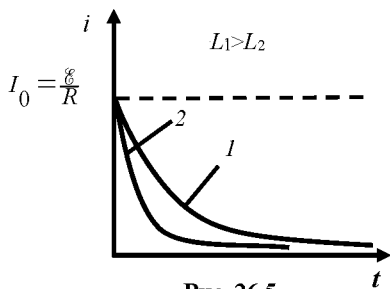


Рис. 26.5

$\tau = L/R$ сила тока убывает в e раз. С использованием постоянной времени τ закон изменения силы тока можно записать следующим образом:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Анализ приведенной формулы и хода кривых 1 и 2, приведенных на рис. 26.3 и 26.5, показывает, что чем больше значение постоянной времени τ (т.е. чем больше значение индуктивности при неизменном значении сопротивления R), тем медленнее происходит процесс установления силы тока при коммутации цепей, содержащих катушки индуктивности.

Рассмотрим явления, возникающие при размыкании цепи, с точки зрения закона сохранения энергии. Поскольку после отключения источника (рис. 26.4) ток в цепи не прекращается, то это означает, что работа по переносу зарядов в цепи совершается за счет ЭДС самоиндукции. При переносе по цепи заряда dq эта работа находится следующим образом:

$$\delta A = \mathcal{E}_s dq = -L \frac{di}{dt} i dt = -Li di. \quad (26.19)$$

Так как сила тока в цепи уменьшается, то ослабевает создаваемое током магнитное поле. С точки зрения закона сохранения энергии это означает, что работа по переносу зарядов осуществляется за счет уменьшения энергии магнитного поля: $\delta A = -dW$. Последнее уравнение после интегрирования принимает вид

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1).$$

Эта работа идет на приращение внутренней энергии проводников, т.е. на их нагревание. По окончании процесса сила тока в цепи и, следовательно, энергия магнитного поля становятся равными нулю ($W_2 = 0$).

Так как работа ЭДС самоиндукции, с одной стороны,

$$A = -\int_I^0 Li \, di = \frac{LI^2}{2}, \quad (26.10)$$

а с другой –

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

то энергия магнитного поля W , запасенная в катушке индуктивностью L с током I

$$W = W_1 = \int_I^0 -Li \, di = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.11)$$

Заметим, что выражение (26.10) можно трактовать как работу, которую нужно совершить против ЭДС самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до I , и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (26.11). Работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции, определяется по формуле

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) i \, dt.$$

Произведя преобразования, аналогичные тем, которые приведены в (26.9), получаем: $\delta A' = Li \, di$,

$$A' = \int_0^I Li \, di = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.12)$$

Последнее выражение совпадает с (26.10). Работа (26.12) совершается при установлении тока за счет источника ЭДС и целиком идет на создание сцепленного с контуром магнитного поля.

Таким образом, как бы мы ни анализировали процесс, результат его рассмотрения один и тот же: если в системе, обладающей индуктивностью L , существует ток I , то в системе существует магнитное поле с энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.13)$$

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. Рассмотрим длинный соленоид, индуктивность которого выражается формулой

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Если в соленоиде течет постоянный ток I , то внутри соленоида возникнет магнитное поле, энергию которого можно определить по формуле (26.26):

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2.$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на $\mu_0 l$ и учтем, что $V = Sl$ – объем соленоида:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2 \frac{\mu_0 l}{\mu_0 l} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{l^2} \frac{Sl}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} V,$$

где B – магнитная индукция внутри соленоида. Введем понятие объемной плотности энергии магнитного поля так же, как это понятие вводили для электрического поля. **Объемной плотностью энергии магнитного поля** называется отношение энергии поля, заключенного в малом объеме пространства к этому объему. В вакууме объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (26.14)$$

Энергию однородного магнитного поля можно рассчитать так: $W = wV$.

В случае неоднородного магнитного поля его энергия в некотором объеме V вычисляется интегрированием объемной плотности энергии по этому объему:

$$W = \oint_V w dV, \quad (26.15)$$

где dV – элементарный объем части пространства, настолько малый, что в его пределах магнитную индукцию можно считать постоянной.

Рассмотрим два контура 1 и 2 , расположенные относительно друг друга не очень далеко (рис. 26.6). Если в контуре 1 течет ток силы i_1 , он создает через контур 2 полный маг-

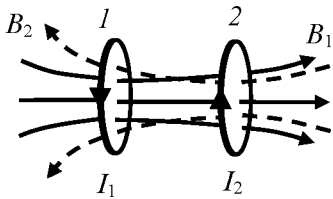


Рис. 26.6

нитный поток $\Psi_{21} \sim i_1$. Коэффициент пропорциональности между Ψ_{21} и i_1 зависит от взаимного расположения контуров, расстояния между ними и их геометрии. Можно записать:

$$\Psi_{21} = L_{21}i_1, \quad (26.16)$$

где L_{21} – взаимная индуктивность второго и первого контура. Так же как и индуктивность, взаимная индуктивность в СИ измеряется в генри.

При изменении в первом контуре силы тока i_1 во втором контуре будет возникать электромагнитная индукция, ЭДС которой определяется следующим образом:

$$E_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (26.17)$$

Аналогично при изменении силы тока во втором контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции в первом контуре:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Взаимные индуктивности контуров в отсутствии ферромагнетиков всегда равны друг другу: $L_{12} = L_{26}$.

Явление взаимной индукции лежит в основе работы трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается явление самоиндукции?
2. Что называется индуктивностью цепи, каков ее физический смысл?
3. Как определить энергию магнитного поля, создаваемого проводником с током?
4. Напишите формулу для определения объемной плотности энергии магнитного поля в вакууме.
5. В чем заключается явление магнитной индукции?
6. Сформулируйте определение взаимной индуктивности двух проводников.

27. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из сопоставления картин линий магнитной индукции соленоида и полосового магнита видно, что эти картины очень похожи друг на друга. Полная аналогия между магнитными полями полосовых магнитов и длинных соленоидов позволила французскому физики А. Амперу в 1822 г. высказать гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. О природе и характере этих микротоков Ампер ничего не мог сказать, так как в то время учение о строении вещества только зарождалось. Лишь после открытия электрона и выяснения строения атомов и молекул, т.е. спустя почти 100 лет гипотеза Ампера была блестяще подтверждена и легла в основу современных представлений о магнитных свойствах вещества. Гипотетические микротоки Ампера получили простое и наглядное объяснение: они связаны с движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

При помещении любого вещества в магнитное поле оно создает собственное магнитное поле, т.е. вещество намагничивается. Существуют различные виды намагниченности, но везде и всегда она создается магнитными моментами микрочастиц вещества, в частности, электронным орбитальным магнитным моментом и электронным спиновым магнитным моментом.

Ранее рассматривалось магнитное поле, создаваемое проводниками с током, находящимися в вакууме. Если же проводники с током находятся в какой-либо среде, магнитное поле существенным образом меняется. Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться (приобретать магнитный момент). Внешнее магнитное поле (поле проводников с токами) намагничивает вещество. В результате намагниченное вещество создает собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее. Индукция результирующего магнитного поля равна сумме индукций \vec{B}_0 и \vec{B}' собственного и внешнего магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. Ампер назвал такие токи **микротоками**, так как эти токи принимают участие в создании магнитного момента вещества, но не дают вклад в **макротоки** – токи проводимости.

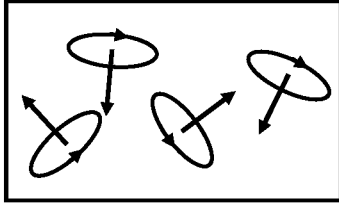


Рис. 27.1

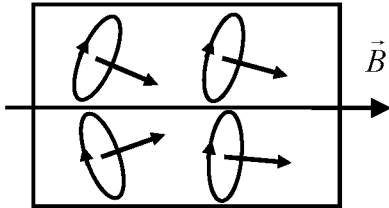


Рис. 27.2

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты микротоков ориентированы беспорядочно (рис. 27.1), поэтому суммарный магнитный момент микротоков $\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} = 0$. При нали-

чии внешнего поля магнитные моменты микротоков ориентируются вдоль линий индукции внешнего поля, и суммарный магнитный момент становится отличным от нуля (рис. 27.2): $\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} \neq 0$. Магнитные поля

отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает поле с индукцией \vec{B}' , вещество намагничивается.

Намагничивание магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **намагниченностью** и обозначают \vec{J} . Если магнетик намагничен неоднородно, то намагниченность магнетика в данной точке определяется следующим выражением

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V}, \quad (27.1)$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки; \vec{p}_m – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме ΔV . **Намагниченность численно равна магнитному моменту единицы объема вещества.**

Ранее была выведена связь циркуляции магнитной индукции с токами, сцепленными с контуром интегрирования. Следует

учитывать, что в правую часть соотношения $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i\text{сц}}$

входят токи любой природы, сцепленные с контуром, т. е. как макроток, так и микроток. В соответствии с гипотезой Ампера кроме макротоков (токов проводимости) необходимо учесть и наличие в веществе микротоков, величина которых не известна:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n (I_{i\text{макро}} + I_{i\text{микро}}). \quad (27.2)$$

Попытаемся ввести такую вспомогательную величину, циркуляция которой определялась бы только макроскопическими токами – токами проводимости. Рассмотрим возможное расположение микротоков молекул вещества

относительно некоторого контура L (рис. 27.3). Все микроток можно разделить на три группы: токи I как бы «нанизаны» на контур L (как баранки на веревку); токи I' дважды пересекают поверхность, натянутую на контур;

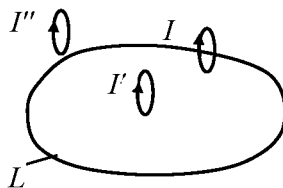


Рис. 27.3

токи I'' вообще не пересекают эту поверхность. Очевидно, что сцепленными с контуром являются только токи I и I' . Однако, сколько бы ни нашлось токов I' их алгебраическая сумма (входящая в правую часть закона полного тока) всегда будет равна нулю. Это объясняется тем, что каждый из этих микротоков пересекает поверхность, ограниченную контуром, дважды, причем в противоположных направлениях.

Для строгого применения закона полного тока необходимо знать число микротоков, сцепленных с контуром интегрирования L . Для их подсчета вырежем вокруг контура L косою цилиндр длиной dl с основаниями, параллельными плоскостям микротоков, и площадями, равными площади контуров микротоков (рис. 27.4).

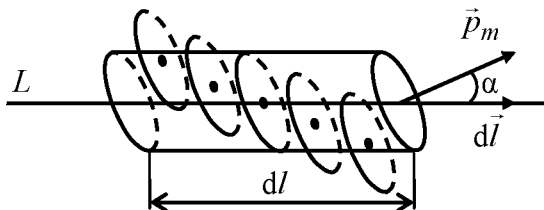


Рис. 27.4

Сцепленными с контуром окажутся микротоки, центры которых попадут в этот цилиндр. Пусть n – концентрация молекул, тогда сумма всех микротоков, попавших в цилиндр, определяется по формуле:

$$dI_{\text{микро}} = In dV = InS dl \cos\alpha = p_m n dl \cos\alpha. \quad (27.3)$$

Очевидно, что произведение $p_m n$ представляет собой модуль вектора намагниченности вещества. Преобразуем выражение (27.3):

$$dI_{\text{микро}} = p_m n dl \cos\alpha = \vec{J} d\vec{l}.$$

Полная сумма микротоков, сцепленных с контуром на всей его длине,

$$I_{\text{микро}} = \oint dI_{\text{микро}} = \oint \vec{J} d\vec{l}.$$

Подставим последнее соотношение в формулу (27.2):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_i I_{i \text{ макро}} + \oint \vec{J} d\vec{l} \right).$$

Отсюда

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_i I_{i \text{ макро}}. \quad (27.4)$$

В скобках под интегралом стоит векторная величина, циркуляция которой определяется только макроточками. Назовем ее напряженностью магнитного поля \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (27.5)$$

В СИ размерности намагниченности и напряженности магнитного поля одинаковы: $[H] = [J] = \text{А м}^{-1}$. Тогда формулу (27.4) перепишем в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_{i\text{макро}}. \quad (27.6)$$

Полученное соотношение выражает теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (закон полного тока для магнитного поля в веществе): **циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротокков (токов проводимости), сцепленных с этим контуром.**

В однородном изотропном магнетике имеет место линейная связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H},$$

где χ_m – магнитная восприимчивость. **Магнитная восприимчивость – величина, характеризующая свойство вещества намагничиваться в магнитном поле, равная отношению модуля намагниченности к модулю напряженности магнитного**

поля: $\chi = \frac{J}{H}$.

Используя понятие магнитной восприимчивости выражение (27.5), можно записать следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m).$$

Если обозначить $\mu = 1 + \chi_m$, то можно записать

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (27.7)$$

Величина μ называется **относительной магнитной проницаемостью** вещества. Выясним ее физический смысл. Пусть в вакууме (при отсутствии магнетика) токи проводимости создают магнитное поле, характеризующееся индукцией $\vec{B}_{\text{вак}} = \mu_0 \vec{H}_{\text{вак}}$. В однородном изотропном магнетике те же токи проводимости создадут магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{\text{магн}} = \mu \mu_0 \vec{H}_{\text{магн}}$.

В соответствии с теоремой (27.6),

$$\vec{H}_{\text{вак}} = \vec{H}_{\text{магн}},$$

поэтому

$$\mu = \frac{B_{\text{магн}}}{B_{\text{вак}}}. \quad (27.8)$$

Относительная магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция магнитного поля системы токов в магнетике отличается от индукции магнитного поля той же системы токов в вакууме. Магнитная восприимчивость может быть и положительной, и отрицательной. Следовательно, относительная магнитная проницаемость вещества может быть как больше, так и меньше единицы. По величине относительной магнитной проницаемости все магнетики делятся на три основные группы.

К **диамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, поэтому $\mu_{\text{д}} < 1$. Из опытных данных известно, что $|\chi_{\text{мд}}| \approx 10^{-8} \dots 10^{-5}$, поэтому $\mu_{\text{д}}$ для практических расчетов можно принять равной единице.

К **парамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых незначительно больше нуля, поэтому $\mu_{\text{п}} > 1$. Из опытных данных известно, что $\chi_{\text{мп}} \approx 10^{-8} \dots 10^{-4}$, поэтому для практических расчетов можно принять $\mu_{\text{пара}}$ равной единице.

К **ферромагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых значительно больше нуля, поэтому $\mu_{\text{ф}} \gg 1$. Из опытных данных известно, что $\chi_{\text{мф}} \approx 10^2 \dots 10^6$. Ферромагнетики используются для создания сильных магнитных полей.

Выясним, что происходит с магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля на границе двух однородных изотропных магнетиков с разными значениями магнитной проницаемости μ . Воспользуемся тем обстоятельством, что поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, т.е.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Рассмотрим воображаемый цилиндр высотой Δh , основания которого площадью S_1 и S_2 ($S_1 = S_2 = S$) расположены по разные стороны границы раздела (рис. 27.5). Магнитным потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как Δh будет стремиться к нулю. Магнитный поток через верхнее основание $\Phi_{\text{в}} = -B_{1n}S_1$, где B_{1n} – нормальная составляющая вектора магнитной индукции в первом магнетике в непосредственной близости к поверхности раздела магнетиков. Аналогично поток через нижнее основание есть $\Phi_{\text{н}} = B_{2n}S_2$, где B_{2n} – нормальная составляющая вектора магнитной индукции во втором магнетике, тоже в непосредственной близости к поверхности раздела. Сложив эти два потока, получим полный поток магнитной индукции через замкнутую поверхность, который равен нулю: $\Phi = -B_{1n}S_1 + B_{2n}S_2 = 0$.

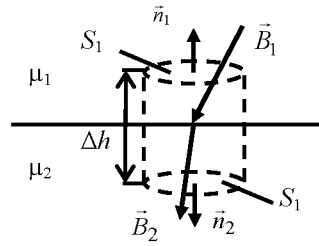


Рис. 27.5

Отсюда следует

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (27.9)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнитных сред нормальная к границе раздела составляющая магнитной индукции не изменяется.

Выражение (27.9) можно переписать в виде $\mu_1 \mu_0 H_{1n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n}$, тогда для нормальных составляющих напряженности магнитного поля получим:

$$H_{2n} = H_{1n} \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (27.10)$$

Для нахождения условия связи тангенциальных проекций напряженности и индукции поля в двух средах выберем прямоугольный контур (рис. 27.6) и вычислим для него циркуляцию вектора напряженности магнитного поля. Если на поверхности

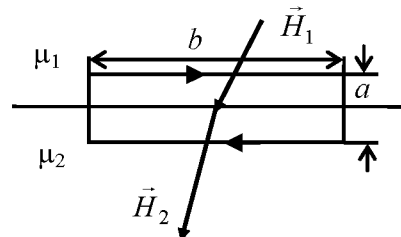


Рис. 27.6

раздела двух сред отсутствуют токи проводимости, то из закона полного тока следует, что циркуляция напряженности магнитного поля по выбранному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Отрезок контура a возьмем столь малым, что вкладом, вносимым в циркуляцию вдоль сторон, перпендикулярных к поверхности раздела, можно пренебречь. Тогда, с одной стороны, циркуляция вектора \vec{H} вдоль этого контура равна $b(H_{1\tau} - H_{2\tau})$. С другой стороны, поскольку с контуром не сцеплены макроскопические токи, циркуляция вектора \vec{H} равна нулю, откуда вытекает, что

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (27.11)$$

т.е. составляющая напряженности магнитного поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность.

Выражение (27.11) можно переписать в виде

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0}, \quad B_{2\tau} = B_{1\tau} \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (27.12)$$

Объединяя условия (27.19) — (27.12), можно показать каким образом преломляются линии индукции магнитного поля при переходе из одной среды в другую. Для случая $\mu_2 > \mu_1$ это изображено на рис. 27.7 и 27.8. Видно, что при увеличении относительной магнитной проницаемости среды линии магнитной индукции отклоняются в сторону поверхности раздела сред.

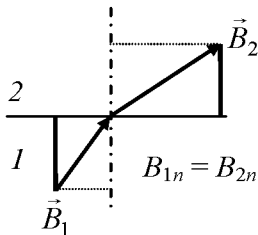


Рис. 27.7

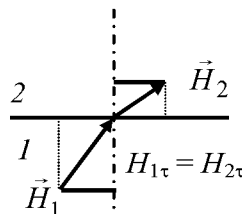


Рис. 27.8

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение намагниченности.
2. Что называется напряженностью магнитного поля?
3. Что характеризует магнитная восприимчивость вещества?
4. Сформулируйте закон полного тока для напряженности магнитного поля в веществе.

5. Сформулируйте определение изменение нормальных составляющих векторов \vec{B} и \vec{H} при переходе линий магнитной индукции через торцевую поверхность северного полюса магнита (из магнита в вакуум), модуль намагниченности которого равен j .

28. ДИА-, ПАРА- И ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Гипотеза Ампера о молекулярных токах позволяет объяснить многие явления в магнетиках. Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Согласно теории, развитой в 1913 г. Нильсом Бором, электроны в атомах движутся по круговым орбитам.

Рассмотрим модель одноэлектронного атома (рис. 28.1). Такой атом может быть представлен в виде массивной положительно заряженной частицы (ядра), находящейся в центре круговой орбиты электрона, вращающегося вокруг него.

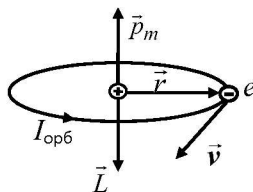


Рис. 28.1

Отрицательно заряженный электрон, вращающийся по орбите, создает **орбитальный ток**. Направление орбитального тока противоположно направлению вращения электрона. Если v – скорость вращения электрона по орбите, то силу орбитального тока $I_{\text{орб}}$ можно найти, разделив величину заряда на период вращения:

$$I_{\text{орб}} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (28.1)$$

Орбитальный ток электрона подобен току, существующему в проводящем витке, а поэтому движение электрона по орбите создает магнитный момент:

$$p_m = I_{\text{орб}} S = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (28.2)$$

Момент (28.2) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называется **орбитальным магнитным моментом** электрона. Направление вектора магнитного момента образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 28.1). Движущийся по орбите электрон массой m обладает моментом импульса

$$L = mvr. \quad (28.3)$$

Вектор \vec{L} называют **орбитальным механическим моментом** электрона. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов \vec{p}_m и \vec{L} противоположны. Отношение магнитного момента p_m элементарной частицы к ее механическому моменту L называется **гиромагнитным отношением**. Для электрона

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}, \quad (28.4)$$

знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны.

Кроме орбитальных моментов (28.2) и (28.3) электрон обладает собственным механическим L_s и магнитным p_{ms} моментами, для которых значение гиромагнитного отношения в два раза больше

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}. \quad (28.5)$$

Собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Магнитный момент атомов складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в него электронов, а также из магнитного момента ядра. Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов, поэтому при рассмотрении многих явлений им можно пренебречь и считать, что магнитный момент

атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Следует ожидать, что вещества, атомы которых имеют магнитный момент равный нулю и магнитный момент отличный от нуля, будут вести себя во внешнем магнитном поле различным образом.

Как уже отмечалось, к **диамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, а относительная магнитная проницаемость меньше единицы. К диамагнетикам относятся вещества, у которых атомы

не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов равна нулю).

Выясним, по какой причине диамагнетики намагничиваются «противоположно» внешнему магнитному полю, т.е. так, что их индуцированные магнитные моменты атомов \vec{p}'_m направлены противоположно вектору магнитной индукции внешнего поля. Рассмотрим орбитальное движение электронов таких атомов во внешнем поле (рис. 28.2).

Если линии магнитной индукции не перпендикулярны плоскости орбиты электрона, то на орбитальный ток $I_{орб}$, обусловленный движением электрона, (по аналогии с витком с током) действует вращающий момент $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$.

Под действием магнитного поля ось орбиты и совпадающий с ней по направлению вектор магнитного момента \vec{p}_m прочерчивают при вращении вокруг вектора магнитной индукции боковую поверхность конуса с вершиной в центре орбиты. Возникает так называемая **прецессия** орбиты электрона. Причем согласно основному уравнению динамики вращательного движения за время dt вектор механического момента электрона \vec{L} получает приращение $d\vec{L}$:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt.$$

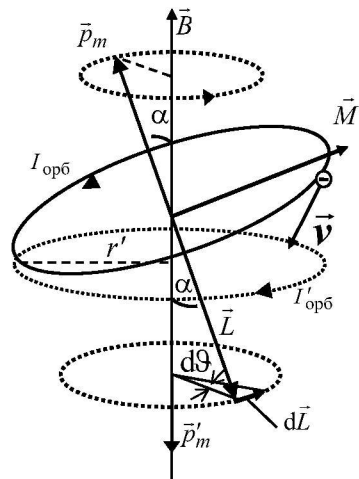


Рис. 28.2

Вектор $d\vec{L}$, как и вектор \vec{M} , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы \vec{B} и \vec{L} . Модуль вектора $d\vec{L}$

$$dL = p_m B \sin \alpha dt,$$

где α – угол между вектором магнитного момента и вектором магнитной индукции.

За время dt плоскость, в которой лежит вектор \vec{L} , повернется вокруг направления \vec{B} на угол

$$d\vartheta = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m}{L} B dt.$$

Разделив угол $d\vartheta$ на время dt , найдем угловую скорость прецессии

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Подставив в это выражение значение отношения магнитного и механического моментов электрона (гиромагнитное отношение), получим:

$$\omega_L = \frac{e}{2m} B. \quad (28.6)$$

Частоту (22.6) называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой.

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона вокруг направления магнитной индукции внешнего поля. Это, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительного орбитального тока $I'_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}$ и соответственно дополнительного магнитного момента

$$p'_m = I'_{\text{орб}} S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e \omega_L}{2} r'^2.$$

Вектор \vec{p}'_m , как видно на рис. 28.2, направлен в сторону, противоположную направлению магнитной индукции внешнего поля. Этот момент называют индуцированным (наведенным) магнитным моментом. С учетом формулы для ларморовой частоты индуцированный магнитный момент

$$\vec{p}'_m = -\frac{e^2 \vec{B}}{4m} r'^2. \quad (28.7)$$

Знак « \leftarrow » означает, что векторы \vec{p}'_m и \vec{B} направлены в противоположные стороны.

Обобщим полученные результаты. При внесении любого вещества в магнитное поле каждый орбитальный ток, независимо от направления движения электрона по орбите, приобретает индуцированный магнитный момент \vec{p}'_m , направленный против вектора магнитной индукции внешнего поля. Этот процесс в физике магнитных явлений называется **диамагнитным эффектом**.

Магнитные свойства диамагнетиков обусловлены только диамагнитным эффектом, поэтому их намагничённость определяется индуцированным магнитным моментом

$$\vec{J} = n\vec{p}'_m = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \vec{B} = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \mu_0 \vec{H},$$

где n – концентрация атомов; Z – зарядовое число атома. Тогда магнитная восприимчивость единицы объема

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{4m} r'^2. \quad (28.8)$$

Формула (28.8) не совсем точна. Вместо расстояния r'^2 в ней нужно взять среднее значение квадрата $\langle r'^2 \rangle$ расстояния электрона от ядра и просуммировать по всем электронам. Это уточнение приводит к выражению

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{6m} \sum_{k=1}^Z \langle r_k'^2 \rangle.$$

Зависимость намагничённости диамагнетика от напряжённости магнитного поля $J = f(H)$ приведена на рис. 28.3.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от напряжённости внешнего магнитного поля,

поэтому для них характерно линейное намагничивание. Относительная магнитная проницаемость диамагнетиков μ постоянна и не

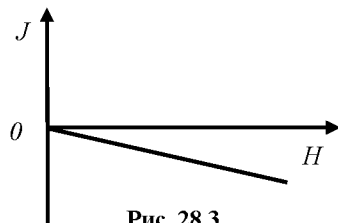


Рис. 28.3

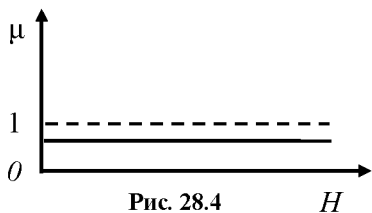


Рис. 28.4

зависит от напряженности H внешнего магнитного поля (рис. 28.4). Поскольку магнитная восприимчивость таких материалов отрицательна, то $\mu < 1$.

Диамагнетиками являются инертные газы, молекулярные водород и азот, висмут, медь, цинк, золото, серебро, кремний, вода и ряд других неорганических и органических соединений. В неоднородном магнитном поле поведение диамагнетиков таково, что, например, стержень из висмута выталкивается в область более «слабого» поля и устанавливается так, чтобы ось стержня была перпендикулярна \vec{B} . Газы, входящие в состав продуктов сгорания, обладают диамагнитными свойствами, поэтому пламя свечи выталкивается из области более «сильного» поля.

Парамагнетиками называются вещества, магнитная восприимчивость которых положительна, а относительная магнитная проницаемость составляет величину, незначительно большую единицы. К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю). В отсутствие внешнего магнитного поля парамагнетик не намагничен, так как из-за теплового движения собственные магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно, поэтому $\vec{J} = 0$.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходят два процесса: с одной стороны, за счет диамагнитного эффекта возникает намагниченность с направленностью, противоположной магнитной индукции внешнего поля, а с другой – собственные магнитные моменты атомов (молекул) ориентируются вдоль вектора магнитной индукции внешнего поля. Вклад собственных магнитных моментов преобладает, поэтому парамагнетики намагничиваются по направлению индукции внешнего магнитного поля.

Классическая теория парамагнетизма была разработана в 1905 г. французским физиком П. Ланжевенем. Он рассмотрел статистическую задачу о поведении молекулярных токов и их магнитных моментов в однородном магнитном поле. Оказалось, что намагниченность \vec{J} парамагнетика в поле зависит от параметра

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (28.9)$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура. Данный параметр является отношением потенциальной энергии молекулярного тока в магнитном поле к средней энергии теплового движения атомов.

Если учесть, что $J_{\max} = np_m$, т.е. максимальная намагниченность материала возникает, когда все магнитные моменты атомов «выстраиваются» в одну сторону, то результаты расчетов Ланжевена можно записать в виде

$$J = J_{\max} \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a + e^{-a}} - \frac{1}{a} \right). \quad (28.10)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи соотношения (28.10). Если $a \gg 1$, то все выражение в скобках в пределе равно единице. Поэтому в области низких температур (или достаточно сильных магнитных полей) намагниченность парамагнетика практически постоянна и равна максимальному значению. Это состояние называется состоянием магнитного насыщения парамагнетика. При комнатной температуре оно может быть достигнуто только в очень сильных ($B \sim 100$ Тл) магнитных полях.

В случае, если $a \ll 1$, выражение в скобках в формуле (28.10) имеет предельное значение $a/3$. С учетом (28.9) намагниченность парамагнетика определяется следующим образом:

$$J = J_{\max} \frac{p_m B}{3kT} = \frac{np_m^2 B}{3kT}. \quad (28.11)$$

Отсюда, поскольку $\vec{J} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, получим выражение

для магнитной восприимчивости

$$\chi_{m \text{ пара}} = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (28.12)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна его термодинамической температуре.

Относительная магнитная проницаемость парамагнетиков постоянна и не зависит от напряженности внешнего магнитного поля (рис. 28.5).

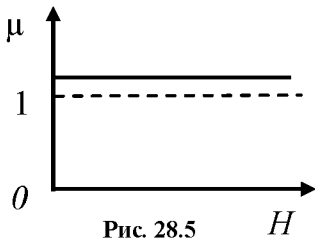


Рис. 28.5

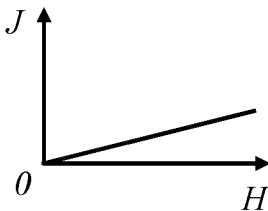


Рис. 28.6

Так как магнитная восприимчивость парамагнетиков положительна, то магнитная проницаемость больше единицы $\mu > 1$. На рисунке 28.6 показана кривая намагничивания для парамагнетика. Поскольку магнитная восприимчивость такого материала не зависит от величины напряженности внешнего поля, то для парамагнетиков так же, как и для диамагнетиков, характерно линейное намагничивание.

Экспериментально установлено, что намагничивание парамагнетика действительно происходит в

направлении, совпадающем с вектором \vec{B} . При внесении парамагнитного стержня в неоднородное магнитное поле он сначала поворачивается и устанавливается вдоль линий магнитной индукции этого поля, а затем втягивается в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся многие металлы (щелочные и щелочно-земельные), кислород, окись азота и др.

Ферромагнетиками называются вещества, обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – магнитного поля, деформации, температуры. Ферромагнетики в отличие от слабомагнитных диа- и парамагнетиков являются сильномагнитными средами: магнитная индукция поля внутри них может в сотни и тысячи раз превосходить магнитную индукцию внешнего поля в вакууме. Такими свойствами обладают, например, железо, кобальт, никель и материалы, содержащие атомы этих элементов. Исключением является нержавеющая сталь, которая является парамагнитной.

Большой вклад в экспериментальное изучение свойств ферромагнетиков внес русский физик А.Г. Столетов. В 1872 г. он исследовал зависимость намагниченности железа от напряженности магнитного поля. Предложенный им метод заключался в определении магнитного потока в ферромагнитных кольцах при помощи

баллистического гальванометра. На рисунке 28.7 показана схема установки Столетова.

На тороидальный сердечник из исследуемого материала намотаны две обмотки. Первичная обмотка 1

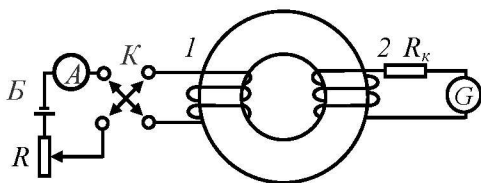


Рис. 28.7

подключается в цепь батареи B через реостат R и амперметр A . Ключ K в этой цепи позволяет изменять направление тока в цепи (полярность подключения батареи). Зная число витков обмотки и силу тока в ней, можно, используя закон полного тока, определить напряженность магнитного поля в сердечнике $H = In$, где I – сила тока в первичной обмотке; n – число витков на единицу длины обмотки.

Вторичная обмотка 2 подключена к баллистическому гальванометру G , измеряющему заряд, протекающий по виткам вторичной обмотки. При изменении направления тока в первичной обмотке на противоположный магнитный поток, сцепленный как с витками первичной, так и с витками вторичной обмоток, меняет свое значение. Во вторичной обмотке благодаря явлению электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции и протекает заряд, который, с одной стороны, измеряется гальванометром, а с другой – может быть рассчитан по формуле

$$|Q| = \frac{|\Psi_2 - \Psi_1|}{R_k} = \frac{2BSN}{R_k},$$

где Ψ_2 и Ψ_1 – соответственно конечное и начальное значения полного магнитного потока через вторичную катушку; R_k – электрическое сопротивление катушки; S – площадь поперечного сечения катушки; N – число витков катушки; B – магнитная индукция в тороидальном сердечнике. Отсюда определяется значение магнитной индукции в ферромагнетике

$$B = \frac{|Q|R_k}{SN}.$$

Проведя измерения для различных значений силы тока в первичной обмотке, можно экспериментально получить зависимость $B = f(H)$ (рис. 28.8), которая называется основной кривой

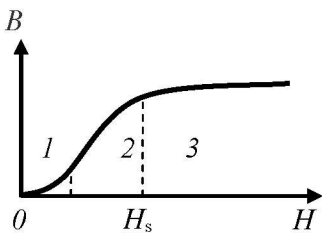


Рис. 28.8

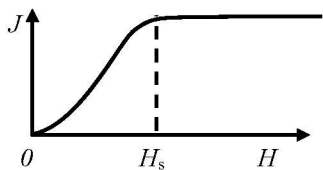


Рис. 28.9

намагничивания ферромагнетика.

Используя соотношение $J = \frac{B}{\mu_0} - H$,

можно рассчитать намагниченность ферромагнетика и построить график зависимости намагниченности от напряженности поля $J = f(H)$ (рис. 28.9).

Анализ графиков показывает, что вид кривой намагничивания ферромагнетика существенно отличается от подобных зависимостей для диа- и парамагнетиков. Кроме того, начиная с некоторого значения напряженности магнитного поля H_s , ферромагнетик

входит в состояние **магнитного насыщения**, когда дальнейший рост напряженности поля не приводит к росту намагниченности вещества.

Отличительной особенностью ферромагнетиков является то, что их относительная магнитная проницаемость быстро растет с возрастанием H , достигает максимума, а затем убывает, стремясь к единице в сильных магнитных полях (рис. 28.10). Отметим, что максимальное значение относительной магнитной проницаемости наступает раньше, чем ферромагнетик достигнет состояния насыщения: согласно выражению (27.7) величина μ определяется тангенсом угла наклона касательной к графику зависимости $B = f(H)$ (рис. 28.8). Дальнейшее уменьшение значения μ при возрастании H можно объяснить тем, что при очень больших значениях H в выражении

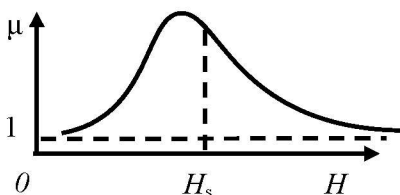


Рис. 28.10

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$ можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым. Тогда

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \approx \mu_0 \vec{H} \quad \text{и} \quad \mu \approx 1.$$

Дальнейшие теоретические и практические исследования показали, что такие необычные свойства ферромагнетиков объясняются их внутренней структурой. Дело в том, что при отсутствии внешнего магнитного поля внутри ферромагнетиков самопроизвольно возникают области намагничивания, в которых магнитные моменты отдельных атомов ориентируются в одном направлении. Объясняется это взаимодействием спиновых магнитных моментов соседних атомов и их взаимным влиянием друг на друга. Квантово-механическое объяснение этого процесса достаточно сложно и не входит в программу нашего курса. Области спонтанного намагничивания внутри ферромагнетика получили название доменов (этот термин ввел П. Вейс в 1907 г.). Их линейный размер может достигать 0,01 мм. На рисунке 28.11 показана различная ориентации магнитных моментов доменов внутри ферромагнетика. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения. Магнитные же моменты различных доменов ориентированы хаотично, поэтому в исходном состоянии ферромагнетик не обладает намагниченностью. Границы доменных зерен можно наблюдать с помощью обычного микроскопа. Для этого отшлифованный срез ферромагнетика достаточно покрыть слоем жидкости с мелкодисперсным ферритовым порошком. Поскольку на границе доменов магнитное поле резко неоднородно, то частицы порошка переместятся в жидкости так, что расположатся вблизи границ доменов.

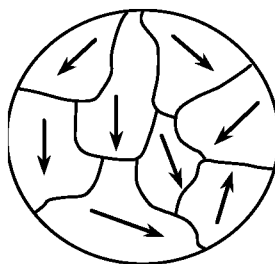


Рис. 28.11

При помещении ферромагнетика в магнитное поле происходит нарушение первичной доменной структуры. Это связано с тем, что различные домены обладают различной энергией в магнитном поле, причем эта энергия зависит от направления магнитного момента. Те домены, магнитные моменты которых образуют острые углы с вектором \vec{H} , имеют меньшую энергию, т.е. находятся в энергетически более выгодных положениях, чем те, у которых эти углы тупые. При увеличении напряженности внешнего поля наблюдается укрупнение энергетически более выгодных доменов за счет соседних. Осуществляется это двумя

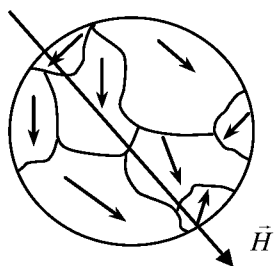


Рис. 28.12

способами. При малых значениях H наблюдается укрупнение доменов, имеющих меньшие значения энергии в поле. «Территории» соседних с ними доменов уменьшаются, так как атомы в прилегающих тонких слоях разворачивают свои магнитные моменты. Промежуточный результат этого процесса показан на рис. 28.12.

В итоге сумма магнитных моментов единицы объема вещества становится отличной от нуля, и намагниченность материала растет. Следует учесть, что рост магнитной индукции поля в веществе на данном этапе процесса намагничивания происходит не слишком сильно, так как в процессе участвуют не все атомы вещества (см. рис. 28.8, этап 1).

При больших значениях H , наряду с описанным процессом происходит другой: отдельные домены начинают целиком поворачиваться, ориентируясь своими магнитными моментами по направлению вектора напряженности магнитного поля. Магнитные моменты доменов как бы «выстраиваются» вдоль линий магнитной индукции внешнего поля (см. рис. 28.8, этап 2). Поскольку намагниченность материала увеличивается при этом весьма существенно, то рост магнитной индукции и относительной магнитной проницаемости (рис. 28.10) оказывается очень сильным. Когда все домены ферромагнетика «выстроят» свои магнитные моменты в одном направлении, дальнейшее намагничивание материала оказывается невозможным, и он достигает состояния магнитного насыщения; при этом границы между отдельными доменами исчезают. Увеличение магнитной индукции в веществе (см. рис. 28.8, этап 3) происходит лишь за счет увеличения напряженности внешнего поля.

Возникающая на определенном этапе необратимость намагничивания материала позволяет ферромагнетикам частично сохранять намагниченность после удаления их из поля. При уменьшении напряженности внешнего поля можно наблюдать процесс запаздывания уменьшения магнитной индукции \vec{B} . Этот про-

цесс в ферромагнетиках получил название **магнитного гистерезиса** (от греческого *hystérēsis* – отставание, запаздывание). На рисунке 28.13 показано, что при уменьшении напряженности внешнего поля до нуля магнитная индукция в предварительно намагниченном ферромагнетике

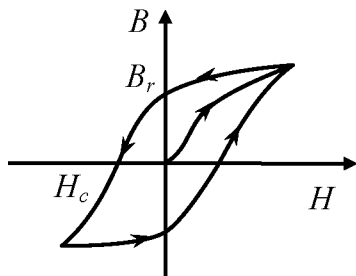


Рис. 28.13

не принимает нулевого значения. Сохраняющееся при этом в веществе магнитное поле характеризуется **остаточной магнитной индукцией** B_r . Чтобы полностью размагнитить образец, необходимо поместить его в магнитное поле с противоположной ориентацией линий индукции (в «отрицательное поле»). Величина напряженности магнитного поля, необходимая для полного размагничивания ферромагнетика, называется **коэрцитивной силой** H_c (от латинского *coercitio* – удерживать). Цикл перемагничивания ферромагнетика описывается графиком, приведенном на рис. 28.12.

Этот график называется **петлей гистерезиса**. Можно показать, что площадь петли гистерезиса пропорциональна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания.

Согласованное участие магнитных моментов всех атомов в создании доменов и междоменное взаимодействие позволяют ферромагнетикам усиливать внешние поля в сотни, тысячи и миллионы раз.

Необычные свойства ферромагнетиков на этом не заканчиваются. Оказывается, при температуре выше некоторого критического значения ферромагнетик утрачивает ферромагнитные свойства. Впервые это явление обнаружил французский физик П. Кюри. Критическое значение температуры называется **точкой Кюри**.

При более высоких температурах ферромагнетик ведет себя во внешнем поле как обычный парамагнетик. При температуре точки Кюри в результате сильного теплового движения частиц происходит разрушение доменной структуры ферромагнетика. Для железа эта температура составляет 770°C , для никеля 360°C .

Сплав железа с никелем – пермаллой, который используется для изготовления трансформаторных сердечников, имеет точку Кюри всего 70°C.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие типы магнетиков вам известны, чем они отличаются?
2. Чем обусловлены магнитные свойства атомов?
3. В чем заключается диамагнитный эффект?
4. Какие вещества относятся к диамагнетикам?
5. В чем заключаются особенности намагничивания парамагнетиков?
6. Каковы особенности магнитных свойств ферромагнетиков?
7. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?
8. Что происходит с ферромагнетиком при его нагревании до температуры выше точки Кюри?
9. Опишите различия в процессах намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков и объясните причины этих различий.

29. СОБСТВЕННЫЕ СВОБОДНЫЕ И ЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной повторяемостью во времени. Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей конденсатор и катушку индуктивности. Такая цепь называется **колебательным контуром**. В колебательном контуре периодически изменяются заряд и напряжение конденсатора и сила тока в катушке индуктивности, при этом происходит попеременное превращение энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности и наоборот – переход энергии магнитного поля катушки индуктивности в энергию электрического поля конденсатора.

Независимо от природы колебаний и характера колебательной системы все колебательные процессы подчиняются одним и тем же закономерностям. Это касается дифференциальных уравнений колебаний, их решений, характеристик **собственных, затухающих и вынужденных** колебаний. Поэтому при анализе электромагнитных колебаний будем использовать соотношения, аналогичные тем, что были получены при рассмотрении механических колебаний.

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший колебательный контур (рис. 29.1), состоящий из конденсатора электроемкостью C и соединенной с ним последовательно катушки индуктивностью L . При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные незатухающие колебания заряда конденсатора и силы тока в катушке. Рассмотрим процесс возникновения колебаний подробнее.

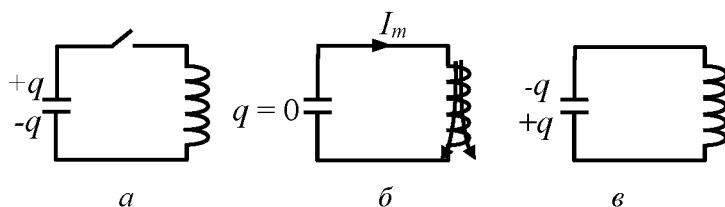


Рис. 29.1

Исходное состояние системы показано на рис. 29.1, *a*. Конденсатор заряжен максимальным зарядом $q_m = CU_m$, где C – емкость конденсатора; U_m – напряжение на конденсаторе. В пространстве между обкладками заряженного конденсатора существует электрическое поле, энергия которого $W_{\text{эм}} = \frac{q_m^2}{2C}$.

Если конденсатор подключить к катушке, он начнет разряжаться, и в контуре возникнет электрический ток. При этом сила тока увеличивается постепенно от нуля до некоторого максимального значения, поскольку в катушке возникает электродвижущая

сила электромагнитной индукции, препятствующая увеличению силы тока в контуре. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но при этом будет возникать все увеличивающаяся энергия магнитного поля, обусловленного током через катушку. Энергия магнитного поля определяется индуктивностью катушки L и силой тока в цепи i : $W_M = \frac{Li^2}{2}$.

В тот момент, когда конденсатор полностью разряжается, его заряд, а значит, и энергия электрического поля обращаются в нуль, в то время как сила тока в цепи, а значит, и энергия магнитного поля достигают максимального значения (рис. 29.1, б):

$$W_{Mm} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Несмотря на то, что конденсатор полностью разряжен, в контуре продолжает существовать ток того же направления, так как возникающая в катушке самоиндукция препятствует теперь уже уменьшению силы тока в цепи. Сила тока уменьшается от максимального значения до нуля, а конденсатор заряжается. Знаки зарядов обкладок при этом противоположны знакам зарядов в исходном состоянии (рис. 29.1, в). Энергия магнитного поля катушки переходит в энергию электрического поля конденсатора. Далее вновь повторяется процесс разрядки конденсатора, но ток в контуре уже имеет противоположное направление. Так возникают электрические колебания в контуре.

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия системы, состоящая из энергий электрического и магнитного полей остается постоянной.

$$W = W_э + W_M = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{Li_m^2}{2}.$$

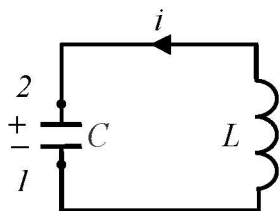


Рис. 29.2

Определим закон изменения заряда конденсатора во времени. Для этого составим дифференциальное уравнение колебаний в колебательном контуре, схема которого приведена на рис. 29.2. Запишем закон Ома для участка цепи 1–2, приняв, что направление тока соответствует зарядке конденсатора:

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (29.1)$$

где R – сопротивление контура; \mathcal{E}_s – электродвижущая сила самоиндукции. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на участке цепи $1-2$ равна напряжению на конденсаторе, взятому со знаком минус:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -U_C = -\frac{q}{C}. \quad \text{ЭДС самоиндукции } \mathcal{E}_s \text{ определяется законом}$$

Фарадея: $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$. Учтем, что сила тока при зарядке конденсатора равна первой производной заряда конденсатора по времени

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad \text{Тогда ЭДС самоиндукции } \mathcal{E}_s = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Подставив разность потенциалов и ЭДС в уравнение (29.1) и учитывая, что $R = 0$, получим:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделим все слагаемые последнего уравнения на индуктивность катушки L :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (29.2)$$

где ω_0 – частота собственных гармонических колебаний, получаем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (29.3)$$

Уравнение (29.3) называется **дифференциальным уравнением собственных незатухающих колебаний** заряда в колебательном контуре. Решением уравнения (29.3) является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (29.4)$$

где q_m – амплитудное значение заряда конденсатора; α – начальная фаза колебаний заряда.

Период собственных колебаний колебательного контура определяется по **формуле Томсона**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (29.5)$$

Пользуясь (29.4), выведем закон изменения силы тока в контуре. Для этого найдем производную заряда по времени:

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (29.6)$$

где $I_m = q_m \omega_0$ – амплитуда силы тока.

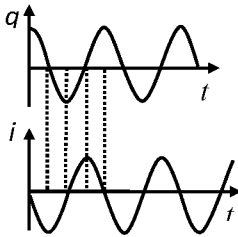


Рис. 29.3

Из сопоставления уравнений (29.4) и (29.6) видно, что колебания силы тока в контуре опережают колебания заряда по фазе на $\pi/2$, а по времени – на четверть периода. Графики изменения заряда конденсатора и силы тока в колебательном контуре при $\alpha = 0$ представлены на рис. 29.3.

Чтобы получить зависимость напряжения на обкладках конденсатора от времени, воспользуемся формулой:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (29.7)$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Напряжение на конденсаторе изменяется со временем в одной фазе с зарядом конденсатора. Отношение амплитудного значения напряжения на конденсаторе к амплитудному значению силы тока в цепи называют **волновым сопротивлением контура** (по аналогии с сопротивлением R в законе Ома для однородного участка цепи):

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{q_m}{C} \frac{1}{q_m \omega_0} = \frac{1}{C \omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.8)$$

Энергия электрического поля в конденсаторе и энергия магнитного поля в соленоиде во времени при нулевой начальной фазе колебаний изменяются согласно следующим зависимостям:

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t;$$

$$W_м = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t.$$

Графики колебаний заряда, энергии магнитного и электрического полей представлены на рис. 29.4. Анализ приведенных зависимостей показывает, что колебания энергии магнитного и электрического полей происходят с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний, а сумма этих энергий, равная полной энергии контура, с течением времени остается величиной постоянной. Значение полной энергии на рис. 29.4. показано штриховой линией.

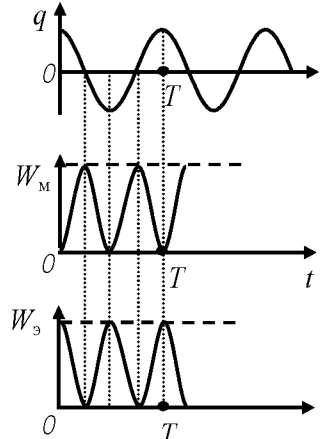


Рис. 29.4

Проанализируем теперь колебательный процесс, происходящий в контуре при наличии резистора с омическим сопротивлением R (рис. 29.5). Будем считать, что направление тока в контуре соответствует зарядке конденсатора. Запишем для участка цепи $1-2$ обобщенный закон Ома:

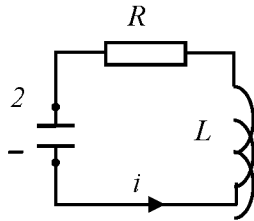


Рис. 29.5

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s,$$

где $i = \frac{dq}{dt}$; $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$; $\varphi_1 - \varphi_2 = -u_C = -\frac{q}{C}$.

После подстановки и преобразований получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \tag{29.9}$$

Введем обозначения

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (29.10)$$

С учетом этих обозначений соотношение (29.9) принимает стандартный вид дифференциального уравнения затухающих колебаний:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (29.11)$$

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т.е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, его решение

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (29.12)$$

где φ – начальная фаза; ω – частота затухающих колебаний, причем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (29.13)$$

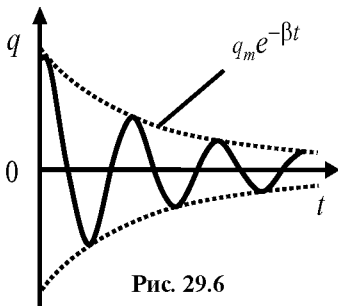


Рис. 29.6

График затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора приведен на рис. 29.6.

Поскольку амплитуда колебаний заряда $q_m e^{-\beta t}$ уменьшается с течением времени, затухающие колебания не являются гармоническими. Однако для них удобно ввести понятие **условного периода** колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Анализ формулы (29.13) показывает, что при условии $\omega_0^2 \leq \beta^2$ колебания в системе не возникают. Значение максимального сопротивления контура, при котором еще возможно возникновение колебаний, называется критическим сопротивлением $R_{кр}$. Его значение определяется из условия $\omega_0 = \beta$:

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.14)$$

Заметим, что период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Рассмотрим характеристики затухающих колебаний и сформулируем их **физический смысл**. Первая из них, непосредственно входящая в закон изменения колеблющейся величины, называется **коэффициентом затухания** β . Найдем отношение амплитуд колебаний в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_0 + \tau$:

$$\frac{A(t_0)}{A(t_0 + \tau)} = \frac{q_m e^{-\beta t_0}}{q_m e^{-\beta(t_0 + \tau)}} = e^{\beta \tau}. \quad (29.15)$$

Время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется **постоянной времени**. Поскольку $e^{\beta \tau} = e$, то $\beta = \frac{1}{\tau}$. Таким образом, коэффициент затухания равен величине, **обратной времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз**.

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится также понятие **логарифмического декремента колебаний** δ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (29.16)$$

Если за время $\tau = NT$ система совершит N колебаний и их амплитуда уменьшится в e раз, то

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

Таким образом, **логарифмический декремент** – величина, **обратная числу колебаний N_e , в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз**.

Колебательный контур характеризуется **добротностью Q** – величиной, **обратно пропорциональной логарифмическому декременту**:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \quad (29.17)$$

Чтобы пояснить физический смысл добротности, рассмотрим относительное изменение энергии контура за один период. Амплитуда силы тока и напряжения на конденсаторе убывает по закону $e^{-\beta t}$. Энергия, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе). Следовательно, энергия убывает по закону $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за период

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\delta}.$$

При незначительном затухании (при условии $\delta \ll 1$) $e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta$, в результате

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\delta) = 2\delta.$$

Заменяя в этом выражении логарифмический декремент δ через добротность контура Q в соответствии с формулой (29.17) и решив полученное уравнение относительно Q , получим:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (29.18)$$

Таким образом, добротность колебательного контура пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к ее убыли за один период.

Для случая малого затухания колебаний в цепи $\beta \ll \omega_0$ период $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$. Поэтому логарифмический декремент

$$\delta = \beta T = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}},$$

а добротность контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.19)$$

Итак, добротность контура равна отношению волнового сопротивления контура к его активному сопротивлению.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите механизм возникновения собственных гармонических колебаний в колебательном контуре.
2. Напишите дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний и функцию, которая является решением этого уравнения.
3. Напишите выражение для частоты собственных гармонических колебаний.
4. Напишите дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний и функцию, которая является решением этого уравнения.
5. Как зависит от времени амплитуда затухающих колебаний?
6. Что называется коэффициентом затухания, от каких параметров колебательного контура он зависит?
7. Чему равна частота собственных затухающих колебаний?
8. Что называется логарифмическим декрементом колебаний?

30. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Вынужденные колебания возникают, если на систему оказывают внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура источник переменной ЭДС (рис. 30.1), изменяющейся во времени по гармоническому закону с частотой ω :

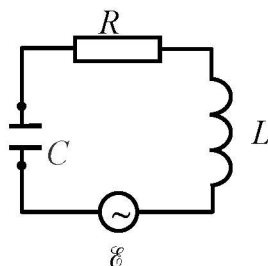


Рис. 30.1

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний можно получить, записав закон Ома для участка цепи $l-L-2$ в виде:

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E},$$

где iR – падение напряжения на резисторе контура; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 ; \mathcal{E}_s – ЭДС самоиндукции катушки индуктивности; \mathcal{E} – вынуждающая электродвижущая сила, причем

$$i = \frac{dq}{dt}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -u_C = -\frac{q}{C}; \quad \mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.1)$$

Если обозначить

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

то уравнение (30.1) приводится к виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.2)$$

Уравнение (30.2) является **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний**. Как было показано в первой части курса, частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (30.3)$$

Амплитуда q_m вынужденных колебаний и сдвиг фаз ψ между колебаниями заряда и вынуждающей ЭДС зависят от частоты.

Найдем зависимости $q_m(\omega)$ и $\psi(\omega)$. Для этого возьмем производные от $q(t)$ по времени:

$$\dot{q}(t) = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{q}(t) = -q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi) = q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi)$$

и, подставив их в формулу (30.2), получим:

$$q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi) + q_m 2\beta \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t - \psi) = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.4)$$

Напомним, что в уравнении (30.4) первое слагаемое представляет собой первую производную по времени от силы тока в контуре, второе слагаемое – произведение 2β на силу тока, третье слагаемое – произведение ω_0^2 на заряд конденсатора.

Используем метод векторных диаграмм. Будем изображать амплитуды гармонических функций, стоящих в левой части уравнения (30.4) векторами, модули которых равны $q_m\omega^2$, $q_m2\beta\omega$ и $q_m\omega_0^2$. Направления этих векторов на векторной диаграмме (рис. 30.2) определяются сдвигом фаз между

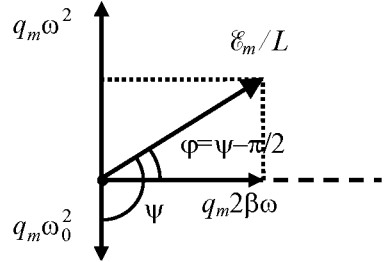


Рис. 30.2

соответствующими слагаемыми уравнения (30.4). Направим вектор, изображающий амплитуду напряжения на резисторе $q_m2\beta\omega$, горизонтально вправо и относительно него отложим два других вектора с учетом их фаз. Вектор, изображающий амплитуду напряжения на конденсаторе $q_m\omega_0^2$, отстает от напряжения на резисторе по фазе на $\pi/2$ – направим его вертикально вниз. Вектор, изображающий амплитуду падения напряжения на катушке индуктивности $q_m\omega^2$, опережает напряжение на резисторе по фазе на $\pi/2$ – направим его вертикально вверх. Результатом сложения этих трех векторов будет вектор, модуль которого равен ϵ_m/L .

Из векторной диаграммы на рис. 30.2 находим, что

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Используя теорему Пифагора, найдем амплитуду вынужденных колебаний заряда:

$$q_m = \frac{\epsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (30.5)$$

Разделив заряд q_m на емкость конденсатора C , получим амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (30.6)$$

Дифференцируя выражение (30.6) по переменной ω и приравняв полученную производную к нулю, определим резонансную частоту внешнего воздействия $\omega = \omega_p$, при которой амплитуда колебаний заряда или напряжения на конденсаторе достигает максимума:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

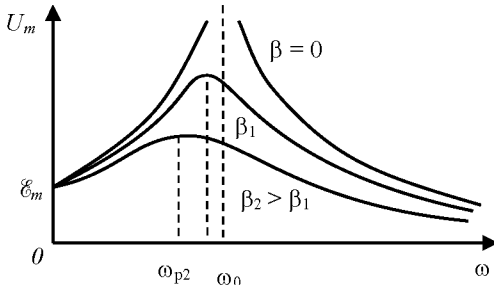


Рис. 30.3

График зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты вынуждающей ЭДС при различных коэффициентах затухания контура β приведен на рис. 30.3.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется резонансом.

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ($\omega \rightarrow \infty$) амплитуда колебаний стремится к нулю.

При частоте вынуждающей ЭДС, близкой к частоте собственных гармонических колебаний $\omega \approx \omega_0$, из (30.6) можно получить:

$$\frac{U_{Cm}}{\mathcal{E}_m} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q,$$

что совпадает с формулой для добротности (29.19). Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе при резонансе больше амплитуды вынуждающей ЭДС.

Вернемся к закону колебания силы тока в цепи и исследуем его. Ранее было получено, что

$$i = q'(t) = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

откуда следует, что колебания силы тока в цепи опережают по фазе на $\pi/2$ колебания напряжения на конденсаторе. Амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = q_m \omega = \frac{\mathcal{E}_m \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (30.7)$$

Подставив в (30.7) частоту собственных колебаний и коэффициент затухания, выраженные через параметры контура R , C и L , получим:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}.$$

Величина Z называется **полным сопротивлением** последовательного контура переменному току; $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – **емкостным сопротивлением**; $X_L = \omega L$ – **индуктивным сопротивлением**.

Емкостное и индуктивное сопротивления в сумме дают **реактивное сопротивление** контура, равное $X_C - X_L$. Сопротивление резистора R называется **активным сопротивлением** контура. Такая терминология показывает, что необратимое выделение тепла (т.е. энергетические потери контура) происходит только в резисторе. Смысл реактивного сопротивления заключается в том, что оно просто ограничивает силу тока в цепи, но не влияет на тепловые потери.

Амплитуда колебаний силы тока в контуре также зависит от частоты вынуждающей ЭДС и величины активного сопротивления. Максимальные значения амплитуды достигаются при одной и той же частоте – частоте собственных гармонических колебаний ω_0 (рис. 30.4). При частоте

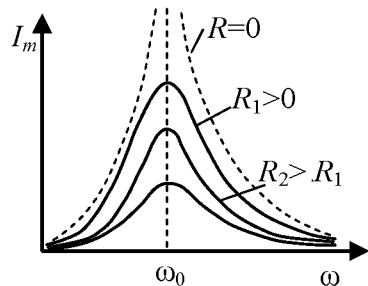


Рис. 30.4

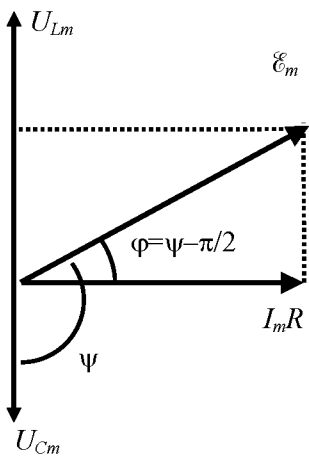


Рис. 30.5

векторы амплитуд напряжений на элементах контура (рис. 30.5). На диаграмме видно, что колебания силы тока в контуре по фазе отстают от колебаний вынуждающей ЭДС на угол $\varphi = \psi - \pi/2$, причем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

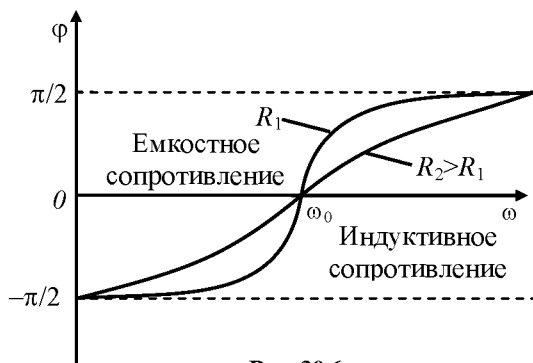


Рис. 30.6

Зависимость фазового сдвига между ЭДС и силой тока от частоты вынуждающей ЭДС приведена на рис. 30.6. При частоте, меньшей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет емкостной

характер, при этом колебания силы тока опережают по фазе колебания вынуждающей ЭДС.

При частоте, большей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет индуктивный характер,

при этом колебания силы тока отстают по фазе от колебаний вынуждающей ЭДС. И, наконец, при частоте вынуждающей ЭДС, равной частоте собственных колебаний, сопротивление контура становится чисто активным. При этом сумма падений напряжений на конденсаторе и катушке индуктивности равна нулю. По этой причине явление резонанса в последовательном колебательном контуре называют **резонансом напряжений**.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и изобразите схему колебательного контура, а котором они возникают.

2. В чем заключается явление резонанса в колебательном контуре?

3. Чему равна резонансная частота колебаний заряда и напряжения на конденсаторе?

4. Чему равна резонансная частота колебаний силы тока в колебательном контуре?

5. От чего зависит фазовый сдвиг между колебаниями силы тока в контуре и вынуждающей ЭДС?

6. Нарисуйте векторную диаграмму напряжений для последовательного колебательного контура в состоянии резонанса.

31. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Основы теории электромагнитного поля, сформулированные в работах М. Фарадея, нашли свое математическое завершение в работах Д.К. Максвелла. Развивая идеи Фарадея, он создал теорию электромагнитного поля, оформив ее в виде системы дифференциальных и интегральных уравнений (1863 г.), ввел понятие тока смещения, предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света.

В теории Максвелла решается основная задача электродинамики: определение характеристик электромагнитного поля

заданной системы электрических зарядов и токов. Эта теория явилась величайшим вкладом в развитие классической физики. Она позволила с единой точки зрения охватить огромный круг явлений, начиная с поля неподвижных зарядов и кончая электромагнитной природой света.

Максвелл не рассматривает молекулярное строение среды и внутренний механизм процессов, происходящих в среде при наличии электромагнитного поля. Он рассматривает макроскопические электромагнитные поля макроскопических зарядов и токов, т.е. таких систем зарядов, пространственные размеры которых значительно больше размеров отдельных атомов и молекул.

Уравнения Максвелла в интегральной форме выражают соотношения, которые справедливы для мысленно проведенных в электромагнитном поле неподвижных замкнутых контуров и поверхностей. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме показывают связь характеристик поля и плотностей электрических зарядов и токов в каждой точке поля. Важно, что каждое из уравнений Максвелла не только имеет определенный математический смысл, но и описывает определенный физический процесс, или постулирует важнейшие физические принципы существования материи в виде поля.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме. Согласно теории Фарадея, сущность явления электромагнитной индукции – возникновение электродвижущей силы электромагнитной индукции, обнаружить которую можно по возникновению индукционного тока в замкнутом проводящем контуре. Индукционный ток появляется в контуре при изменениях магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром. Если контур неподвижен, то изменения магнитного потока обусловлены изменением во времени магнитного поля.

Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители электрических зарядов. Эти сторонние силы могут быть только силами электрического поля, поскольку не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре. Обозначим напряженность поля сторонних сил $\vec{E}_{\text{стор}}$. С одной стороны, электродвижущая сила индукции

равна циркуляции вектора $\vec{E}_{\text{стор}}$ вдоль замкнутого контура L :

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \text{ С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции}$$

ной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где интеграл берется по произвольной поверхности, ограниченной контуром. Поскольку контур неподвижен, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Вектор \vec{B} зависит как от времени, так и от координат. В правой части уравнения имеется в виду производная по времени от \vec{B} в неизменной точке поверхности, поэтому в подынтегральном выражении использован символ частной производной по времени.

Из рассмотренных уравнений следует, что

$$\oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.1)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве электрического поля независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить электрическое поле по возникновению индукционного тока.

Это поле $\vec{E}_{\text{стор}}$ существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами поля \vec{E}_q . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора \vec{E}_q по любому контуру равна нулю. Циркуляция вектора $\vec{E}_{\text{стор}}$ отлична от нуля, следовательно, поле $\vec{E}_{\text{стор}}$, как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности вихревого поля замкнуты.

Таким образом, в общем случае электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. Для напряженности суммарного поля остается справедливым соотношение

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.2)$$

Уравнение (31.2) является первым уравнением Максвелла для электромагнитного поля. Математическая формулировка этого уравнения такова: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

Обратим внимание, что это уравнение (как и все следующие) записывается в определенном порядке. Поскольку каждое уравнение связано с определенным физическим процессом, то справа от знака равенства указывается причина возникновения этого процесса, а слева – его следствие. Итак, соотношение (31.2) описывает следующий физический процесс: **изменяющееся во**

времени магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле.

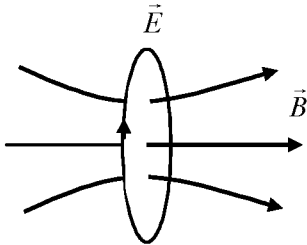


Рис. 31.1

Линии индукции магнитного поля показаны на рис. 31.1. Если модуль магнитной индукции увеличивается, то в пространстве возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого также показаны на рисунке.

Ток смещения. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме. Максвелл развил идею Фарадея о взаимозависимости электрического и магнитного полей, предположив определенную симметрию этой взаимозависимости. Если изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое, то не может ли изменяющееся со временем электрическое поле порождать вихревое магнитное поле?

Рассмотрим простейший случай изменения со временем однородного электрического поля в плоском конденсаторе, площадь обкладок которого S , а поверхностная плотность заряда обкладок σ (рис. 31.2). Пусть в цепи существует квазистационарный электрический ток, направление которого показано на рис. 31.2. Сила тока в цепи равна производной заряда конденсатора по времени:

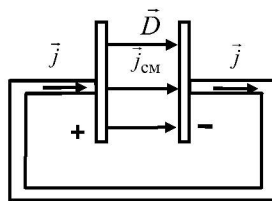


Рис. 31.2

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Движение свободных носителей заряда, т.е. ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока, названного им **током смещения**. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\frac{dq}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Таким образом, плотность тока проводимости равна скорости изменения поверхностной плотности заряда на обкладках конденсатора. В свою очередь поверхностная плотность свободного заряда σ равна проекции вектора электрического смещения на нормаль к поверхности, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD_n}{dt}.$$

Силовые линии электрического поля в конденсаторе перпендикулярны его обкладкам, поэтому $D_n = D$; отсюда следует

$$j = \frac{dD}{dt}. \quad (31.3)$$

Слева от знака равенства записана плотность тока проводимости, справа – скорость изменения электрического смещения между обкладками конденсатора, там, где токи проводимости су-

существовать не могут. Назовем скорость изменения электрического смещения $d\vec{D}/dt$ **плотностью тока смещения**. Придадим равенству (31.3) векторный смысл. При зарядке конденсатора его заряд возрастает, производная вектора смещения по времени положительна $\left(\frac{d\vec{D}}{dt} > 0\right)$ и направлена также как вектор смещения. Вектор плотности тока смещения направлен в этом же направлении. Следовательно, направление вектора плотности тока смещения совпадает с направлением производной вектора электрического смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (31.4)$$

Соотношение (31.4) показывает, что линии тока смещения «продолжают» линии тока проводимости между обкладками конденсатора. Линии тока смещения «замыкают» электрическую цепь (рис. 31.2).

Таким образом, переменное во времени электрическое поле можно уподобить некоторому току, а значит, оно должно создавать магнитное поле. Эксперимент подтвердил эту гипотезу Максвелла: вокруг конденсатора было действительно обнаружено магнитное поле.

Запишем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}}.$$

В правой части равенства записывается сумма всех макроскопических токов, существующих в системе, и сцепленных с выбранным контуром. Согласно приведенным рассуждениям в эту сумму должны войти не только токи проводимости, но и токи смещения:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S} = \int (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}.$$

Тогда с учетом (31.4) можно записать

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}.$$

Если контур L неподвижен, а поле исследуется в фиксированной области пространства, в последнем слагаемом необходимо взять частную производную по времени:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.5)$$

Уравнение (31.5) является **вторым уравнением Максвелла** для электромагнитного поля.

Итак, токи проводимости и токи смещения эквивалентны в смысле создания ими магнитного поля. Уравнение (31.5) показывает, что циркуляция напряженности магнитного поля будет отлична от нуля и в том случае, когда выбранный контур не будет охватывать токов проводимости, а в пространстве будет существовать только переменное электрическое поле. На рисунке 31.3 показаны линии магнитной индукции магнитного поля, возникающего при условии, что электрическое смещение возрастает

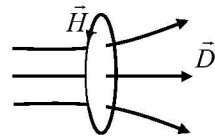


Рис. 31.3

$$\left(\frac{dD}{dt} > 0 \right).$$

Соотношение (31.5) описывает следующий физический процесс: **токи проводимости и изменяющееся во времени электрическое поле создают в пространстве вихревое магнитное поле**. Таким образом, магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и переменным электрическим полем.

Введение Максвеллом понятия тока смещения свело воедино теорию электрических и магнитных явлений. Оказалось, что изменяющееся со временем магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, а изменяющееся со временем электрическое поле создает в свою очередь магнитное поле, которое всегда является вихревым. Такая совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей называется **электромагнитным полем**. Электромагнитное поле описывается системой фундаментальных уравнений Максвелла для неподвижных сред.

В дополнение к двум уравнениям (31.2) и (31.5) запишем теоремы Остроградского–Гаусса для электрического и магнитного полей и представим систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{уп}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \rho dV; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right. \quad (31.6)$$

Напомним, что физический смысл двух последних уравнений системы (31.6) соответственно заключается в следующем: **1) источниками потенциального электрического поля являются неподвижные электрические заряды; 2) неподвижных источников вихревого магнитного поля («магнитных зарядов») не существует.**

Для описания свойств векторных полей широко используются понятия дивергенции и ротора векторного поля. Сравнение теорем Остроградского–Гаусса для электрического поля, записанных в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (31.7)$$

и интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \rho dV,$$

приводит к соотношению

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \operatorname{div} \vec{D} dV,$$

из которого следует, что **поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объему, ограниченному этой поверхностью.** В этом заключается математический смысл теоремы Остроградского, сформулированной им для любого векторного поля.

Поскольку магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю $\left(\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \right)$, то дивергенция вектора магнитной индукции также равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (31.8)$$

Уравнения (31.7) и (31.8) являются записью соответственно третьего и четвертого уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Чтобы записать в дифференциальной форме первое и второе уравнения Максвелла, введем понятие **ротора** векторного поля. Для произвольного вихревого поля, характеризуемого в каждой точке вектором \vec{A} , ротором (*вихрем*) поля называется вектор, равный максимальному значению предела отношения циркуляции поля по произвольному замкнутому контуру к площади поверхности, ограниченной этим контуром, при стремлении последней к нулю (рис. 31.4).

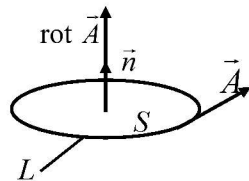


Рис. 31.4

При этом ротор вектора \vec{A} направлен в сторону единичной нормали к этой поверхности, выбранной в соответствии с направлением вектора \vec{A} по правилу правого винта. Математически это записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{S} \right) \vec{n}. \quad (31.9)$$

Отличие ротора векторного поля от нуля указывает на вихревой характер поля, т.е. на замкнутость его силовых линий.

Вернемся к первому уравнению Максвелла (31.2)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

и приведем его к дифференциальному виду.

В математике существует теорема Стокса, согласно которой для однозначной и непрерывной векторной функции \vec{A} справедливо соотношение

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}, \quad (31.10)$$

т.е. циркуляция вектора \vec{A} по замкнутому контуру L равна потоку ротора этой функции через поверхность S , натянутую на контур L . Ориентация вектора площадки $d\vec{S}$ должна быть согласована с ориентацией контура L по правилу правого винта.

Согласно теореме Стокса левая часть первого уравнения Максвелла равна потоку ротора вектора напряженности

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}.$$

Приравнявая правые части первого уравнения Максвелла и теоремы Стокса, имеем:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Из равенства интегралов следует равенство подынтегральных выражений:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (31.11)$$

Уравнение (31.11) представляет собой первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Отметим, что для потенциального электростатического поля $\oint \vec{E}_{\text{эл. ст}} d\vec{l} = 0$ и $\text{rot } \vec{E}_{\text{эл. ст}} = 0$. Равенство нулю ротора вектора напряженности является необходимым и достаточным условием того, чтобы поле являлось потенциальным.

Приведем второе уравнение Максвелла (31.5)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{уп}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

к дифференциальной форме. Применяя теорему Стокса, получаем

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\text{уп}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (31.12)$$

Выражение (31.12) представляет собой второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, включают операторы дивергенции и операторы ротора векторного поля. Напомним, что оператор дивергенции представляет собой сумму частных производных проекций вектора по соответствующим координатам:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Получим теперь оператор ротора векторного поля \vec{A} . Поскольку согласно формуле (31.9) ротор – векторная величина, то для его нахождения определим компоненты разложения этого вектора в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (\operatorname{rot} \vec{A})_x \vec{i} + (\operatorname{rot} \vec{A})_y \vec{j} + (\operatorname{rot} \vec{A})_z \vec{k}. \quad (31.13)$$

Каждое из этих слагаемых – вектор, направленный по соответствующей координатной оси. Так как ротор направлен по нормали к площадке, то это означает, что соответствующие площадки для определения компонент ротора должны быть перпендикулярно координатным осям (рис. 31.5). Важно помнить, что площадки, изображенные на рис. 31.5, проходят через ту точку пространства, в которой требуется найти ротор поля.

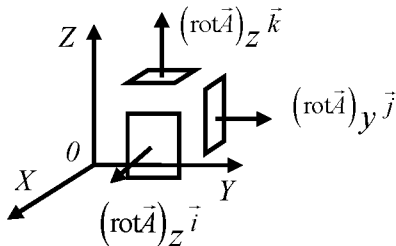


Рис. 31.5

Определим первый компонент ротора из (31.13). Для этого необходимо рассмотреть ту из трех площадок, показанных на рис. 31.5, которая перпендикулярна оси OX . Эта площадка расположена в плоскости ZOY (рис. 31.6).

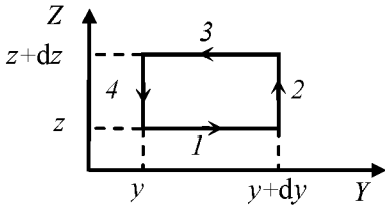


Рис. 31.6

Поскольку вектор $|\text{rot } \vec{A}|_x \vec{i}$ на этом рисунке направлен из плоскости чертежа «на нас», то направление обхода контура, ограничивающего площадку, должно быть выбрано против часовой стрелки. Тогда циркуляция вектора \vec{A} по выбранному контуру

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = A_y(z) dy + A_z(y + dy) dz + \\ + A_y(z + dz) dy(-1) + A_z(y) dz(-1),$$

где каждое из слагаемых представляет циркуляцию вектора \vec{A} по соответствующему элементу контура (они обозначены на рис. 31.6 цифрами 1, 2, 3, 4). Преобразуем полученное соотношение к виду

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = [A_z(y + dy) - A_z(y)] dz - [A_y(z + dz) - A_y(z)] dy.$$

Для получения соответствующего компонента ротора согласно (31.9) необходимо разделить это выражение на площадь, т.е. на произведение $dzdy$:

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{A_z(y + dy) - A_z(y)}{dy} - \frac{A_y(z + dz) - A_y(z)}{dz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Аналогично можно получить две другие проекции ротора:

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

В окончательном виде оператор ротора выглядит так:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (31.14)$$

Запишем систему четырех уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{I}) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{np}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{II}) \\ \text{div } \vec{D} = \rho, \quad (\text{III}) \\ \text{div } \vec{B} = 0. \quad (\text{IV}) \end{array} \right. \quad (31.15)$$

Эти уравнения, называемые **полевыми**, применимы для описания всех макроскопических явлений. При рассмотрении конкретной ситуации необходимо учесть электромагнитные свойства материальных сред. Свойства среды, учитываются с помощью еще трех уравнений, которые называются **материальными**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \\ \vec{j} = \sigma \vec{E}. \end{array} \right. \quad (31.16)$$

Совокупность семи уравнений (31.15) и (31.16) образуют основу электродинамики покоящихся сред. Физический смысл уравнений Максвелла заключается в следующем. Уравнение (I) выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле. Вторым источником электрического поля являются электрические заряды. Они также порождают электрическое поле, что описывается уравнением (III), выражающим закон Кулона. Уравнение (II) выражает закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля. Уравнение (IV) означает, что нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Из уравнений

Максвелла следует, что, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электрическое поле, то в окружающем заряды пространстве возникают взаимные превращения электрического и магнитного полей одного в другое. Эта совокупность последовательно сменяющих друг друга в пространстве электрического и магнитного полей называется электромагнитным полем.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется «током смещения»?
2. Какой физический смысл имеют понятия «ротор» и «дивергенция»?
3. Какое поле называется электромагнитным?
4. Какой физический смысл имеет каждое из уравнений Максвелла?
5. Покажите, что в однородной среде при отсутствии сторонних токов и зарядов однородное переменное магнитное поле порождает неоднородное электрическое поле.
6. Покажите, что в однородной среде при отсутствии сторонних токов и зарядов однородное переменное электрическое поле порождает неоднородное магнитное поле.

32. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ИХ СВОЙСТВА

В предыдущем разделе мы установили, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле. Это переменное магнитное поле в свою очередь порождает электрическое поле. Если возбудить с помощью движущихся зарядов или переменного тока переменное электрическое или магнитное поле (электромагнитные колебания), то в окружающем пространстве

возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве, называются **электромагнитной волной**.

Вывод о существовании электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Из системы уравнений Максвелла получим дифференциальные уравнения, в левой и правой частях которых будут содержаться производные по времени и координатам только напряженности электрического или только напряженности магнитного поля. Эти уравнения называют **волновыми уравнениями** – их решениями являются **уравнения электромагнитной волны**. На основе анализа этих уравнений сформулируем свойства электромагнитных волн. Рассмотрим вопросы переноса энергии электромагнитной волной и особенности излучения электромагнитных волн электрическим диполем.

Ранее мы рассмотрели элементы теории электрических и механических колебаний. Были получены дифференциальные уравнения свободных, затухающих и вынужденных колебаний, а также их решения. Сравнение этих выражений показывает, что характер гармонического колебательного процесса и его причина никак не влияет на вид математического закона, описывающего отклонение колеблющейся величины от положения равновесия. Колебательные процессы в различных системах подчиняются одним и тем же закономерностям. Главное при рассмотрении колебаний – определить, что в какой-либо точке пространства происходит периодическое изменение рассматриваемой физической величины. Если отклонение параметра колебаний начинает передаваться в другие точки пространства, то говорят о возникновении волнового процесса. Следовательно, волна – это физический процесс распространения колебаний, т.е. передачи **волнового возмущения** из одной точки пространства в другую.

С точки зрения характера колебаний, передаваемых волной, все волновые процессы делятся на два основных класса: поперечные волны и продольные волны. Волна является **поперечной**, если колебания физической величины, переносимые волной, проис-

ходят в плоскости, перпендикулярной направлению движения волны. Примером таких механических волн может быть волна, передающая вдоль шнура его колебания в направлении, перпендикулярном оси шнура.

Волна является **продольной**, если колебания физической величины, переносимые волной, происходят в плоскости, параллельной направлению движения волны. Пример продольных механических волн – звуковая волна в упругой среде, передающая флуктуации плотности вещества. Упругие колебания частиц вещества в областях повышенной плотности вещества совершаются в направлении движения звуковой волны.

Итак, назовем **волновым возмущением** S отклонение физической величины от равновесного состояния, передающееся волной в пространстве от одной точки в другую. **Длиной волны** λ называется расстояние, на которое распространится волновое возмущение за время, равное периоду колебаний T . Если волновое возмущение распространяется со скоростью v , то справедливы следующие соотношения:

$$\lambda = vT; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (32.1)$$

Среди различных точек пространства, до которых дошло волновое возмущение, всегда найдутся такие точки, колебания в которых совпадают по фазе. Геометрическое место точек, колебательный процесс в которых происходит в одной фазе, образует **волновую поверхность**.

По виду этой поверхности волны разделяют на плоские, сферические и т.д. Среди всех волновых поверхностей всегда существует самая внешняя (самая дальняя от источника волны), т.е. волновая поверхность, за которую волновое возмущение еще не распространилось. Эта волновая поверхность называется **фронтом волны**. Следовательно, волновой процесс можно представить переносом фронта волны во времени и пространстве с некоторой скоростью.

Рассмотрим плоскую волну, переносящую колебания вдоль некоторой оси Ox (рис. 32.1). Фронт такой волны представляет собой плоскость, параллельную плоскости zOy . Пусть фронт движется вдоль оси Ox со скоростью v . Допустим, что источник волны располагается в начале координат. Тогда в этой точке совершаются колебания по закону

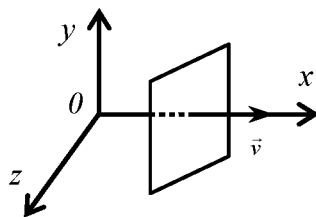


Рис. 32.1

$$S(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где A – амплитуда колебаний, а ω – их частота. В точке, отстоящей от начала координат на расстояние x вдоль оси Ox , колебания начнутся позже, чем в источнике. Задержка во времени составит $\Delta t = \frac{x}{v}$. Следовательно, закон колебаний в этой точке примет вид

$$S(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (32.2)$$

Видно, что волновое возмущение в различных точках пространства зависит от времени, а в фиксированный момент времени различно в разных точках. Поэтому выражение (32.2) описывает не просто колебания, а волновой процесс. Соотношение (32.2) называется **уравнением плоской волны**, бегущей вдоль оси Ox . Нетрудно получить, что для волны, бегущей против оси Ox , уравнение имеет вид

$$S(x, t) = E \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right].$$

Выражение, служащее аргументом гармонической функции, называется **фазой волны**. Скорость распространения волнового фронта называется **фазовой скоростью волны**. Поскольку волновой

фронт – совокупность точек с постоянной фазой, то для него $\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha = \text{const}$. Если фазу продифференцировать по времени, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha \right] = \omega(d t - \frac{1}{v} dx) = 0,$$

откуда $v = \frac{dx}{dt}$.

Преобразуем (32.2) с учетом (32.1):

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (32.3)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (32.4)$$

называется **волновым числом**.

Если сравнить соотношения $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то можно сделать вывод, что λ – это «пространственный период» волны, а T – «временной период». Если частота ω показывает число колебаний, которые совершаются за время 2π секунд, то волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на длине 2π метров. Между этими параметрами волны существует следующая связь:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (32.5)$$

Из соотношения (32.3) видно, что если расстояние между двумя точками пространства равно λ , то фазы волны в этих точках одинаковы. Поэтому можно дать еще одно определение длины волны: это минимальное расстояние между точками, колебания в которых совершаются в одной фазе. Верно и такое определение: длина волны – это расстояние, на которое смещается волновой фронт за время, равное периоду колебаний.

Соотношение (32.3) записано для случая, когда ось X совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться с помощью волнового вектора \vec{k} , который направлен вдоль распространения волны.

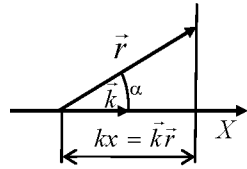


Рис. 32.2

Пусть \vec{r} – радиус-вектор некоторой точки на плоскости постоянной фазы. Очевидно, $\vec{k}\vec{r} = kx$ (рис. 32.2) и вместо (32.3) можно записать

$$S(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны, называется **волновым уравнением**. Если при анализе какого-либо физического процесса мы получим уравнение, по своей форме соответствующее волновому уравнению, значит исследуемый нами физический процесс имеет волновой характер.

Рассмотрим плоскую волну, которая определяется уравнением (32.3).

Найдем первые и вторые частные производные функции $S(x, t)$ по времени и координате:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = A k \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -A k^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -k^2 S;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -A \omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 S.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Если учесть выражение (32.5), то можно получить

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (32.6)$$

В общем случае, если волна не плоская, а распространяется по всем направлениям прямоугольной системы координат, то уравнение (32.6) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (32.7)$$

Полученное соотношение (32.7) называется **волновым уравнением**. Его принято записывать в сокращенной форме, учитывая, что в левой части уравнения стоит оператор Лапласа:

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Максвелла и решим ее, получив законы изменения напряженностей магнитного и электрического полей. Для простоты рассмотрим существование электрического и магнитного полей в отсутствие свободных зарядов и токов проводимости. В таком случае $\text{div} \vec{E} = 0$ и $\vec{j}_{\text{np}} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (32.8)$$

Метод решения данной системы уравнений заключается в их объединении. Выберем четвертое уравнение системы и продифференцируем его по времени:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right).$$

Поскольку смешанная производная не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные, то

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right).$$

Теперь в правую часть уравнения подставим $\frac{\partial H_z}{\partial t}$ и $\frac{\partial H_y}{\partial t}$,

взяв их из третьего и второго уравнений системы (32.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся седьмым уравнением системы (32.8) и получим

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение можно записать таким образом:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} \Delta E_x.$$

Аналогичные уравнения можно получить и для других проекций напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_z.$$

Обобщая три последних соотношения, запишем

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (32.9)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (32.10)$$

Полученные уравнения по своему виду соответствуют волновому уравнению (32.7). А поэтому из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле, т.е. совокупность переменных электрического и магнитного полей, распространяется в пространстве в виде волны со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (32.11)$$

Распространяющееся в пространстве электромагнитное поле называется **электромагнитной волной**. Такая волна переносит из одной точки пространства в другие колебания напряженностей электрического и магнитного полей.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, бегущую вдоль оси Ox . Следовательно, в плоскости фронта волны (она параллельна плоскости zOy) значения напряженностей полей не зависят от координат y и z . Это означает, что часть уравнений системы (32.8) и часть слагаемых в них исчезнут. Среди производных по координатам должны остаться только те компоненты системы, которые описывают изменение напряженностей полей вдоль оси Ox . В оставшихся уравнениях остаются только производные по координате x , т.е. $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (32.12)$$

Выберем теперь из этой системы третье и пятое уравнения. Продифференцируем их еще раз по x и по t :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Теперь подставим эти уравнения друг в друга:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Сравнивая эти соотношения с выражением (32.6), можно записать

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}.$$

На основании последних уравнений сделаем вывод: уравнений плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль оси Ox , выражается системой:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_э), \\ H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_м). \end{cases} \quad (32.13)$$

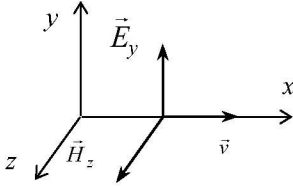


Рис. 32.3

Мы получили результат: если волна распространяется вдоль оси Ox , то напряженности электрического и магнитного полей в ней направлены по осям Oy и Oz соответственно (рис. 32.3). Если при выводе системы уравнений плоской волны из системы (32.12) воспользоваться вторым и шестым уравнениями, то получим

$$\begin{cases} E_z(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_э), \\ H_y(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_м). \end{cases}$$

В любом случае мы получаем, что колебания векторов напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. перпендикулярной скорости волны. Следовательно, электромагнитная волна является поперечной.

Рассмотрим первое, четвертое, седьмое и восьмое уравнения системы (32.12). Проанализируем выводы, которые можно получить с их помощью.

Из первого и восьмого уравнений получаем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности магнитного поля, направленная по оси Ox , то она не изменяется во времени и по координате x :

$$H_x = \text{const}(x, t).$$

Из четвертого и седьмого уравнений получаем:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности электрического поля, направленная по оси Ox , то она не изменяется во времени и по координате x :

$$E_x = \text{const}(x, t).$$

Итак, уравнения Максвелла допускают суперпозицию плоской электромагнитной волны и стационарных электрических и магнитных полей.

В случае, если такие поля отсутствуют, т.е. $H_x = E_x = 0$, то взаимное расположение векторов \vec{H} , \vec{E} и \vec{v} в некоторый момент времени изображено на рис. 32.3. Видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\vec{v} = v \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{EH}. \quad (32.14)$$

Проанализируем выражение (32.11), которое мы получили для скорости электромагнитной волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}.$$

Поскольку ϵ и μ – безразмерные величины, то размерность скорости волны определится так:

$$[v] = \frac{1}{\sqrt{[\epsilon_0\mu_0]}}.$$

Ранее мы указывали, что $[\epsilon_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ и $[\mu_0] = \text{Н} \cdot \text{А}^{-2}$. Это означает, что $[\epsilon_0\mu_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$. Если учесть, что $\text{Кл} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{c}$, то после преобразований получим

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, выражение (32.11) действительно соответствует скорости. Более того, если вычислить значение скорости электромагнитной волны в вакууме ($\epsilon = 1, \mu = 1$), то

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Полученное выражение строго совпадает с экспериментально измеренной скоростью распространения света в вакууме. Следовательно, скорость света в вакууме определяется как

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (32.15)$$

Таким образом, уравнения Максвелла предсказали электромагнитную природу света. В любой среде, отличной от вакуума по своим электрическим и магнитным свойствам, т.е. если $\epsilon \neq 1$ или $\mu \neq 1$, электромагнитная волна распространяется со скоростью, меньшей чем в вакууме в n раз:

$$v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (32.16)$$

где величина n – показатель преломления среды.

Уравнения Максвелла показывают взаимозависимость электрического и магнитного полей, которые возбуждают друг друга в электромагнитной волне. Возникает вопрос: как связаны между собой амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей? Кроме того, получив соотношение (32.13), мы доказали, что электрическое и магнитное поле в волне изменяются с одинаковыми частотами, а также с одинаковыми «пространственными периодами» λ . Необходимо рассмотреть связь: каково отличие фаз электрической и магнитной составляющей электромагнитной волны? Объединим выражения (32.13) и пятое уравнение системы (32.12) в одну систему:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_e), \\ H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_m), \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Подставим первое и второе уравнения в третье:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_0), \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M),$$

$$H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M) = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_0). \quad (32.17)$$

Соотношение (32.17) будет выполняться только, если $\alpha_M = \alpha_0$ (откуда следует, что фазы колебаний электрической и магнитной компонент волны совпадают), а, кроме того, если $H_0 k = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega$.

Воспользуемся теперь выражениями (32.5) и (32.11):

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0 = H_0 \frac{k}{\omega} = H_0 \frac{1}{v} = H_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_0 = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (32.18)$$

Графически изобразить наблюдаемые колебания векторов \vec{E} и \vec{H} можно, если зафиксировать их направления и модули в различных точках пространства в некоторый момент времени (см. рис. 32.4).

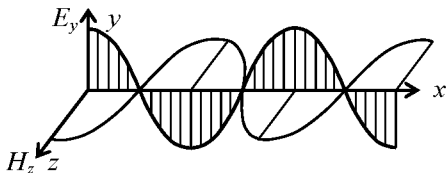


Рис. 32.4

Электромагнитная волна переносит энергию. Для описания процесса переноса энергии вводится векторная

величина, называемая **плотностью потока энергии**. Он численно равен энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля w складывается из плотности энергии электрического и плотности энергии магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (32.19)$$

Учитывая, что в данной точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются в одной фазе, соотношение между амплитудными значениями определяется равенством (32.18), что справедливо и для мгновенных значений:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (32.20)$$

Поэтому формулу (32.19) можно переписать:

$$w = 2w_s = \varepsilon\varepsilon_0 E^2.$$

Воспользовавшись соотношением (32.20), выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH. \quad (32.21)$$

Рассмотрим перенос энергии через площадку ΔS за время Δt (рис. 32.5). За время Δt через площадку осуществляется перенос энергии, заключенной в

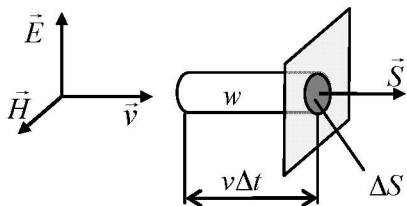


Рис. 32.5

объеме цилиндра с площадью основания ΔS и длиной $v\Delta t$: $W = w\Delta S v\Delta t$. Подставив в последнее выражение формулу для объемной плотности энергии (32.21), и учитывая (32.11), имеем:

$$W = \Delta S \Delta t EH. \quad (32.22)$$

Разделив левую и правую части соотношения (32.22) на $\Delta S \Delta t$, получим выражение для плотности потока энергии, которую обозначим символом S : $S = EH$.

Плотность потока энергии – это векторная величина, численно равная энергии, переносимой электромагнитной волной через единицу площади поверхности за единицу времени. Учитывая, что векторы \vec{E} и \vec{H} образуют правовинтовую систему, вектор плотности потока энергии \vec{S} представим в виде векторного произведения

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (32.23)$$

Вектор \vec{S} называется **вектором Пойнтинга**.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите уравнение плоской электромагнитной волны.
2. Что называется фазой электромагнитной волны, что она характеризует?
3. Сформулируйте основные свойства электромагнитных волн.
4. Объясните физический смысл вектора Пойнтинга.

ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

33. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Сложение колебаний. Если необходимо определить сумму нескольких гармонических колебаний, происходящих с одинаковой циклической частотой ω , причем каждое последующее слагаемое суммы имеет фазовый сдвиг φ_0 относительно предыдущего:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos[\omega t + (i-1)\varphi_0],$$

то удобно воспользоваться **методом векторных диаграмм**. Суть этого метода проста и заключается в следующем: проекция суммарного вектора на произвольную ось равна сумме проекций на эту ось всех векторов – слагаемых. Колеблующуюся величину можно представить **вектором**, длина которого равна амплитуде колебания, а угол между вектором и выбранной осью x – **фазе** колебания (см. рис. 33.1). В этом случае результирующее колебание найдем, сложив сначала векторы, представляющие колебания-слагаемые, определив амплитуду – модуль суммарного колебания и фазу – угол между вектором суммарного колебания и выбранной осью x .

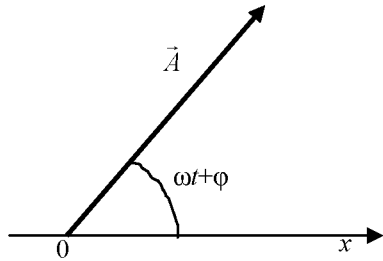


Рис. 33.1

Покажем на рисунке векторную диаграмму сложения трех колеблющихся величин:

$$S = A \cos \omega t + A \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + 2\varphi_0).$$

Изобразим на рисунке векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$, представляющие слагаемые суммы (рис. 33.2).

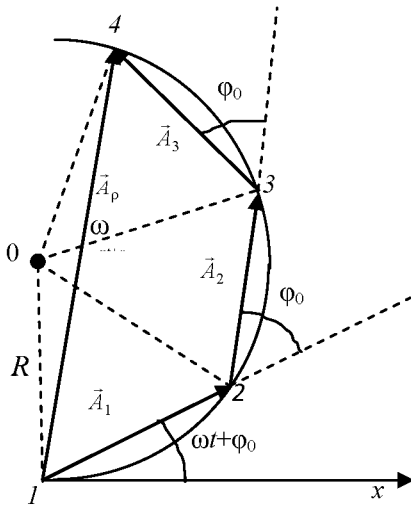


Рис. 33.2

Сложение векторов выполним по правилу треугольника. Обозначив радиус окружности, проходящей через точки 1, 2, 3 и 4 как R , получим из треугольников 012 и 014 формулы:

$$\frac{A}{R} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \text{ и } \frac{A_p}{R} = \sin \frac{3\varphi_0}{2}.$$

Из рисунка видно, что вектор \vec{A}_p , определяющий результирующее колебание S , образует с осью абсцисс угол ψ , равный:

$$\psi = \frac{N-1}{2} \varphi_0 = \varphi_0$$

(у нас число колебаний $N=3$). Результат сложения позволяет определить результирующее колебание S формулой:

$$S = A \frac{\sin \frac{3\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \cos \left(\omega t + \frac{2\varphi_0}{2} \right).$$

Обобщая полученный результат на случай, когда число складываемых колебаний равно N , приходим к формуле:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos [\omega t + (i-1)\varphi_0] = A \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \cos \left(\omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right).$$

Здесь множитель $A \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right|$ является амплитудой результирующего колебания,

а выражение $\left(\omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right)$ представляет его фазу.

Представляет интерес случай, когда складываются два колебания одинаковой частоты и равной амплитуды. В этом случае амплитуда результирующего колебания равна $2A \cdot \left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right|$, и можно сделать вывод: при условии $\varphi_0 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) происходит максимальное усиление складываемых колебаний (результирующее колебание имеет двойную амплитуду и учетверенную интенсивность по сравнению с каждым из складываемых колебаний); если выполнено условие $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$ ($n = 1, 2, \dots$), то амплитуда результирующего колебания равна нулю, т.е. происходит полное гашение одного колебания другим. Зависимость результирующей амплитуды и интенсивности от угла φ_0 показана на рис. 33.3.

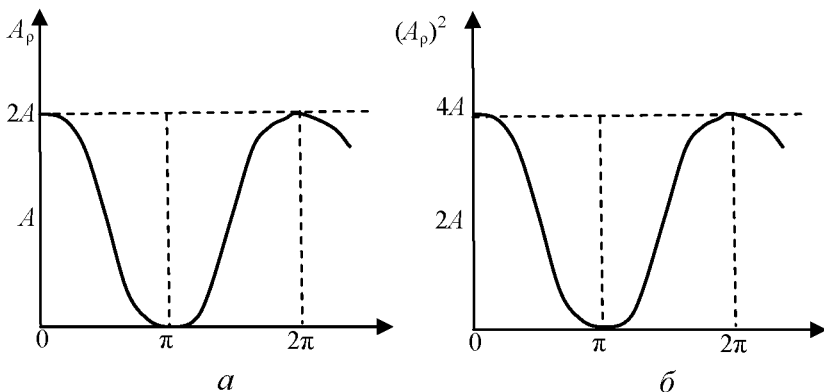


Рис. 33.3

Когерентность. Когерентностью называется согласованное протекание волновых или колебательных процессов. Две волны будут когерентными, если в любой точке пространства встречи волн частоты соответствующих колебаний будут одинаковыми, а разность фаз этих колебаний не будет зависеть от времени. В частности, две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси x и описываемые уравнениями

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

будут когерентными.

Интерференция. Интерференцией называют явление наложения нескольких когерентных волн, в результате которого электромагнитные колебания в одних точках усиливаются, а в других точках ослабляются. Картина чередования светлых и темных участков на некоторой поверхности называется интерференционной. Интерференционная картина может быть расположена как в районе самой системы, создающей когерентные волны, так и удалена от этой системы очень далеко.

Что необходимо для наблюдения интерференции? Ответ прост: два независимых источника когерентных волн. Однако в природе таких источников не существует. Более того, излучение каждого источника представляет собой огромное число несогласованных актов: каждый возбужденный атом, переходя в состояние с меньшей энергией, излучает за время $\Delta t \sim 10^{-8}$ с т.н. **волновой цуг** (группу элементарных волн) пространственной протяженностью около трех метров. В дальнейшем излученный атомом волновой цуг получил название **светового кванта** – **фотона**. Два фотона, излученные атомами-соседами в принципе не являются когерентными друг с другом.

Великая идея интерференции, принадлежащая Френелю, заключена в следующем: с помощью той или иной **схемы** «разделить» каждый волновой цуг на две (может быть, неравные) «половинки» и затем предоставить им возможность встречи на экране. Таких схем существует несколько: это схема Юнга, бипризмы Френеля, схема Ньютона, стеклянная пластинка и клин. О них речь пойдет несколько дальше.

Разность хода. Перейдем к расчету интерференционной картины от двух когерентных источников – светящихся нитей S_1 и S_2 (рис. 33.4). В точку D экрана с координатой x приходят две когерентные волны, поэтому результирующее колебание дается формулой:

$$E_p = A \cos(\omega t - kl_1) + A \cos(\omega t - kl_2).$$

Чтобы воспользоваться результатом предыдущих рассуждений, введем обозначение

$$\delta \equiv |l_1 - l_2|,$$

где величину δ назовем **геометрической разностью хода** интерферирующих волн. В этом случае разность фаз колебаний в точке x будет равна

$$\varphi_0 = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta,$$

а координаты точек максимумов и минимумов интерференционной картины на экране дадут условия $\varphi_0 = 2\pi n$ (максимумы) и $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$ (минимумы). На рисунке 33.4. Запишем для треугольников S_1DB и S_2AD теорему Пифагора:

$$l_1^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2;$$

$$l_2^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

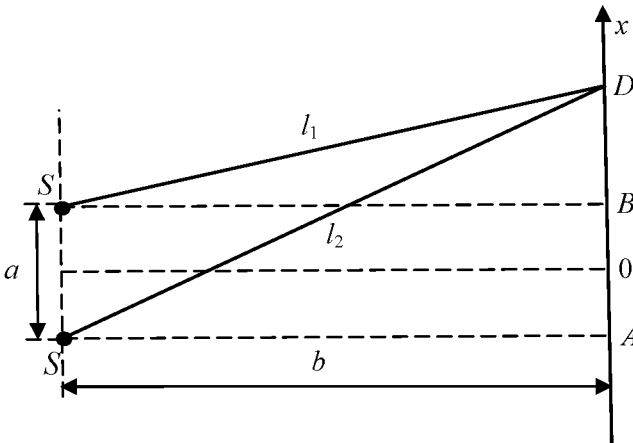


Рис. 33.4

С учетом условий проведения опыта ($b \gg a \gg x$), почленное вычитание равенств даст формулу:

$$(l_1^2 - l_2^2) = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \delta \cdot 2b = 2ax.$$

Следовательно, $\delta = \frac{ax}{b}$. Подставляя в условие интерференционных максимумов и минимумов, получим формулы:

1) максимумы: $\delta = n\lambda$ и $x_n = \frac{b\lambda}{a} \cdot n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$);

2) минимумы: $\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ и $x_n = \frac{b\lambda}{a} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Здесь мы указали как условия образования интерференционных максимумов и минимумов, так и координаты светлых и темных полосок на экране.

Как известно, **показатель преломления** прозрачной среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в этой среде:

$$n = \frac{c_0}{c}.$$

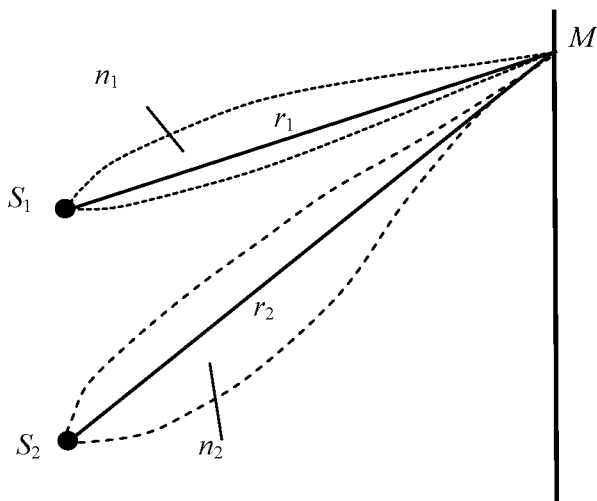


Рис. 33.5

Это обстоятельство приводит к тому, что волна движется в среде **медленнее**, чем в вакууме, и между интерферирующими волнами возникает **дополнительное запаздывание**, связанное с этим явлением. **Оптическим путем** $S_{\text{опт}}$ называют произведение длины обычного пути луча на показатель преломления среды (см. рис. 33.5):

$$S_{\text{опт}} = nS.$$

С учетом этого, условия интерференционных максимумов и минимумов приобретают вид:

$$\delta_{\text{опт}} = n\lambda, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{max}) \text{ и}$$

$$\delta_{\text{опт}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{min}).$$

Здесь $\delta_{\text{опт}}$ – оптическая разность хода волн, равная $\delta_{\text{опт}} = |S_{\text{опт}2} - S_{\text{опт}1}|$.

Важную роль в рассмотрении явления интерференции играет так называемая «потеря полуволны» при отражении света от границы двух прозрачных сред. Если свет падает из среды с меньшим показателем преломления n_1 на границу среды с большим показателем преломления n_2 , то отраженный луч мгновенно изменяет фазу на π , что эквивалентно дополнительному оптическому пути, равному половине длины волны.

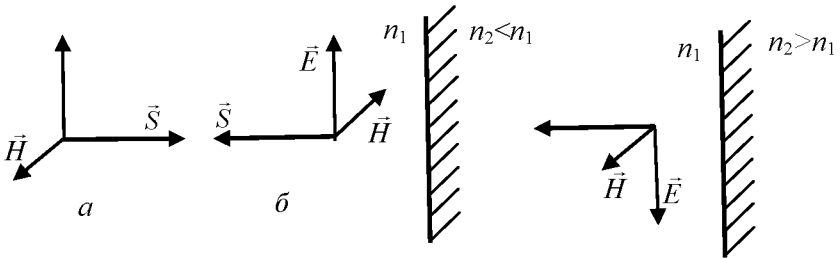


Рис. 33.6

Среду с большим показателем преломления называют **оптически более плотной**. Поясним сказанное рис. 33.6. **Вектор Пойнтинга** $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ направлен в сторону переноса волновой энергии. Поскольку направление этого вектора в падающей и отраженной волнах противоположны, из свойства векторного произведения следует, что один из векторов-сомножителей \vec{E}, \vec{H} при отражении должен изменить направление на **противоположное**.

Оказывается, что при отражении от оптически более плотной среды изменяет направление на противоположное вектор \vec{E} , а в противном случае происходит изменение направления вектора \vec{H} . Физиологически человеческий глаз устроен так, что видимый им свет связан с напряженностью \vec{E} электромагнитного поля волны. Далее в конкретных интерференционных схемах с явлением «потери полуволны» мы еще встретимся.

Интерференционные схемы. Каждая интерференционная схема, образно говоря, раздваивает излучение на два когерентных пучка, идущих от двух мнимых, но когерентных источников волн. Приведем несколько примеров интерференционных схем.

Пример 1. Два зеркала, образующих друг с другом угол, близкий к 180° (рис. 33.7), называются бизеркалами Френеля. Интерферирующие друг с другом лучи, отраженные от зеркал, когерентны. Все происходит так, будто есть два источника когерентных волн, расположенных симметрично источнику S относительно зеркал (мнимые источники S' и S'').

Пример 2. Сделанная из одной заготовки стекла бипризма Френеля (рис. 33.8) имеет очень маленькие преломляющие углы θ . Призмы преобразуют лучи от источника S так, что на экран приходят когерентные излучения, будто бы посланные когерентными источниками S' и S'' .

Пример 3. В схеме Юнга (рис. 33.9) источник света (длинная нить S) посылает излучение на экран, в котором есть две длинные узкие щели. Эти щели S' и S'' можно рассматривать как два самостоятельных источника когерентных волн.

Пример 4. Схема Ллойда (рис. 33.10) позволяет наблюдать интерференцию лучей, попавших от источника S на экран напрямую с лучами, отраженными от зеркала и пришедшими на экран. Отметим «потерю полуволны» лучом 2. Именно поэтому граница экрана с зеркалом будет темной – на ней расположен интерференционный минимум.

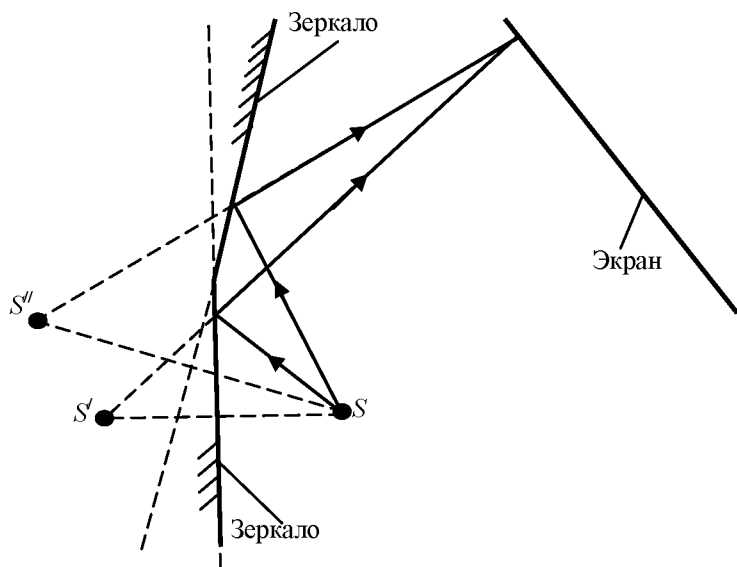


Рис. 33.7

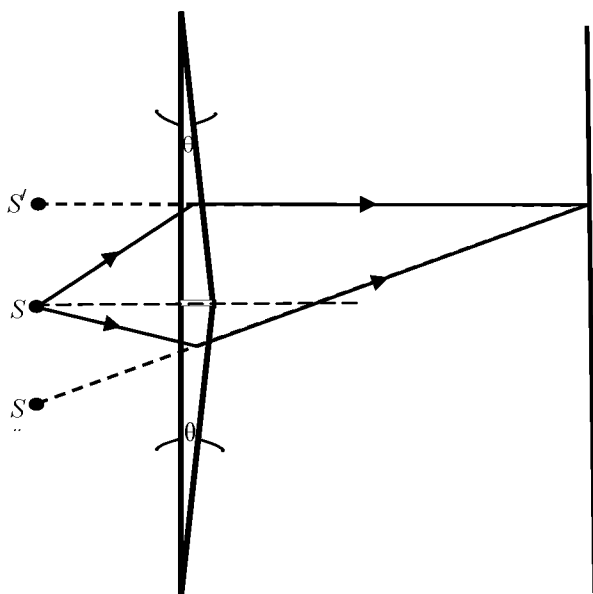


Рис. 33.8

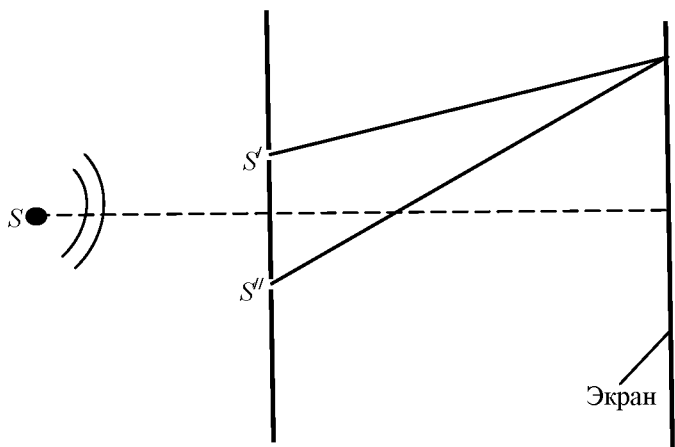


Рис. 33.9

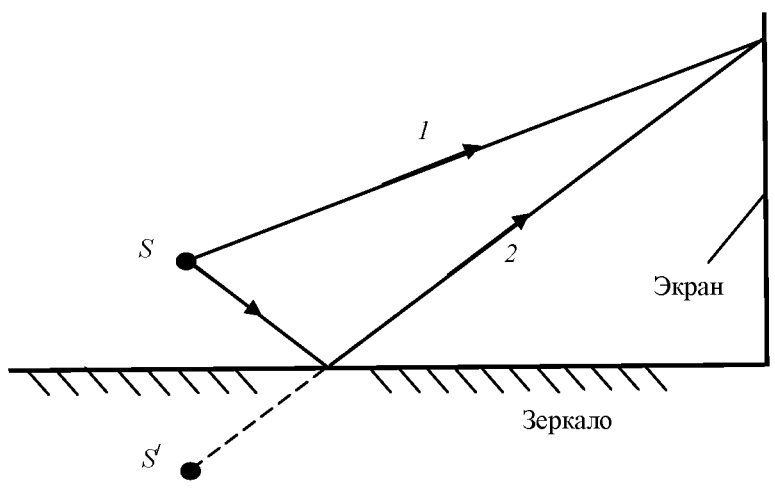


Рис. 33.10

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод векторных диаграмм?
2. Какие волны называются когерентными?
3. Какое физическое явление называется интерференцией?
4. Что такое волновой цуг?
5. Каким образом удастся наблюдать интерференцию когерентных волн, если таких волн нет в природе?
6. Чем отличается оптическая разность хода от геометрической?
7. Сформулируйте условия максимума и минимума для интерференции двух когерентных волн.
8. С чем связана «потеря полуволны» при отражении от оптически более плотной среды?
9. Что такое «интерференционные схемы»?
10. Нарисуйте ход лучей в известных вам интерференционных схемах.

34. ПОЛОСЫ РАВНОЙ ТОЛЩИНЫ И ПОЛОСЫ РАВНОГО НАКЛОНА

Рассмотрим стеклянный клин с углом при вершине φ , на поверхность которого нормально падает монохроматическая электромагнитная волна, длина которой равна λ . Угол клина φ для наблюдения интерференции необходимо взять очень малым (длина волны видимого света лежит в пределах от 0,4 мкм до 0,8 мкм), в противном случае полосы на поверхности клина будут малоразличимы. Обратимся к рисунку 34.1. Оптическая разность хода лучей 1 (отраженного от нижней поверхности клина) и 2 (отраженного от верхней грани клина) будет равна

$$\delta_{\text{опт}} = 2x\varphi - \frac{\lambda}{2}.$$

Здесь мы учли «потерю полуволны» лучом 2 при отражении от стекла. Следовательно, условия максимумов и минимумов приобретут вид

$$\text{max: } \delta_{\text{опт}} = n\lambda \text{ и } x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\varphi}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{min: } \delta_{\text{опт}} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda \text{ и } x_m = \frac{m\lambda}{2\varphi}, \text{ где } m = 1, 2, 3 \dots$$

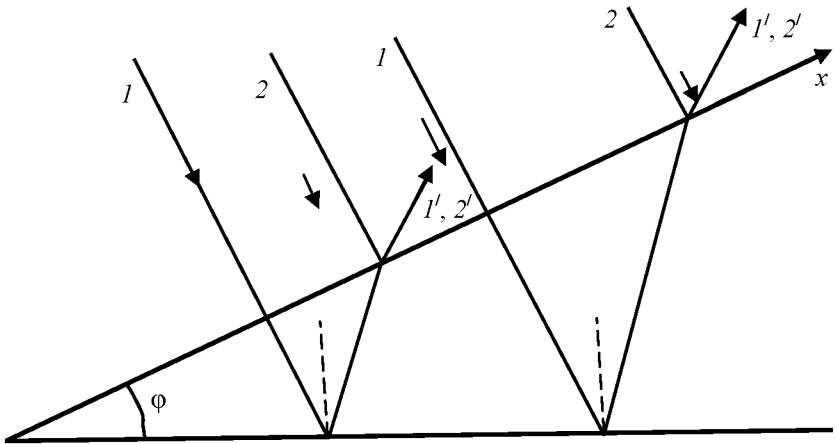


Рис. 34.1

Из этих формул следует, что сама интерференционная картина расположена практически на верхней поверхности клина, а сам угол клина (точка с координатой $x=0$) в отраженном свете будет казаться темным. Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы называются **полосами равной толщины**.

Полосы равной толщины. Установка «Кольца Ньютона» показана на рис. 34.2. Монохроматический свет падает на плоскую поверхность линзы радиусом R вертикально вниз, а интерференционная картина (чередование темных и светлых колец), расположенная практически на нижней поверхности линзы, наблюдается в отраженном свете с помощью микроскопа.

Определим разность хода интерферирующих лучей – луча 1, отраженного от стеклянной пластинки, и луча 2, отраженного от границы стеклянной сферы с воздухом, в точке их встречи. Оптическая разность хода этих лучей равна

$$\delta_{\text{опт}} = 2d - \frac{\lambda}{2}.$$

Применяя теорему Пифагора

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2,$$

получим (пренебрегая малым слагаемым d^2) выражение:

$$r^2 = 2Rd.$$

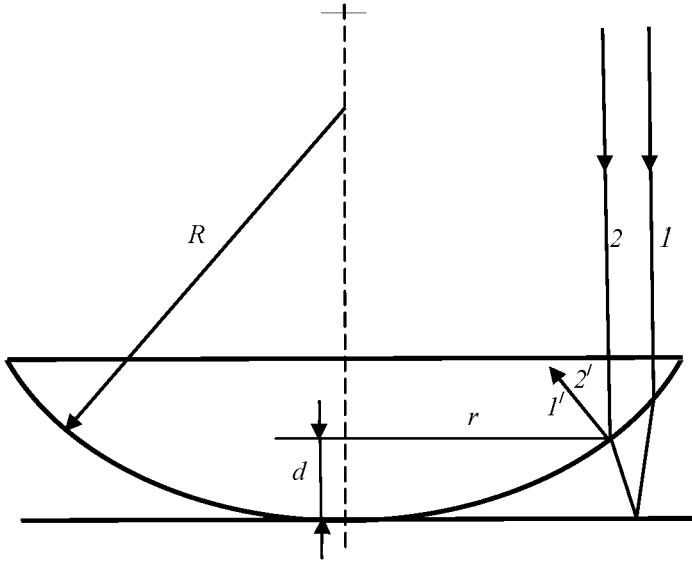


Рис. 34.2

Оптическая разность хода лучей оказывается равной

$$\delta_{\text{опт}} = \frac{r^2}{R} - \frac{\lambda}{2}.$$

Использование условий интерференционных максимумов и минимумов дает формулы для радиусов светлых и темных колец Ньютона в виде:

$$\text{Светлые кольца } r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}(2m-1)}, \text{ где } m=1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Темные кольца } r_n = \sqrt{R\lambda n}, \text{ где } n=0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, расположенная практически на сферической поверхности линзы система полос равной толщины представляет собой набор концентрических темных и светлых колец, причем центр картины оказывается темным, что обусловлено «потерей половолны» лучом l .

Полосы равного наклона. Рассмотрим плоскую монохроматическую волну длиной λ , падающую на прозрачную стеклянную пластинку толщиной d под углом i (рис. 34.3). Показатель преломления стекла равен n . Часть волны отразится от границы

воздух-стекло; показатель преломления воздуха практически равен единице. Выделим в двух отраженных пучках по одному лучу (лучи 1 и 2) и определим оптическую разность хода между ними. Обозначим длины сторон треугольников ADC и ABC следующим образом: длину стороны AD как l_1 и длину стороны AB как l_2 .

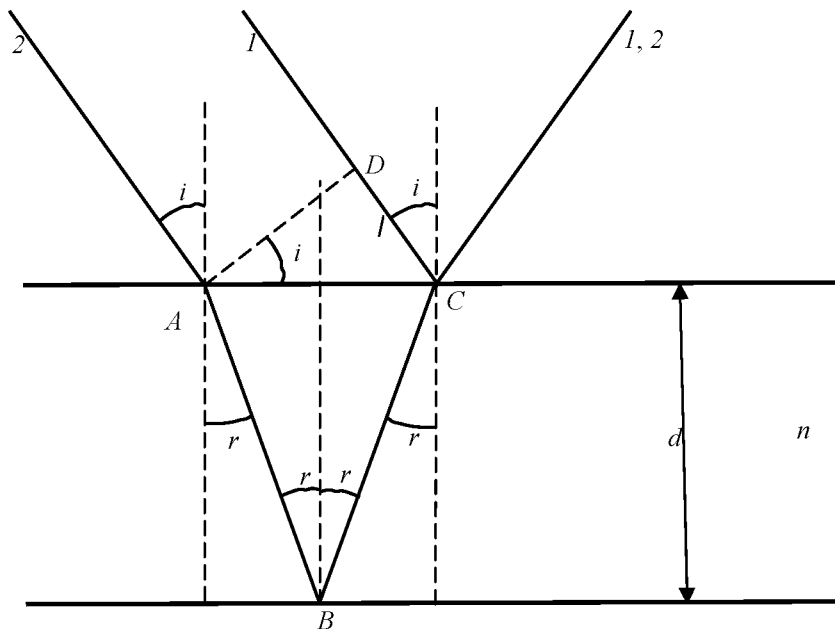


Рис. 34.3

При расчете оптической разности хода лучей 1 и 2 необходимо учесть «потерю полуволны» лучом 1 при отражении от оптически более плотной среды (стекла) и то обстоятельство, что луч 2 проходит расстояние, равное $2l_2$ в оптической среде – стекле – с показателем преломления n . Тогда оптическую разность хода лучей 1 и 2 можно записать в виде:

$$\delta_{\text{opt}} = 2nl_2 - l_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Закон преломления света дает соотношение:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Соотношение сторон прямоугольного треугольника ADC и равнобедренного треугольника ABC имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{2} &= \frac{d}{\cos r}; \\ l_1 &= 2d \cdot \operatorname{tg} r \cdot \sin i. \end{aligned}$$

В силу этих формул после алгебраических преобразований получает формулу для оптической разности хода лучей 1 и 2:

$$\delta_{\text{опт}} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}.$$

Используя условия интерференционных максимумов и минимумов, получим формулы для углов падения волн, при которых в отраженном свете пластинка будет казаться светлой (максимумы) или темной (минимумы):

$$\text{максимум: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right), \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{минимум: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда на прозрачную пластинку падает под различными углами i множество монохроматических световых пучков (рис. 34.4). В этом случае в отраженном свете интерференционную картину можно наблюдать, поставив на пути отраженных лучей тонкую линзу. Такие линзы таутохронны (они не вносят дополнительной разности хода для параллельных лучей, падающих на линзу). Кроме этого, линза собирает параллельные лучи в своей фокальной плоскости. Если в этой плоскости поместить экран, то именно на нем можно наблюдать чередование темных и светлых полос. Такая интерференционная картина получила название **полос равного наклона**.

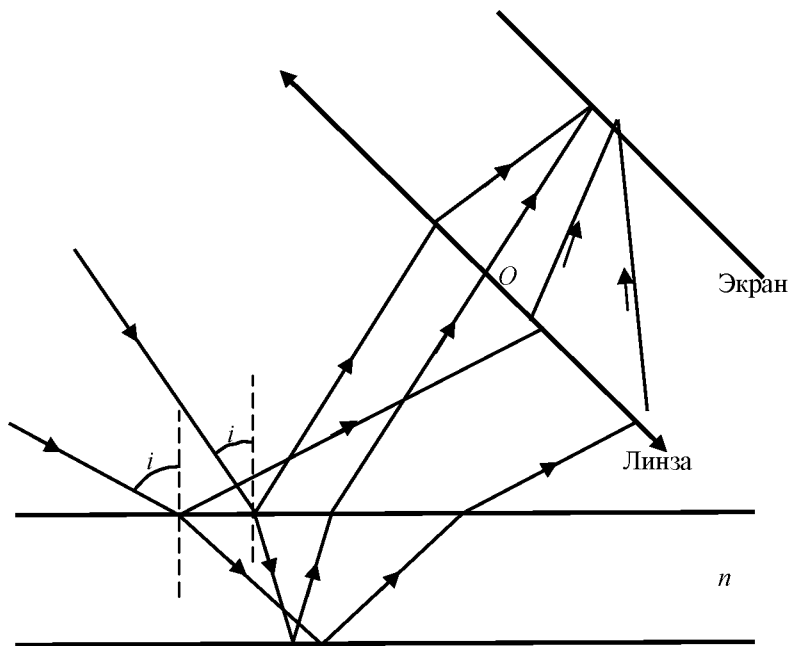


Рис. 34.4

Контрольные вопросы и задания

1. Нарисуйте ход лучей в стеклянном клине. Чему равна разность хода между интерферирующими лучами?
2. О какой «толщине» идет речь, когда говорят о полосах равной толщины?
3. Как образуются кольца Ньютона?
4. Нарисуйте ход лучей в опыте по наблюдению колец Ньютона.
5. Почему при наблюдении колец Ньютона в отраженном свете центральное пятно интерференционной картины является темным?
6. Как изменятся радиусы темных колец, если воздушный промежуток между линзой и стеклянной пластиной заполнить прозрачной жидкостью с коэффициентом преломления $n > n_{\text{ст}}$?

7. Можно ли наблюдать картину интерференции «кольца Ньютона» в проходящем свете?

8. Нарисуйте ход лучей в плоскопараллельной пластинке. Чему равна разность хода между интерферирующими лучами?

9. О каком «наклоне» идет речь, когда говорят о полосах равного наклона?

35. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Дифракцией называется совокупность явлений, связанных с распространением света в среде с резкими **неоднородностями** (препятствиями). Если свет в такой среде встречает препятствие, то он **отклоняется** от распространения прямолинейно и проникает в **область геометрической тени**. При выполнении определенных условий можно наблюдать явление дифракции в виде **дифракционной** (интерференционной) **картины**. Эта картина представляет собой для монохроматического света систему чередующихся в зависимости от формы препятствия светлых и темных колец или систему светлых и темных параллельных полос. Под препятствиями понимаются прозрачные (в виде отверстий) и непрозрачные (в виде преград) образования малых линейных размеров.

Между дифракцией и интерференцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении энергии в результате суперпозиции волн. Перераспределение энергии, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение энергии, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

Формально возникновение дифракции можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса (Х. Гюйгенс (1629–1695)): **всякая точка среды, до которой доходит волновое возмущение становится источником вторичных сферических волн**. Огибающая всех этих сферических волн дает **фронт волны** в каждый данный

момент времени. Нормали к фронту волны (**световые лучи**) показывают направление распространения световой волны. Световая волна, попадая в отверстие в экране, проникает в область геометрической тени, нарушая закон прямолинейного распространения.

Принцип Гюйгенса в его первоначальном виде позволял находить только положения волновых фронтов в последующие моменты времени, т.е. определять направление распространения волны и ничего не говорил об интенсивности света, распространяющегося в различных направлениях. Гипотезу Гюйгенса об огибающей вторичных волн О. Френель (1788–1827) дополнил идеей интерференции, согласно которой волны от вторичных источников интерферируют, распространяясь вперед. Этот «усовершенствованный» принцип получил название принципа Гюйгенса-Френеля.

Пусть поверхность F является волновой поверхностью света, распространяющегося от некоторого точечного источника. Разобьем волновую поверхность на элементарные источники $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Эти источники будут когерентными, так как они порождаются одной и той же волной и представляют собой элементы разбиения данной волновой поверхности. Результирующее колебание в некоторой точке P есть результат интерференции всех вторичных волн, приходящих от этих источников в точку P с учетом их амплитуды и фазы. При этом стоит учитывать только те элементы волновой поверхности, которые не загорожены каким-либо препятствием.

Способы разбиения волновой поверхности на элементарные источники зависят от характера задачи. Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности на зоны (**зоны Френеля**).

Рассмотрим следующий пример. Поместим точечный монохроматический источник света S в фокус слева от собирающей линзы L (рис. 35.1). Справа от линзы образуется плоская монохроматическая световая волна. Выделим на ней произвольную плоскую волновую поверхность F , и разобьем волновую поверхность на элементарные источники – зоны Френеля. Для этого с центром в точке наблюдения P , лежащей на оси симметрии, проведем ряд концентрических сфер.

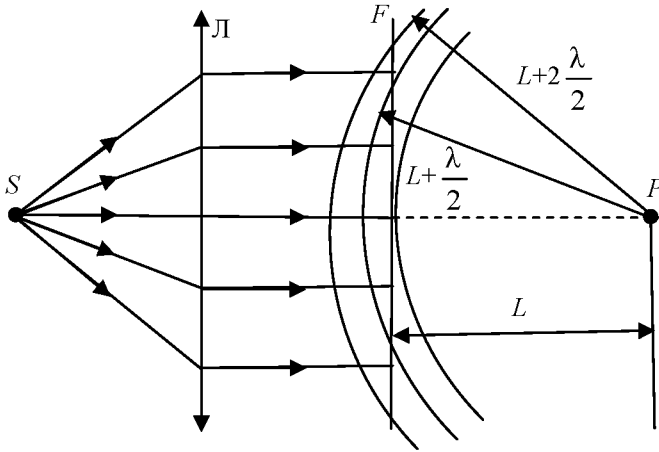


Рис. 35.1

Первая сфера с наименьшим радиусом L , равным расстоянию от точки P до волновой поверхности, должна коснуться этой поверхности. Все остальные пересекают волновую поверхность, при этом радиус каждой последующей сферы должен отличаться от радиуса предыдущей на половину длины волны $\lambda/2$. Со стороны точки наблюдения P границы зон на волновой поверхности представляют собой линии пересечения сфер и волновой поверхности в виде концентрических окружностей (рис. 35.2). Поэтому все зоны за исключением первой – круга, являются кольцами. На рисунке 35.2 ρ_1, ρ_2, ρ_3 являются радиусами соответствующих зон Френеля, а R – радиусом отверстия (радиус вводится тогда, когда на пути параллельного пучка лучей – плоской волны, полученной с помощью собирающей линзы, ставится непрозрачный плоский экран с круглым отверстием радиусом R . Правда, этот пример не предполагает наличия экрана).

С помощью рис. 35.3 определим радиусы границ зон Френеля (расчет аналогичен вычислению радиусов колец Ньютона). Радиус m -го кольца ρ_m находится из соотношения

$$\rho_m^2 = \left(L + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - L^2 = L^2 + Lm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - L^2, \quad (35.1)$$

где λ – длина световой волны. Или (с учетом, что $\lambda^2 \ll L$):

$$\rho_m = \sqrt{mL\lambda}. \quad (35.2)$$

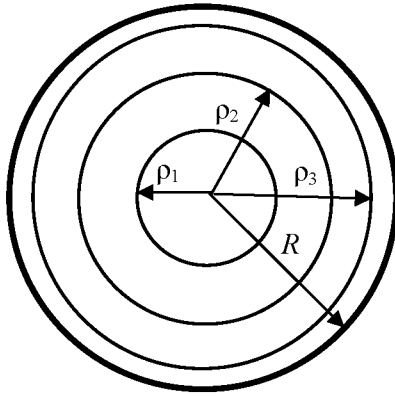


Рис. 35.2

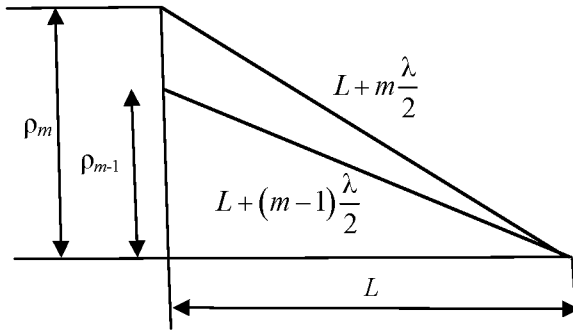


Рис. 35.3

При наличии экрана с отверстием радиуса R радиус последней зоны Френеля, укладываемый на отверстию, равен радиусу отверстия.

Откуда следует, что радиусы некоторых зон Френеля могут быть представлены следующим образом

$$\rho_1 = \sqrt{L\lambda}, \quad \rho_2 = \sqrt{2L\lambda}, \quad \rho_m = \sqrt{mL\lambda}, \quad \rho_{m-1} = \sqrt{(m-1)L\lambda}.$$

Легко показать, что площади всех зон одинаковы. Действительно,

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi\lambda L.$$

В это выражение не входит номер зоны, поэтому $S_1 = S_2 = \dots S_m$.

Одинаковые по площади зоны должны были бы возбуждать в точке наблюдения P колебания с одинаковой амплитудой. Однако расстояние от каждой последующей зоны Френеля с большим номером до точки наблюдения возрастает.

Френель, высказывал предположение (подтвержденное опытом), что амплитуда колебаний, приходящих в точку наблюдения, от все более удаленных зон **уменьшается**, хотя и незначительно: $A_1 > A_2 > A_3 \dots > A_m$, где A_m – амплитуда колебаний, вызванных m -й зоной. Это означает, что с увеличением номера зоны m наблюдается монотонный спад амплитуд колебаний, приходящих в точку P . Зависимость $A = f(m)$ можно изобразить в виде графика, представленного на рис. 35.4.

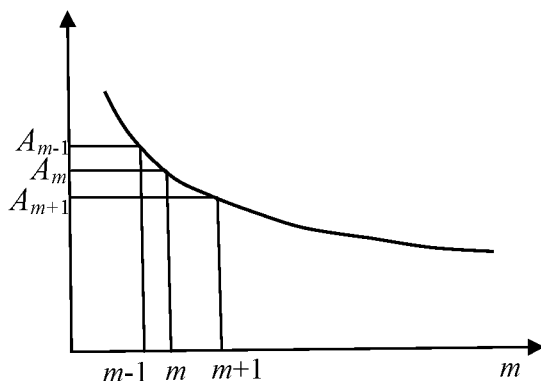


Рис. 35.4

С хорошим приближением можно считать, что амплитуда колебаний, вызываемых некоторой зоной, равна среднему арифметическому из амплитуд колебаний, вызываемых двумя соседними зонами, т.е.

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Так как расстояния от двух **соседних** зон до точки наблюдения отличаются на $\lambda/2$, то возбуждаемые этими зонами колебания приходят в эту точку в **противофазе**. Поэтому волны от любых

двух соседних зон почти гасят друг друга. Суммарная амплитуда в точке наблюдения, в отсутствии какой-либо преграды на пути лучей:

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \\
 &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2} \cdot m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \quad (35.3)
 \end{aligned}$$

(Из закона монотонного спада амплитуд следует, что слагаемые, стоящие в скобках, обращаются в нуль). Таким образом, вся волновая поверхность оказывает в точке наблюдения действие практически равное половине действия первой зоны Френеля.

Если изготовить плоский непрозрачный экран, который оставлял бы открытыми только несколько нечетных (или только четных) зон, то амплитуда колебаний резко возрастает. Если отверстие в непрозрачном экране оставляет открытой только первую зону Френеля, то амплитуда колебаний в точке наблюдения возрастает в 2 раза (а интенсивность в 4 раза) по сравнению с действием невозмущенной волны I_0 . Если открыты 1, 3 и 5 зон, то $A = 6A_0$, $I = 36 I_0$.

Такие пластинки, закрывающие отдельные зоны Френеля и обладающие свойством фокусировать свет, называются **зонными пластинками**.

Оценим **размеры зон Френеля**. Пусть на пути плоской монохроматической волны находится препятствие в виде круглого отверстия; а дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от отверстия. Длина волны $\lambda = 600$ нм (красный свет). Тогда радиус первой зоны Френеля $r_1 = \sqrt{L\lambda} \cong 0,77$ мм.

Таким образом, в оптическом диапазоне вследствие малости длины волны размер зон Френеля оказывается достаточно малым. Дифракционные явления при описанной постановке эксперимента проявляются наиболее отчетливо, когда на препятствии укладывается лишь **небольшое** число зон:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \geq 1, \text{ или } R^2 \geq L\lambda, \quad (35.4)$$

где R – радиус отверстия. Если же формальный расчет по формуле (35.4) дает $m \ll 1$, дифракционные явления также наблюдаются.

Число m в (35.4) можно рассматривать, как критерий наблюдения дифракции. Обычно различают два вида дифракции. Если расчет по формуле (35.4) дает $m \geq 1$ говорят о дифракции в **сходящихся** лучах, или дифракции **Френеля**. Если $m \ll 1$, то говорят о дифракции в **параллельных** лучах, или дифракции **Фраунгофера**.

Если число зон Френеля, укладывающихся на препятствии, становится **очень большим**, то дифракционные явления практически незаметны:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \gg 1, \text{ или } R^2 \gg L\lambda.$$

Это неравенство определяет границу применимости **геометрической оптики**. Узкий пучок света, который в геометрической оптике называется лучом, может быть сформирован только при этом условии. На экране в этом случае наблюдается **четкая граница тени**, а яркость области света не зависит от размеров препятствия (см. (35.3)). Таким образом, геометрическая оптика является предельным случаем волновой.

Дифракция Френеля на круглом отверстии. Дифракцию Френеля рассмотрим для случая сферических волн. Частный случай плоских волн получается из рассматриваемого устремлением расстояния до источника в бесконечность. Сферическая волна получается в том случае, если точечный источник света находится на **конечном расстоянии** от препятствия (**круглого отверстия**) и, следовательно, на самом препятствии волновая поверхность представляет собой часть сферической поверхности. В отличие от рассмотренного ранее случая дифракции от удаленного источника геометрия задачи усложняется, так как зоны Френеля теперь нужно строить не на плоской, а на сферической поверхности (рис. 35.5).

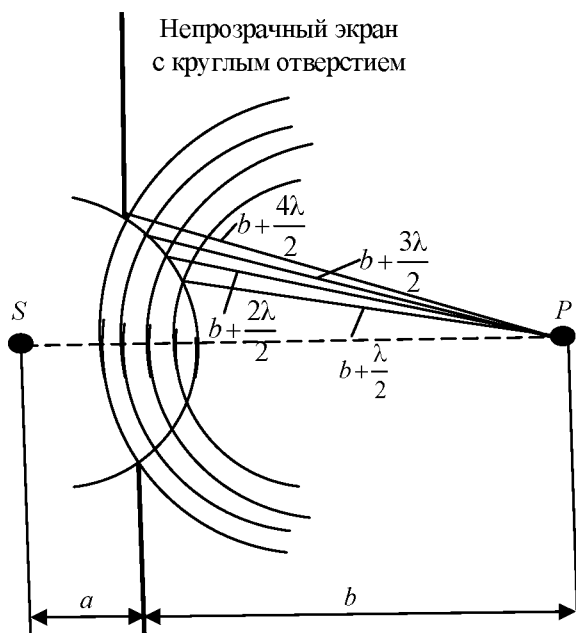


Рис. 35.5

Расчет приводит к следующему выражению для радиуса m -ой зоны Френеля (см. Пример 1):

$$\rho_m = \sqrt{m \frac{ab}{a+b} \lambda}. \quad (35.5)$$

Все выводы изложенной выше теории Френеля остаются справедливыми и в этом случае.

Мы ограничимся рассмотрением двух случаев дифракции сферических волн: дифракция от круглого отверстия и дифракция от круглого диска.

А. Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое нечетное число зон Френеля например, 3 зоны.

Б. Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое четное число зон Френеля – например, 2 зоны.

Точка наблюдения P находится на перпендикуляре, возведенном к плоскости отверстия в его центре (см. рис. 35.5). Отверстие вырезает на волновой поверхности сегмент.

Для трех зон результирующая амплитуда колебания в точке P :

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{рез}} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 \\ A_{\text{рез}} &= A_1 - A_2 + A_3 = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \\ &+ \frac{A_3}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{2}.\end{aligned}$$

Это значит, что в точке P наблюдается **максимум** дифракционной картины – пятно получается светлым. Причем яркость этого пятна будет большей, чем в том случае, если бы препятствия не было вообще.

Для двух зон результирующая амплитуда колебаний в точке P :

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{рез}} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\ A_{\text{рез}} &= A_1 - A_2 = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_2}{2} \right) - \\ &- \frac{A_2}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} < \frac{A_1}{2}.\end{aligned}$$

В точке P наблюдается **минимум** дифракционной картины – пятно получается темным. В минимуме дифракционной картины яркость пятна получается меньшей, чем в том случае, если бы препятствие отсутствовало.

Таким образом, при перемещении вдоль перпендикуляра к плоскости отверстия глаз наблюдателя будет видеть чередование светлых и темных пятен. Причем освещенность этих пятен будет уменьшаться по мере приближения к отверстию. Так как, чем ближе точка наблюдения находится к отверстию, тем больше для данной точки P вырезается зон Френеля этим отверстием и тем меньше освещенность (яркость) в этой точке будет отличаться от той, которая была бы, если бы препятствия не было вообще (а это и есть случай геометрической оптики).

На экране, параллельном плоскости отверстия и проходящем через точку P будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся светлых и темных концентрических колец с темным (m четное) или светлым (m нечетное) пятном в центре в зависимости от удаленности экрана от отверстия. Если отверстие открывает большое число зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной, не зависящей от размеров отверстия и расстояния до него, что соответствует приближению геометрической оптики.

Дифракция Френеля на круглом диске. Предположим, что точка наблюдения P выбрана таким образом, что диск для нее закрывает на волновой поверхности одну зону Френеля (рис. 35.6). В этом случае результирующая амплитуда колебаний в точке P будет определяться половиной амплитуды колебаний первой открытой зоны. А первой открытой зоной является вторая. Поэтому в точке P наблюдается максимум дифракции с амплитудой

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_2}{2}.$$

Если диском закрыты две зоны Френеля, то по аналогии с предшествующим

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_3}{2},$$

и в точке P вновь наблюдается максимум дифракции.

Таким образом, независимо от того, четное или нечетное число зон Френеля закрывается диском, на нормали к центру диска всегда будет присутствовать максимум дифракционной картины (светлое пятно). Оно носит название пятна Пуассона (С. Пуассон (1781–1840)). Интенсивность максимума (max) убывает по мере приближения к диску, что условно показано на рис. 35.7 в виде уменьшающихся по размеру точек.

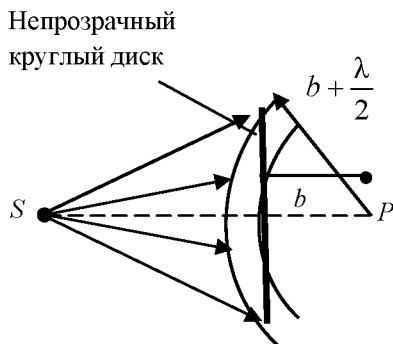


Рис. 35.6



Рис. 35.7

Вблизи диска на нормали образуется темное пятно. Это вызвано тем, что для близких к непрозрачному, круглому диску точек P диск закрывает **большое** число зон Френеля. Тогда первой открытой является дальняя (с большим номером m) зона Френеля, а она посылает свет в точки наблюдения очень малой интенсивности, и все эти точки видятся темными.

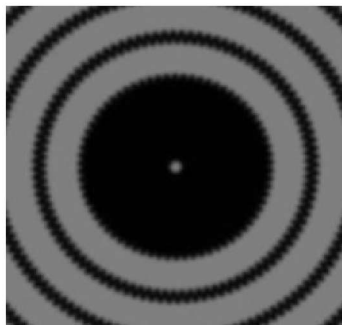


Рис. 35.8

На экране, расположенном перпендикулярно диску на достаточном удалении от него, наблюдается картина, представленная на рис. 35.8. В центре этой картины наблюдается пятно Пуассона.

Пример 1. Точечный источник света S с длиной волны $\lambda = 500$ нм расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $R = 1$ мм. Найдите расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения P , для которой отверстие вырезает на волновой поверхности $m = 3$ зоны Френеля. Докажите, что площади всех зон Френеля одинаковы.

На рисунке 35.9 представлено отверстие в диафрагме, на которое падает свет от точечного источника S . Радиус отверстия R равен радиусу ρ_m последней m -ой зоны Френеля, укладывающейся на отверстии. Точка наблюдения P находится справа от отверстия на расстоянии b . Рассмотрим Δ

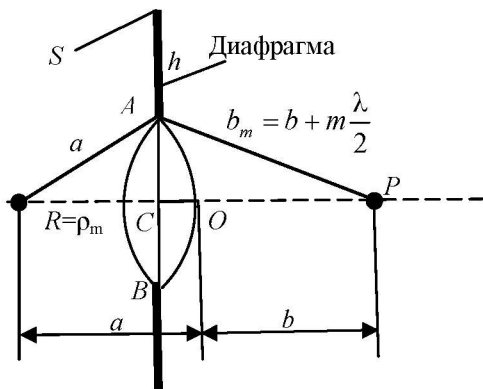


Рис. 35.9

и Δ SAC и Δ CAP на рис. 35.9. Из ΔSAC имеем

$$\rho_m^2 = a^2 - (a-h)^2. \quad (35.6)$$

Из ΔCAP следует, что

$$p_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (b+h)^2. \quad (35.7)$$

Вычтем из уравнения (35.7) уравнение (35.6):

$$a^2 - (a-h)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (b+h)^2. \quad (35.8)$$

Раскроем скобки и приведем уравнение (35.8) к виду

$$h = \frac{bm\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2} \right)^2}{2(a+b)}.$$

Поскольку длина волны λ мала, то слагаемое $\left(\frac{m\lambda}{2} \right)^2$ является величиной второго порядка малости, и им можно пренебречь. В результате

$$h = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}. \quad (35.9)$$

Преобразуем уравнение (35.6) к виду $p_m^2 = 2ah - h^2$. Пренебрежем членом h^2 в силу малости значения $hp_m^2 = 2ah$, или, с учетом (35.4), имеем:

$$p_m^2 = \frac{mba\lambda}{a+b}. \quad (35.10)$$

Откуда $b = \frac{ap_m}{am\lambda - p_m^2} = \frac{aR^2}{am\lambda - R^2} \cong 2$ м.

Как следует из уравнения (35.10) радиус m -й зоны $p_m = \sqrt{\frac{mba\lambda}{a+b}}$, радиус $(m-1)$ -й зоны $p_{m-1} = \sqrt{\frac{(m-1)ba\lambda}{a+b}}$.

Соответственно площади m -й и $(m-1)$ -й зон запишутся в виде

$$S_m = \pi p_m^2 - \pi p_{m-1}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a+b}; \quad S_{m-1} = \pi p_{m-1}^2 - \pi p_{m-2}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a+b}.$$

Как видно из полученных выражений для S_m и S_{m-1} , площадь m -й зоны равна площади $(m-1)$ -й. Это означает, что площади всех зон Френеля одинаковы, так как в выражение для S не входит номер зоны

$$S_1 = S_2 = \dots = S_m.$$

Пример 2. Между точечным источником света и экраном помещают диафрагму с круглым отверстием, радиус которого R можно менять в процессе опыта. Расстояние от диафрагмы до источника и экрана соответственно $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определите длину световой волны, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $R_1 = 1,00$ мм и следующий максимум при $R_2 = 1,29$ мм.

Как следует из условия задачи, в центре картины должен наблюдаться максимум освещенности. Это происходит в том случае, если отверстие на волновой поверхности вырезает нечетное число зон Френеля. Предположим, что на отверстии радиусом R_2 уложилось $(2m+1)$ зон Френеля, а на отверстии радиусом $R_1 - (2m+1)$ зон.

Тогда формулы для определения радиусов соответствующих зон запишутся в следующем виде (см. Пример 1)

$$\rho_{2m+1} = R_2 = \sqrt{\frac{(2m+1)ba\lambda}{a+b}} \quad (35.11)$$

и

$$\rho_{2m-1} = R_1 = \sqrt{\frac{(2m-1)ba\lambda}{a+b}}. \quad (35.12)$$

Возведем правые и левые части уравнений (35.11) и (35.12) в квадрат и вычтем из первого уравнения второе. Имеем

$$R_2^2 - R_1^2 = \frac{2ba\lambda}{a+b}, \text{ откуда}$$

$$\lambda = \frac{(a+b)(R_2^2 - R_1^2)}{2ab} = 600 \text{ нм.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается принцип Гюйгенса-Френеля от принципа Гюйгенса?
2. Что такое «зона Френеля»?
3. Нарисуйте картину построения зон Френеля на примере круглого отверстия.
4. Сравните площади различных зон Френеля, построенных для круглого отверстия.
5. Что такое зонные пластинки?
6. От каких параметров зависит число зон Френеля в случае круглого отверстия?
7. Как определяется результирующая амплитуда волны в точке наблюдения, из которой построено бесконечное число зон Френеля?
8. Каковы особенности дифракции на диске?
9. Сформулируйте основные приближения, необходимы для объяснения дифракции Френеля, дифракции Фраунгофера и геометрической оптики.
10. Что называют пятном Пуассона?

36. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Дифракция Фраунгофера (дифракция в параллельных лучах) наблюдается на удаленном экране при падении *плоских* волн на небольшое препятствие (отверстие). В этом случае падающие на экран лучи можно считать почти параллельными. Вместо удаленного экрана можно использовать экран, расположенный в фокусе собирающей линзы: из дифрагирующих лучей линза «отберет» параллельные.

Принципиально дифракция плоских волн не отличается от дифракции сферических волн, но при дифракции плоских волн дифракционная картина получается более отчетливой. Поэтому дифракция плоских волн находит более широкое практическое применение. В связи с этим наибольший интерес представляет собой в качестве препятствия отверстие в виде длинной узкой

прямоугольной щели $l \gg b$ (l – длина, b – ширина), так как такая щель является элементом дифракционной решетки – основного дифракционного прибора.

Предположим, что на прямоугольную щель падает плоская волна. Рассмотрим световые лучи (рис. 36.1), которые дифрагируют на щели под углом φ . Эти лучи идут параллельно друг другу и поэтому «пересекаются» в бесконечности.

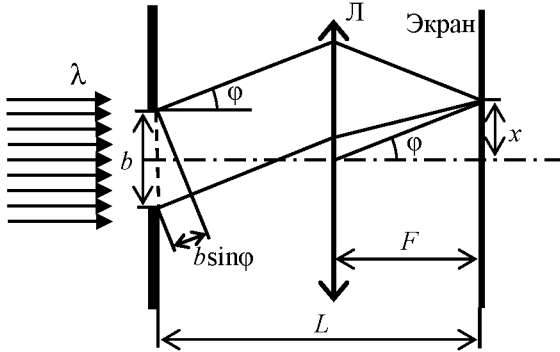


Рис. 36.1

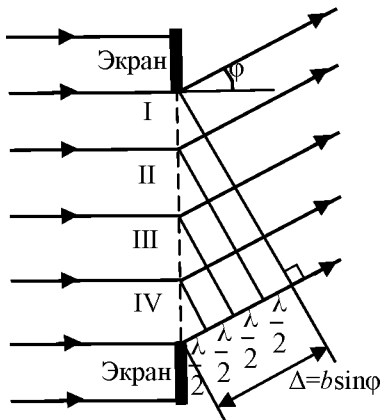


Рис. 36.2

Как сказано выше, для разбивания щели на зоны Френеля (как и для круглого отверстия) нужно построить сферы. Центры таких сфер лежат бесконечно далеко от щели. Их радиусы бесконечно велики. По существу, такие сферы являются плоскостями. И, следовательно, такими параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на $\frac{\lambda}{2}$, щель разбивается на зоны Френеля I, II, III, IV (рис. 36.2). Для данной точки

наблюдения, лежащей в бесконечности, плоскости должны быть перпендикулярны дифрагирующим лучам, направленным именно в эту точку.

Ширина зоны Френеля зависит от угла дифракции. Чем **больше** угол дифракции, тем больше зон укладывается на щели и тем **уже** по ширине каждая из зон. Площади всех зон Френеля одинаковы.

Лучи, идущие от щели, собираются линзой Л на экране, расположенным в фокальной плоскости линзы. На нем наблюдается дифракционная картина.

В случае дифракции плоских волн амплитуды колебаний, посылаемых каждой отдельной зоной в данную точку на экране, будут одинаковы, так как эти зоны занимают совершенно одинаковое положение по отношению к углу дифракции.

Поэтому результат дифракции определяется формулой

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i .$$

Максимумы дифракции наблюдаются для таких направлений дифрагирующих лучей, для которых на данной щели укладывается нечетное число зон Френеля. Например, для трех зон:

$$A_{\text{рез}} = A - A + A = A; \quad I = A^2 .$$

Эта амплитуда в точке наблюдения почти в два раза больше той, чем в случае дифракции на отверстии сферических волн

$$\left(A > \frac{A_1}{2} \right) .$$

Условие максимума:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (36.12)$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$

Если для данного угла дифракции на щели укладывается четное число зон

Френеля, выполняется условие минимума:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (36.13)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ При этом результирующая амплитуда (для двух зон)

$$A_{\text{рез}} = A - A = 0; \quad I = 0 .$$

1. При дифракции плоских и сферических волн **максимум** дифракции в данной точке наблюдения присутствует тогда, когда для данной точки наблюдения отверстие вырезает на волновой поверхности световой волны **нечетное** число зон Френеля. Если отверстие вырезает четное число зон, в точке P наблюдается **минимум**.

2. При дифракции плоских волн дифракционная картина (рис. 36.3) получается более отчетливой, чем при дифракции сферических волн. Действительно в местах расположения минимумов наблюдается не просто ослабление интенсивности, а волны полностью гасят друг друга, и результирующая интенсивность равна нулю. В местах расположения максимумов интенсивность получается большей, чем при дифракции сферических волн.

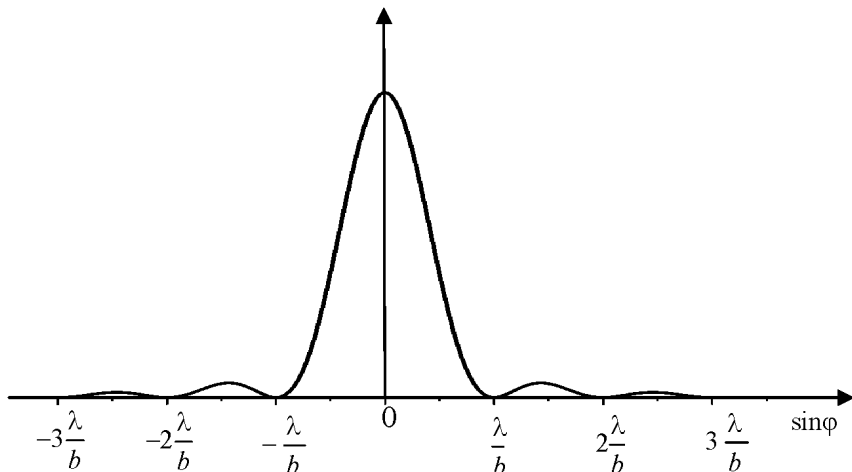


Рис. 36.3

Проведем анализ полученных результатов для случая **одной щели**.

1. **На щель падает монохроматический свет.** Число максимумов и минимумов дифракционной картины при дифракции на щели ограничено условием

$$|\sin \varphi| \leq 1, \text{ то есть } \varphi_{\min} = \frac{k\lambda}{b} \leq 1.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

А. Если ширина щели b много меньше длины волны λ света, то дифракционная картина в виде полос не наблюдается, а щель работает, как точечный источник света. Экран равномерно освещен светом этого источника.

Б. Если $b = \lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = 1$, $k = 1$, $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2}$. Дифракционная картина в виде полос отсутствует. Интенсивность света монотонно спадает от центра экрана к его краям.

В. Если, например, $b = 5\lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = \frac{k}{5}$, где k принимает целочисленные значения, причем $|\sin \varphi_{\min}| < 1$. Дифракционная картина есть. На ней отчетливо просматриваются несколько максимумов и минимумов (по обе стороны от центра экрана).

Г. Если $b = 100\lambda$, то $\sin \varphi_{\min} = \frac{k}{100}$. Теоретически в такой дифракционной картине присутствуют около 100 максимумов и 100 минимумов, как по одну, так и по другую сторону от центра экрана. Угловое расстояние между соседними максимумами и минимумами столь мало, что соседние максимумы будут очень узкими, и будут практически вплотную примыкать друг к другу. Поэтому для получения более отчетливой дифракционной картины нужно, чтобы ширина щели значительно не превышала длину монохроматической световой волны.

Все сказанное при анализе полученных результатов справедливо, но с некоторым уточнением: для оценки характера дифракционной картины нужно знать не только отношение $\frac{b}{\lambda}$, но и

расстояние L , на котором наблюдается дифракционная картина. Поэтому в случае с дифракцией на щели, по аналогии с формулой

(36.4) вводится отношение $\frac{b^2}{L\lambda}$. Оно приближенно равно числу

открытых зон Френеля m для точки лежащей против середины

щели: $m = \frac{b^2}{L\lambda}$.

При небольших расстояниях экрана от щели (когда $m \gg 1$) картина подчиняется зонам геометрической оптики – на экране получается равномерно освещенное изображение щели.

Если щель открывает **малую долю первой зоны Френеля** ($m \ll 1$, что соответствует случаю (в)) наблюдается дифракция Фраунгофера.

Если щель открывает небольшое число зон Френеля ($m \sim 1$, то есть, каждое из отношений $\frac{b}{\lambda}$ и $\frac{L}{b}$ равно 100, что соответствует случаю (г)), на экране присутствует изображение щели. На краю изображения наблюдаются очень узкие чередующиеся светлые и темные полосы.

2. На **щель падает белый свет**. В этом случае каждый максимум дифракционной картины кроме центрального представляет собой **спектр**, в котором ближе к центру всей картины наблюдаются цвета, соответствующие более коротким длинам волн видимого диапазона. На ближнем к центру краю максимума присутствует фиолетовый цвет, на дальнем – красный.

Пример. На щель шириной $b = 0,15$ мм падает нормально плоская волна ($\lambda = 450$ нм). С помощью линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр, дифракционная картина проецируется на экран, находящийся в фокальной плоскости линзы. Определите ширину центрального максимума и угловое положение первого максимума. Какое число максимумов теоретически включает дифракционная картина и какое число из них практически возможно наблюдать?

Из рисунка 36.4 *a* видно, что дифрагирующие под углом φ лучи ВД и ЕК параллельны друг другу и побочной оси СА. Именно под этим углом φ в точке А наблюдается первый максимум, интенсивность которого равна I_1 . В общем случае положение максимума при дифракции на щели определяет формула (36.12):

$b \sin \varphi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, где по условию задачи $m = 1$. Поэтому

$\sin \varphi = \frac{3\lambda}{2b}$ (находим положение максимума по одну сторону от центрального максимума – максимума нулевого порядка поэтому знак « \rightarrow » в формуле (36.12) опускаем) или

$$\varphi = \arcsin \frac{3\lambda}{2b} = 0,26^\circ.$$

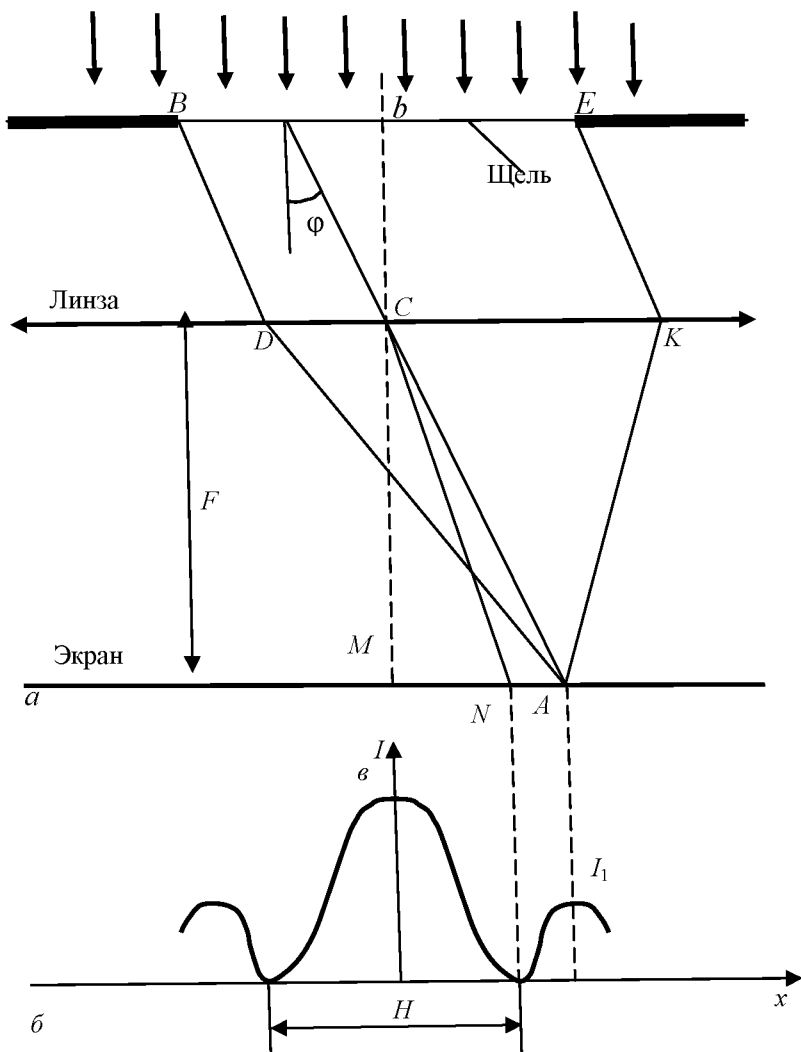


Рис. 36.4

Полное число максимумов, которое теоретически можно получить из формулы (36.12) при условии, что $|\sin \varphi| = 1$:

$$m = \frac{b}{\lambda} - \frac{1}{2} \approx 333.$$

Но практически наблюдать их все невозможно, так как уже интенсивность третьего максимума составляет $\frac{8}{1000}$ от интенсивности центрального максимума (рис. 36.33 (б)) $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008$, где I_0, I_1, I_2, I_3 соответственно интенсивности центрального, первого, второго и третьего максимумов.

Для определения ширины центрального максимума H рассмотрим ΔMCN (рис. 36.33 (а)). Из треугольника получаем $h = F \operatorname{tg} \varphi_1$, где F – фокусное расстояние собирающей линзы (предполагается, что линза вплотную располагается к щели, поэтому F является одновременно и расстоянием от щели до экрана, а угол φ_1 , является углом, под которым наблюдается первый минимум).

В силу симметрии картины

$$H = 2h = 2F \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (36.16)$$

Для малых углов дифракции

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \sin \varphi_1. \quad (36.17)$$

Условием минимума является соотношение (36.13):

$$b \sin \varphi_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \text{ здесь по условию } k = 1.$$

Из уравнений (36.16), (36.17) и (36.13) с учетом, что $F = \frac{1}{D}$,

имеем (знак «минус» в формуле (36.13) опускаем): $H = \frac{2\lambda}{bD} = 1,2 \text{ мм.}$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое физическое явление называется «дифракцией»?
2. При каком соотношении между размером отверстия и расстоянием до экрана наблюдается дифракция Фраунгофера?
3. Какой вид имеют зоны Френеля, которые необходимо построить для объяснения дифракции Фраунгофера на щели?
4. Выведите условие образования дифракционных минимумов для случая нормального падения на узкую щель плоской монохроматической волны. Поясните свой вывод рисунком.
5. Выведите условие образования дифракционных максимумов для случая нормального падения на узкую щель плоской монохроматической волны. Поясните свой вывод рисунком.
6. Как определить угловую ширину центрального дифракционного максимума?
7. Параллельный пучок белого света падает нормально на узкую щель. Объясните наблюдаемый на экране результат дифракции.

37. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Прозрачная дифракционная решетка, работающая на пропускание света, представляет собой чередование большого числа прозрачных и непрозрачных промежутков-щелей (рис. 37.34). Расстояние между серединами соседних, прозрачных щелей называется *периодом* решетки d .

Предположим, что на дифракционную решетку падает плоская монохроматическая волна. Рассмотрим соответственные лучи, дифрагирующие под углом φ и идущие от одинаковых точек щелей. Эти лучи собираются линзой на экране в точке наблюдения P . Так как колебания, приходящие в точку наблюдения являются **когерентными**, то дифракция от N щелей не является простой суммой дифракционных картин от каждой щели в отдельности. Для расчета такой картины необходимо учитывать взаимную интерференцию колебаний, приходящих от разных щелей.

Главные максимумы дифракционной картины отвечают таким углам дифракции, при которых соответственные лучи,

идушие от разных щелей, приводят к перераспределению интенсивности в сторону ее увеличения (колебания взаимно «усиливают» друг друга). Поэтому результирующая амплитуда колебания в данной точке на экране:

$$\bar{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^N \bar{A}_i,$$

где амплитуда A_i соответствует колебанию, приходящему от одной щели. Так как все щели занимают по отношению к углу дифракции совершенно одинаковое положение, то

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N = A, \text{ и } A_{\text{рез}} = NA.$$

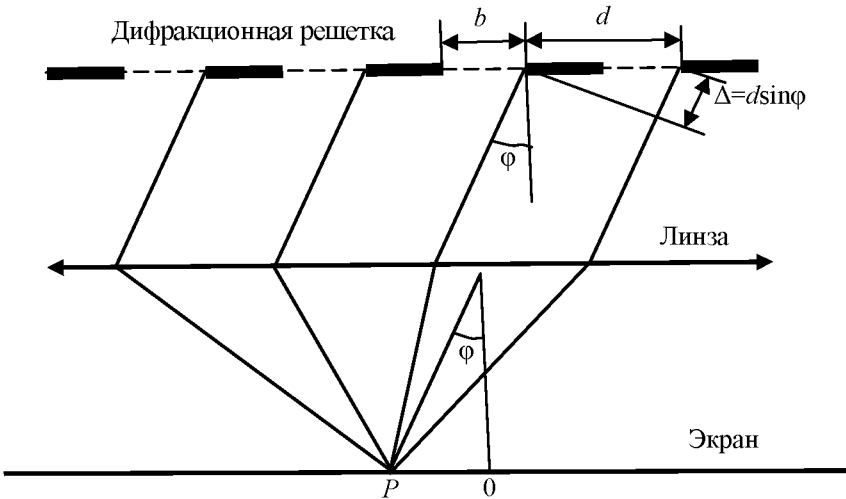


Рис. 37.1

Поэтому: $I_{\text{рез}} = N^2 I$, где I – интенсивность, создаваемая одной щелью. Таким образом, интенсивность главного максимума картины наблюдаемой, от дифракционной решетки, в N^2 раз больше интенсивности максимума картины от одной щели.

Разность фаз колебаний δ связана с разностью хода Δ соотношением $\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$, где λ – длина световой волны.

Из рисунка 37.1 видно, что $\Delta = d \sin \varphi$. Подставим это выражение в последнюю формулу и учтем, что в максимумах интенсивности колебания должны происходить синфазно. То есть $\delta = \pm 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Как результат имеем

$$\pm 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \text{ или}$$

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad (37.18)$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Условие (37.18) определяет положения главных максимумов интенсивности.

Главные минимумы соответствуют таким направлениям дифрагирующих лучей, при которых получается условие минимума для одной щели (см. (37.13)).

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (37.19)$$

где b – ширина щели, $k = 1, 2, 3, \dots$. Дело в том, что главные минимумы соответствуют результату интерференции лучей в пределах каждой отдельной щели. И если каждая щель в данном направлении света не посылает, то и от N щелей в этом направлении света не будет.

Добавочные минимумы соответствуют таким углам, при которых в данном направлении каждая щель свет посылает. Но вследствие интерференции колебаний, приходящих от разных щелей, результирующая амплитуда оказывается равной нулю. Эти колебания взаимно гасят друг друга и $I_{\text{рез}} = 0$. Воспользуемся графическим методом сложения амплитуд. Сложим этим методом амплитуды \vec{A}_1 и \vec{A}_2 двух колебаний по правилу параллелограмма (рис. 37.2).

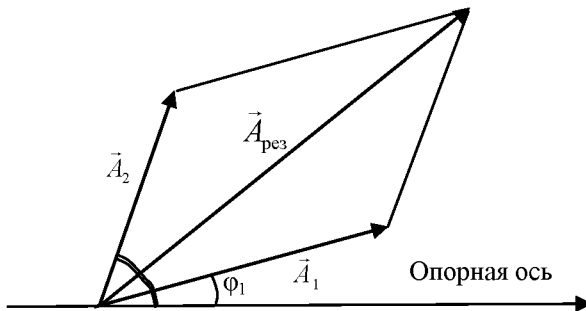


Рис. 37.2

Из рисунка видно, что $\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ (φ_1 и φ_2 начальные фазы соответственно первого и второго колебательного процессов). Но совершенно аналогично $\vec{A}_{\text{рез}}$ можно получить из сложения тех же амплитуд по правилу треугольника (рис. 37.3). На рисунке $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ является разностью фаз колебаний.

Если колебаний не два, а N (от N щелей), причем с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = \dots = A_N = A$, то картина сложения амплитуд представляется рис. 37.4.

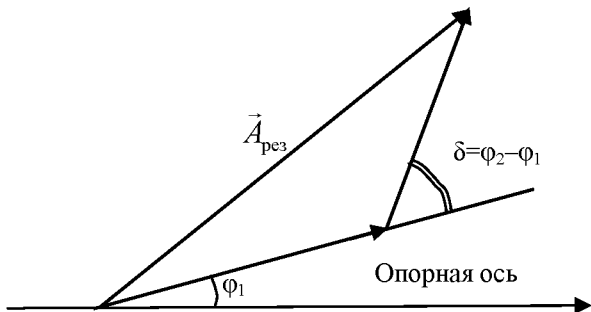


Рис. 37.3

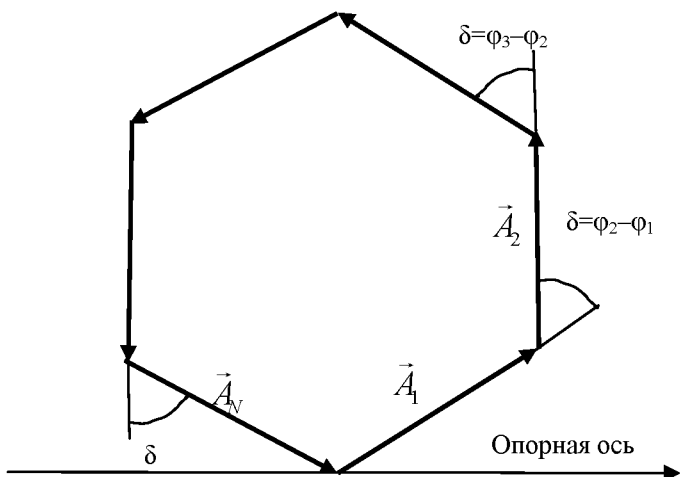


Рис. 37.4

Из рисунка 37.4 видно, что для получения минимума дифракции ($\bar{A}_{\text{рез}} = 0$) нужно, чтобы амплитуды складывались в виде замкнутого многоугольника. Между любыми соседними векторами амплитуд должен быть одинаковый угол δ . Этот угол равен разности фаз этих колебаний. Таким образом $\delta = \frac{2\pi}{N}$, но, с другой стороны, $\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$. И, следовательно, $\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ и $\Delta = \frac{\lambda}{N}$. Но $\Delta = d \sin \varphi$, поэтому $d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N}$.

В дифракционной картине наблюдается не один минимум, и для нахождения остальных нужно обойти многоугольник 2 раза, 3 раза и т.д.:

$\Delta = d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N}; \frac{2\lambda}{N}; \frac{3\lambda}{N}; \dots$ То есть $d \sin \varphi = k' \frac{\lambda}{N}$, где $k' = 1, 2, 3, \dots (N-1), (N+1), \dots$

При $m = 0, N, 2N, \dots$ наблюдаются главные максимумы, поэтому эти значения исключаются. Таким образом, между двумя главными максимумами, соответствующими условию $d \sin \varphi = m\lambda$, где $m = 0, N, 2N, \dots$ лежат по $N-1$ добавочных минимумов, определяемых разностью хода

$$d \sin \varphi = m\lambda + \frac{k''\lambda}{N}, \quad (37.20)$$

где k'' пробегает значение от 1 до $N-1$ ($k'' \neq N$). Между добавочными минимумами располагаются вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между главными соседними максимумами, равно $N-2$. Интенсивность вторичных максимумов очень мала. Самое большое, она составляет $\frac{1}{22}$ интенсивности ближайшего главного максимума.

На рисунке 37.5 приведен график функции $I = f(\sin \varphi)$ для $N = 5$ и $\frac{d}{b} \approx 2,6$. Пунктирная кривая, соответствует излучению любой из щелей. Из формул (37.18) и (37.19) вытекает, что если

главный максимум m -го порядка приходится на k -й минимум излучения от одной щели, то есть, если будет выполнено условие

$$\frac{m}{d} = \frac{k}{b}, \text{ или } \frac{m}{k} = \frac{d}{b}, \text{ то } m\text{-й главный максимум пропадает.}$$

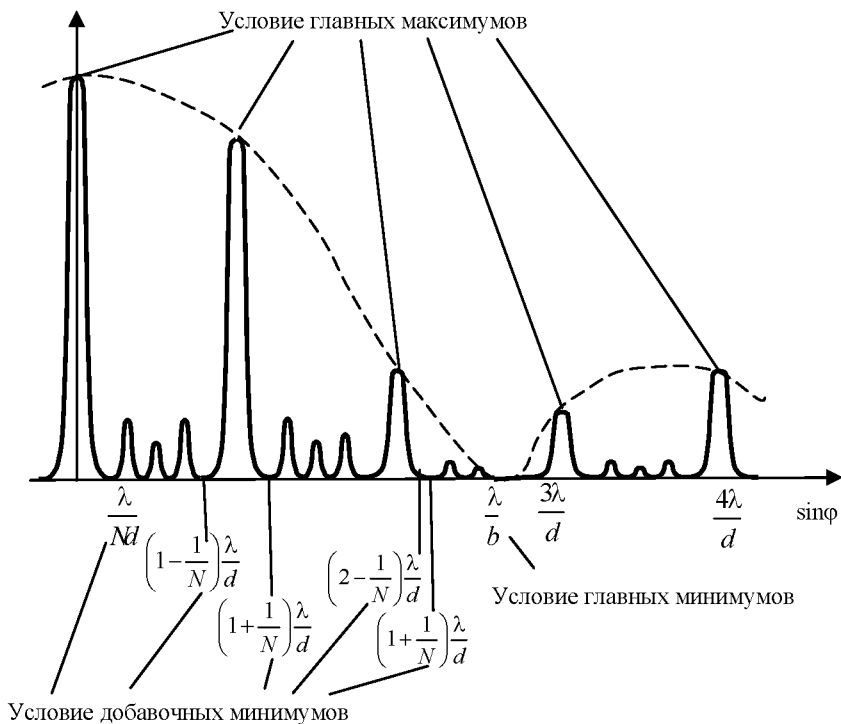


Рис. 37.5

Это возможно, если $\frac{d}{b}$ равно отношению двух целых чисел.

Тогда главные максимумы с номерами равными $\frac{d}{b}$, $2\frac{d}{b}$, $3\frac{d}{b}$ и т.д. пропадают.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр. Фиолетовый конец каждого максимума обращен к центру дифракционной картины, красный – к периферии.

Из анализа формулы дифракционной решетки для главных максимумов вытекает, что модуль $\sin \varphi$ не может превысить единицу. То есть $|\sin \varphi| = \frac{m\lambda}{d} \leq 1$.

Отсюда следует, что дифракционная картина будет отсутствовать, если $d < \lambda$.

Если $d \gg \lambda$, картины перестает быть отчетливой, так как угловое расстояние между соседними максимумами станет столь малым, что они начнут перекрываться. Наилучшие результаты получаются тогда, когда d незначительно превышает λ .

Чтобы максимумы близких длин волн различались как разные максимумы (разрешались) нужно, чтобы выполнялся критерий (условие) Рэлея (Д.У. Релей (1842–1919)). Согласно этому условию, максимумы (спектральные линии) считаются полностью разрешенными, если середина одного максимума совпадает с краем другого, то есть два близких максимума воспринимаются глазом раздельно, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80% от интенсивности максимума.

На рисунке 37.6 представлены два варианта взаимного расположения двух соседних максимумов. В варианте (а) они сливаются для глаза, в варианте (б) считаются полностью разрешенными. Для варианта (б) запишем условия, дающие положения максимумов m -го порядка для волн с λ_1 и λ_2 :

$$d \sin \varphi'_{\max} = m\lambda_1, \text{ здесь } \lambda = \lambda_1;$$

$$d \sin \varphi''_{\max} = m\lambda_2, \text{ где } \lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda.$$

Для перехода от m -го максимума для длины волны λ_1 к соответствующему минимуму (краю максимума) необходимо изменить направление дифрагирующего луча так, чтобы разность изменилась на $\frac{\lambda_1}{N}$, где N – число штрихов решетки. Таким образом, минимум для света с длиной волны λ_1 наблюдается в направлении φ_{\min} .

Согласно условию Рэлея $\varphi''_{\max} = \varphi''_{\min}$, откуда

$$m\lambda_2 = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = mN. \quad \text{Так как } \lambda_2 \text{ и } \lambda_1 \text{ отличаются}$$

на $\delta\lambda$, то

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN, \quad (37.21)$$

где R называется разрешающей силой дифракционной решетки и является одной из основных характеристик дифракционной решетки.

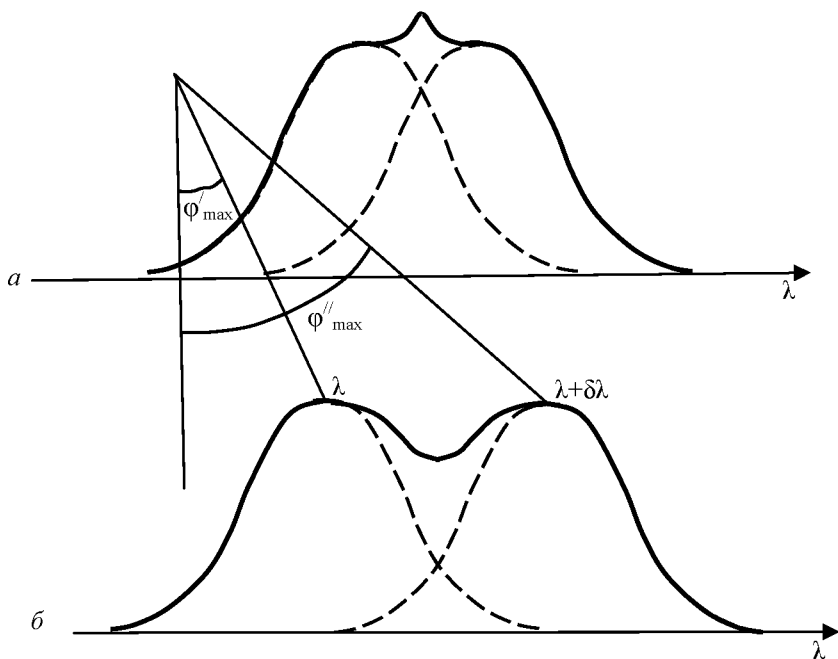


Рис. 37.6

Разрешающая сила равна произведению порядка дифракционного максимума на полное число штрихов решетки. Для данной дифракционной решетки разрешающая сила тем больше, чем больше порядок дифракционного максимума. Для данного максимума разрешающая сила тем больше, чем больше число штрихов N . Итак, как следует из формулы (37.21), разрешающая сила определяет минимальную разность длин волн $\delta\lambda$, при которой две линии воспринимаются в спектре раздельно.

Другой важнейшей характеристикой дифракционной решетки является **угловая дисперсия**:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda},$$

где $\delta\varphi$ – угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Взяв производную от левой и правой частей уравнения, выражающего условие главных максимумов для дифракционной решетки (37.18), получим

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda. \text{ Откуда } D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \text{ Для небольших}$$

углов дифракции $\cos \varphi \approx 1$, поэтому $D \approx \frac{m}{d}$.

Таким образом, чем больше порядок максимума m , тем больше дисперсия, то есть угловое расстояние между двумя спектральными линиями в этом порядке m больше по сравнению с угловым расстоянием между теми же по цвету линиями в максимуме меньшего порядка (максимумы становятся шире с увеличением номера порядка m). Дисперсия зависит и от периода решетки d : с увеличением периода она уменьшается.

Линейной дисперсией называется величина $D = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$, где δl – линейное расстояние на экране между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Линейная дисперсия связана с фокусным расстоянием f линзы собирающей дифрагирующие лучи на экране, и угловой дисперсией D (при небольших углах φ) соотношением

$$D_{\text{лин}} = fD \text{ или } D_{\text{лин}} = f \frac{m}{d}.$$

Современные технологии позволяют изготавливать дифракционные решетки с очень большим числом штрихов на 1 мм длины решетки. Например, $500 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$, $600 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$, $1200 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$. Решетка с

$N_1 = 1200 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$ обладает прекрасной разрешающей силой. Второй

порядок от такой решетки не наблюдается. Действительно, $d \sin \varphi = m\lambda$, где $d = \frac{1}{N_1}$. Положим $m = 2$ и $\lambda = 500$ нм. Тогда

$$\sin \varphi = m\lambda N_1 = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 \frac{1}{10^{-3}} = 1,2. \quad \text{Но } \sin \varphi \leq 1, \text{ следова-}$$

тельно, второго порядка нет и вся дифракционная картина представляет собой два максимума первого порядка, симметрично расположенных относительно максимума нулевого порядка.

Выше была рассмотрена, так называемая, одномерная дифракционная решетка, работающая на пропускание света. Существуют более сложные решетки – двумерные и трехмерные (пространственные). Для образования двумерной решетки нужно сложить две одномерные так, чтобы их щели были взаимно перпендикулярны. Для каждой из этих решеток условия наблюдения главных максимумов предстанут в виде двух уравнений:

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda; \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots); \quad (37.22)$$

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda; \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (37.23)$$

Измерив углы дифракции φ_1 и φ_2 и зная длину волны λ , можно найти по формулам (37.22), (37.23) периоды двумерной решетки d_1 и d_2 . Подобная двумерная структура дает дифракционную картину в виде симметрично расположенных пятен, каждому из которых соответствует два целочисленных значения m_1 и m_2 .

Набор равноотстоящих и параллельных друг другу двумерных решеток представляет собой трехмерную пространственную решетку. Такими естественными пространственными решетками являются все кристаллические тела. Период кристаллической решетки d (расстояние между соседними атомами) составляет около 10^{-10} м (0,1 нм). Для наблюдения дифракции на решетке должно выполняться условие $d > \lambda$. Поэтому видимый свет с диапазоном длин волн 400÷750 нм на кристаллической решетке не дифрагирует. Условие $d > \lambda$ выполняется только для рентгеновских лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте М. фон Лауэ (1879–1960), В. Фридриха (1883–1968) и П. Книппинга (1883–1935).

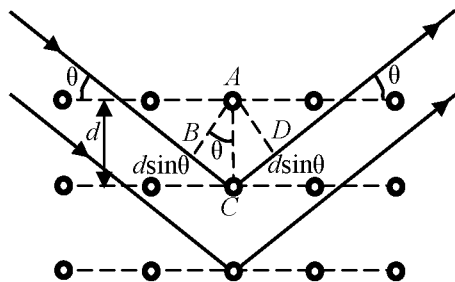


Рис. 37.7

Метод Ю.В. Вульфа (1863–1925), У.Г. Брэгга (1862–1942) и У.Л. Брэгга (1890–1971) позволяет рассчитать дифракционную картину от кристаллической решетки.

Рассечем кристалл рядом параллельных кристаллических плоскостей, расстояние между которыми d приблизительно равно 10^{-10} м (рис. 37.7). Направим на кристалл плоскую электромагнитную волну под углом скольжения θ . Отразившиеся от кристаллических плоскостей вторичные волны будут интерферировать, так как являются когерентными волнами. Разность хода между двумя лучами 1 и 2, отразившимися от соседних кристаллических плоскостей может быть найдена из ΔABC : $BC = d \sin \theta$, и, следовательно, разность хода $BCD = 2d \sin \theta$.

Поэтому направления, для которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием: $2d \sin \theta = \pm m \lambda$, где $m = 1, 2, 3, \dots$. Это соотношение называется **формулой Брэгга-Вульфа**.

Дифракция рентгеновских лучей позволяет решить две фундаментальные задачи:

1) изучение структуры кристалла – **рентгеноструктурный анализ**, то есть, изучая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллических решетках неизвестной структуры, можно определить период решетки и изучить расположение атомов в кристалле;

2) исследование спектрального состава рентгеновского излучения – **рентгеноспектроскопия**, то есть, изучая дифракцию рентгеновского излучения неизвестной длины волны на кристаллах известной структуры, можно определять длины волн рентгеновского излучения.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое дифракционная решетка? Для каких целей она используется?
2. Как зависит вид дифракционной картины от числа освещенных щелей решетки?
3. Что такое угловая дисперсия дифракционной решетки? От чего она зависит?
4. Сформулируйте критерий Рэлея для разрешающей способности дифракционной решетки.
5. Что определяет наибольший порядок главного максимума, который можно наблюдать на дифракционной решетке?
6. Поясните рисунком понятие кристаллических плоскостей. Покажите на нем межплоскостные расстояния.
7. Выведете формулу Вульфа–Брэгга.
8. Что такое рентгеноструктурный анализ?
9. Что такое рентгеноспектроскопия?

38. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Естественные источники света такие, например, как лампы накаливания, излучают **естественный** (неполяризованный свет). Действительно, под действием тока спираль лампы накаливания нагревается до высокой температуры. Электроны атомов материала спирали приобретают дополнительную энергию и переходят в атомах на более высокие энергетические уровни. Вновь возвращаясь на невозбужденные уровни, электроны излучают световые волны. Процесс излучения отдельного атома длится около 10^{-8} с. Излучения огромного числа отдельных атомов накладываются друг на друга, образуя результирующую волну, в которой колебания светового вектора \vec{E} различных направлений перпендикулярны скорости распространения волны. Эти колебания равноправны и равновероятны (рис. 38.1). Такой свет называется **естественным**. В отличие от естественного света, поляризован-

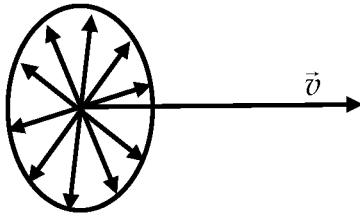


Рис. 38.1



Рис. 38.2

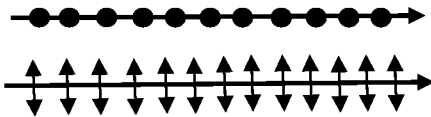


Рис. 38.3

ным называется свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом. В частности, в частично поляризованном свете колебание вектора \vec{E} совершается преимущественно в одном направлении.

На рисунке 38.2 представлен луч света, в котором преобладают колебания, перпендикулярные плоскости чертежа. Они обозначаются точками. Колебания в плоскости чертежа изображены двухсторонними стрелками.

Плоскополяризованным, или линейнополяризованным называется свет только с одним направлением колебания вектора \vec{E} (рис. 38.3).

Упорядоченность колебаний может проявляться в том, что вектор \vec{E} в процессе колебаний поворачивается вокруг луча. В результате конец вектора \vec{E} описывает эллипс или окружность. Тогда свет соответственно называется эллиптически поляризованным или поляризованным по кругу.

Плоскополяризованный свет из естественного можно получить с помощью приборов, называемых поляризаторами. Поляризаторы свободно пропускают колебания вдоль плоскости, которая называется плоскостью поляризатора, и задерживают свет с колебаниями светового вектора, перпендикулярными плоскости поляризатора.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется частично поляризованным. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении поляризатора вокруг направления распространения света интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от I_{\max} до I_{\min} , причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности).
Выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (38.1)$$

называется **степенью поляризации**. Для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$, для естественного $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$.

Пусть на пути распространения естественного света располагаются два совершенно одинаковых поляризатора P и P' (рис. 38.4). В такой схеме последовательного расположения поляризаторов второй поляризатор P' называется **анализатором**, так как он предназначен для анализа поляризованного света, прошедшего через первый поляризатор.

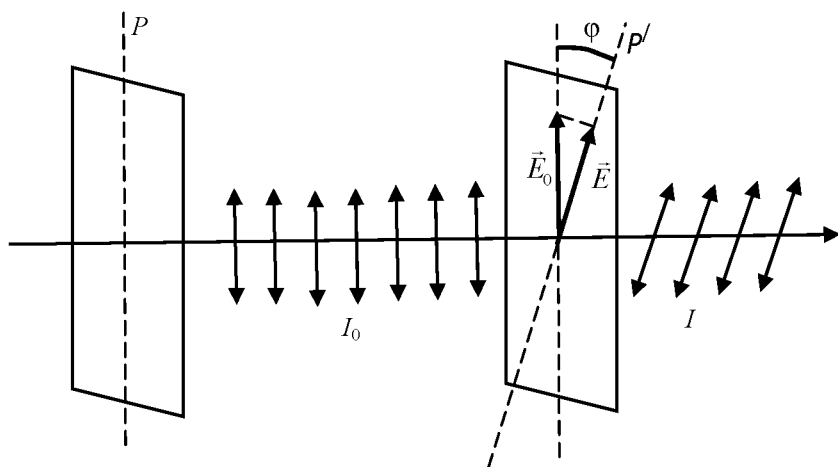


Рис. 38.4

В луче света, прошедшем через поляризатор P , будут присутствовать колебания светового вектора только в плоскости, параллельной плоскости этого поляризатора. А в луче света, прошедшем через анализатор P' , колебания вектора \vec{E} будут осуществляться в плоскости, параллельной плоскости анализатора. Предположим, что плоскости этих двух поляризаторов составляют между собой угол φ (рис. 38.5). Тогда амплитуда E колебания, прошедшего через анализатор будет связана с амплитудой E_0 колебания, прошедшего через поляризатор P , соотношением:

$$E = E_0 \cos \varphi. \quad (38.2)$$

Здесь E является проекцией \vec{E}_0 на направление плоскости пропускания анализатора. Возведем левую и правую части уравнения (38.2) в квадрат:

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi.$$

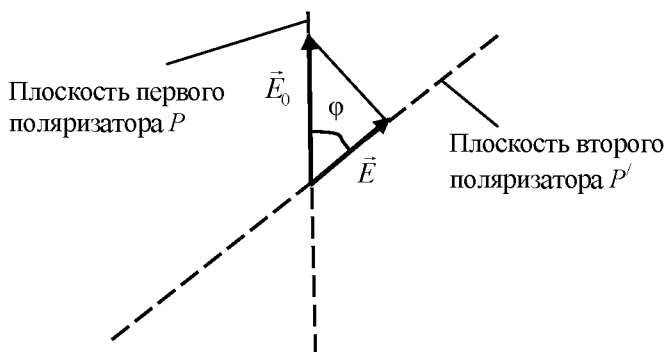


Рис. 38.5

С учетом, что интенсивность света I пропорциональна квадрату амплитуды волны, имеем

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (38.3)$$

Соотношение (38.4) носит название **закона Малюса** (Э.Л. Малюс (1775–1812)). Закон Малюса гласит, что интенсивность света I , прошедшего анализатор, равна интенсивности света I_0 , падающего на анализатор, умноженной на квадрат косинуса угла φ между плоскостями пропускания поляризаторов. Напоминаем, что I_0 характеризует интенсивность плоскополяризованного света.

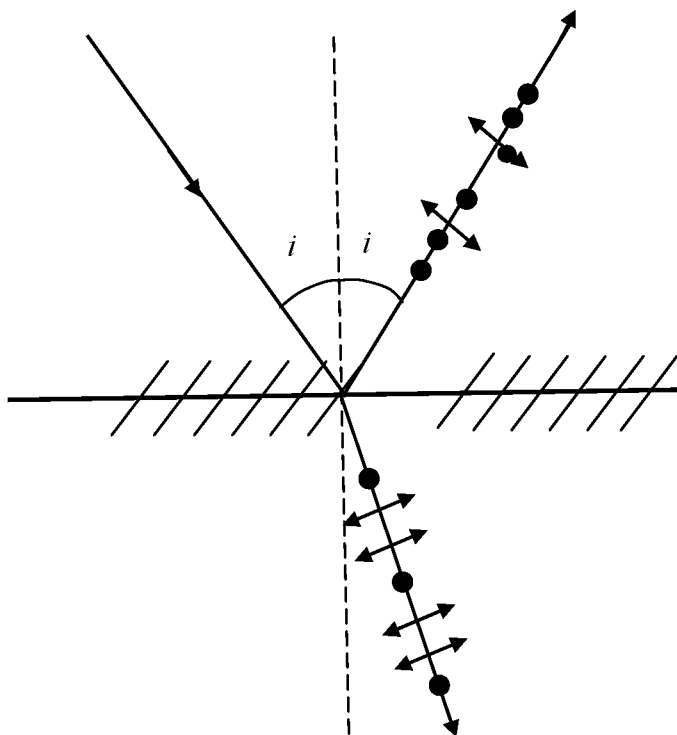


Рис. 38.6

Отражение и преломление света на границе раздела двух диэлектриков

Предположим, что естественный свет падает на границу раздела двух любых диэлектрических сред под углом i (рис. 38.7). Свет частично отражается и частично преломляется. Причем оба луча – отраженный и преломленный в общем случае будут частично поляризованы. В отраженном луче будут преобладать колебания вектора \vec{E} перпендикулярные плоскости падения луча, в преломленном – в плоскости падения. Физически это объясняется характером взаимодействия света с веществом. Световая волна, попадая во вторую среду, вызывает вынужденные колебания электронов вещества.

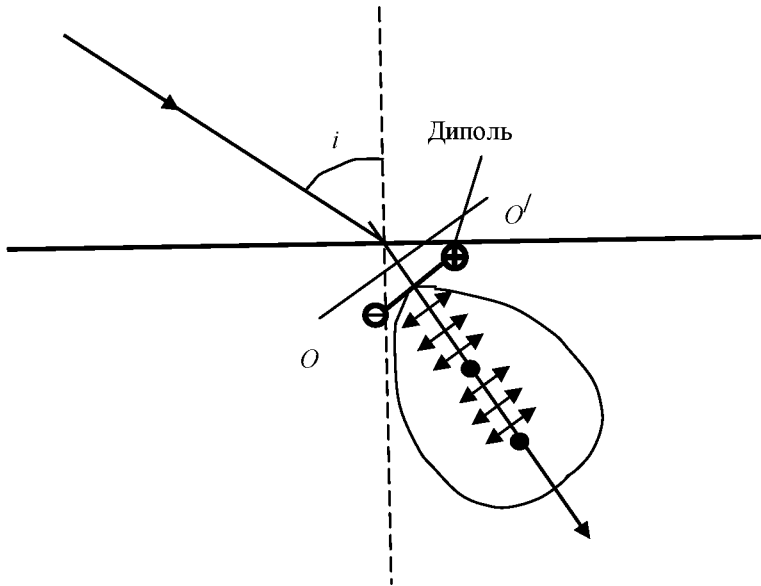


Рис. 38.7

Составляющая вектора \vec{E} , лежащая в плоскости падения, вызывает коллинеарные ей колебания. В результате возникают диполи, плечо которых лежит в плоскости падения (рис. 38.8). Эти диполи будут изучать волну с колебаниями вектора \vec{E} также в плоскости падения в направлении преломленного луча. Диполь, как известно, имеет диаграмму направленности, изображенную на рис. 38.9 и представляющую зависимость интенсивности излучения от угла φ . То есть, как видно из рис. 38.10, диполь в основном излучает в направлении, перпендикулярном оси диполя. В направлении, совпадающем с осью, диполь не излучает. Таким образом, внутри диэлектрика вторичные волны складываются с первичной (падающей) волной. Результирующая первичной и вторичной волн дает преломленную волну. Ось диполей, лежащих в плоскости падения OO' , должна быть перпендикулярна преломленному лучу. Максимальную энергию эти диполи будут излучать в направлении преломленного луча. Излучать в направлении отраженного луча они практически не будут, так как ось диполей составляет с этим направлением очень малый угол.

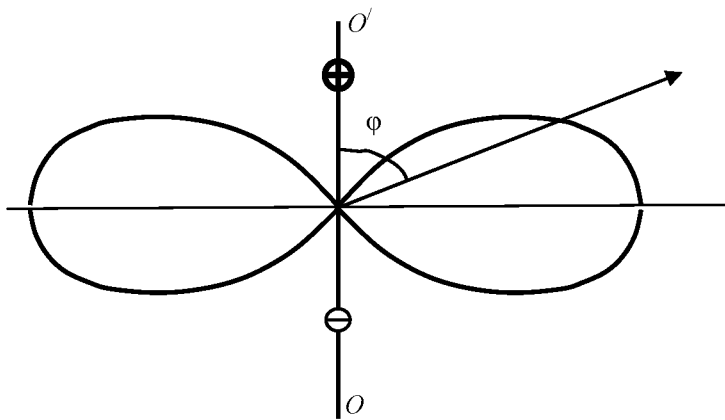


Рис. 38.8

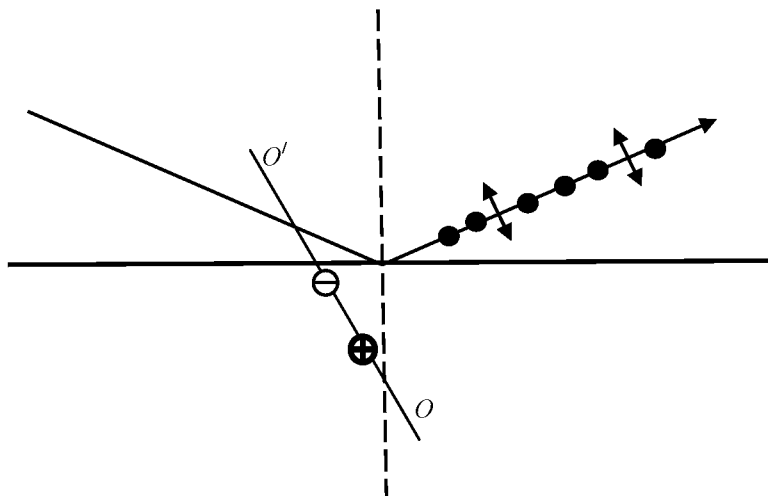


Рис. 38.9

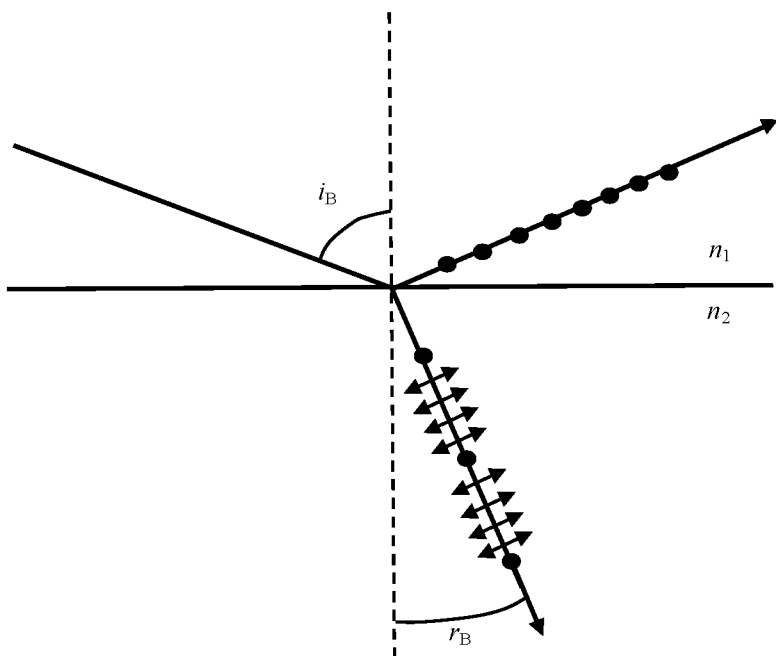


Рис. 38.10

Составляющая вектора \vec{E} падающей на диэлектрик волны, перпендикулярная плоскости падения, вызывает колебания зарядов в этой же плоскости. Ось OO' возникших диполей будет перпендикулярна плоскости падения луча (рис. 38.11). Такие диполи станут излучать в направлении отраженного луча. В падающем луче естественного света интенсивность различных колебаний одинакова.

Энергия этих колебаний распределяется между отраженной и преломленной волной. Поэтому, если в преломленном луче будет больше интенсивность колебания одного направления, то в силу закона сохранения энергии в отраженном луче должна быть больше интенсивность колебаний другого направления. Отсюда следует, что отраженный луч будет частично поляризован.

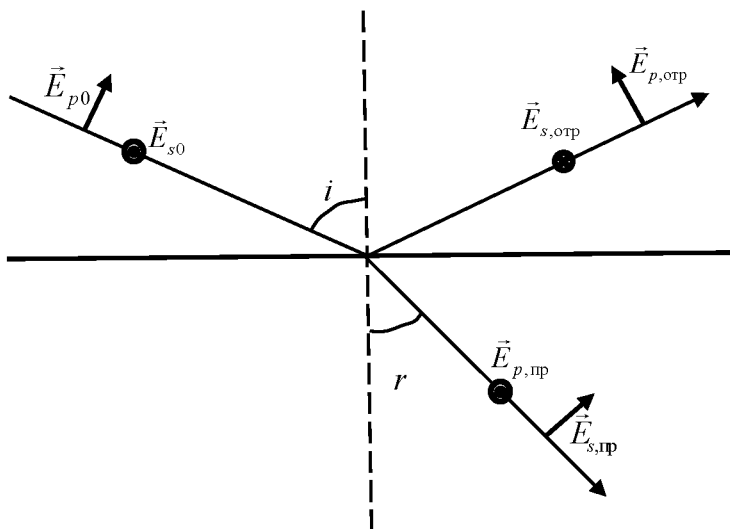


Рис. 38.11

Закон Брюстера. Как показывает опыт, свет, отраженный от границы, раздела двух диэлектрических сред, оказывается плоскополяризованным при таком угле падения i_b , при котором отраженный и преломленный лучи будут взаимно перпендикулярны (рис. 38.11). Это условие приводит к равенству:

$$i_b + r_b + \frac{\pi}{2} = \pi$$

или

$$i_b + r_b = \frac{\pi}{2}, \quad (38.4)$$

здесь r_b является углом преломления.

Из закона В. Снеллиуса (1580–1613) $\frac{\sin i_b}{\sin r_b} = n_{12}$, где

$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$ – относительный показатель преломления второй среды

относительно первой, и равенства (38.4) имеем

$$\frac{\sin i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)} = n_{12},$$

или

$$\operatorname{tg} i_B = n_{12}. \quad (38.5)$$

Уравнение (38.5) называется **законом Брюстера** (Д. Брюстер (1781–1868)).

Формулы Френеля. Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно получить с помощью **формул Френеля**. Они устанавливают соотношения между амплитудами падающей, преломленной и отраженной волн.

Всякую плоскую монохроматическую волну можно представить как совокупность двух плоских монохроматических волн той же частоты, в которых векторы \vec{E} колеблются вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений

$$E_y = A_1 \sin(\omega t - kx + \alpha_1);$$

$$E_z = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha_2).$$

Поэтому для нахождения закономерностей отражения и преломления рассмотрим колебания вектора \vec{E} в плоскости падения (p -волна) и в плоскости перпендикулярной плоскости падения (S -волна) (рис. 38.11).

Обозначим амплитуды напряженности для падающей, отраженной и преломленной p - и S -волн в точках поверхности раздела соответственно E_{p0} ; $E_{p \text{ отр}}$; $E_{p \text{ пр}}$; E_{S0} ; $E_{S \text{ отр}}$; $E_{S \text{ пр}}$. Тогда формулы Френеля запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{p \text{ отр}} &= E_{p0} \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \\ E_{p \text{ пр}} &= E_{p0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i+r)} \\ E_{S \text{ отр}} &= -E_{S0} \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \\ E_{S \text{ пр}} &= E_{S0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \end{aligned} \right\} \quad (38.4)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое физическое явление называется «поляризация света»?
2. Как отличить естественный свет от линейно поляризованного света?
3. Изобразите на рисунке диаграмму направленности излучения гармонического осциллятора.
4. Объясните поляризацию света, отраженного под углом Брюстера.
5. Как поляризован свет, отраженного под углом Брюстера?
6. Какие величины связывают между собой формулы Френеля?

39. ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

Двойное лучепреломление. При прохождении светового луча через анизотропные тела – кристаллы, механические, электрические, оптические и другие свойства которых зависят от направления внутри кристалла, световой луч разбивается на два. Это явление получило название **двойного лучепреломления**. По выходе из кристалла эти два луча оказываются пространственно разделенными и поляризованными в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 39.1). Для одного из них при изменении угла падения отношение $\frac{\sin i}{\sin r}$ остается постоянным ($n_o = \text{const}$). Такой луч называется **обыкновенным** (o). Плоскость колебания светового вектора в обыкновенном луче перпендикулярна главному сечению кристалла.

Для другого – **необыкновенного** – луча (e), при изменении угла падения отношение $\frac{\sin i}{\sin r}$ не остается постоянным ($n_e \neq \text{const}$). Плоскость колебания вектора \vec{E} для этого луча лежит в плоскости

главного сечения кристалла. Главным сечением кристалла для данного светового луча называется плоскость, содержащая световой луч и **оптическую ось** кристалла. Оптической осью называется направление в кристалле, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи идут не разделяясь. Следует помнить, что через кристалл можно провести бесчисленное множество главных сечений. Существуют кристаллы, имеющие очень сложную структуру.

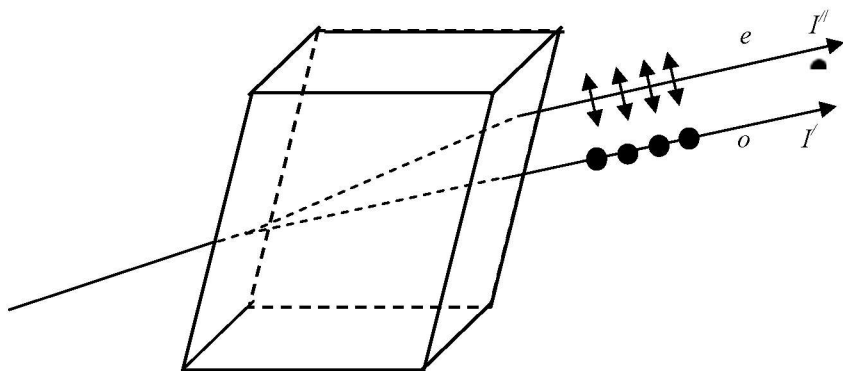


Рис. 39.1

В настоящем разделе рассматриваются лишь те кристаллы, которые имеют только **одно** направление, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления. Такие кристаллы называются **одноосными**.

Типичными представителями одноосных кристаллов являются исландский шпат и кварц. В большинстве одноосных кристаллов яркость обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова. Однако в кристалле турмалина толщиной около 1 мм обыкновенный луч практически полностью поглощается. Такое различное поглощение называется **дихроизмом**. Это свойство турмалина используется для получения поляризованного света.

Явление двойного лучепреломления объясняется исключительно анизотропией кристалла. В естественном луче света, падающем на кристалл, все направления колебания вектора \vec{E} равноценны и равновероятны. Составляющая светового вектора, перпендикулярная главному сечению кристалла, вызывает колебания электронов вещества ей коллинеарные. Образующиеся диполи излучают вторичные волны, у которых вектор \vec{E} также перпендикулярен главному сечению кристалла. Эти вторичные волны, интерферируя между собой и с составляющей проходящего луча, имеющей то же направление вектора \vec{E} , образуют обыкновенный луч. В этом луче вектор \vec{E} , будучи перпендикулярен главному сечению кристалла, будет перпендикулярен и оптической оси независимо от направления его распространения внутри кристалла. В одноосных кристаллах все направления, перпендикулярные оптической оси, равноценны, поэтому на обыкновенном луче анизотропные свойства кристалла не сказываются. Поэтому он распространяется внутри кристалла с некоторой постоянной скоростью ($v=\text{const}$, $n_o=\text{const}$). Рисунок 39.2 показывает, что обыкновенный луч, распространяясь в трех различных (1,2,3) направлениях, проходит за одно и то же время одинаковые расстояния. Колебания вектора \vec{E} , в нем изображены точками. Таким образом, волновой поверхностью обыкновенного луча является сфера A (рис. 39.2).

Составляющая вектора \vec{E} , лежащая в плоскости главного сечения вызывает колебания диполей в этой же плоскости. Диполи излучают волны с колебанием светового вектора в плоскости главного сечения кристалла. Эти волны, интерферируя с проходящей волной, образуют необыкновенный луч. Колебания вектора \vec{E} , в необыкновенном луче в зависимости от направления распространения в кристалле составляют различный угол с оптической осью. Поэтому в различных направлениях этот луч будет распространяться с различной скоростью. В частности, для **положительного** кристалла (рис. 39.2), (в котором скорость необыкновенного луча **меньше** скорости обыкновенного: $v_e < v_o$, и показатель преломления необыкновенного луча **больше** показателя преломления обыкновенного луча: $n_e > n_o$), скорость необыкновенного луча будет наибольшей для направления 1 и наименьшей для

направления 3 ($v_e \neq \text{const}$, $v_o \neq \text{const}$). Колебания светового вектора в необыкновенном луче изображены на рис. 39.2 двухсторонними стрелками. Волновой поверхностью для необыкновенного луча является эллипсоид вращения B (рис. 39.2). Для положительного кристалла эллипсоид вращения B вписан в сферу A . Для отрицательного кристалла, в котором $v_e > v_o$ ($n_e < n_o$), наоборот, сфера вписывается в эллипсоид.

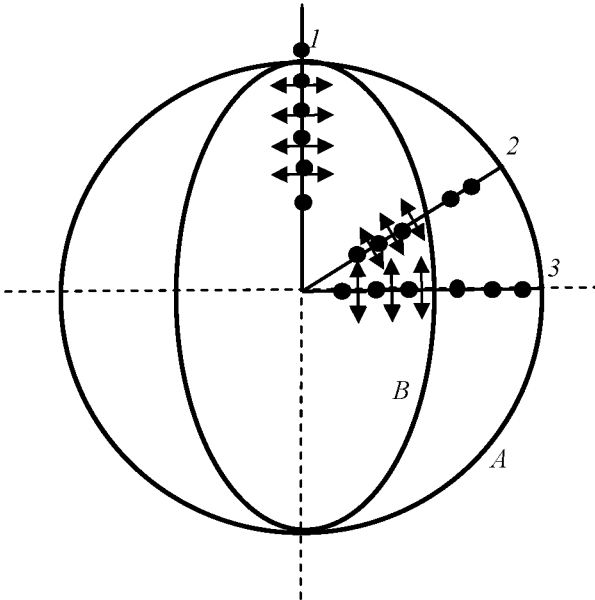


Рис. 39.2

Таким образом, из-за различия скоростей, а, следовательно, и показателей преломления $n_o = c/v_o$, $n_e = c/v_e$ у обыкновенного и необыкновенного лучей при их распространении внутри кристалла, оба этих луча оказываются пространственно разделенными. Возникает явление двойного лучепреломления. И только вдоль оптической оси они распространяются с одинаковой скоростью, не разделяясь, так как колебания вектора \vec{E} в том и другом луче перпендикулярны оптической оси кристалла. Следует подчеркнуть, что именно «необыкновенные» свойства необыкновенного луча приводят к явлению двойного лучепреломления. Именно на этом луче сказываются анизотропные свойства кристалла.

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно изобразить на основе принципа Гюйгенса. Пусть на положительный кристалл с оптической осью AA' , лежащей в плоскости рисунка, падает плоская волна (рис. 39.3). Фронт волны AB сначала возбуждает в кристалле в точке A вторичные волны, и в кристалле начинают распространяться два луча e и o , соответственно с волновыми поверхностями в виде эллипсоида и сферы. К тому времени, когда фронт волны достигнет поверхности кристалла в точке C , волновые поверхности лучей, распространяющихся из точки A примут вид, изображенный на рис. 39.3. Около всех точек, промежуточных между A и C , возникнут также волновые поверхности, но меньших размеров. Согласно принципу Гюйгенса огибающая всех вторичных волн показывает новое направление распространения волны. Огибающими вторичных волн в примере являются две плоскости, перпендикулярные плоскости рисунка со следами на нем EC и DC . Эти плоскости являются касательными к волновым поверхностям соответственно необыкновенной и обыкновенной волны и являются фронтами этих преломленных волн. Линия, проведенная через точки A и E , показывает направление распространения необыкновенного луча, а линия, проведенная через точки A и D ход обыкновенного луча. Луч AE в настоящем примере не нормален к волновому фронту.

Для случая, когда оптическая ось AA' параллельна преломляющей грани кристалла и перпендикулярна к плоскости падения, картина построения хода обыкновенного и необыкновенного лучей представлена на рис. 39.4. Волновыми поверхностями соответственно необыкновенного и обыкновенного лучей являются эллипсоид и сфера. Следы пересечения этих фигур с плоскостью рисунка дают две окружности: меньшего диаметра для положительного кристалла – след эллипсоида, большего – сферы. По аналогии с предшествующим примером касательные EC и DC к двум окружностям дают точки E и D , через которые проводятся два луча необыкновенный – e и обыкновенный – o .

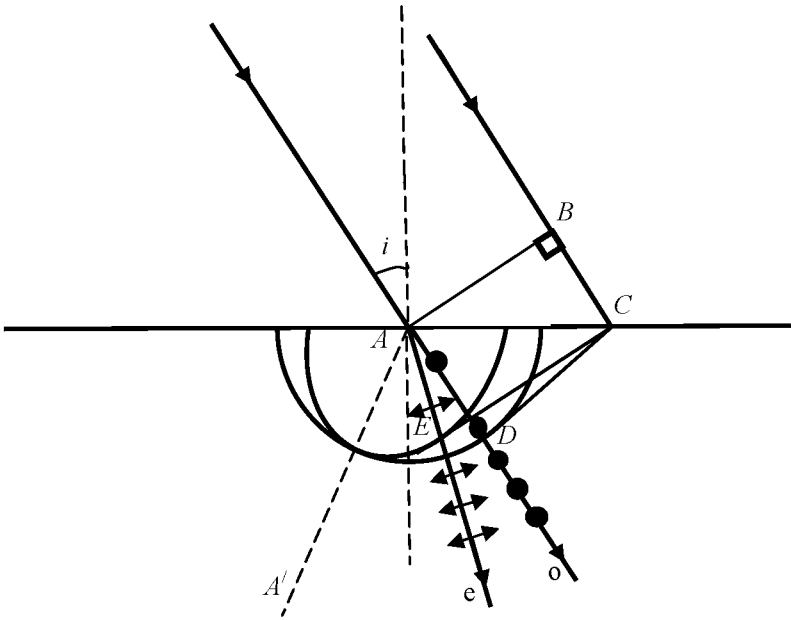


Рис. 39.3

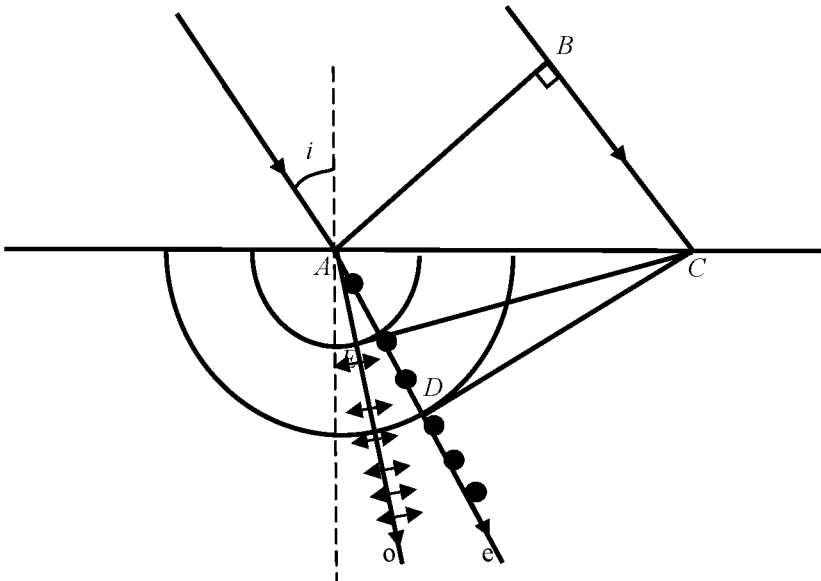


Рис. 39.4

Для получения из естественного света плоскополяризованного света можно воспользоваться либо поляризацией при отражении под углом Брюстера, либо двойным лучепреломлением в кристалле. Плоскополяризованный свет при отражении под углом Брюстера мало интенсивен. При двойном лучепреломлении при небольшой толщине кристалла расхождение плоскополяризованных лучей мало. Поэтому для получения плоскополяризованного света пользуются более сложными системами кристаллов, в частности, призмой Николя.

У. Николь изобрел призму в 1828 г. Она вырезается из кристалла исландского шпата и в поперечном сечении имеет форму ромба (рис. 39.5). По плоскостям BD призма разрезается и склеивается канадским бальзамом, показатель преломления которого ($n_{к.б.} = 1,550$) имеет промежуточное значение между показателями преломления для необыкновенного ($n_e = 1,515$) и обыкновенного ($n_o = 1,658$) лучей ($n_e < n_{к.б.} < n_o$). Благодаря такому значению показателя преломления канадского бальзама и специальной ромбоидальной конструкции призмы, обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение на поверхности канадского бальзама и поглощается в оправе призмы. Необыкновенный луч свободно проходит через слой канадского бальзама и после преломления на грани CD выходит из призмы.

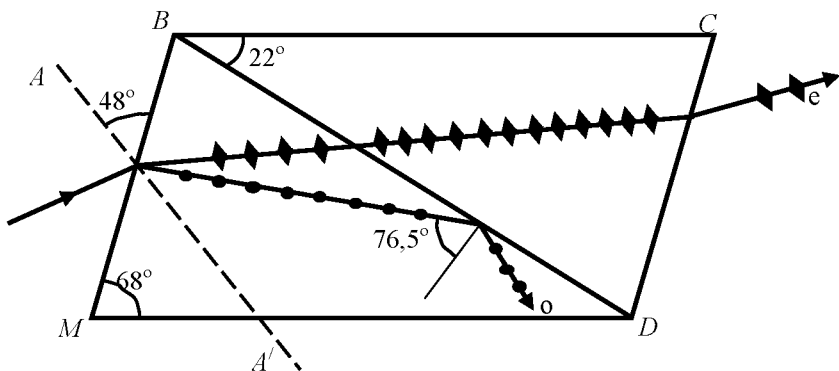


Рис. 39.5

Для получения поляризатора с большой площадью поверхности применяют поляризующие пленки – поляроиды. Они представляют собой пленку целлюлоида, на которую нанесено большое число микроскопических одинаково ориентированных кристалликов сильно дихроичного вещества герпатита (сернокисло-го йод-хинина). Такая пленка с толщиной слоя кристаллов герпатита в 0,3 мм полностью поглощает один из лучей.

Пример 1. На поляризатор падает естественный свет интенсивностью I_0 . Какова интенсивность света, вышедшего из поляризатора?

Предположим, что амплитуда светового вектора в плоской электромагнитной волне, падающей на поляризатор равна E_0 и вектор \vec{E}_0 составляет угол β с плоскостью поляризатора. Тогда через поляризатор проходит только составляющая \vec{E}_{\parallel} , определяемая соотношением:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_0 \cos \beta. \quad (39.1)$$

Возведем левую и правую части соотношения в квадрат, и получим:

$$\vec{E}_{\parallel}^2 = \vec{E}_0^2 \cos^2 \beta. \quad (39.2)$$

В естественном свете, падающем на поляризатор, все значения β от 0 до 2π равновероятны, так как вектор \vec{E}_0 колеблется во всевозможных направлениях в плоскости, перпендикулярной направлению скорости волны. Поэтому равенство (39.2) нужно усреднить по β . Следовательно, $\vec{E}_{\parallel}^2 = \vec{E}_0^2 \langle \cos^2 \beta \rangle$.

Для определения $\langle \cos^2 \beta \rangle$ используем теорему о среднем значении функции интегрального исчисления, которая гласит: среднее значение функции на некотором отрезке равно интегралу от этой функции по этому отрезку, деленному на длину отрезка

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Применительно к $\langle \cos^2 \beta \rangle$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \beta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\beta}{2} d\beta = \frac{1}{4\pi} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом: $E_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} E_0^2$. Учитывая, что $I \sim E^2$, получим:

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_0. \quad (39.3)$$

Вывод: интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из поляризатора равна половине интенсивности естественного света, падающего на поляризатор.

Пример 2. Два поляризатора расположены так, что угол между плоскостями этих поляризаторов $\varphi = 60^\circ$. Во сколько раз уменьшается интенсивность света при прохождении через оба поляризатора P_1 и P_2 ? При прохождении каждого из поляризаторов потери на отражение и поглощение света $\eta = 5\%$.

Если бы не было потерь на отражение и преломление, то при прохождении светом первого поляризатора P_1 , интенсивность света составила бы

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

С учетом названных потерь:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta). \quad (39.4)$$

Расчет интенсивности света I_2 , прошедшего второй поляризатор P_2 нужно провести с учетом потерь согласно закону Малюса

$$I_2 = I_1 (1 - \eta) \cos^2 \varphi. \quad (39.5)$$

Подстановка выражения для интенсивности света I_1 (39.4) в уравнение (39.5) дает формулу для определения I_2 :

$$I_2 = I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi$$

или

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi} = 8,86.$$

Пример 3. На пути частично поляризованного пучка света с интенсивностью I_1 поместили николю – N . При его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$ вокруг луча из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света I_2 уменьшилась в $n = 3$ раза. Найдите степень поляризации падающего света.

Интенсивность частично поляризованного света естественного света I_1 падающего на поляризатор, равна сумме двух интенсивностей – интенсивности естественного света I_0 , и интенсивности плоско-поляризованного света I'_1 : $I_1 = I_0 + I'_1$. Поэтому в положении наибольшего пропускания через поляризатор пройдет свет с интенсивностью:

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_0 + I'_1, \quad (39.6)$$

а в положении наименьшего пропускания – свет с интенсивностью:

$$I_{\min} = \frac{1}{2}I_0. \quad (39.7)$$

По условию задачи

$$n = \frac{I_{\max}}{I_{\text{промеж}}}, \quad (39.8)$$

где $I_{\text{промеж}}$ – интенсивность света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол α из положения наибольшего пропускания света. Причем

$$I_{\text{промеж}} = \frac{1}{2}I_0 + I'_1 \cos^2 \alpha. \quad (39.9)$$

Второе слагаемое в уравнении (39.9) с помощью теоремы Малюса определяет интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол α .

Из соотношений (39.6), (39.8) и (39.9) следует, что

$$n = \frac{\frac{1}{2}I_0 + I'_1}{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 \cos^2 \alpha}, \text{ откуда}$$

$$I_0 = \frac{2I'_1(1 - n \cos^2 \alpha)}{n - 1}. \quad (39.10)$$

По определению степеней поляризации света (38.1)

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$
 Решая совместно уравнения (39.6), (39.8) и (39.10), имеем для падающего света:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 - \frac{1}{2}I_0}{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 + \frac{1}{2}I_0} = \frac{I'_1}{I_0 + I'_1} = \\
 &= \frac{I'_1}{\frac{2I'(1 - n \cos^2 \alpha)}{n-1} + I'_1} = \frac{n-1}{1 - n \sin 2\alpha} = 0,8.
 \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. С чем связана оптическая анизотропия?
2. Что такое оптическая ось кристалла?
3. Какой луч называют обыкновенным, а какой – необыкновенным и почему?
4. В каком направлении фазовые скорости обыкновенного и необыкновенного лучей отличаются наиболее сильно?
5. Какой кристалл называют положительным, а какой – отрицательным?
6. Поясните построение Гюйгенса для обыкновенного и необыкновенного лучей.
7. Нарисуйте примерный ход лучей в призме Николя.
8. Какая особенность исландского шпата позволяет отделить обыкновенный луч от необыкновенного в призме Николя?
9. Какова внутренняя структура поляризующей пленки?
10. Какое свойство кристаллов герapatита используется в поляроидах?

40. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

При падении **естественного** света на анизотропный кристалл из-за явления двойного лучепреломления световой луч разделяется на два луча – обыкновенный (o) и необыкновенный (e). В общем случае эти лучи приобретают **оптическую разность хода** Δ и соответствующую ей разность фаз δ , но интерферировать не могут, так как содержат колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами.

Иначе обстоит дело при падении **плоскополяризованного** света на анизотропный кристалл. Луч так же делится на два, но уже когерентных луча – (o) и (e). Плоскости колебаний у них взаимно перпендикулярны. Они могут интерферировать, но при условии, что плоскости колебаний у них совпадают.

Итак, для наблюдения интерференции плоскополяризованного света нужно провести следующий опыт (рис. 40.1 (а)):

1) на пути луча естественного света поставить первый поляризатор (P) и с его помощью получить плоскополяризованный свет;

2) далее на пути уже плоскополяризованного света с напряженностью \vec{E} поставить кристаллическую пластину для деления одного луча на два (o) и (e), из-за разной скорости распространения в кристалле лучи (o) и (e) приобретают разность фаз δ ;

3) наконец, после кристаллической пластинки на пути лучей (o) и (e) нужно поставить второй поляризатор (\vec{P}) с целью сведения колебаний этих лучей в одну плоскость – плоскость второго поляризатора (рис. 40.1 (б)). Результат интерференции зависит от длины волны света, падающего на первый поляризатор, и проявляется в виде ослабления или усиления интенсивности света с напряженностью \vec{E} .

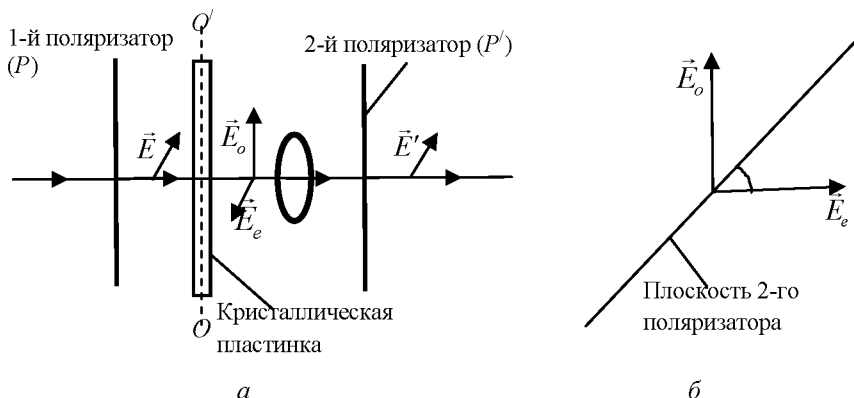


Рис. 40.1

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку. На выходе из пластинки два когерентных световых колебания (лучи o) и (e)) характеризуются соответственно напряженностями \vec{E}_o и \vec{E}_e . Колебания осуществляются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях согласно уравнениям

$$E_e = A_1 \cos \omega t; \quad (40.1)$$

$$E_o = A_2 \cos(\omega t + \delta), \quad (40.2)$$

где ω – частота, а A_1 и A_2 – амплитуды соответствующих колебаний. Результирующая напряженность является суммой напряженностей \vec{E}_o и \vec{E}_e . (рис. 40.2). Угол φ между направлениями векторов \vec{E}_o и \vec{E}_e определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_o}{E_e} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t},$$

при условии, что амплитуды колебаний равны $A_1 = A_2$ и разность фаз $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} \omega t$, или $\varphi = \pm \omega t$. Направление распространения света – от «нас» в плоскость чертежа (рис. 40.2).

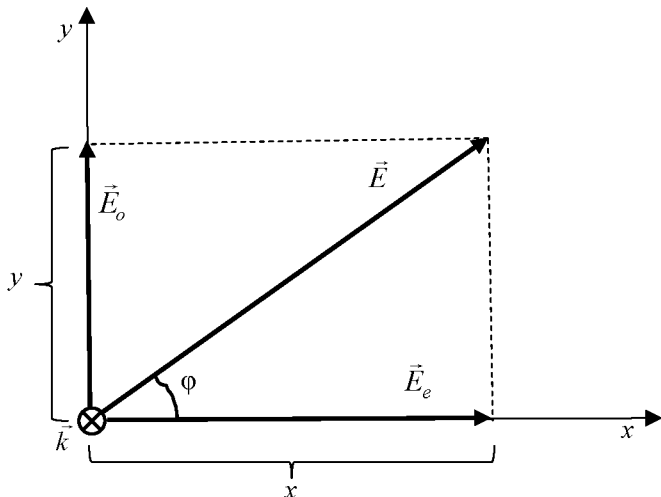


Рис. 40.2

Это означает, что плоскость колебаний результирующего вектора \vec{E} поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания ω . Имея ввиду этот поворот вектора \vec{E} , принято говорить об **эллиптической** поляризации световой волны или поляризации **по кругу**, а если поворот отсутствует говорят о **плоскополяризованном** свете. Сложим два колебания с напряженностями \vec{E}_o и \vec{E}_e . Для упрощенного анализа и более наглядного представления окончательных формул обозначим: $E_e = x$; $E_o = y$; $A_1 = a$; $A_2 = b$. С учетом приведенных обозначений перепишем уравнения (40.1) и (40.2) в виде

$$x = a \cos \omega t; \quad (40.3)$$

$$y = b \cos(\omega t + \delta). \quad (40.4)$$

Из уравнения (40.3) найдем:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (40.5)$$

Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения (40.5)

$$\cos^2 \omega t = \frac{x^2}{a^2}, \text{ или: } 1 - \sin^2 \omega t = \frac{x^2}{a^2}, \text{ откуда:}$$

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (40.6)$$

Из уравнения (40.4) имеем $\cos(\omega t + \delta) = y/b$, или $\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta = y/b$. С учетом уравнений (40.15) и (40.16) получим

$$\frac{x}{a} \cdot \cos \delta \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin \delta = \frac{y}{b}. \quad (40.7)$$

Преобразуем уравнение (40.17) к виду:

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \delta$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \delta. \quad (40.8)$$

Если разность фаз $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, то уравнение (40.8) преобразуется

в уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (40.9)$$

и свет будет эллиптически поляризован (конец вектора \vec{E} описывает эллипс).

При $a = b$ уравнение (40.9) станет уравнением окружности и, следовательно, свет будет поляризован по кругу (конец вектора \vec{E} описывает окружность). Если $\delta = 0$ и $\delta = \pm \pi$ уравнение (40.9) преобразуется в уравнение прямой линии:

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} + \frac{x^2}{a^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0, \text{ откуда } y = \frac{b}{a} x.$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении – волна называется **плоскополяризованной**.

Напомним еще раз, что $x = E_e$; $y = E_o$; $a = A_1$; $b = A_2$.

Таким образом после кристаллической пластинки свет будет в **общем** случае эллиптически поляризован, но в **частных** случаях, как описано выше, будет либо **плоскополяризован**, либо поляризован **по кругу**.

Вновь вернемся к опыту по наблюдению интерференции поляризованного света (рис. 40.1 а). Предположим, что плоскости поляризаторов P и P' совпадают («параллельны»), а угол φ между плоскостью поляризатора P и оптической осью OO' кристаллической пластинки составляет угол $\varphi = \pi/4$. Тогда на выходе из пластинки два взаимно перпендикулярных вектора \vec{E}_o и \vec{E}_e образуют стороны прямоугольника, в котором $|\vec{E}|$ является диагональю (рис. 40.3).

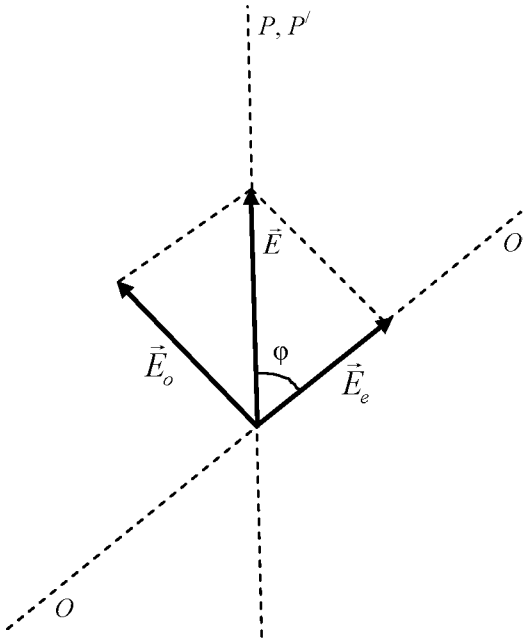


Рис. 40.3

Из рисунка 40.3 следует, что

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E\sqrt{2}}{2}, \quad (40.10)$$

где E – амплитуда плоскополяризованной волны, вышедшей из первого поляризатора. Через второй поляризатор P' пройдут составляющие векторов \vec{E}_o и \vec{E}_e вдоль плоскости поляризатора P'

$$E'_o = E_o \cos \frac{\pi}{4}, \quad E'_e = E_e \cos \frac{\pi}{4}.$$

С учетом уравнения (40.10) получим:

$$E'_o = \frac{E}{2} \quad \text{и} \quad E'_e = \frac{E}{2}. \quad (40.11)$$

Графический метод сложения амплитуд (рис. 40.4) приводит к следующему выражению для амплитуды E_{\parallel} результирующей волны, прошедшей поляризатор P' для случая «параллельных» поляризаторов.

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4}E_o'^2 + \frac{1}{4}E_e'^2 - 2E_o'E_e' \cos(180^\circ - \delta).$$

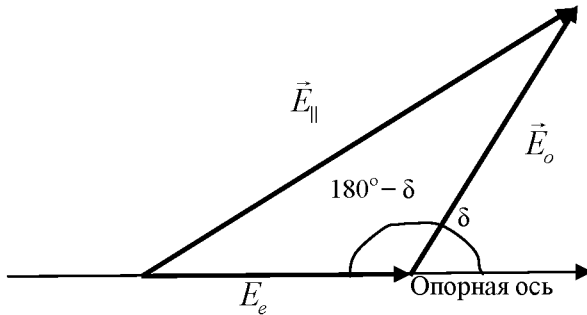


Рис. 40.4

Приняв во внимание соотношения (40.11), имеем

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2 \cos \delta = \frac{1}{2}E^2 (1 + \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому

$$I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (40.12)$$

При поляризаторах P и P' расположенных так, что их плоскости пропускания P и P' взаимно перпендикулярны (скрещенных поляризаторах) (рис. 40.5) проекции векторов \vec{E}_o и \vec{E}_e на направление P' имеют разные знаки. Это означает, что в дополнении к разности фаз δ между колебаниями E'_o и E'_e возникает дополнительная разность фаз, равная π . И амплитуда результирующей волны E'_{\perp} , прошедшей второй поляризатор, определится из соотношения:

$$E'^2_{\perp} = E'^2_o + E'^2_e + 2E'_o E'_e \cos(\delta + \pi).$$

Положим, что в этом случае также (рис. 40.6)

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E\sqrt{2}}{2}, \text{ и } E'_o = E_o \cos \frac{\pi}{4}, \quad E'_e = E_e \cos \frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$E'^2_{\perp} = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2 \cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2 (1 - \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

или

$$I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (40.13)$$

Таким образом, интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего второй поляризатор, зависит от разности фаз колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах. Из формул (40.12) и (40.13) следует, что интенсивности I'_{\parallel} и I'_{\perp} называются «дополнительными», так как в сумме они дают интенсивность I . В частности, при $\delta = 2m\pi$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ интенсивность I'_{\parallel} будет равна I , а интенсивность I'_{\perp} обратится в нуль. При $\delta = (2m+1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ интенсивность I'_{\parallel} будет равна нулю, а интенсивность I'_{\perp} достигнет значения I .

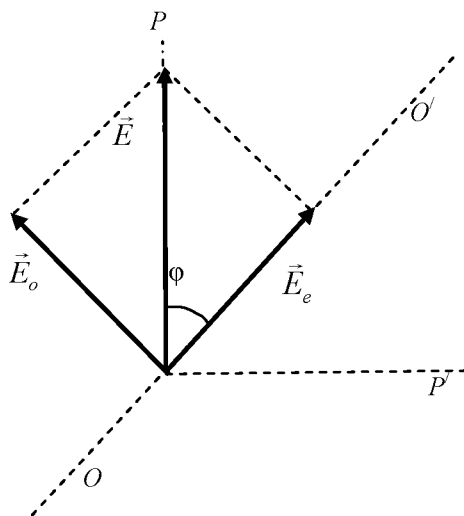


Рис. 40.5

Разность фаз δ и оптическая разность хода Δ лучей o и e на выходе из кристаллической пластинки связаны соотношением

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}, \quad (40.14)$$

где λ – длина световой волны в вакууме, причем $\Delta = (n_o - n_e)d$, где в свою очередь n_o и n_e – соответственно показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, а d – толщина пластинки.

Вырезанная параллельно оптической оси OO' пластинка (рис. 40.1 а), для которой выполняется условие

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \frac{\lambda}{4} \quad (40.15)$$

(здесь $m = 0, 1, 2, \dots$), называется **пластинкой в четверть волны**. При прохождении через такую пластинку лучи o и e приобретают разность фаз $\delta = 2m\pi$.

Пластинка, для которой выполняется условие

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad (40.16)$$

называется **пластинкой в полволны** и т.д.

Напоминаем, что для отрицательного кристалла $n_o > n_e$, а для положительного – наоборот: $n_e > n_o$.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается интерференция двух волн, поляризованных взаимно перпендикулярно, от «обычной» интерференции одинаково поляризованных волн?
2. Каков результат интерференции двух волн, поляризованных взаимно перпендикулярно, в общем случае?
3. К какому результату приводит частный случай волн одинаковой амплитуды с разностью хода $\lambda/2$?
4. К какому результату приводит частный случай волн одинаковой амплитуды с разностью хода $\lambda/4$?
5. Объясните направление вектора напряженности электрического поля в фиксированной точке пространства в случае круговой поляризации.
6. В нашем распоряжении имеются кристаллические пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$ и поляризатор. Объясните, можно ли их помощью отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу.

41. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Явление дисперсии заключается в различии значений показателя преломления вещества для различных длин волн. Например, в классическом опыте по преломлению солнечных лучей в стеклянной призме лучи разных цветов (длин волн) из-за дисперсии стекла преломляются на разные углы.

В подавляющем большинстве экспериментов **показатель преломления** растет с ростом частоты (или, что то же самое, – падает с ростом длины волны). Такое поведение показателя преломления называется **нормальной дисперсией**. Например, в опыте с призмой мы наблюдаем нормальную дисперсию. В более тонких экспериментах в очень узких интервалах частот, соответствующих так называемым **линиям поглощения**, можно наблюдать и **аномальную дисперсию**, т.е. уменьшение показателя преломления с ростом частоты (увеличение с ростом длины волны).

Классическая элементарная теория дисперсии. Качественно понять причину дисперсии можно на основе простой **классической модели**, в которой атом вещества рассматривается как обычный пружинный маятник. Маленький шарик массой m и зарядом q закреплен на пружинке жесткостью k (см. рис. 41.1). Под дей-

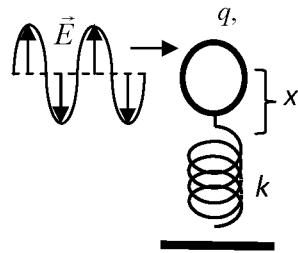


Рис. 41.1

ствием переменного электрического поля световой волны E шарик совершает **вынужденные колебания** на частоте волны ω . Кроме электрической силы на шарик действует сила трения $F_{\text{тр}}$ пропорциональная скорости шарика v , так что $F_{\text{тр}} = -\beta v$.

Модель отражает некоторые реальные свойства атома вещества. **Дипольный момент** атома p в данной модели принимается равным qx , и, таким образом, заряд q и смещение x отражают распределение заряда в атоме. Если дипольный момент атома пропорционален внешнему полю E , то это эквивалентно действию на заряд возвращающей упругой силы: $F_{\text{упр}} = -kx$. Далее, двигаясь с ускорением, заряд теряет энергию на излучение, что в модели отражено введением силы трения («радиационное трение»). Феноменологический коэффициент трения β подбирается так, чтобы средние за период потери энергии на излучение реального атома соответствовали рассчитанным из модели. Наконец, если под веществом понимать сильно **разреженный газ**, то это позволяет не учитывать взаимодействие атома с «соседями», что значительно упрощает рассмотрение.

Перейдем к математическому описанию явления дисперсии. Рассмотрим плоскополяризованную монохроматическую волну, вектор \vec{E} которой параллелен пружинке. Уравнение движения для шарика (в проекции на «ось пружинки») будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + qE_0 \cos \omega t,$$

или, что то же самое,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t, \quad (41.1)$$

где $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = \beta/m$. Домножая последнее уравнение на $n_0 q$ (n_0 – концентрация атомов), и, учитывая, что поляризация среды (дипольный момент элемента объема) $P = n_0 p$, получим:

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P + \gamma P = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (41.2)$$

Рассмотрим решения данного уравнения в предельных случаях.

1. Возьмем область частот ω далеких от ω_0 . Коэффициент γ (он имеет размерность частоты), определяющий «радиационное трение», очень мал ($\gamma \ll \omega_0$). Реально $\gamma \ll |\omega - \omega_0|$, и, за исключением узкой области резонанса, слагаемым γ вообще можно пренебречь. Уравнение (41.2) примет вид

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t,$$

а его решением, как легко проверить, $P = P_0 \cos \omega t$. Перегруппировав сомножители, получаем:

$$\begin{aligned} P_0 \cos \omega t \equiv P &= \frac{n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \equiv \\ &\equiv \varepsilon_0 \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \varepsilon_0 \chi(\omega) E, \end{aligned} \quad (41.3)$$

где

$$\chi(\omega) \equiv \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \equiv \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (41.4)$$

восприимчивость, а $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$ – некая константа, называемая квадратом «плазменной частоты». Физический смысл ω_p будет рассмотрен позднее. Из (41.3) имеем (за исключением частот близких к ω_0) для показателя преломления

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\varepsilon_0 n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \equiv 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|. \quad (41.5)$$

При извлечении квадратного корня из уравнения (41.5) для получения $n(\omega)$ можно ограничиться линейным членом разложения Тейлора, так как $\varepsilon(\omega)$ для разреженных газов очень близка к единице:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|.$$

2. Вернемся к исходному уравнению (41.2) и рассмотрим случай резонанса $\omega = \omega_0$. В силу уравнения колебаний $\ddot{P} + \omega_0^2 P = 0$ первые два слагаемых сокращаются, и мы имеем просто

$$\gamma \dot{P} = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega_0 t \equiv \varepsilon_0 \omega_0^2 E_0 \cos \omega_0 t.$$

Непосредственным интегрированием получаем решение

$$P = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0} E_0 \sin \omega_0 t. \quad (41.6)$$

Как видно, колебания поляризации отстают по фазе от колебаний электрического поля на $\pi/2$ (разность фаз между $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$), и связь между P и E не может быть выражена соотношением $P(t) = \chi E(t)$. Результат можно (хотя и не слишком убедительно) интерпретировать так: в резонансе поляризация не имеет составляющей, изменяющейся во времени по закону изменения внешнего поля и, следовательно, при $\omega = \omega_0$ следует положить $\chi = 0$, $\varepsilon = 1$ и $n = 1$ (к этому же «приводят» и соображения «физической непрерывности» при переходе $\chi(\omega)$ через $\omega = \omega_0$). Таким образом, вблизи резонансной частоты мы получаем узкую $\Delta\omega \sim \gamma$ область аномальной дисперсии.

Следует подчеркнуть, что $\chi(\omega_0) = 0$ не означает равенства нулю амплитуды колебаний поляризации. Напротив, из-за малой величины γ в знаменателе (41.6) амплитуда этих колебаний именно в резонансе имеет резкий максимум. В этом определенный дефект излагаемой элементарной теории: соотношение $P = \chi E$ не в полной мере выражает связь между P и E . Дефект устраняется, при введении комплексной восприимчивости, (см. ниже).

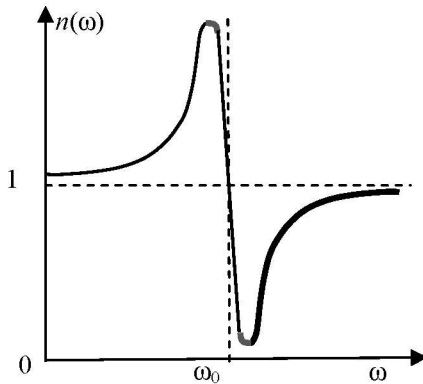


Рис. 41.2

График $n(\omega)$ с учетом $n(\omega_0) = 1$ приведен на рис. 41.2 для удобства в несколько утрированном виде: область аномальной дисперсии показана преувеличенно широкой (как было бы, если $\gamma \sim \omega_0$). На самом деле, область аномальной дисперсии столь узка, что ее наблюдение представляет собой сложную экспериментальную задачу.

Поглощение света. Рассмотрим мощность N , теряемую световой волной при раскачивании заряда q . По определению **мгновенной мощности** $N = Fv$, в нашем случае $N = qEx$. Начнем опять с частот, далеких от резонансной ($|\omega - \omega_0| \ll \gamma$). Так как $x = P/n_0q$, то, используя (41.3), имеем

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{n_0 q} \dot{E} = -\frac{\varepsilon_0 \chi \omega}{n_0 q} E_0 \sin \omega t \equiv -v_0 \sin \omega t.$$

Тогда **средняя** мощность $\langle N \rangle$ за период $T \equiv 2\pi/\omega$ равна

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T N dt = -\frac{qE_0 v_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{qE_0 v_0}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0. \end{aligned} \quad (41.7)$$

Таким образом, вдали от резонансной частоты рассеяния мощности световой волны не происходит, и среда является **прозрачной**.

Теперь рассмотрим случай **резонанса** $\omega = \omega_0$. Скорость x проще всего выразить непосредственно из (41.1), учитывая, что при $\omega = \omega_0$ первые два слагаемых сокращаются:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{qE_0}{m\gamma} \cos \omega_0 t \equiv v_0 \cos \omega_0 t; \quad v_0 = \frac{qE_0}{m\gamma}, \\ \langle N \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T N dt = -\frac{qE_0 v_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\frac{qE_0 v_0}{2T} > 0. \end{aligned} \quad (41.8)$$

Учитывая, что величина γ , стоящая в знаменателе ν_0 является **малой**, заключаем, что в области частот, близких к резонансной, должно иметь место **сильное** поглощение света. Указанное поглощение действительно наблюдается экспериментально, а соответствующий интервал частот (его ширина $\Delta\omega \sim \gamma$) вследствие его узости называется **линией** поглощения.

Если в разреженном газе имеется **несколько сортов** атомов с различными резонансными частотами ω_{0i} (и различными постоянными затухания γ_i), то изложенную теорию легко модифицировать: следует ввести **относительные концентрации** $f_i \equiv n_{0i}/n_0$ каждого сорта атомов i (очевидно $\sum f_i = 1$). Тогда, в силу отсутствия взаимодействия между атомами, выражение (41.33) примет вид:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \omega_p^2 \sum \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|. \quad (41.9)$$

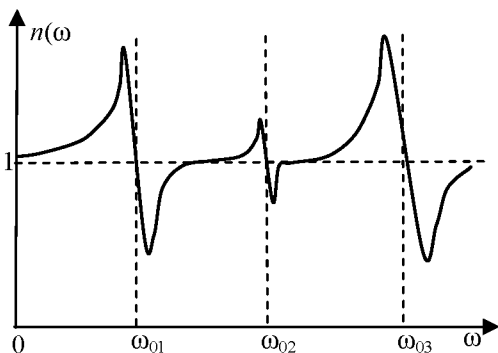


Рис. 41.3

Примерный вид кривой $n(\omega)$, соответствующей формуле (41.9) показан на рис. 41.3. Кроме того, смесь атомов будет иметь и несколько линий поглощения шириной порядка γ_i на частотах ω_{0i} .

С развитием физики выяснилось, что **каждый** атом имеет **несколько** линий поглощения, причем частоты ω_{0i} уникальны для каждого химического элемента. Частоты ω_{0i} лучше называть не «резонансными», а просто частотами поглощения элемента. Величины же f_i называют не «долей атомов в смеси», а силами **осцилляторов**: они показывают относительное участие этих «осцилляторов» в дисперсии. Отметим, что изучая спектр поглощения неизвестного газообразного вещества можно судить об элементном составе последнего.

При распространении плоской волны в однородной поглощающей среде интенсивность света I уменьшается по экспоненциальному закону. Причина в том, что потери мощности световой волны при взаимодействии с атомом среды пропорциональны интенсивности волны. Это видно, например, из формулы (41.8) для мгновенной мощности N , отдаваемой в резонансе. Запишем (41.8) в эквивалентном виде:

$$N = Fv = qE_0 \cos \omega t \frac{qE_0 \cos \omega t}{m\gamma} = \frac{(qE_0)^2}{m\gamma} \cos^2 \omega t = \frac{(qE)^2}{m\gamma} \sim E^2 \sim I.$$

Кроме того, потери мощности в слое вещества толщиной dz , расположенном перпендикулярно волновому вектору, очевидно, пропорциональны числу атомов в слое, т.е. толщине dz . Обозначив общий коэффициент пропорциональности через α , получим уравнение $dI = -\alpha I dz$, интегрирование которого приводит к

$$I = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (41.10)$$

где I_0 – интенсивность света на входе в поглощающий слой, z – толщина слоя, I – интенсивность на выходе из слоя. Коэффициент α называют **коэффициентом затухания** волны, он, очевидно, зависит от частоты. Соотношение (41.10) носит название **закона Бугера**.

Комплексная восприимчивость. Как отмечалось выше, связь $P = \chi E$ не дает полного описания поведения $P(t)$ при заданном $E(t)$. Полное описание опирается на метод **комплексных экспонент** при использовании **комплексной восприимчивости**. Данный метод часто применяется в физике, например, при описании цепей переменного тока, содержащих индуктивности и емкости. Кратко, суть метода в следующем. Вместо записи $\cos \omega t$ пишут $e^{i\omega t}$, подразумевая действительную часть последнего выражения. Домножение экспоненты $e^{i\omega t}$ на любое комплексное число $Z = a + ib$ приводит к изменению амплитуды и фазы. Действительно, по формуле Эйлера $Ze^{i\omega t} = Z_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = Z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, где $Z_0 = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $\varphi = \arctg(b/a)$.

Применим метод комплексных экспонент к решению уравнения (41.2). Запишем электрическое поле волны и поляризацию среды соответственно как $E = E_0 e^{i\omega t}$ и $P = P_0 e^{i\omega t}$ и подставим в (41.2). Тогда вместо (41.3) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 P_0 e^{i\omega t} &\equiv P = \frac{n_0 q^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E_0 e^{i\omega t} = \\
 &= \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E = \varepsilon_0 \chi E,
 \end{aligned}
 \tag{41.11}$$

где $\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ – восприимчивость, но теперь уже **ком-**

плексная. Разделяя действительную и мнимую части χ , имеем:

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} = \\
 &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - i \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \equiv \chi' + i\chi'',
 \end{aligned}
 \tag{41.12}$$

где $\chi' = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ и $\chi'' = \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$. Легко ви-

деть, что вдали от резонанса ($|\omega - \omega_0| \gg \gamma$) действительная часть χ' совпадает с нашим выражением (41.4) для χ ; в точке резонанса $\chi'(\omega_0) = 0$, а график $\chi'(\omega)$ имеет вид рис. 41.4, а. С другой стороны, график $|\chi''(\omega)|$ имеет вид кривой поглощения (рис. 41.4, б).

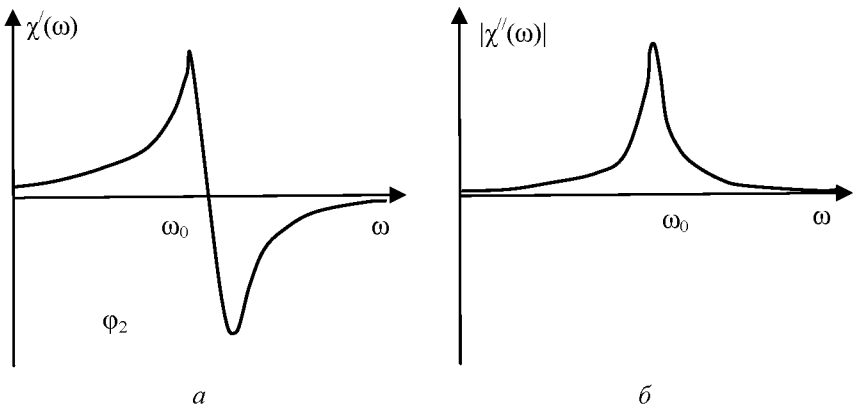


Рис. 41.4

Интересно отметить, что выражения для χ' и χ'' строятся из одних и тех же констант $-\omega_0$, ω_p и γ , поэтому, зная выражение для χ' можно однозначно восстановить χ'' и наоборот. Можно доказать, что этот факт не является особенностью конкретной модели среды, а опирается на фундаментальный принцип причинности. Дисперсия и поглощение волн в среде всегда связаны между собой.

При использовании комплексной восприимчивости комплексными оказываются также диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = (1+\chi') + i\chi'' \equiv \varepsilon' + i\varepsilon''$ и показатель преломления $n = (\varepsilon' + i\varepsilon'')^{1/2} \equiv n' - in''$ (для удобства принято писать знак минус перед in'' , чтобы n'' получался положительным). Физический смысл n' и n'' легко понять, записав уравнение плоской волны в виде комплексной экспоненты: $E = E_0 e^{i\omega(t-z/v)}$ (монохроматическая волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси z). Так как v по определению c/n , то

$$E_0 e^{i\omega(t-z/v)} = E_0 e^{i\omega(t-zn/c)} = E_0 e^{-\omega n'' z/c} E_0 e^{i\omega(t-zn'/c)}. \quad (41.13)$$

Мы видим, что амплитуда волны экспоненциально убывает с ростом z . Учитывая, что интенсивность I пропорциональна квадрату амплитуды, получаем известный нам закон Бугера: $I = I_0 e^{-\alpha z}$, где коэффициент затухания $\alpha = 2\omega n''/c$. Кроме того мы видим, что при распространении света в среде его фазовая скорость v уменьшается в n' раз.

Волны в веществе как результат интерференции первичной и вторичных волн. Согласно полученным результатам, скорость света (как мы увидим ниже, лучше говорить: «фазовая скорость») может принимать значения как меньше, так и больше фундаментальной константы c . Это может вызвать недоумение и вопросы. Например. Как $v > c$ согласуется с теорией относительности, согласно которой скорость c – максимальная из возможных в природе? Можно ли все-таки передавать сверхсветовые сигналы? Более детальное, чем это было сделано выше, рассмотрение явления дисперсии приводит к выводам, позволяющим ответить на подобные вопросы. Суть выводов в следующем.

1. Исходная («первичная») световая волна, проходя через среду, «раскачивает» атомы, заставляя их излучать (излучающие атомы назовем вторичными источниками).

2. Волна, распространяющаяся в среде, есть результат интерференции исходной волны и волн от вторичных источников.

3. И первичная, и вторичные волны распространяются с одной и той же фундаментальной скоростью c .

4. Результат интерференции первичной и вторичных волн может как отставать по фазе от фазы первичной волны, так и опережать ее (в первом случае говорят, что $n > 1$, во втором – что $n < 1$).

Перечисленные выводы, очевидно, снимают вопросы о противоречии теории дисперсии теории относительности и о возможности передачи сверхсветовых сигналов, поэтому стоит остановиться на них подробнее.

Сама по себе задача об интерференции первичной и вторичных волн чрезвычайно сложна (кроме поля «первичной» волны на атомы среды воздействуют вторичные волны «соседей»). Тем не менее, сам механизм «замедления» или «ускорения» света средой можно прояснить из простой модели, которую мы сейчас рассмотрим.

Пусть на пути первичной волны (перпендикулярно направлению ее распространения) расположен тонкий плоский слой атомов, причем атомы распределены в плоскости равномерно и достаточно плотно (см. рис. 41.5). Тогда результат интерференции волн от вторичных источников в

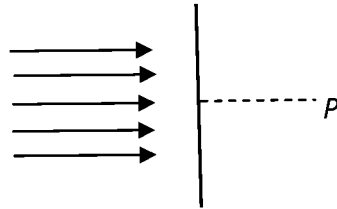


Рис. 41.5

точке P за экраном можно найти методом векторных амплитуд (спиралей Корню), как это обычно делается при рассмотрении дифракции Френеля. В отличие от дифракции Френеля, «наши» источники являются не мнимыми, а реальными, излучающими по законам электродинамики. Согласно последним, излучение заряда происходит в противофазе с его ускорением a . Для нашей модели гармонических колебаний заряда на пружинке имеем (будем отслеживать только фазу колебаний): $-a \equiv -\ddot{x} \sim \dot{x} \sim p \sim P$.

Согласно (41.4) $\chi > 0$ для $\omega < \omega_0$ и $\chi < 0$ для $\omega > \omega_0$, что означает, что при $\omega < \omega_0$ излучение происходит в одной фазе с первичной волной, а при $\omega > \omega_0$ – в противофазе, т.е. с отставанием на π .

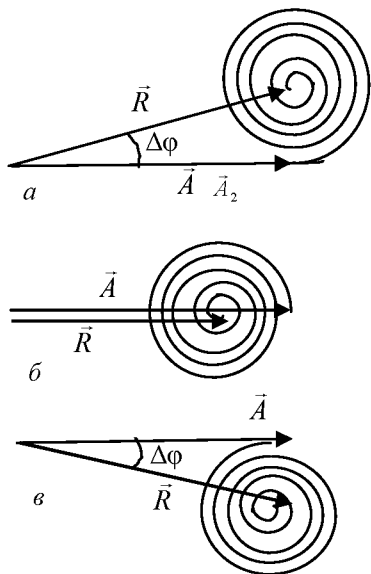


Рис. 41.6

$\omega < \omega_0$) – опережает («ускорение» $\Delta\varphi > 0$, $n < 1$, см. рис. в), либо (при $\omega = \omega_0$) фаза остается прежней ($\Delta\varphi = 0$, $n = 1$, см. рис. б). Все это находится в качественном согласии с элементарной теорией дисперсии. В грубом приближении реальную среду можно представить как совокупность атомных слоев, каждый из которых «действует» аналогично рассмотренному.

Наконец, согласно (41.6), при $\omega = \omega_0$ излучение происходит с отставанием на $\pi/2$.

Теперь осталось нарисовать спирали Корню для каждого из случаев и сложить результирующее колебание от вторичных волн с колебанием первичной волны, изображенным на рис. 41.6 стрелкой \vec{A} (если бы не было атомной плоскости, в точке P наблюдались бы только колебания \vec{A}). Как мы видим, влияние слоя атомов сводится к тому, что результирующее колебание (стрелка \vec{R}) либо (при $\omega < \omega_0$) слегка отстает по фазе от \vec{A} («замедление» $\Delta\varphi < 0$, $n > 1$, см. рис. а), либо (при

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения нормальной и аномальной дисперсий.
2. Какая модель среды используется в элементарной теории?
3. Как связан показатель преломления вещества с его диэлектрической восприимчивостью?
4. Как поглощается свет вдали от резонанса и в резонансе?
5. Может ли фазовая скорость света в среде превышать скорость света в вакууме?
6. Что такое фазовая и групповая скорости?

7. Какая из скоростей (фазовая или групповая) больше при аномальной дисперсии?

8. Какая из скоростей (фазовая или групповая) больше при аномальной дисперсии?

9. Объясните с помощью интерференции первичной и вторичных волн частотную зависимость показателя преломления.

42. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛОВ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Плазмой называется состояние вещества с высокой концентрацией ионов и свободных (не связанных с атомами) электронов. Любой газ при достаточно высокой температуре является плазмой. Также, из-за наличия в **металлах** свободных электронов, говорят о **плазме электронов проводимости**.

Описанная в разделе 41 элементарная теория дисперсии легко может быть обобщена на плазму: и «газовую», и «металлическую». Для этого достаточно устремить жесткость k «пружинки» (связывающей электрон с атомом) к нулю. Соответственно ω_0 тоже будет равна нулю; кроме того, везде, за исключением мало нам сейчас интересной области нулевых частот (статического поля), можно пренебречь γ . Т.о. вместо (41.4) и (41.5) восприимчивость и диэлектрическая проницаемость принимают вид:

$$\chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (42.1)$$

График $\varepsilon(\omega)$ приведен на рис. 42.1. Для $\omega > \omega_p$, $\varepsilon > 0$, плазма прозрачна, $n < 1$, имеет место **нормальная дисперсия**. Для $\omega < \omega_p$, $\varepsilon < 0$ и показатель преломления оказывается чисто **мнимым**, что

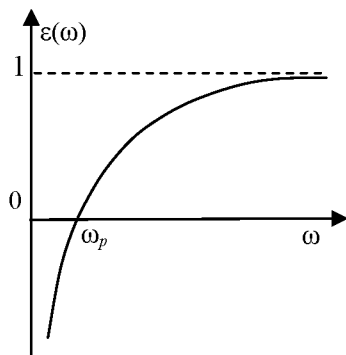


Рис. 42.1

означает невозможность распространения света вглубь среды. В последнем легко убедиться, если использовать комплексные экспоненты из (41.13) $n' = 0$ имеем $E = E_0 e^{-\omega n'' z/c} e^{i\omega t}$, т.е. выражение, не имеющее вид бегущей волны. Колебания быстро затухают с ростом z (на глубине $\sim c/\omega n''$, называемой толщиной **скин-слоя**), и такая среда является непрозрачной. Заметим, что затухание волн вглубь среды в данном случае не связано с диссипацией энергии: в выражение (42.1) вообще не входит γ (поэтому $\alpha \equiv 2\omega n''/c$ лучше называть коэффициентом затухания, чем коэффициентом поглощения). Энергия просто уходит в отраженную волну – металлы хорошие отражатели света.

Интересно отметить, что «плазменную» формулу (42.1) можно получить и из формулы (41.4) (или ее обобщения (41.9)) для «связанных» зарядов: надо лишь сделать в (41.4) (или (41.9)) предельный переход $\omega \rightarrow \infty$. Это объясняет, в частности, почему на очень больших частотах ($\omega \gg \omega_0$) стирается различие между проводниками и диэлектриками, а диэлектрическая проницаемость *всех* сред имеет универсальный вид $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

Плазменные колебания. Из наших рассуждений осталось неясным, каким именно колебаниям соответствует плазменная частота ω_p . Оказывается, что плазменные колебания – это **коллективные** колебания всех отрицательных зарядов среды относительно положительных. Понять, как происходят плазменные колебания, можно на простом примере. Представим себе, что мы сместили весь электронный газ среды как целое на расстояние x относительно положительного фона неподвижных ионов. В результате на границах среды (для простоты границы среды выбраны параллельными) возникает поверхностная плотность заряда σ . Из курса электростатики мы вспоминаем, что σ равна нормальной к границе среды компоненте поляризации. В нашем случае можно написать просто $\sigma = P$. Поверхностная плотность зарядов создает однородное поле $E = \sigma/\epsilon_0$ (как в плоском конденсаторе), которое действует на каждый смещенный из равновесия заряд **возвращающей** силой qE , что и приводит к колебаниям. Действительно, домножая уравнение движения для одного заряда

$$m\ddot{x} = -q \frac{P}{\varepsilon_0}$$

на заряд q и концентрацию n_0 , приходим к уравнению колебаний:

$$n_0 q m \ddot{x} \equiv m \ddot{P} = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0} P; \quad \ddot{P} = -\frac{n_0 q^2}{m \varepsilon_0} P; \quad \ddot{P} + \omega_p^2 P = 0,$$

где $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$ – как раз то самое выражение, которое фигурировало у нас, начиная с формулы (41.4) раздела 41. Для количественных оценок величины ω_p следует подставить на место q и m соответственно заряд и массу электрона e и m_e . Подстановка концентрации электронов $n_0 \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, характерной для щелочных металлов, дает ω_p , соответствующую ультрафиолетовому диапазону спектра. Поэтому, например, **щелочные металлы**, непрозрачные в видимом диапазоне, становятся прозрачными для ультрафиолета.

Приведем еще один пример явления, которое можно понять, опираясь на формулу (42.1) для диэлектрической проницаемости плазмы.

Отражение радиоволн ионосферой. **Ионосфера** – это ионизированный слой земной атмосферы, начинающийся с высоты примерно 60 км и простирающийся до 300–400 км над Землей. Оказывается, что хотя концентрация свободных электронов в ионосфере колеблется с высотой в широких пределах (от 10^3 до 10^7 см^{-3}), к ионосфере для многих практических приложений вполне применима простая формула (42.1). Достаточно лишь ввести «эффективную» плазменную частоту. Формула (42.1) для $\varepsilon(\omega)$ соответственно, примет вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{(\omega_p^{\text{эфф}})^2}{\omega^2}. \quad (42.2)$$

Расчет дает $\omega_p^{\text{эфф}} \approx 13 \text{ МГц}$ ($\lambda \approx 23 \text{ м}$) в дневное время и МГц ($\lambda \approx 75 \text{ м}$) в ночное время, что соответствует диапазону КВ (коротких волн). Зависимость $\omega_p^{\text{эфф}}$ от времени суток связана с тем, что днем степень ионизации ионосферы солнечными лучами сильно возрастает (напомним, что ω_p пропорциональна квадратному корню из концентрации свободных электронов). Для длинных, средних, коротких и метровых волн (на последних работают

популярные у студентов FM радиостанции) $\omega < \omega_p^{\text{эфф}}$, т.е. согласно (42.2) $\varepsilon < 0$. Эти радиоволны отражаются от ионосферы при **любых** углах падения (примерно, как свет от металлического зеркала), благодаря чему сигналы могут передаваться на расстояния во много раз превышающие расстояние прямой видимости. С другой стороны, телевидение работает в сантиметровом и дециметровом диапазонах (т.н. УКВ – ультракоротковолновый – диапазон). Для ТВ частот ионосфера прозрачна, так как $\omega > \omega_p^{\text{эфф}}$. Поэтому для надежной трансляции необходимо, чтобы приемники (телевизионные антенны) находились в **прямой** видимости от передатчиков. Для увеличения зоны уверенного приема телепрограмм передающую антенну располагают как можно выше (например, высота Останкинской телебашни в Москве составляет 539 м), используют систему ретрансляторов, развивают спутниковое ТВ.

Интересно, что для УКВ диапазона $\omega > \omega_p^{\text{эфф}}$ имеет место соотношение $\varepsilon(\omega) < 1$ и, соответственно $n = \sqrt{\varepsilon} < 1$. Поэтому вакуум (космос за ионосферой) оказывается средой **оптически более плотной**, чем ионосфера, а значит, при достаточно больших углах падения радиоволн на ионосферу должно иметь место **полное внутреннее отражение**. Данное явление действительно наблюдается: за пределами «зоны молчания» появляется зона уверенного приема УКВ сигнала, причем границы зон сильно перемещаются в течение суток.

Скорость передачи сигналов в среде с дисперсией. Прежде всего, обратим внимание, что с помощью привычной нам плоской **монохроматической** волны вида $A \cos \omega(t - x/v)$ мы не можем передать никакой **информации** – ведь это просто бесконечная синусоида, «вечно» бегущая с фазовой скоростью v из минус бесконечности в плюс бесконечность. Строго говоря, монохроматическая волна – всего лишь удобная идеализация, таких волн вообще нет в природе. Для передачи какой-либо информации требуются волны более сложного вида, например, – последовательность всплесков, несущая информацию в двоичном коде («цифровой сигнал»). Можно показать (это сделали математики в теории интеграла Фурье), что для формирования «всплески» требуется «смешать» (наложить друг на друга) большое количество волн

(их называют **спектральными** составляющими сигнала, или **группой волн**) с очень близкими частотами. Существует закономерность: **чем короче сигнал, тем большее количество и из более широкого диапазона частот следует смешать волн** (говорят: «короткие сигналы имеют широкий спектр частот»). В среде с дисперсией волны разной частоты из группы будут распространяться с разными скоростями, а сам сигнал, соответственно, по мере распространения, – **менять форму**. Поэтому требуется уточнить само понятие «скорость сигнала». Фундаментальные исследования на эту тему были проведены английским физиком Рэлеем (1842–1919).

Групповая скорость. В качестве характеристики скорости распространения группы волн, вслед за Рэлеем, вводят т.н. **групповую скорость** (будем обозначать ее u), которая по определению равна производной от частоты по волновому числу: $u = \frac{d\omega}{dk}$.

Поясним смысл понятия групповой скорости на простейшем примере «группы» из всего двух волн с очень близкими частотами (ω и $\omega + d\omega$) и равными амплитудами A . Пусть частоте ω соответствует волновое число k , а частоте $\omega + d\omega$ – волновое число $k + dk$. Для сложения волн воспользуемся известной формулой тригонометрии $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, четностью косинуса и малостью $d\omega$ и dk . Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned}
 & A \cos(\omega t - kx) + A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\
 & = 2A \cos\left(\frac{2\omega + d\omega}{2}t - \frac{2k + dk}{2}x\right) \cos\left(-\frac{d\omega}{2}t + \frac{dk}{2}x\right) \approx \\
 & \approx 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos(\omega t - kx) = \\
 & = 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2}\left(t - \frac{x}{\frac{d\omega}{dk}}\right)\right] \cos\left\{\omega\left[t - \frac{x}{\left(\frac{\omega}{k}\right)}\right]\right\} \equiv \\
 & \equiv 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Во втором сомножителе последнего выражения мы узнаем обычную монохроматическую плоскую волну частоты ω распространяющуюся с **фазовой скоростью** $v = \omega/k$. Предыдущие сомножители задают ее **огibaющую** (или, как говорят, **модуляцию**). Как видно, огibaющая имеет низкую частоту $d\omega/2$ (частоту биений, вроде той, что мы слышим при нажатии клавиши расстроенного пианино) и распространяется с **групповой скоростью** $u = \frac{d\omega}{dk}$. Можно показать, что при **слабой** дисперсии, энергия вспышки распространяется с групповой скоростью.

Закон дисперсии в форме $\omega(k)$. До сих пор мы описывали дисперсию, задавая частотную зависимость показателя преломления или диэлектрической проницаемости. Часто бывает удобно (например, для расчета фазовой и групповой скоростей) перейти к другой форме записи – через зависимость частоты от волнового числа. Выражение вида $\omega = \omega(k)$ будем называть **законом дисперсии**. Такая запись представляет собой просто замену переменных; поэтому, она эквивалентна привычной $n = n(\omega)$. Действительно, по определению, $\omega = vk = \frac{c}{n(\omega)}k \Rightarrow \omega n(\omega) = ck$, т.е. $n(\omega)$

задает взаимно однозначное соответствие между ω и k (при использовании комплексного показателя преломления на место n следует поставить его действительную часть n').

Соотношение между фазовой и групповой скоростями.

В вакууме $n \equiv 1$, поэтому $\omega = ck, v = \frac{\omega}{k} = c, u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(ck) = c$, т.е. фазовая скорость равна групповой и равна c . В случае **нормальной** дисперсии групповая скорость всегда **меньше** фазовой. Действительно:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{d\omega} u;$$

$$u = \frac{v}{1 - \frac{dv}{d\omega}}.$$

Нормальная дисперсия означает, что n растет (соответственно, v падает) с ростом частоты, $dv/d\omega < 0$, отсюда $u < v$.

В случае аномальной дисперсии («внутри» линии поглощения) $dv/d\omega > 0$ и формально имеет место $u > v$ или, даже, что бессмысленно, $u < 0$. Подробный анализ, однако, показывает (следует принять во внимание и сильное затухание, зависящее от частоты, меняющее спектральный состав волнового пакета), что физическая интерпретация $d\omega/dk$ как скорости распространения энергии световой вспышки теряет силу. С другой стороны, из аргументов об интерференции первичной и вторичных волн в любом случае очевидна невозможность передачи энергии со скоростью выше c .

Часто бывает необходимо записать связь между фазовой и групповой скоростью не через частоту, а через длину волны λ . Получим соответствующее соотношение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d}{dk} \frac{2\pi}{k} = \\ &= v + k \frac{dv}{d\lambda} \left(-\frac{2\pi}{k^2} \right) = v - \frac{2\pi}{k} \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Пример расчета фазовой и групповой скорости. Произведем расчет u и v на примере выражения (42.1) для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ (напомним, что это выражение пригодно для металлов и плазмы). Имеем: $\omega^2 \varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2$; $\omega^2 n^2 = c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$; $2c^2 k dk = 2\omega d\omega$. Таким образом, имеем в данном случае:

$$\frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}; \quad uv = c^2. \quad (42.3)$$

Фазовая скорость:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \quad (42.4)$$

Групповая скорость, учитывая (42.3):

$$u = \frac{c^2}{v} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (42.5)$$

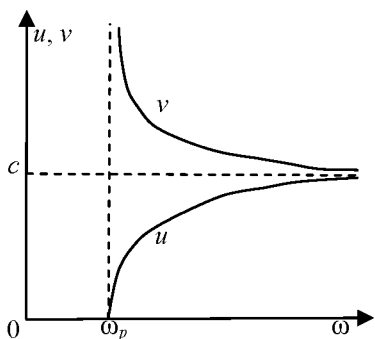


Рис. 42.2

Интересно, что когда фазовая скорость v (при $\omega = \omega_p$) обращается в бесконечность, групповая скорость u стремится к нулю. Графики $v(\omega)$ и $u(\omega)$ приведены на рис. 42.2.

Рассеяние света. Дифракцию света на мелких (невидимых глазу) хаотически расположенных неоднородностях среды обычно называют рассеянием.

Рассеяние проявляет себя как свечение среды при прохождении через нее света от внешнего источника. Свечение связано с вторичными волнами, излучаемыми атомами среды за счет энергии первичного луча. В силу некогерентности вторичных волн наблюдению доступны лишь средние по времени значения интенсивности рассеянного света в различных направлениях. Иными словами, интенсивность рассеянного излучения в любой точке равна сумме интенсивностей излучений, пришедших от каждой неоднородности. Для теоретического описания явления используется математический аппарат теории вероятности.

В зависимости от природы неоднородностей рассеяние можно разделить на два основных типа.

Рассеяние в чистых средах (молекулярное рассеяние). Если свет распространяется в среде, не содержащей микроскопических включений другого вещества, то единственным видом неоднородности выступают термодинамические флуктуации плотности. Молекулярное рассеяние объясняет, например голубой цвет неба.

Рассеяние в мутных средах (другие термины: диффузное рассеяние, явление Тиндаля). В этом случае неоднородностями являются микроскопические частицы инородного вещества (пыль, капельки жидкости в газе – облака, туман, твердые частички в жидкости, называемые взвесями и суспензиями, эмульсии – капельки одной жидкости в другой жидкости, инородные микроскопические включения в прозрачных твердых телах – перламутры, молочные стекла и т.п.). Как мы увидим, характер рассеяния

в мутных средах существенно зависит от соотношения характерного размера l неоднородностей и длины волны света λ . При $l \ll \lambda$ рассеивается преимущественно **коротковолновая** компонента падающего излучения; в обратном пределе интенсивность рассеяния примерно **одинакова** для всех длин волн.

Начнем с рассеяния в **чистых средах**. Простейшей для рассмотрения чистой средой является разреженный газ. В этом случае так же, как это делалось в элементарной теории дисперсии (см. разд. 41), в качестве **модели** молекулы можно взять пружинный маятник (рис. 41.1). Падающая волна раскачивает заряд q , который излучает **вторичные волны**, амплитуда E_0 которых пропорциональна «запаздывающему» **ускорению**, т.е. квадрату частоты. В самом деле, если смещение x заряда q при вынужденных колебаниях изменяется по гармоническому закону $x = x_0 \cos \omega t$, то электрическое поле излученной волны $E \sim -a^* = \omega^2 x_0 \cos \omega t^* = \omega^2 x(t^*)$ (звездочка означает, что соответствующие величины следует брать с задержкой на время распространения сигнала в точку наблюдения). **Интенсивность** света, излученного молекулой, в свою очередь, пропорциональна **квадрату амплитуды волны**, откуда получаем **закон Рэлея**: $I \sim \omega^4$. В видимом диапазоне частот красного и синего (фиолетового) излучений различаются почти в 2 раза, откуда можно сделать вывод, что интенсивность синей компоненты в излучении **одной** молекулы примерно в 16 раз превышает интенсивность красной компоненты.

Излучение, рассеянное средой, представляет собой результат **интерференции** волн, излученных всеми молекулами вещества. Если на масштабах малых по сравнению с длиной волны света можно говорить об **однородном** распределении молекул, то такая интерференция, как известно, может привести лишь к изменению фазовой скорости волны, но не к изменению ее направления распространения («боковые» лучи, интерферируя, погасят друг друга); рассеяния наблюдаться не будет. В реальности же, согласно термодинамике, число молекул в указанных объемах не постоянно (испытывает флуктуации), поэтому газовая среда является оптически неоднородной. В 1908 г. М. Смолуховский теоретически обосновал, что рассеяние в газовой среде вызвано именно термодинамическими **флуктуациями плотности** газа.

При нахождении вещества в критическом состоянии даже тонкий его слой рассеивает все падающее на него излучение. Дело в том, что критическое состояние соответствует **максимально возможным флуктуациям плотности**. Рассеяние света в этом случае называют критической опалесценцией.

Теорию Смолуховского называют также «теорией голубого цвета неба». Дневное небо испускает свет приблизительно равномерно во все стороны (светится) благодаря флуктуациям плотности воздуха, а голубой цвет в рассеянном излучении преобладает из-за закона Релея ω^4 .

Горные пейзажи отличаются яркостью красок. Из-за уменьшения плотности воздуха с высотой, его рассеивающая способность падает. Отметим, что яркость и контрастность горных видов порой вызывает иллюзию близости наблюдаемых объектов: люди ошибочно приписывают четкость наблюдаемой картины малому расстоянию до объекта наблюдения. Если мы смотрим с вершины высокой горы в долину, то последняя кажется нам покрытой голубоватой вуалью. Еще более заметно это явление при наблюдении земли из окна самолета в безоблачную погоду.

На заре (или на закате) небо краснеет тоже по причине молекулярного рассеяния. Лучи утреннего (или вечернего) Солнца проходят в атмосфере значительно больший путь, чем днем, теряя по пути преимущественно свою синюю компоненту. Красная – меньше рассеивается, и, соответственно, распространяется дальше. Кроме того, так как синие лучи лежат ближе к линиям поглощения молекул газов, составляющих воздух, они и **поглощаются** в атмосфере сильнее.

Теперь перейдем к рассеянию в **мутных средах**. Рассмотрим сгусток (обычно говорят «кластер») из N молекул или, например, микроскопическую капельку воды. До тех пор, пока размер кластера **много меньше** длины волны света, все молекулы кластера излучают в **одной и той же фазе**, а значит, **усиливают** излучение друг друга. Из-за пропорциональности интенсивности квадрату амплитуды, излучение кластера из N молекул интенсивнее излучения одной молекулы в N^2 раз. Распределение рассеянного излучения по частотам определяется **законом Рэлея**.

С приближением размера кластера к длине волны света разница фаз волн, излученных молекулами из удаленных друг от друга частей кластера, будет становиться все заметнее: излученные волны станут гасить друг друга. Так как указанное явление «раньше» наступает для коротковолновой («синей») части излучения, то доля синих лучей снижается, и спектр становится более равномерным по частотам (более «белым»), по сравнению с предсказаниями закона Рэлея. Это объясняет белый (серый) цвет облаков и тумана – капельки воды, из которых состоят облака или туман, имеют размеры порядка длины волны света.

Раковины или жемчуг кажутся переливчато-белыми из-за неоднородностей порядка длины волны света, хаотически распределенных в прозрачной среде вещества. Данное явление называют опалесценцией.

Когда узкий пучок естественного света проходит через рассеивающую среду (не важно – чистую или мутную), рассеянный свет всегда линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка. Явление легко понять, если вспомнить диаграмму направленности излучения диполя: излученная волна поляризована параллельно ускорению, которое, в свою очередь, лежит в плоскости перпендикулярной направлению падающей волны.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое плазменные колебания?
2. На каких частотах плазма прозрачна?
3. На каких частотах плазма отражает свет?
4. Почему телевышки делают максимально высокими?
5. С какой скоростью распространяется информация: с фазовой или с групповой?
6. Какая скорость выше при нормальной дисперсии: фазовая или групповая?
7. Достаточно ли закона Рэлея для объяснения голубого цвета неба?
8. Объясните, почему солнце на закате красное.
9. Объясните, почему облака белые (серые).

43. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Если поместить достаточно большое количество молекул газа в непроницаемую теплоизолированную полость, то согласно **второму закону термодинамики** система, состоящая из газа и стенок полости, придет в термодинамическое равновесие: температура выровняется, скорости молекул будут удовлетворять распределению Максвелла («достаточно большое» количество молекул нужно, чтобы имело смысл понятие температуры, а флуктуации не играли существенной роли). Заметим, что хаотическое **ускоренное** тепловое движение зарядов в молекулах газа и стенок (электронов и ионов) в соответствии с законами классической электродинамики должно сопровождаться излучением света, т.н. **тепловым излучением**. В том, что это действительно так, легко убедиться, заглянув через маленькое отверстие внутрь разогретой печи – мы увидим красное свечение: пространство внутри печи заполнено не только горячим воздухом и продуктами сгорания, но и светом. Заметим, что даже если из непрозрачной полости откачать весь газ, то свечение останется – ведь разогретые стенки будут продолжать излучать. В силу общности второго закона термодинамики, **поле излучения** должно, также как и газ, прийти в термодинамическое равновесие со стенками, если, конечно, последние не прозрачны, и энергия не уходит в окружающее пространство. Иными словами, понятие «температура» должно быть применимо и к **самому излучению** тоже. Но что такое – «температура света», «температура электромагнитных волн»? Какое распределение света по частотам (аналог распределения молекул по скоростям) соответствует равновесию? Исчерпывающие ответы на эти сложные вопросы были получены лишь в середине XX в., когда была создана последовательная теория фотонного газа («газа квантов»). Но точный ответ на вопрос о распределении равновесного излучения по частотам был найден гораздо раньше – еще в 1900 г., задолго до создания последовательной квантовой теории.

Закон Кирхгофа. В 1859 г. Густав Роберт Кирхгоф установил чрезвычайно общее соотношение между способностью тел излучать и поглощать свет. Ход его рассуждений заключался примерно в следующем. Рассмотрим замкнутую теплоизолиро-

ванную непрозрачную полость, находящуюся в термодинамическом равновесии с излучением внутри нее. Сразу ясно, что **равновесное** излучение (энтропия максимальна!) должно быть **одинаковым** во всех точках и по всем направлениям, не иметь никакой преимущественной поляризации. Далее, часть излучения, падающего из полости на стенку, должна отражаться (без диссипации энергии), часть – поглощаться. Теперь заметим, что если бы стенки поглощали больше световой энергии, чем излучали (или наоборот), то это нарушило бы термодинамическое равновесие: стенки бы нагревались (охлаждались), а излучение бы остывало (нагревалось). Возникающую разницу температур можно было бы использовать для создания вечного двигателя второго рода, что запрещено вторым законом термодинамики. Значит, единственная возможность – это предположить, что стенки поглощают («забирают у излучения») **ровно ту же мощность**, что и излучают («возвращают излучению»). Более того, данная закономерность должна выполняться в **любом**, сколь угодно узком интервале частот. Действительно, если бы стенки поглощали энергию преимущественно в одном частотном диапазоне, а излучали бы – в другом, то это бы нарушило равновесное распределение энергии излучения по частотам. В сказанном и состоит суть закона Кирхгофа. Прейдем к его математической формулировке.

Равновесный поток энергии излучения, падающий на стенку со стороны полости будем характеризовать величиной $d\Phi_\omega$ – мощностью излучения, **падающей** на единицу площади поверхности тела под всеми углами в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$. Мощность $d\Phi_\omega$ как характеристика излучения должна определяться **только температурой** последнего. (Здесь мы отдаем дань традиции, сложившейся в литературе по тепловому излучению: аргумент функции писать как нижний индекс. Разумеется, более привычная запись вида $d\Phi(\omega)$ не является ошибочной и вполне допустима).

Равновесный поток энергии, излучаемый стенкой в полость, будем характеризовать **спектральной плотностью энергетической светимости** r_ω , так что $r_\omega d\omega$ – мощность, излучаемая единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$. Частотная зависимость r_ω определяется температурой T и материалом стенки.

Полная мощность, излучаемая единицей площади поверхности стенки при данной температуре (ее называют **энергетической светимостью** и обозначают R), очевидно, выражается интегралом от r_ω по всем частотам:

$$R = \int_0^{\infty} r_\omega d\omega. \quad (43.1)$$

Наконец, способность стенки **поглощать** падающее излучение будем описывать **спектральным коэффициентом поглощения** a_ω , так что $a_\omega d\Phi_\omega$ – мощность, поглощенная единицей поверхности стенки в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$.

Условия равновесия, сформулированные выше (равенство излученной и поглощенной мощности в **любом** интервале частот $d\omega$), дают:

$$r_\omega d\omega = a_\omega d\Phi_\omega, \quad (43.2)$$

для **любого** материала стенок, т.е. для любых r_ω и a_ω . В силу того, что поток излучения со стороны полости определяется только температурой, **отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральному коэффициенту поглощения** при **фиксированной** температуре не зависит от материала стенки и **является универсальной функцией частоты $d\Phi_\omega/d\omega$** (закон Кирхгофа).

Далее, удобно формально ввести поверхность, при любой температуре **полностью** поглощающую излучение на **всех** частотах ($a_\omega \equiv 1$). Такую поверхность будем называть **абсолютно черной**, а, соответственно, тело с абсолютно черной поверхностью – **абсолютно черным телом**. Как видно из (43.2) спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела (обозначим ее r^*_ω) и есть универсальная функция частоты и температуры, фигурирующая в законе Кирхгофа. Таким образом, можно записать:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = r^*_\omega. \quad (43.3)$$

Абсолютно черных тел не существует в природе. Например, для достаточно высоких частот все материалы прозрачны. Тем не менее, есть немало тел или объектов, обладающих свойствами, близкими к абсолютно черному телу. Классический пример –

небольшое отверстие в полости с непрозрачными в широком частотном диапазоне стенками. Луч света, проникший в полость через отверстие, испытывает так много отражений, при каждом из которых ослабляется, что практически не может выйти наружу. Поэтому площадь отверстия можно с достаточной точностью считать участком с абсолютно черной поверхностью, а излучение внутри самой полости считать равновесным.

В той или иной степени все тела являются цветными, т.е. a_ω существенно зависит от частоты. Если функция a_ω близка к константе в широком частотном диапазоне (разумеется, эта константа меньше единицы), то тела называют серыми.

Отметим сразу, что в жизни мы чаще сталкиваемся с неравновесным излучением (например, – свет лампочки, костра, Солнца, звезд), чем с равновесным. В этом случае, температура окружающей среды (космический вакуум тоже можно считать средой – ведь он заполнен излучением) ниже температуры светящегося тела. В этом случае закон Кирхгофа тоже можно применять: нагретые тела в неравновесной системе излучают точно так же, как и в равновесии.

С точки зрения фундаментальной науки наиболее важной задачей является определение функции r^*_ω – ведь именно она определяет равновесное распределение излучения как такового по частотам.

Все попытки вычисления r^*_ω на основе классической физики, предпринятые рядом ученых в конце XIX в. с использованием совершенно разных методов, приводили к одному и тому же результату. Попробуем «угадать» этот результат из соображений размерности. Величина $r^*_\omega d\omega$ по определению имеет размерность Вт/м², следовательно, значение r^*_ω имеет размерность Дж/м² – энергия, отнесенная к площади. Конечная формула не должна содержать никаких постоянных, относящихся к природе и размерам тел, но при этом должна зависеть от температуры. Поэтому, в качестве энергии естественно выбрать величину, пропорциональную kT , а в качестве единственного масштаба длины – длину волны света λ . Тогда

$$r^*_\omega \sim \frac{kT}{\lambda^2} = \frac{kT}{\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (43.4)$$

Любопытно, что формула (43.4) в точности совпадает с результатом сложных расчетов на основе классической физики (мы еще и немного упростили вывод: «честная» замена переменной λ на переменную ω в дифференциальных выражениях делается немого сложнее – см. вывод формулы (43.16) ниже).

Один из классических расчетов r^*_{ω} был выполнен в 1897 г. немецким ученым Максом Планком. Суть работы Планка состояла в следующем. Так как закон Кирхгофа (43.3) универсален для тел **любой** природы, то в качестве тела, находящегося в равновесии с излучением, можно взять простейшее для расчетов – одномерный гармонический осциллятор (тот самый «заряд на пружинке», который фигурирует в классической элементарной теории дисперсии). Затем можно рассчитать для него величины r_{ω} и a_{ω} , после чего по формуле (43.3) найти r^*_{ω} . Вопрос о том, «что считать площадью поверхности осциллятора» не является непреодолимым: эта «площадь» (принято говорить «сечение поглощения») получается как частное от деления мощности, поглощаемой осциллятором, на мощность излучения, падающего на единицу площади плоской поверхности. Проделав прямые, но несколько громоздкие выкладки, которые мы здесь не приводим, Планк пришел к выражению:

$$r^*_{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle W \rangle, \quad (43.5)$$

где $\langle W \rangle$ – средняя энергия тепловых колебаний одномерного осциллятора. Согласно классической физике $\langle W \rangle = kT$ (в среднем – по $\frac{1}{2}kT$ на кинетическую и потенциальную энергию). Подставляя $\langle W \rangle = kT$ приходим к формуле

$$r^*_{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (43.6)$$

которую принято называть **формулой Рэлея–Джинса** (Рэлей и Джинс получили эту формулу одновременно с Планком, но другим способом). Формула Рэлея–Джинса хорошо согласуется с экспериментом на низких частотах, однако на **высоких** частотах противоречит эксперименту, да и вообще, очевидно, абсурдна. Функция r^*_{ω} монотонно возрастает с частотой, а значит, площадь под ее графиком бесконечна (интеграл (43.1) расходится), т.е.

абсолютно черное тело при любой конечной температуре излучает бесконечную мощность. Пауль Эренфест позднее дал этой расходимости выразительное название «ультрафиолетовая катастрофа», и оно прижилось.

Формула Планка. Для разрешения проблемы «ультрафиолетовой катастрофы» в 1900 г. Планк выдвинул смелую гипотезу: энергия W осциллятора может принимать не произвольные, как это следует из классической теории колебаний, а лишь дискретные (лат. *discretus* – прерывистый) значения, кратные его собственной частоте ω_0 : $W = 0, \hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0, 3\hbar\omega_0, \dots$, где \hbar – некий коэффициент (исторически Планк ввел немного другую константу – $\hbar \equiv 2\pi \hbar$, обозначение с горизонтальной чертой для $\hbar/2\pi$ принадлежит Полю Дираку; сейчас обе постоянные носят имя Планка). Гипотеза Планка оказалась гениальной – она полностью подтвердилась в 20-е гг. XX в., когда была создана квантовая механика.

Почему же экспериментаторы раньше никогда не сталкивались с дискретностью значений энергии осциллятора? Ответ прост: постоянная Планка и частоты макроскопических осцилляторов слишком малы (поскольку $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с) для того, чтобы самыми точными приборами зафиксировать дискретность уровней энергии.

Чтобы понять теорию Планка, прежде всего вспомним, как вычисляется среднее значение («математическое ожидание») в теории вероятности. Пусть величина A может принимать значения $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ с вероятностями, соответственно $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ (очевидно, $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ – условие нормировки). Тогда $\langle A \rangle = A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_n p_n$.

Для расчета средней энергии «дискретного» осциллятора Планк использовал вероятности, даваемые классической статистикой Максвелла-Больцмана: вероятность того, что система в термодинамическом равновесии имеет энергию W , пропорциональна $e^{-W/kT}$. Таким образом, имеем:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{W_n}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega_0}{kT}} \equiv \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}, \quad (43.7)$$

где Z – коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}. \quad (43.8)$$

(Начиная с последнего равенства (43.7) и далее мы будем опускать индекс «0» у собственной частоты осциллятора, так как осциллятор с произвольной собственной частотой должен находиться в термодинамическом равновесии с излучением). Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} = \\ &= \frac{0 \cdot e^{-\frac{0}{kT}} + \hbar\omega \cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + 2\hbar\omega \cdot e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + 3\hbar\omega \cdot e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots} = \\ &= \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + 2 \cdot e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + 3 \cdot e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots} = \\ &= \hbar\omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}, \end{aligned}$$

где $x \equiv e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$. Существует несколько способов вычисления подобных выражений. Один из простейших состоит в непосредственном делении «столбиком» многочленов из числителя и знаменателя – результат оказывается обычной убывающей ($x < 1$) геометрической прогрессией:

$$\begin{array}{r} -x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots \quad | \quad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ \underline{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \quad \quad \quad x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ -x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots \\ \underline{x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \\ -x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots \\ \underline{x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \\ x^4 + 2x^5 + \dots \\ \dots \end{array}$$

$$\text{Значит } \hbar\omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

(Последнее равенство легко получить, заметив, что если $S = x + x^2 + x^3 + \dots = x + x(x + x^2 + x^3 + \dots) = x + xS$, то $S = x/(1-x)$. Можно, разумеется, и сразу воспользоваться известной формулой суммы прогрессии). Возвращаясь к старым обозначениям, окончательно получаем:

$$\langle W \rangle = \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.9)$$

Теперь осталось подставить выражение (43.9) для средней энергии одномерного осциллятора в (43.5). Это и есть знаменитая формула Планка:

$$r_{\omega}^* = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.10)$$

Графики $r_{\omega,T}^*$ для двух разных фиксированных температур приведены на рис. 43.1. Формула Планка хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Рассмотрим асимптотики формулы Планка.

1. «Классический предел»: низкие частоты, высокие температу-

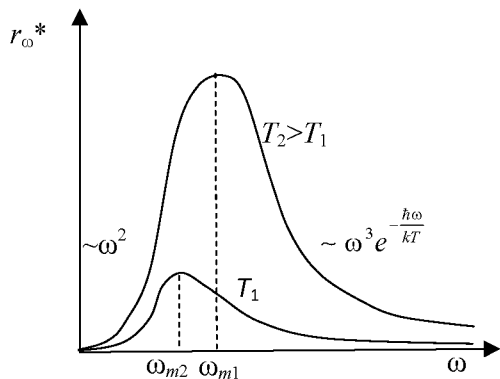


Рис. 43.1

ры ($\hbar\omega \ll kT$). Можно приближенно положить $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$. Тогда вместо (43.10) имеем

$$r^*_{\omega} \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (43.11)$$

что совпадает с формулой Рэлея–Джинса (43.4). Пределы применимости классической физики (по крайней мере, для осциллятора) установлены.

2. «Квантовый предел»: высокие частоты, низкие температуры ($\hbar\omega \gg kT$). Единицей, по сравнению с экспонентой в знаменателе (43.10) можно пренебречь, и, соответственно, получаем:

$$r^*_{\omega} \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \quad (43.12)$$

К выражению вида (20.12) еще в 1896 г. на основе некоторых произвольных допущений пришел Вильгельм Вин, поэтому его называют формулой Вина. Очевидно, что при $\omega \rightarrow \infty$ убывающая экспонента «забывает» возрастающую степенную функцию ω^3 , что обеспечивает сходимость интеграла по частотам (43.1), и, соответственно, снимается проблема «ультрафиолетовой катастрофы».

Теперь рассмотрим случай промежуточных частот, на котором наблюдается переход от возрастания к убыванию – максимум функции r^*_{ω} . Относительно положения этого максимума можно сделать определенные выводы на основании *вида* функции (43.10). Перепишем (43.10) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} r^*_{\omega} &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \\ &= \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \equiv \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{y^3}{e^y - 1}, \end{aligned} \quad (43.13)$$

где $y = \hbar\omega/kT$. При фиксированной температуре форма кривой определяется только вторым множителем в (43.13): $f(y) \equiv y^3/(e^y - 1)$. Функция $f(y)$ одинакова для всех температур. Обозначим значение y , при котором $f(y)$ имеет максимум, как y_m . Но тогда, возвращаясь к старым обозначениям, $y_m = \hbar\omega_m/kT$, или:

$$\frac{\omega_m}{T} = \frac{ky_m}{\hbar} = \text{const} \equiv b', \quad (43.14)$$

где ω_m – частота, при которой r^*_{ω} имеет максимум. Выражение (43.14) называется **законом смещения Вина**, а постоянная b' – **постоянной Вина**. Из (43.14) непосредственно следует: **чем выше температура, тем на более высоких частотах наблюдается максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела**. Величину константы в (43.14) можно получить стандартным способом отыскания экстремума (приравниванием нулю производной $f(y)$ по y). Прямые вычисления дают $b' = 3,694 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$.

Найдем энергетическую светимость абсолютно черного тела R^* в соответствии с ее определением (43.1):

$$\begin{aligned} R^* &= \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy. \end{aligned}$$

Интеграл в последнем равенстве, в соответствии с таблицей определенных интегралов, равен $\pi^4/15$, окончательно получаем:

$$R^* = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 \equiv \sigma T^4. \quad (43.15)$$

Выражение (43.15) называют **законом Стефана-Больцмана**. В 1879 г. Стефан установил его эмпирически, а Больцман, пять лет спустя, обосновал его теоретически из термодинамических соображений. Постоянная $\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ называется **постоянной Стефана-Больцмана**. Итак: **энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры**.

В экспериментальных работах по оптике вместо частоты ω обычно фигурирует длина волны λ . Сделаем необходимую замену переменной ω на переменную λ во всех важных формулах предыдущих разделов.

Прежде всего, введем спектральную плотность энергетической светимости, так что $r_\lambda d\lambda$ – мощность, излучаемая единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале частот от λ до $\lambda + d\lambda$ при температуре T . Учитывая, что $\omega = 2\pi c/\lambda$, имеем $d\omega = (-2\pi c/\lambda^2)d\lambda$ (знак минус означает просто убывание длины волны при росте частоты). Теперь подставим ω и $d\omega$ в $r^*_\omega d\omega$:

$$\begin{aligned}
 r^*_\omega d\omega &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega = \\
 &= \frac{\hbar \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) d\lambda = \\
 &= -\frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\lambda \equiv -r^*_\lambda d\lambda.
 \end{aligned} \tag{43.16}$$

Итак, другой вид формулы Планка:

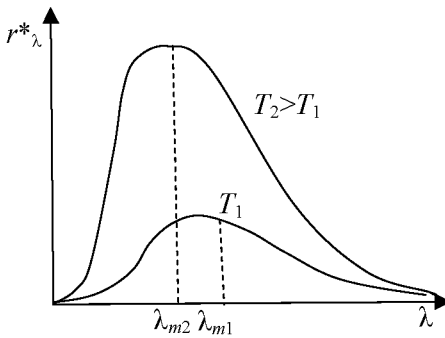


Рис. 43.2

$$\begin{aligned}
 r^*_\lambda &= \\
 &= \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.
 \end{aligned} \tag{43.17}$$

Вид кривой для двух различных температур показан на рис. 43.2.

Закон смещения Вина для длин волн установим тем же способом, что и для частот, см. (43.13), (43.14).

$$\begin{aligned}
 r^*_\lambda &= \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \\
 &= \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)^5 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \frac{y^5}{e^y - 1}; \\
 y &\equiv \frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}.
 \end{aligned}$$

Так же, как и в (43.13) форма кривой определяется вторым множителем с y , это опять кривая с максимумом. Пусть максимум соответствует y_m . Но тогда длина волны λ_m , соответствующая максимуму, удовлетворяет соотношению:

$$\lambda_m T = \frac{2\pi\hbar c}{ky_m} = \text{const} \equiv b, \quad (43.18)$$

где b – **постоянная Вина** (ее не следует путать с введенной выше постоянной Вина b' для частот). Отыскание экстремума второго множителя стандартным методом дает $y_m = 4,965$, и последующая подстановка y_m в (43.17) дает $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ м · град.

Закон Стефана–Больцмана, разумеется, имеет один и тот же вид вне зависимости от того, по какой переменной (ω или λ) производится интегрирование r^* . Действительно, согласно (43.16) имеем:

$$\int_0^{\infty} r^*_{\omega} d\omega = -\int_{\infty}^0 r^*_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} r^*_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4. \quad (43.19)$$

Можно показать (доказательство мы опускаем), что формуле Планка соответствует **объемная плотность энергии** w_{ω} излучения, приходящегося на частотный интервал от ω до $\omega+d\omega$, определяемая соотношением $w_{\omega} = 4r_{\omega}^*/c$, откуда

$$w_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.20)$$

Формула (43.20) показывает, как энергия равновесного излучения распределена по частотам.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение спектральной плотности энергетической светимости.
2. Какие тела называются абсолютно черными, серыми, цветными?
3. Перечислите предположения, исходя из которых выведен закон Кирхгофа.
4. Почему темный рисунок на осколке чашки из белого фарфора, вытасненном из костра, светится ярко, а фарфор – тускло?

5. Почему свечка светит ярко, а горелка бытовой газовой плиты – тускло?
6. Какой смысл вкладывается в выражение «ультрафиолетовая катастрофа»?
7. Сформулируйте основные положения гипотезы Планка.
8. Почему в повседневной жизни мы не замечаем дискретность значения энергии маятника?
9. Сформулируйте закон смещения Вина.
10. Каким образом можно оценить температуру поверхности Солнца?

44. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Релятивистское соотношение между импульсом и энергией. Специальная теория относительности (СТО) дает следующее соотношение между импульсом p и энергией W частицы:

$$W^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2. \quad (44.1)$$

Выражение в правой части, содержащее массу частицы m и скорость света в вакууме c , одинаково в **любой** инерциальной системе отсчета, то есть, как еще часто говорят, является инвариантом.

Связь (44.1) между энергией и импульсом, даваемая СТО, отличается от классического выражения. Это сразу видно, например, для **свободной** частицы, энергия W которой равна просто $p^2/2m$. Чтобы установить связь между СТО и классической механикой рассмотрим (44.1) при **малых** скоростях по сравнению с c ($v/c = mv/mc \approx p/mc \ll 1$; знак « \approx » связан с использованием нами для малых скоростей нерелятивистского соотношения $p = mv$):

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx \\ &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \quad (44.2)$$

Как видно из (44.2), к «старой» кинетической энергии (второму слагаемому) в СТО добавляют постоянную величину mc^2 , называемую энергией покоя.

В случае произвольных скоростей кинетическая энергия свободной частицы также равна разности полной энергии W и энергии покоя mc^2 .

Легко видеть, что в отличие от классической механики СТО допускает существование «частиц без массы», обладающих энергией и импульсом. Действительно, подстановка в (44.21) $m = 0$ дает

$$W = pc. \quad (44.3)$$

«Безмассовые» частицы действительно существуют в природе. Примером таких объектов являются частицы света **фотоны** (от лат. photos – свет).

Как оказалось, энергия и импульс фотонов выражается через обычные характеристики волны – частоту и волновой вектор:

$$\begin{aligned} W &= \hbar\omega; \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}. \end{aligned} \quad (44.4)$$

Соотношения (44.4), называемые **соотношениями де Бройля**, связывают представления о свете как об электромагнитной волне с квантовыми (на что указывает постоянная Планка) представлениями о свете как о потоке частиц.

Давление света, нормально падающего на поглощающую площадку, равно интенсивности, деленной на скорость света. Классическое рассмотрение вопроса о световом давлении довольно громоздко. Если же использовать идею фотонов и соотношение (44.3), то результат тривиален. Интенсивность – это энергия фотонов, падающих в единицу времени на единичную площадку, а давление, соответственно – импульс, передаваемый этой площадке фотонами в единицу времени. Второе сразу получается из первого делением на c .

Следует сказать, что все оптические явления могут быть поняты с точки зрения квантовых («корпускулярных») представлений (включая задачи геометрической и волновой оптики). При этом существует ряд наблюдаемых эффектов, объяснение которых возможно **только** с использованием представления о фотонах. Приведем соответствующие примеры.

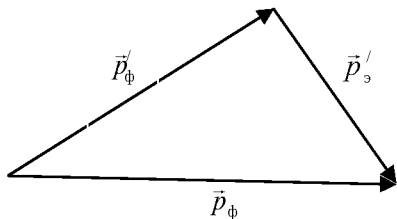


Рис. 44.1

Эффект Комптона. При упругом столкновении фотона с электроном (вместо слова «столкновение» используют термин «рассеяние») фотон передает часть своей энергии электрону и, в соответствии с (44.4) меняет частоту. Эффект умень-

шения частоты света при рассеянии на электронах называется **эффектом Комптона**.

Для количественных вычислений воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Пусть фотон с энергией W_Φ и импульсом \vec{p}_Φ рассеивается на угол θ (рис. 44.1) на неподвижном электроне массой m . В результате фотон и электрон получают новые энергии и импульсы, которые отметим штрихами. Законы сохранения энергии и импульса дают:

$$\begin{cases} W_\Phi + mc^2 = W_\Phi' + W_3' \\ \vec{p}_\Phi = \vec{p}_\Phi' + \vec{p}_3' \end{cases} \quad (44.5)$$

Перегруппируем слагаемые, умножим второе уравнение на c и возведем оба уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} (W_\Phi - W_\Phi' + mc^2)^2 = W_3'^2 \\ \left(\vec{p}_\Phi - \vec{p}_\Phi' \right)^2 c^2 = \left(\vec{p}_3' \right)^2 c^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} W_\Phi^2 + W_\Phi'^2 + (mc^2)^2 - 2W_\Phi W_\Phi' + 2W_\Phi mc^2 - 2W_\Phi' mc^2 = W_3'^2 \\ (p_\Phi c)^2 + (p_\Phi' c)^2 - 2p_\Phi p_\Phi' c^2 \cos \theta = (p_3' c)^2 \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, с учетом (44.1), получаем:

$$(mc^2)^2 - 2W_\Phi W_\Phi' + 2W_\Phi mc^2 - 2W_\Phi' mc^2 + 2p_\Phi p_\Phi' c^2 \cos \theta = (mc^2)^2.$$

Производя сокращения и учитывая, что для фотона $W_\Phi = p_\Phi c$ имеем:

$$-p_\Phi p_\Phi' c^2 + (p_\Phi c) mc^2 - (p_\Phi' c) mc^2 + p_\Phi p_\Phi' c^2 \cos \theta = 0$$

или

$$(p_{\Phi} - p'_{\Phi})mc = p_{\Phi}p'_{\Phi}(1 - \cos\theta);$$

$$\frac{1}{p'_{\Phi}} - \frac{1}{p_{\Phi}} = \frac{1}{mc}(1 - \cos\theta),$$

так как, согласно (29.24) $p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \equiv \frac{h}{\lambda}$, то окончательно получаем:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \equiv \lambda_K(1 - \cos\theta) = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (44.6)$$

где $\lambda_K \equiv h / mc \approx 2,4263096 \cdot 10^{-12}$ м – **комптоновская** длина волны электрона.

Отметим, что в качестве единицы длины в микромире часто пользуются величиной порядка размера атома – **ангстремом** ($1\text{ \AA} = 10^{-10}$ м). Таким образом, $\lambda_K \approx 0,024\text{ \AA}$.

Эксперимент по проверке формулы (44.6) был проведен в 1922 г. Артуром Комптоном. Источником фотонов ($\lambda = 0,71 \cdot 10^{-10}$ м = $0,71\text{ \AA}$) служила рентгеновская трубка, а мишенью – графит. В качестве прецизионного спектрального прибора Комптону послужила «естественная дифракционная решетка» – монокристалл. Рентгеновские фотоны высоких энергий были необходимы Комптону по следующим причинам. Во-первых, в этом случае было оправдано пренебрежение неизвестными в то время точно кинетической энергией и энергией связи с кристаллической решеткой электронов графита в (44.5), а, во-вторых, из-за крайней малости λ_K , уменьшение частоты $\Delta\lambda$ для коротковолнового излучения было легче зарегистрировать.

Кроме фотонов, увеличивших длину волны, в экспериментах Комптона также наблюдались фотоны, рассеянные под углом $\theta \neq 0$, но не изменившие частоты. Оказалось, что это фотоны, рассеянные на ядрах углерода. Так как ядра во много тысяч раз тяжелее электронов, то комптоновский сдвиг от рассеяния на ядрах на 3–4 порядка меньше (масса частицы-мишени в выражении для λ_K стоит в знаменателе).

Эксперименты Комптона показали, что рассеяние фотонов происходит аналогично рассеянию любых других частиц. В рамках волновой оптики объяснить эффект изменения частоты света в данном эксперименте не удастся.

Фотоэффект. Фотоэффектом называют испускание веществом электронов под действием света. Эффект был открыт в 1887 г. Генрихом Герцем, а всесторонне исследован в 1888 г. русским ученым А.Г. Столетовым. Последний экспериментально обнаружил и сформулировал важные закономерности явления: наиболее эффективно действуют ультрафиолетовые лучи (существует «красная граница» – максимальная длина волны, при которой эффект имеет место); количество испускаемых заряженных частиц пропорционально интенсивности падающего излучения; под действием света испускаются только отрицательные заряды (в 1889 г. Ленард и Томсон доказали что это электроны).

Все попытки объяснить фотоэффект с помощью классических представлений о свете как электромагнитной волне сталкивались с непреодолимой трудностью. Было непонятно, почему, вне зависимости от интенсивности, только свет с малой длиной волны вызывает испускание электронов. Иными словами, с чем связан феномен «красной границы»?

Ответ был получен в 1905 г. Эйнштейном, развившем идеи Планка о «прерывистом» испускании света: «порциями» с энергией $h\omega$. Как мы уже знаем, эти порции получили название квантов, или фотонов.

Эйнштейн записал уравнение, используя следующую модель. Фотон, поглощаясь в веществе, передает свою энергию электрону, и, если этой энергии достаточно для преодоления притяжения электрона к ионам кристаллической решетки (совершения работы выхода A), то электрон может покинуть вещество, что и составляет суть фотоэффекта. Тогда можно записать ограничения, накладываемые законом сохранения энергии на данный процесс, в виде:

$$h\omega = A + \frac{mv^2}{2}, \quad (44.7)$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия электрона, вылетевшего из образца. Уравнение (44.7) называют уравнением

Эйнштейна для фотоэффекта. Очевидно, что при $\hbar\omega < A$ фотоэффект невозможен, что и объясняет «красную границу»: $\omega_{\text{кр}} = A/\hbar$, или $\lambda_{\text{кр}} = 2\pi\hbar/A \equiv h/A$.

Соответствие эксперименту уравнения (44.7) доказывает, что свет состоит из **неделимых** частиц, энергия которых может поглотиться лишь **целиком**. Действительно, из открытого Планком факта, что свет излучается порциями, еще не вытекает «прерывистая» структура самого света. Как образно заметил Эйнштейн, «если пиво всегда продается в бутылках, содержащих пинту, отсюда не следует, что пиво состоит из неделимых частей, равных пинте».

Отметим, что приведенная метафора Эйнштейна на первый взгляд опровергается открытым позже эффектом Комптона, в котором вроде бы «поглощается» как раз «часть» фотона. В связи с этим следует сказать, что по представлениям современной физики эффект Комптона выглядит так: падающий на электрон фотон исчезает и рождается новый – «рассеянный».

Широко распространенным устройством, использующим фотоэффект, является **фотоэлемент** (рис. 44.2). В стеклянной вакуумной колбе находятся два металлических электрода: анод и катод. На анод подается плюс источника питания, на катод – минус (разность потенциалов между анодом и катодом

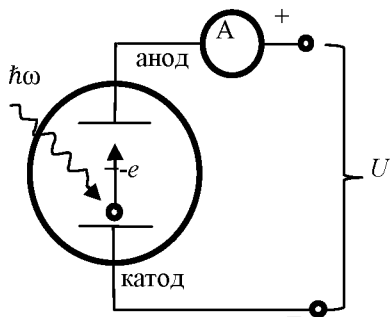


Рис. 44.2

называется **анодным напряжением** U). При освещении катода светом возникает фототок.

Типичная зависимость фототока от анодного напряжения (вольтамперная характеристика фотоэлемента, сокращенно – **ВАХ**) показана на рис. 44.3. Нелинейная ВАХ

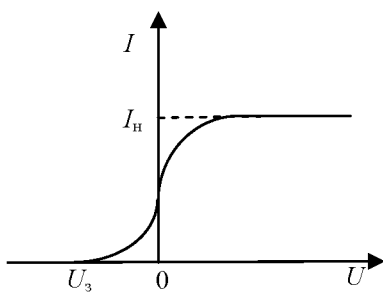


Рис. 44.3

в области малых U связана с тем, что не все выбитые светом электроны достигают анода. При достаточно больших U наступает насыщение: анода достигают все испущенные катодом электроны, и ток не растет выше значения I_n . В области $U < 0$ электронам, чтобы попасть на анод, необходимо преодолеть дополнительный потенциальный барьер eU . При $mv^2/2 = eU_3$ фототок обращается в ноль, поэтому U_3 называют задерживающим напряжением. Поэтому можно записать $\hbar\omega = A + eU_3$, или:

$$U_3 = \frac{\hbar}{e}\omega - \frac{A}{e}. \quad (44.8)$$

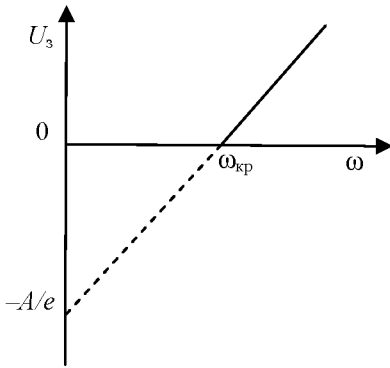


Рис. 44.4

Соответствующий график приведен на рис. 44.4. Наклон прямой $U_3(\omega)$ определяется отношением фундаментальных констант \hbar/e , экстраполяция графика к $U_3 = 0$ отсекает на оси ординат величину A/e , а точка пересечения графика с осью абсцисс соответствует $\omega_{кр}$.

В связи с уравнением Эйнштейна (44.7) интересно отметить, что простая передача всей энергии фотона свободному электрону запрещена законами сохранения энергии и импульса. Действительно, в этом случае уравнение (29.5) свелось бы к

$$\begin{cases} W_\phi + mc^2 = W'_3; \\ \vec{p}_\phi = \vec{p}'_3 \end{cases};$$

и далее:

$$\begin{cases} (W_\phi - mc^2)^2 = W'^2_3; \\ (\vec{p}_\phi)^2 c^2 = (\vec{p}'_3)^2 c^2; \end{cases};$$

$$\begin{cases} W_{\phi}^2 + (mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = W_{\phi}^{\prime 2} \\ (p_{\phi}c)^2 = (p_{\phi}^{\prime}c)^2 \end{cases};$$

$$(mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = (mc^2)^2;$$

$$W_{\phi}mc^2 = 0,$$

что абсурдно. На самом деле в процессе поглощения фотона участвует близлежащее ядро атома, которое принимает на себя импульс отдачи. Однако из-за колоссальной разницы в массах электрона и ядра передача импульса отдачи происходит практически без передачи энергии, что и обеспечивает справедливость уравнения (44.7).

Зависимость фототока насыщения от частоты света определяется вероятностью (или, как говорят, сечением) процесса. Вычисление сечения фотоэффекта представляет собой сложную задачу квантовой физики, которой мы здесь не касаемся.

При очень мощных световых пучках, которые стали доступны экспериментаторам после создания лазеров, возможно наблюдение также и многофотонных процессов, когда электрон получает энергию от нескольких (числом $N > 1$) фотонов одновременно (в этом случае в левой части уравнения (44.7) следует писать $Nh\nu$). Для света небольшой интенсивности вероятность многофотонных процессов пренебрежимо мала.

В заключение отметим, что тот же самый механизм поглощения фотонов может приводить просто к переходам электронов вещества в возбужденные состояния (состояния с большей энергией), при этом электроны остаются в образце. Это явление называют внутренним фотоэффектом. В противовес внутреннему фотоэффекту, описанный выше процесс испускания электронов из образца называют внешним фотоэффектом.

Тормозное рентгеновское излучение. Остановимся теперь на явлении противоположном рассмотренному в предыдущем параграфе – на испускании веществом фотонов при облучении его электронами (своего рода «обратный фотоэффект»). Электроны, разогнанные разностью потенциалов U и, соответственно, обладающие кинетической энергией eU , падают на поверхность металлической мишени, называемой антикатодом. При этом наблюдается излучение света в широком диапазоне частот.

Само по себе излучение света в таком процессе не противоречит классической электродинамике: из-за силы торможения в веществе электроны испытывают **ускорение**, и поэтому **должны** излучать. Тем не менее, классическая электродинамика не в состоянии объяснить существование **максимальной частоты** ω_{\max} испускаемого света, открытое экспериментально. Классическая физика не накладывает частотного ограничения на испускаемый при торможении заряда свет.

С квантовой точки зрения максимальная частота излучения не составляет загадки: ведь электрон не может «произвести» фотон с энергией больше, чем его собственная кинетическая энергия. Отсюда и следует искомое ограничение:

$$eU = \hbar\omega_{\max}. \quad (44.9)$$

Следует сказать, что для описания процессов, подобных вышеописанным, энергию eU обычно выражают не в Джоулях, а в электрон-вольтах ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Длина волны фотона, удовлетворяющего условию (29.29), выраженная в **ангстремах**, находится из формулы $\lambda = 2\pi\hbar c / eU = 12390 / U$, где U подставляется в Вольтах. Легче для запоминания, хоть и несколько неточна, другая формула («правило раз-два-три-четыре-пять»): $\lambda = 12345 / U$. Например, минимальная длина волны фотона, который может излучиться при торможении электрона с кинетической энергией порядка 12 кэВ, составляет примерно $1 \overset{\circ}{\text{А}}$, что соответствует рентгеновскому диапазону.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается релятивистское выражение для кинетической энергии свободной частицы от классического?
2. Какова связь между энергией и импульсом безмассовых частиц?
3. В чем состоит эффект Комптона?
4. Что такое комптоновская длина волны?
5. Почему в опыте Комптона наблюдались несмещенные пики наряду со смещенными?

6. Объясните зависимость фототока насыщения от интенсивности света.

7. Можно ли объяснить красную границу фотоэффекта из классических соображений?

8. Как определить из результатов опыта по наблюдению фотоэффекта постоянную Планка?

9. Объясните, от каких параметров зависит максимальная частота тормозного рентгеновского излучения.

45. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

Гипотеза де Бройля. В 1923 г. французскому физика Луи де Бройлю пришла в голову идея. Раз свет имеет дуальную природу, т.е. одновременно проявляет свойства, как частиц, так и волн, то почему бы частицам вещества, таким как, скажем, электронам, не обладать волновыми свойствами? Давайте, вслед за де Бройлем, сопоставим частице длину волны. Делать мы это будем по аналогии со светом. Плоская монохроматическая электромагнитная волна в вакууме описывается вектором напряженности $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi)$. Длина волны может быть найдена с помощью модуля волнового вектора

$$\lambda = 2\pi / k. \quad (45.1)$$

Дисперсионное соотношение, как известно $k = \omega / c$, где c – скорость света в вакууме. Теперь представим свет как совокупность квантов. Энергия одного кванта $\varepsilon = \hbar\omega$, его импульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Рассмотрим свободную (т.е. не взаимодействующую) частицу, например, электрон. Пусть частица, по аналогии с фотоном, обладает волновым вектором, таким, что импульс равен

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (45.2)$$

Тогда, воспользовавшись формулой (45.1), мы найдем для длины волны, сопоставляемой частице вещества

$$\lambda_B = 2\pi / k = 2\pi\hbar / p = h / p. \quad (45.3)$$

Итак, частицы **обладают волновыми свойствами**. Это значит, что для них возможна дифракция и интерференция по аналогии со светом. Но мы в повседневной жизни не наблюдаем эти явления для макроскопических объектов. В чем же здесь дело? Может быть, гипотеза де Бройля не верна? Почему же мы не наблюдаем дифракции камня на заборе по аналогии с дифракции света на дифракционной решетке?

Для ответа на эти вопросы давайте рассчитаем длину волны **макроскопического тела**, скажем, пули, вылетающей из автомата. Пусть масса пули $m_n = 9 \text{ г} = 0,009 \text{ кг}$, ее скорость $v_n = 800 \text{ м/с}$. Таким образом, импульс пули равен $p = mv = 7,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Теперь, найдем ее длину волны де Бройля с помощью формулы (45.3): $\lambda_n = h / p = 6,63 \cdot 10^{-34} / 7,2 = 0,9 \cdot 10^{-34} \text{ м}$. Рассмотрим «опыт Юнга для пуль». Пусть пули пролетают через две щели, расстояние между которыми d . Расстояние до экрана – L . Будем ли мы наблюдать интерференцию?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассчитаем ширину интерференционной полосы. Из теории интерференции света, мы знаем, что ширина интерференционной полосы равна $\Delta x = L\lambda / d$. Пусть $L = 10 \text{ м}$, $d = 10^{-2} \text{ м}$. Тогда $\Delta x = L\lambda / d = 0,9 \cdot 10^{-34} / 10^{-2} \approx 10^{-32} \text{ м}$.

Итак, **ширина интерференционной полосы** при интерференции макроскопического объекта, скажем пули, оказывается слишком **малой**, чтобы ее можно было обнаружить экспериментально. Вот поэтому мы и не наблюдаем интерференционных явлений для частиц в повседневной жизни.

Теперь рассмотрим **микроскопический объект**, например, электрон, движущийся со скоростью $v = 10^6 \text{ м/с}$. Поскольку масса электрона $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$, то длина волны де Бройля для такого электрона равна

$$\lambda_e = h / p = 6,63 \cdot 10^{-34} / (0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^6) = 7,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Такой длиной волны обладает **рентгеновское излучение**, для которого наблюдаются явления дифракции и интерференции. Таким образом, электроны тоже **могут** участвовать в дифракции и интерференции. Более того, как и для света, для электронов существует и приближение **геометрической оптики**. Регулируя

импульс (а значит, длину волны), который сообщает электронам электронная пушка, можно добиться разрешения электронного микроскопа менее одного нанометра. Создана специальная электронная оптика: роль линз играют так называемые магнитные линзы. Электронные микроскопы выпускаются серийно и используются повсеместно.

Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля. Интерференция электронов была обнаружена еще до появления гипотезы де Бройля. Но тогда этот эксперимент не был понят. Девиссон и Кэнсман в 1921–1923 гг. проводили эксперименты по рассеянию электронов тонкими металлическими пленками. Они наблюдали максимумы при рассеянии электронов зависящие от скорости электронов. В одном из опытов прибор лопнул, и никелевая пленка окислилась. Затем эту пленку прокалили, что привело к рекристаллизации с образованием крупных кристаллов. При этом число максимумов при рассеянии электронов резко возросло, а сами максимумы сделались более отчетливыми. Происхождение максимумов долго не могли объяснить, пока их не истолковали как результат интерференции волн де Бройля.

В своем опыте Девиссон и Джермер исследовали рассеяние электронов на монокристалле никеля. В эксперименте менялся угол Θ (он отсчитывается от плотнозаселенной кристаллографической плоскости) и ускоряющая разность потенциалов электронов. При угле Θ , соответствующем зеркальному отражению электронов (угол падения равен углу отражения) от кристаллических плоскостей наблюдался резко выраженный максимум.

Попробуем объяснить эксперимент Девиссона и Джермера с помощью гипотезы де Бройля. Сопоставим электрону длину волны де Бройля (45.3). Тогда на кристаллической решетке будет происходить дифракция, аналогичная дифракции рентгеновских на кристалле.

Отметим, что волновые свойства проявляются (и это наблюдается экспериментально!) не только у электронов, но и у других элементарных частиц и даже у легких атомов.

Рассмотрим теперь дифракцию нейтронов. Поскольку нейтрон не имеет заряда, то он взаимодействует только с ядрами посредством так называемого сильного взаимодействия. Рассеянные

нейтроны попадают на фотопластинку, покрытую индиевой фольгой. В результате ядерной реакции, фотопластинка чернеет в местах попадания нейтронов. В настоящее время дифракция нейтронов широко используется в кристаллографии для определения структуры кристаллической решетки.

Принцип неопределенности Гейзенберга. Можно ли сколь угодно точно измерить одновременно координату, скажем, x и проекцию импульса частицы на ось x ? В классической физике ответ очевиден. Конечно же, мы одновременно можем знать точные значения проекции импульса и координаты. Однако для микрочастицы ответ неочевиден. Ведь теперь мы имеем дело одновременно и с частицами, и с волнами.

Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть частица с импульсом \vec{p} пролетает через щель шириной d . Мы будем фиксировать положение частицы на экране. Такой частице мы можем приписать длину волны де Бройля $\lambda_B = h / p$. Следовательно, на щели возникнет дифракция. Воспользуемся формулой определения минимумов m -го порядка в случае дифракции плоской волны $d \sin(\theta_m) = m\lambda_B$, где $m = 1, 2, 3 \dots$ Подставим в эту формулу длину волны де Бройля $\sin(\theta_m) = \frac{mh}{pd}$. Для первого минимума (границы центрального максимума) мы, очевидно, получим (две зоны Френеля):

$$\sin(\theta_1) = \frac{h}{pd}. \quad (45.4)$$

Предположим, что мы хотим измерить координату x частицы с помощью нашего опыта. Для этого щель нужно сделать узкой. Чем уже щель, тем точнее мы знаем координату частицы. Но вот проблема: как только мы начнем уменьшать ширину щели d , у нас сразу же увеличится угол θ_1 соответствующий первому минимуму, или, другими словами, увеличится ширина центрального максимума. Это значит, что в результате дифракции наша частица попадет на экран где-то в районе центрального максимума. Где точно – мы не знаем. Если мы проделаем много опытов, и будем измерять число электронов, попавших в ту или иную точку экрана, то мы получим дифракционную картину. Однако нужно заме-

туть, что некоторая часть частиц может попасть не в центральный максимум, а в первый, второй и т.д. Но вероятность таких событий мала.

Итак, частица, падавшая перпендикулярно плоскости щели, в результате дифракции движется под углом к этой плоскости. Причем **точное** значение угла мы **не знаем**. Мы знаем только, то, что с наибольшей вероятностью, частица будет двигаться в пределах $-\theta_1 < \theta < \theta_1$, то есть она попадет куда-то в центральный максимум. С другой стороны, проекция импульса частицы на ось x равна $p_x = p \sin \theta$. Но угол θ мы **не знаем точно**. Следовательно, и проекция импульса нам точно не известна.

Введем **неопределенности** координаты Δx и проекции импульса Δp_x . Неопределенность данной величины характеризует точность, с которой мы можем измерить эту величину. Из нашего опыта видно, что, точность измерения координаты равна ширине щели $\Delta x = d$. Неопределенность же проекции импульса равна $\Delta p_x = p \sin \theta_1$. Теперь воспользуемся формулой для первого минимума (45.4).

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (45.5)$$

Теперь учтем, что частица может оказаться не только в центральном максимуме, но и в первом, втором и т.д., хотя вероятность такого события и мала. Это приведет к тому, что равенство (45.5) заменится неравенством:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (45.6)$$

Полученное соотношение выражает принцип **неопределенности**, сформулированный Гейзенбергом. Принцип неопределенности: **невозможно одновременно точно определить значение координаты и проекции импульса на соответствующую ось**. Предположим, что мы сумели точно определить координату, т.е. $\Delta x = 0$, тогда из (45.6) следует, что $\Delta p_x = \infty$. То есть о проекции импульса мы не знаем ничего. Эта проекция может принимать **любое** значение от $-\infty$ до $+\infty$. Аналогично, если мы точно знаем проекцию импульса, то ничего не знаем о координате.

Сразу же возникает вопрос: может быть наш опыт не очень удачен, какой-нибудь другой эксперимент позволит точно

измерить координату и проекцию импульса? Но при проведении опыта мы использовали волновые свойства частицы. И принцип неопределенности является следствием волновых свойств частиц. Для того чтобы убедиться в том, что дело не в конкретном эксперименте, рассмотрим еще один мысленный опыт, предложенный Гейзенбергом – микроскоп Гейзенберга.

Предположим, что мы хотим определить положение частицы с помощью микроскопа. Для этого, прежде всего, ее нужно осветить. Используем для этой цели фотон с длиной волны λ_ϕ . Фотон рассеивается на частице и попадает в объектив микроскопа. Однако, в силу дифракции света, фотон может попасть в любую точку круга радиуса R на экране. Если бы мы освещали объектив микроскопа большим числом фотонов, то на экране наблюдалась бы дифракционная картина, положение первого минимума которой и описывалось бы окружностью радиуса R . Из теории микроскопа известно, что минимальное расстояние между двумя предметами, которые видны раздельно, порядка длины волны излучения. Т.е. наша частица будет давать размытое изображение в силу дифракции света. Причем неопределенность координаты x порядка длины волны фотона:

$$\Delta x \approx \lambda_\phi. \quad (45.7)$$

Теперь, чтобы увеличить точность измерения координаты электрона будем уменьшать длину волны излучения, т.е. увеличивать его частоту. В конце концов, мы сможем измерить координату сколь угодно точно. Но мы забыли про импульс. Если мы будем измерять координату макроскопического тела, например песчинки, то за счет освещения ее фотоном импульс песчинки не изменится. А что же будет с микроскопической частицей? При рассеянии фотон может передать электрону максимальный импульс $2p_\phi$. Таким образом, неопределенность импульса электрона будет равна $\Delta p_x \approx 2p_\phi$, где p_ϕ – импульс фотона. Но импульс фотона, как мы знаем, равен $p_\phi = \hbar k = h / \lambda_\phi$. Отсюда для неопределенности проекции импульса электрона получим

$$\Delta p_x \approx 2h / \lambda_\phi. \quad (45.8)$$

Итак, уменьшая длину волны, мы тем самым увеличиваем неопределенность импульса электрона. Перемножив неопределенности импульса и координаты (формулы (45.7) и (45.8)) мы снова приходим к принципу неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \approx h.$$

Из принципа неопределенности вытекает следствие. В классической механике мы представляли полную энергию частицы в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Кинетическая энергия зависит от скорости, т.е. от импульса частицы, в то время как потенциальная энергия зависит от координаты. В квантовой механике такое разбиение невозможно, ведь частица не может иметь одновременно определенные координаты и импульс. В квантовой механике имеет смысл только полная энергия.

Дифракция на двух щелях. Рассмотрим еще один эксперимент. Во-первых, вернемся к «опыту Юнга для пуль». Пусть пули, вылетающие из автомата, пролетают через две щели. Как мы видели, приписанная пуле длина волны де Бройля настолько мала, что обнаружить интерференцию мы не сможем (расстояние между максимумами оказалось равным $\Delta x \approx 10^{-32}$ м). Возьмем маленький участок экрана и посчитаем число пуль, попавших в эту область экрана. Если разделить полученное число на полное число пуль, попавших в экран, то мы получим вероятность попадания пули в данный участок экрана $P = \frac{\Delta N}{N}$. Введем плотность

вероятности попадания пули на участок экрана длиной Δx , $f = \frac{P}{\Delta x}$. Мы получим два максимума: каждый точно напротив

соответствующей щели. Теперь закроем сначала одну из щелей, затем другую. Соответствующий максимум будет, очевидно, исчезать. Теперь, если сложить плотности вероятностей f_1 и f_2 то мы получим плотность вероятности $f = f_1 + f_2$. Эта сумма плотностей вероятностей выражает тот факт, что пуля, попавшая в экран, прошла либо через одну щель, либо через другую.

Теперь проведем аналогичный опыт с электронами. Но для электрона мы должны наблюдать интерференцию. Значит, на

экране будет интерференционная картина, то есть будут чередоваться темные и светлые полосы, аналогичные классическому опыту Юнга. Мы видим, что теперь, за счет интерференции $f \neq f_1 + f_2$. Если теперь мы закроем одну из щелей, то интерференция исчезнет.

Но остается вопрос: через какую щель пролетел электрон? Давайте сделаем следующий опыт. Будем освещать обе щели светом и по рассеянию фотонов на электронах будем определять, где пролетел электрон. Итак, мы будем строить два графика: слева мы отмечаем точку, если электрон пролетел через левую щель, и справа, если электрон пролетел через правую щель. У нас получатся точно такие же результаты, как в «опыте для пуль». То есть теперь плотности вероятностей складываются. Как только мы узнали, через какую щель пролетел электрон, интерференция сразу же прекратилась.

Для того чтобы определить, где пролетел электрон, мы освещали его светом. И фотон, рассеявшись на электроне, передал бы ему свой импульс, тем самым, изменив направление его движения, что привело к исчезновению интерференции. Импульс фотона $p_\phi = h / \lambda_\phi$. Это значит, что, увеличивая длину волны фотона, мы уменьшаем его импульс, и тем самым, уменьшаем возмущение электрона фотоном. В конце концов, это возмущение станет настолько малым, что интерференция восстановится, и мы снова получим интерференцию!

Но тут нас ждет одна проблема. Нам понадобится микроскоп для наблюдения рассеянных фотонов. Но как мы видели, с увеличением длины волны изображение электрона становится все более размытым, поскольку $\Delta x \approx \lambda_\phi$. Так вот, как только интерференционная картина восстановится, неопределенность координаты электрона превысит расстояние между щелями. И мы опять не сможем сказать, через какую щель пролетел электрон.

Принцип неопределенности формулируется не только для проекции импульса и координаты, но и для энергии и времени.

$$\Delta E \Delta t \geq h. \quad (45.9)$$

Этот принцип утверждает, что чем короче время существования какого-то состояния (или время измерения параметров этого состояния), тем с **меньшей определенностью** можно говорить об энергии этого состояния.

В качестве примера рассмотрим **возбужденное** состояние атома. Время жизни возбужденного состояния атома (естественно не метастабильного) порядка $\tau = 10^{-8}$ с. Т.е. за это время атом перейдет в невозбужденное состояние, излучив квант света. Найдем **неопределенность** энергии возбужденного состояния атома с помощью формулы (45.9):

$$\Delta E = h / \tau = 6,63 \cdot 10^{-34} / 10^{-8} = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ Дж}.$$

Найдем **неопределенность частоты** излученного при переходе фотона. Поскольку энергия кванта равна разности энергий возбужденного E_1 и невозбужденного E_2 уровней $\hbar\omega = E_2 - E_1$, то

$$\text{неопределенность частоты } \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{6,63 \cdot 10^{-26}}{6,63 \cdot 10^{-34}} 2\pi = 6,28 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Эта частота соответствует наблюдаемому на эксперименте **естественному уширению спектральной линии**.

Скорость волн де Бройля. Волновой пакет. Если ограничиться нерелятивистскими частицами, скорость которых много меньше скорости света в вакууме, то импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$, а энергия

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (45.10)$$

Формула (45.11) представляет собой **дисперсионное соотношение** для нерелятивистской частицы. При рассмотрении электромагнитных волн мы ввели понятие **фазовой и групповой скоростей**. Фазовая скорость

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} \quad (45.11)$$

представляет собой скорость **бесконечной синусоидальной волны**. Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \quad (45.12)$$

есть скорость распространения **огибающей** волнового пакета. В вакууме эти скорости не различаются и равны скорости света в вакууме. В среде фазовые и групповая скорости различаются в силу дисперсии света. Вдали от области поглощения групповая скорость характеризует скорость распространения сигнала.

Найдем фазовую и групповую скорости частицы. По аналогии с фотонами

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}. \quad (45.13)$$

Подставим в (45.13) формулу (45.10):

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar}. \quad (45.14)$$

Теперь с помощью формул (45.11), (45.12) и (45.2) найдем фазовую и групповую скорости частицы:

$$v_{\text{ф}} = \frac{p}{2m}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{p}{m}.$$

Поскольку $p = mv$, то $v_{\text{ф}} = \frac{v_{\text{гр}}}{2}$.

Итак, мы пришли к выводу, что фазовая скорость волны де Бройля в два раза **меньше** скорости частицы, в то время как **групповая скорость равна скорости частицы**. Таким образом, частице необходимо сопоставлять **не одну** бесконечную синусоидальную волну, а **волновой пакет**, групповая скорость которого и равна скорости частицы.

При изучении дисперсии света мы выяснили, что волновой пакет в среде **расплывается** в силу того, что фазовые скорости волн, из которых состоит волновой пакет, **различны**. Однако в вакууме все фазовые скорости одинаковы и волновой пакет, состоящий из электромагнитных волн, **не расплывается**.

Будет ли расплываться волновой пакет волн де Бройля? Рассмотрим частицу, описываемую в начальный момент времени волновым пакетом, пусть частица движется вдоль оси x . Ширина волнового пакета описывает не что иное, как неопределенность координаты Δx_0 . Такой частице мы должны сопоставить группу

волн де Бройля, с длинами волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Причем $\lambda = h / p$. Следовательно, такому волновому пакету присущ разброс скоростей $\Delta v = \Delta p_{x0} / m$, где Δp_{x0} начальная неопределенность проекции импульса. Через время t волновой пакет расплывется, и неопределенность координаты станет равна $\Delta x = \Delta v \cdot t = \frac{\Delta p_{x0} t}{m}$. Теперь, воспользовавшись принципом неопределенности (45.6), получим:

$$\Delta x = \frac{ht}{m\Delta x_0}.$$

Оценим величину Δx . Пусть в начальный момент электрон был локализован в области, имеющей атомные размеры $\Delta x_0 = 10^{-10}$ м. Какова же будет неопределенность координаты через 1 секунду?

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{-10}} = 7 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Итак, свободная частица, локализованная на атомных размерах, за одну секунду «расплывется» до расстояний порядка 7000 км!

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему опыты Юнга невозможно провести с пулями, вылетающими из пистолета.
2. Расскажите о дифракции электронов на двух щелях.
3. Сформулируйте соотношение неопределенности для импульса.
4. Почему квантовые частицы не видны в микроскоп Гейзенберга?
5. Сформулируйте соотношение неопределенности для энергии.
6. Что такое время жизни квантового состояния?
7. С какой скоростью движется частица – с фазовой или с групповой?
8. Каково дисперсионное соотношение для нерелятивистских частиц?

46. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Как законченный раздел физики **квантовая механика** сформировалась во второй половине 20-х гг. XX в. а и связана с именами таких ученых как В. Гейзенберг, Э. Шредингер, П. Дирак, М. Борн и др. По своему «языку» квантовая механика радикально отличается от классической. Систематическое ее изложение в данном пособии невозможно в силу ограниченности объема пособия. Тем не менее, ниже будут перечислены некоторые из важнейших особенностей ее построения и рассказано о некоторых простейших квантовомеханических задачах. Начнем с основных понятий этой науки.

Состояние. Каждая частица в любой момент времени находится в каком-то **состоянии**. Это состояние характеризуется **волновой функцией** – в общем случае **комплексной** функцией действительных переменных (координат и времени), **непрерывной** вместе со своими **первыми производными**, и обозначается $\Psi(x, y, z, t)$. Волновая функция **не наблюдаема** (ее нельзя «измерить» приборами), на это прямо указывает то, что ее значения – **комплексные числа**, в то время как физические величины выражаются действительными. **Квадрат модуля** $|\Psi|^2 \equiv \Psi\Psi^*$ (звездочкой обозначено **комплексное сопряжение** – замена знака при всех мнимых единицах « i ») волновой функции равен **плотности вероятности** обнаружения частицы в точке (x, y, z) в момент t . Иными словами, вероятность dp нахождения частицы в бесконечно малом объеме $dV = dx dy dz$ в окрестности точки $\vec{r} = \{x, y, z\}$ равна $|\Psi|^2 dV$). Поэтому волновая функция может проявить себя в эксперименте только **статистически**. Из определения плотности вероятности следует важное свойство волновой функции: она должна удовлетворять **условию нормировки**, которое просто выражает факт, что частица **достоверно** хоть где-то находится. Таким образом,

$$\int dp = \int |\Psi|^2 dV = 1.$$

Интеграл в условии нормировки берется, грубо говоря, «по всей Вселенной».

Наблюдаемые. Некоторым важным физическим величинам (энергии, импульсу, моменту импульса и др.), называемым **наблюдаемыми**, в квантовой механике соответствуют **операторы**, которые помечают знаком « $\hat{}$ », например \hat{H} . Напомним, что оператором в математике называют правило, по которому одна функция ставится в соответствие другой. При этом говорят: оператор **действует** на функцию и получается другая функция. В таблице 46.1 перечислены некоторые простейшие операторы квантовой механики.

Таблица 46.1

Некоторые операторы квантовой механики

Наблюдаемая	Обозначение	Правило действия на Ψ
координата x (y, z – аналогично)	\hat{x}	$x \cdot \Psi$
x – проекция импульса	\hat{p}_x	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi$
вектор импульса	$\hat{\vec{p}}$	$-i\hbar \cdot \text{grad } \Psi$
потенциальная энергия $U(x)$	$\hat{U}(x)$	$U(x) \cdot \Psi$
кинетическая энергия $\frac{p^2}{2m}$	$\frac{\hat{p}^2}{2m}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$
полная энергия $U(x) + \frac{p^2}{2m}$	\hat{H} – оператор Гамильтона, или гамильтониан	$\left[U(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right] \Psi$

Отметим, что если квантовомеханические наблюдаемые имеют классические аналоги, то выражения для них совпадают с классическими, при замене операторов на соответствующие физические величины. Напомним, также, что i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Собственные значения операторов. Из сказанного совершенно непонятно, каким образом в квантовой механике выглядит то, с чем привычно имеет дело физика, – результаты измерений. Оказывается, что измеряемые в эксперименте значения наблюдаемых в квантовой механике являются **собственными значениями** соответствующих операторов. Напомним, что если при действии

оператора на функцию получается та же самая функция, умноженная на константу, то такая функция называется **собственной функцией** оператора, а константа – **собственным значением** оператора. Так как не любая функция является собственной функцией оператора, делаем вывод, что не при всех состояниях частицы можно говорить о значениях ее наблюдаемых. Операторы всех наблюдаемых квантовой механики обладают свойством эрмитовости, что означает, что их собственные значения – всегда действительные числа.

Уравнение Шредингера. Это уравнение в квантовой механике имеет значение второго закона Ньютона в механике классической. Вот как оно выглядит:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (46.1)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда гамильтониан не зависит от времени явно (это соответствует изолированной системе в классической механике). Пусть нас интересуют только состояния с определенной энергией (то есть состояния, в которых в принципе можно говорить о величине энергии частицы), что прямо означает, что функция Ψ является собственной функцией гамильтониана: $\hat{H}\Psi = E\Psi$, где E – собственное значение гамильтониана, а проще говоря – полная энергия системы. Подставляя это выражение в (46.1), имеем:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi, \quad (46.2)$$

откуда

$$\Psi = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (46.3)$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция координаты. Таким образом, все состояния с определенной энергией имеют одну и ту же универсальную зависимость волновой функции от времени:

$e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Далее, непосредственная подстановка (46.3) в (42.2) дает «обычное» уравнение на собственные значения гамильтониана

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (46.4)$$

но в литературе его часто называют «стационарным уравнением Шредингера», а функцию $\psi(x)$ – «волновой функцией». Как и Ψ , функция ψ удовлетворяет условию нормировки:

$$|\Psi|^2 \equiv \Psi\Psi^* = \psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \cdot \psi^* e^{+i\frac{E}{\hbar}t} = \psi\psi^* = |\psi|^2.$$

Несмотря на разницу между $\psi(x)$ и $\Psi(x,t)$ такая терминология обычно не приводит к путанице. Ниже мы будем иметь дело только со «стационарными» уравнениями вида (46.4). Рассмотрим несколько простейших задач.

Свободная частица (состояние с определенным импульсом). В качестве первого примера рассмотрим частицу, обладающую только кинетической энергией (для простоты ограничимся одномерным случаем). Тогда задача на собственные функции и собственные значения оператора x -проекции импульса выглядит так (см. табл. 46):

$$\hat{p}_x\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} = p_x\Psi. \quad (46.5)$$

Уравнение (46.5), по сути, ничем не отличается от (46.2), и его решение – это, конечно, экспонента. В данном случае

$\psi = C \cdot e^{i\frac{p_x}{\hbar}x}$, где C – произвольная константа, определяемая из условия нормировки. Тогда «полная» волновая функция свободной частицы будет иметь вид плоской волны:

$$\Psi = C \cdot e^{i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \equiv C \cdot e^{i(k_x x - \omega t)},$$

где $p_x = \hbar k_x$ и $E = \hbar\omega$. Итак, **соотношения де Бройля** в квантовой механике появляются «автоматически»! То, что в этом простейшем случае Ψ имеет вид **плоской волны** и объясняет то, что функцию называют **волновой**. Далее,

$$|\Psi|^2 = |C|^2 \cdot e^{i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} = |C|^2 = \text{const}.$$

Мы видим, что плотность вероятности нахождения частицы в любой точке пространства **постоянна**: частица **равновероятно** находится, где угодно. Но именно об этом и говорит нам принцип неопределенности Гейзенберга: если импульс частицы известен

точно, то неопределенность ее координаты равна бесконечности. Мы видим, что квантовая механика не нуждается ни в принципе неопределенности, ни в соотношениях де Бройля.

Потенциальный барьер (одномерный случай). Пусть зависимость потенциальной энергии частицы массой m имеет «ступенчатый» вид: $U(x) = 0$ при $x < 0$ и $U(x) = U_0 > 0$ при $x > 0$. Частица с энергией E движется слева направо по направлению к «барьеру» находящемуся в точке $x = 0$. Необходимо объяснить характер движения частицы в зависимости от ее полной энергии E .

Классическое решение. Если полная энергия частицы E меньше «высоты» барьера U_0 , то, независимо от «крутизны» барьера, частица «отражается» от него без потери скорости; в противном случае ($E > U_0$) частица преодолевает барьер и движется в прежнем направлении с меньшей скоростью.

Квантовое решение. Необходимо рассмотреть две области.

В области $x < 0$ волновую функцию можно написать сразу (ведь это просто ситуация свободной частицы): $\psi = C \cdot e^{i \frac{px}{\hbar}}$. Модуль p проекции импульса связан с энергией классическим соотношением $p = \sqrt{2mE}$.

В области $x > 0$ уравнение Шредингера (46.4) имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U_0 \psi = E \psi \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0. \quad (46.6)$$

Согласно правилам решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения ищем решение в виде: $\psi \sim e^{\alpha x}$. Подставляя в (46.6) имеем «характеристическое уравнение»:

$$\alpha^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0); \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{-2m(E - U_0)}}{\hbar} = \pm i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}.$$

Таким образом, волновая функция при $x > 0$ имеет вид:

$$\psi = C_1 e^{i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x} + C_2 e^{-i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x}. \quad (46.7)$$

Константы C_1 и C_2 выбираются из соображения непрерывности ψ и ее производной на всей оси x и условия нормировки (мы не будем сейчас этим заниматься).

Теперь проанализируем решение (46.7) и сравним его с классическим.

Начнем со случая классического «преодоления» барьера: $E > U_0$. В области $x > 0$ частица ведет себя так же, как свободная, но с меньшей частотой «волны де Бройля»: вместо $\omega = E/\hbar$ имеем $\omega = (E - U_0)/\hbar$. Такая ситуация в точности соответствует классической. Есть, однако, и существенное отличие (здесь мы не будем его доказывать): существует ненулевая вероятность отражения частицы назад от барьера (ненулевой коэффициент отражения)! Подобное совершенно невозможно в классической механике.

Еще более удивительный результат получается для классически непреодолимого барьера $U_0 > E$. В волновой функции (46.7) под знаком корня оказывается отрицательное число. В классической механике такое выражение не имеет смысла. Однако, хотя бы потому, что волновая функция «и так» комплексная, мы обязаны такой корень извлекать! Вместо (46.7) мы получаем:

$$\psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}}.$$

Второе слагаемое неограниченно возрастает на бесконечности, что не имеет физического смысла (поэтому полагаем $C_2=0$), однако первое слагаемое таковой смысл имеет. Поэтому

$$\psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}}. \quad (46.8)$$

Мы получили, что при $x > 0$ $\psi \neq 0$! Иными словами, даже в случае классической непреодолимости барьера, частица с некоторой вероятностью проходит в классически-недоступную область (естественно, как и в случае $E < U_0$, существует и вероятность отражения назад). Данное явление получило название **туннельного эффекта**; оно экспериментально открыто и используется в современных технологиях (например, в туннельных микроскопах). Все происходит так, как будто внутри барьера имеется «туннель», который «помогает» частице проникнуть вглубь барьера.

Бесконечно глубокая потенциальная яма. Рассмотрим опять одномерный случай. Пусть потенциальная энергия частицы U равна нулю на отрезке $0 < x < l$, а в остальных случаях равна

бесконечности. В классическом случае частица либо лежит на дне ямы, либо (если она обладает кинетической энергией $E \neq 0$) «прыгает» внутри ямы; никаких ограничений на значения E в классической механике нет. Принцип неопределенности сразу же указывает нам на одну особенность поведения частицы в квантовом случае: координата частицы имеет неопределенность l , поэтому неопределенность импульса отлична от нуля, а значит, по меньшей мере, классический вариант «лежания на дне» уже невозможен. Рассмотрим более подробно квантовое решение задачи.

В областях $x < 0$ и $x > l$ воспользуемся готовым решением (46.8), устремив U_0 к бесконечности: мы получаем $\psi \equiv 0$ (бесконечные барьеры все-таки непреодолимы!). В области $0 < x < l$ имеем ситуацию свободной частицы, которая может двигаться как вправо, так и влево: $p_x = \pm p$, где p – модуль импульса частицы. Поэтому волновая функция будет суперпозицией «волн вправо» и «волн влево»:

$$\psi(x) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}x},$$

где A и B константы, подлежащие определению. Из условия непрерывности волновой функции, она должна обращаться в ноль на границах ямы. Поэтому:

$$\begin{cases} 0 = \psi(0) = A + B \rightarrow B = -A \\ 0 = \psi(l) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}l} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}l} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} 0 = \psi(l) &= A \left(e^{i\frac{p}{\hbar}l} - e^{-i\frac{p}{\hbar}l} \right) = \\ &= A \left(\cos \frac{p}{\hbar}l + i \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l - \cos \frac{p}{\hbar}l + i \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l \right) = 2iA \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l, \end{aligned}$$

(использовано соотношение Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$). Последнее уравнение удовлетворяется только при дискретных значениях модуля импульса $pl/\hbar = \pi n$, где n – любое натуральное число. По физическим соображениям, значение $n = 0$ ($p = 0$) не подходит, так как сразу приводит к $\psi \equiv 0$, что означает, что частицы просто

не существует. Таким образом модуль импульса частицы может принимать значения $p_n = \pi\hbar n/l$, где $n = 1, 2, 3\dots$. Соответственно, могут быть только **дискретными** и значения кинетической энергии:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}, \quad n=1, 2, 3\dots \quad (46.9)$$

Обобщая полученный результат, можно доказать, что если движение квантовой системы **финитно** (ограничено в пространстве), то собственные значения оператора энергии, или гамильтониана, \hat{H} **дискретны** (или, по-другому, **квантованы**), в противном случае – **непрерывны**. Так, дискретные значения энергии имеют гармонический осциллятор, электроны в атоме, нуклоны в ядре. Дискретные значения энергии приводят к линейчатым спектрам излучения и поглощения, как это имеет, например, в атомах разреженных газов.

В заключение решения этой задачи, вернемся к принципу неопределенности $\Delta p \Delta x > \hbar$. В качестве неопределенности импульса Δp возьмем наименьшее значение его модуля $p_1 = \pi\hbar/l$. Умножая p_1 на неопределенность координаты $\Delta x = l$, получаем $\pi\hbar < \hbar$. Как и всегда в квантовой механике, принцип неопределенности выполняется автоматически.

Гармонический осциллятор. Назовем гармоническим осциллятором частицу, движущуюся по прямой линии, на которую действует возвращающая в положение равновесия сила, пропорциональная смещению частицы от положения равновесия. Масса частицы m , коэффициент пропорциональности между силой и смещением частицы (жесткость) k . Следует описать характер движения частицы в зависимости от величины ее полной энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad \text{где } U(x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Классическое решение. Положительная полная энергия частицы $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$ может быть **любой**. При фиксированной $E = E_0$ частица совершает **гармонические колебания** на **собственной частоте** $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ с амплитудой координаты

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \quad \text{и амплитудой скорости } v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

Квантовое решение. Волновую функцию $\psi(x)$ квантового осциллятора можно найти, решив уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi.$$

Математическое решение этого уравнения оказывается достаточно сложным; можно указать, что его решения – волновые функции – выражаются как произведения экспонент на полиномы Чебышева–Эрмита. Анализ этих решений приводит к следующему выводу. Энергетические уровни осциллятора описываются формулой:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Разность энергий соседних уровней равна $\hbar\omega_0$ (они находятся на равных «расстояниях» друг от друга – гениальная догадка Планка в теории теплового излучения!). Кроме этого, существует нижний (нулевой) уровень энергии, равный $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0$

(классическая величина $E \geq 0$ могла быть любой). В классической механике нулевые колебания осциллятора не имеют места.

Равенство $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = 0$ означало бы, что нам совершенно точно известны импульс p_x и координата x частицы, равные нулю. Соотношение неопределенностей (одна из главных закономерностей квантового мира) $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ утверждает, что это невозможно.

Атом водорода. Это квантовомеханический аналог задачи Кеплера в классической механике – движение малого тела в центральном поле массивного силового центра; потенциал поля спадает с расстоянием r по закону $-1/r$. По Кеплеру, траектории малого тела в случае финитных движений представляют собой эллипсы, а спектр значений его энергии непрерывен.

Квантовое решение. Для атома водорода гамильтониан имеет вид суммы операторов кинетической и потенциальной энергий:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (46.9)$$

где \hat{p} – оператор импульса, m – масса электрона, Δ – оператор Лапласа, e – элементарный электрический заряд, r – расстояние между электроном и протоном. Оператор Лапласа в сферических координатах (r, θ, φ) имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отыскание собственных значений оператора (49.6) является трудной математической задачей. Приведем лишь конечный результат:

$$E_n = -E_R \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (46.10)$$

где n – **главное квантовое число**, принимающее значения $1, 2, 3, \dots$. Таким образом, главное квантовое число определяет уровни энергии электрона в атоме водорода. Состояние с $n=1$ называется **основным состоянием**, состояния с $n>1$ – **возбужденными состояниями**. Константа $E_R = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 13,6 \text{ эВ}$ называется энергией

ионизации атома водорода (или, по-другому, потенциалом ионизации атома водорода) и используется в атомной физике в качестве единицы измерения энергии, называемой **ридбергом**.

Далее, можно показать, что волновые функции (их называют также **орбиталями**), соответствующие одним и тем же значениям n , являются одновременно и собственными функциями оператора **модуля орбитального момента импульса** электрона \hat{L} и оператора **проекции момента орбитального момента импульса** на произвольную ось \hat{L}_z .

Собственные значения \hat{L} равны $\sqrt{l(l+1)}\hbar$, где величина $l = 0, 1, \dots, (n-1)$ называется **орбитальным квантовым числом**. Волновые функции – решения уравнения (46.9) называются **орбиталями** и маркируются s, p, d, f, \dots для $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ соответственно. Собственные значения \hat{L}_z равны $m\hbar$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ называется **магнитным квантовым числом**.

Таким образом, энергия электрона в атоме дискретна (квантована). Знак минус в выражении (46.10) указывает на то, что полная энергия электрона в атоме меньше, чем в свободном состоянии. За нуль отсчета принимается энергия при $n = \infty$, когда электрон не связан с ядром, а его кинетическая энергия равна нулю.

В спектроскопии уровни энергии принято изображать горизонтальными линиями, а переходы между ними – стрелками (рис. 46.1). Расстояния между горизонтальными линиями пропорциональны соответствующим разностям энергий. При переходе электрона из возбужденного состояния в состояние с более низкой энергией испускается фотон, энергия которого равна разности энергий электрона (**правило частот**): $h\omega = E_{n_2} - E_{n_1}$. С учетом $\omega = 2\pi c / \lambda$, из (46.10) имеем:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{4\pi h^3 c} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (46.11)$$

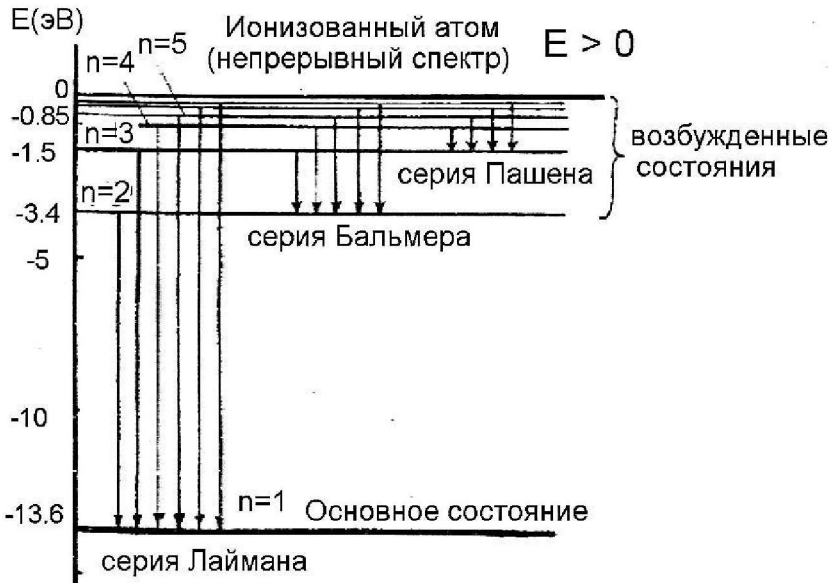


Рис. 46.1

Важное значение для оптики имеет **серия Бальмера** (то есть переход электронов на уровень с $n_1 = 2$): первые четыре линии серии Бальмера лежат в **видимом диапазоне**.

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите известные вам свойства волновой функции.
2. Какие математические объекты соответствуют в квантовой механике динамическим переменным?
3. Каким образом в квантовой механике получают численные значения динамических переменных?
4. Какой вид имеет волновая функция свободной частицы?
5. Какое физическое явление называется «туннельный эффект»?
6. Перечислите основные особенности энергетических уровней в потенциальной яме.
7. Как распложены энергетические уровни гармонического осциллятора?
8. Что такое «нулевые колебания» осциллятора?
9. Какой вид зависимости энергии электрона в атоме водорода от главного квантового числа?
10. Излучения от каких переходов в атоме водорода лежат в видимом диапазоне длин волн?

47. БОЗОНЫ И ФЕРМИОНЫ

Как мы уже знаем, теория вероятностей органически входит в квантовую механику (например, через квадрат модуля волновой функции). Еще одной поразительной особенностью квантовой механики является метод исчисления вероятностей: в задачах, содержащих более, чем одну частицу, способ решения стандартных задач теории вероятностей принципиально отличается от классического, и, следовательно, приводит к другим решениям тех же задач. Принцип **тождественности**. Оказывается, что если мы имеем две частицы «с одним названием», например, два электро-

на, то не существует ни одного экспериментального способа отличить один от другого. Электроны нельзя «занумеровать». Поэтому, нельзя сказать «первый электрон находится в состоянии Ψ_1 , а второй – в состоянии Ψ_2 », следует говорить «в состояниях Ψ_1 и Ψ_2 находятся по одному электрону». Поэтому физики просто говорят о числах заполнения состояний (о количестве частиц в каждом состоянии).

Для описания состояния двух частиц введем волновую функцию $\Psi_{12} = \Psi_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$, она означает: в момент времени t первый электрон находится (конечно, с некоторой вероятностью, которую можно найти из волновой функции) в точке с координатами \mathbf{r}_1 , а второй электрон – в точке \mathbf{r}_2 . Вторая возможная ситуация будет выражаться функцией $\Psi_{21} = \Psi_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)$ что означает: в момент времени t второй электрон находится в точке с координатами \mathbf{r}_1 , а первый электрон – в точке \mathbf{r}_2 . Если бы эти состояния можно было бы отличить одно от другого, то это различие проявилось бы в плотностях вероятности $|\Psi_{12}|^2$ и $|\Psi_{21}|^2$. Но, согласно принципу эквивалентности, такого не может быть.

Поэтому мы обязаны написать:

$$|\Psi_{12}|^2 = |\Psi_{21}|^2.$$

Извлечение квадратного корня приводит к решению этого уравнения:

$$\Psi_{12} = \pm \Psi_{21}.$$

Какой знак выбрать? Оказывается, что **оба** знака имеют смысл! Более того, то «с каким именно знаком правильно извлекать корень» позволяет разбить **все** квантовые частицы на два **класса**. Частицы первого класса (для которых следует извлекать корень со знаком «+») называются **бозонами**, частицы второго класса (знак «-») **фермионами**.

Бозоны и фермионы имеют принципиально различные свойства. Допустим, что два фермиона находятся *в одном* и том же состоянии, описываемом волновой функцией Ψ , то есть $\Psi_{12} = \Psi_{21} = \Psi$. Тогда, в соответствии с определением фермионов, мы должны написать: $\Psi = -\Psi$! Но такое уравнение имеет, очевидно,

только одно решение: $\Psi = 0$. Иными словами, такая ситуация для фермионов в принципе невозможна. Данное свойство фермионов называется принципом Паули: два фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии. Для бозонов принцип Паули, естественно, не работает (уравнение $\Psi = \Psi$ — просто тождество и не накладывает на Ψ никаких ограничений), но и это не означает, что подсчет вероятностей для бозонов — «классический», принцип тождественности проявляет себя и для бозонов.

Чтобы лучше разобраться в сложном вопросе разделения всех частиц на бозоны и фермионы, рассмотрим простейшую задачу теории вероятностей: пусть опыт имеет два равновероятных исхода, какова вероятность определенной последовательности исходов для двух независимых опытов? Например, мы случайным образом раскладываем в коробочку с двумя отделениями «1» и «2» два шара (шары у нас изображают частицы, а отделения коробочки — состояния Ψ_1 и Ψ_2 , в которых эти частицы находятся).

Классическое решение. Так как оба исхода равновероятны, то вероятность любого из них равна $\frac{1}{2}$. Так как опыты независимые, то эти вероятности перемножаются. Таким образом мы имеем для любого исхода вероятность $\frac{1}{4}$. Перечислим эти исходы (пусть номера шаров «1» и «2»): $(1|2)$, $(1|2)$, $(2|1)$ и $(|12)$. Так как наши шары-частицы идентичны, то для нас $(1|2)$ и $(2|1)$ это один и тот же исход. Поэтому мы должны сложить вероятности несовместных исходов $(1|2)$ и $(2|1)$ и получить вероятность этого исхода $\frac{1}{2}$. Переход к «числам заполнения» сводится к «стиранию» номеров шаров, которые мы теперь будем изображать просто кружками « \circ ». Итак наш опыт имеет три исхода: 1) $(\circ\circ|)$ с вероятностью $\frac{1}{4}$, 2) $(\circ|)$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ и 3) $(|)$ с вероятностью $\frac{1}{4}$. Самое главное в классическом подходе: хотя номера шаров нас не интересуют (нас интересует только количество шаров в каждом отделении коробочки), подсчет вероятности происходит так, как будто бы (если бы мы хотели) мы могли занумеровать шары.

Бозоны. Принцип тождественности исключает возможность «нумеровки» частиц. Это вынуждает нас трактовать равновероятность занятия частицами любого из состояний как равновероятность всех трех исходов двух опытов: $(\circ\circ|)$, $(\circ|)$ и $(|)$, то есть приписать всем исходам вероятность $\frac{1}{3}$. Результат отличается от классического!

Фермионы. Если вспомнить принцип Паули, то ответ получается немедленно: в силу невозможности исходов $(\circ\circ|)$ и $(|\circ\circ)$ с вероятностью единица осуществляется исход $(\circ|\circ)$.

Полученные нами результаты удобно резюмировать в единой табл. 47.1.

Таблица 47.1

Состояние	Вероятность		
	Классические частицы	Бозоны	Фермионы
$(\circ\circ)$	1/4	1/3	0
$(\circ \circ)$	1/2	1/3	1
$(\circ\circ)$	1/4	1/3	0

Из таблицы прямо следуют два важнейших вывода.

1. Для двух бозонов вероятность оказаться в одном и том же состоянии **выше** рассчитанной по классическим представлениям, а в разных состояниях – **ниже** (считать, что квантовые частички просто похожи на «очень маленькие шарики» не верно – нет, не похожи!). Более того, если данные рассуждения продолжить (это не слишком просто) для **большого** числа частиц, то указанная разница между классическими и квантовыми вероятностями будет драматически возрастать с увеличением числа частиц.

Эту особенность бозонов гениально угадал А. Эйнштейн, постулировав что вероятность для фотона перейти в данное состояние пропорциональна числу фотонов, **уже находящихся** в данном состоянии. Исходя из своего постулата Эйнштейн вывел уже известную ему формулу Планка для равновесного теплового излучения (фотоны оказались как раз бозонами).

В шутку бозоны часто называют «частицами-коллективистами». При низких температурах и значительном количестве бозонов может наблюдаться переход всех бозонов в одно и то же состояние. Данное явление (подчеркнем, что оно связано не с взаимодействиями частиц, а носит чисто вероятностный характер) называется **бозе-конденсацией**. Например, лазер испускает квази-монохроматическое излучение. Излучение с возбужденных уровней стимулируется не взаимодействием, а «теорией вероятностей». Испускание одного фотона увеличивает вероятность излучения следу-

ющего с такой же частотой и поляризацией; процесс приобретает лавинообразный характер; его так и называют – «**вынужденным излучением**».

Другой пример. При очень низких температурах многие металлы теряют свое электрическое сопротивление, явление называется **сверхпроводимостью**. Дело в том, что заряд в сверхпроводниках переносят не электроны (фермионы), а особые квазичастицы – **куперовские пары**, которые являются **бозонами**. Куперовские пары испытывают бозе-конденсацию, то есть переходят в одно состояние – состояние тока. Для остановки такого тока необходимо когерентное воздействие на все куперовские пары одновременно, что имеет нулевую вероятность.

2. Для **фермионов** вероятность их нахождения в одном состоянии равна нулю. Можно сказать, что, в отличие от «коллективистов» бозонов, они являются «частицами-индивидуалистами». Именно «индивидуализм» фермионов объясняет, например, разнообразие свойств элементов в таблице Менделеева. Если бы электроны были бозонами, то все электроны любого химического элемента перешли на самый нижний энергетический уровень 1s. При этом все элементы стали бы похожи на гелий, аргон и другие инертные газы. Этого не происходит именно благодаря принципу Паули. Например, каждой s-орбитали соответствуют только две волновые функции (они соответствуют двум возможным ориентациям вектора собственного момента импульса электрона – спина; отметим, что квантовая величина «спин» не имеет классического аналога).

Физика твердого тела без преувеличения является наиболее широкой областью применения квантовой механики. Достаточно подумать об обилии электронных устройств вокруг нас. Все они созданы на основе физики твердого тела. **Физика твердого тела** (физика кристаллов) давно развилась в отдельную прикладную науку. В данном пособии не может быть и речи о сколь угодно последовательном изложении даже элементарных основ этой науки, для этого нужна отдельная книжка. Поэтому ниже следующие примеры из физики твердого тела будут иметь характер **иллюстраций** применения тех идей квантовой статистики,

которые были изложены выше. Некоторые очень важные вещи будут даны безо всякого объяснения, их придется принимать на веру.

Теплоемкость твердых тел. Существует известный экспериментальный факт. При температурах выше так называемой **дебаевской температуры** (обычно она близка к комнатной температуре) молярная теплоемкость C (для твердых тел не принято различать C_p и C_v) всех твердых тел постоянна и равна $3R$ (**закон Дюлонга и Пти**), где R – универсальная газовая постоянная.

Этот факт легко объяснить классически. Действительно, атомы кристаллической решетки можно представить себе как набор трехмерных гармонических осцилляторов. Как мы видели в разд. 43 «Тепловое излучение», средняя энергия осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы разна $k_B T$ (k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура). Для трехмерного осциллятора чисто степеней свободы равно 3, поэтому средняя энергия тепловых колебаний равна $3k_B T$. Тогда внутренняя энергия U моля (энергия N_A осцилляторов) равна $N_A 3k_B T = 3RT$. По определению теплоемкости

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT}(3RT) = 3R.$$

Таким образом, мы **вывели закон Дюлонга и Пти** из классических соображений.

Эксперимент, однако, **не подтверждает** этот закон для температур ниже **дебаевской**. С уменьшением температуры теплоемкость падает по закону $C \sim T^3$, и, при приближении к абсолютному нулю, стремится к нулю!

Разгадка этого парадокса стала возможной только после создания квантовой механики в конце первой половины XX в., и связана она с именем Дебая. Чтобы понять некоторые идеи теории Дебая мы используем аналогию между световыми и звуковыми волнами. Что общего между ними?

1. **Внутренняя энергия** фотонного газа (равновесного теплового излучения) есть совокупная энергия всех хаотических электромагнитных волн в полости. **Внутреннюю энергию** твердого

тела (энергия колебаний атомов) можно представить как энергию совокупности хаотических звуковых волн, распространяющихся в твердом теле.

2. Закон дисперсии электромагнитных волн в вакууме: $\omega = ck$, где k (не путать с постоянной Больцмана!), конечно, волновое число. Для звуковых волн закон $\omega = ck$ выполняется в **широком диапазоне частот**.

Не использовать ли аналогию между звуком и светом для объяснения загадочного температурного поведения теплоемкости твердого тела? Удивительно, но усилиями Дебая, эта экстравагантная идея осуществилась! Это очень трудная задача, в данном пособии нет места вдаваться в детали. Но, вкратце, ход рассуждений мог бы быть следующим.

Прежде всего, укажем на принципиальные различия между звуком и светом.

1. Из здравого смысла просто невозможно представить себе звуковые волны с длиной волны меньше характерного расстояния между атомами (обозначим его a) – таковых просто не существует. Значит, в твердом теле существует и **максимальная** ω_{\max} частота звука; по порядку величины $\omega_{\max} \sim 2\pi c/a$, где c – скорость звука. (В дальнейшем мы будем писать не ω_{\max} , а ω_D – **дебаевская частота**). Для света никаких ограничений по частоте нет.

2. Никаких частиц («квантов звука»), аналогичных фотонам, в твердом теле **не наблюдается**. Тем не менее, как показал Дебай, такие «частицы» (говорят «квазичастицы») можно ввести **формальным** математическим преобразованием (посредством известного в теоретической механике математического приема – перехода к **нормальным координатам** и, затем, перехода к квантовому «языку»). В результате формальных преобразований совокупность звуковых волн, отвечающих тепловым колебаниям решетки, математически выглядит как газ невзаимодействующих частиц с энергией $\hbar\omega$, импульсом $\hbar k$ (k – волновой вектор) и законом дисперсии $\omega = ck$. По аналогии с фотонами Дебай назвал эти «частицы» **фононами**. Как и фотоны, фононы относятся к классу **бозонов**.

3. Световые волны являются **поперечными**, их можно охарактеризовать **двумя** независимыми типами поляризации. Звуковые волны могут быть как **продольными**, так и **поперечными**,

поэтому они характеризуются тремя независимыми типами поляризации (добавляются продольные волны). Данное обстоятельство важно при конкретных расчетах, но не затрагивают качественных выводов, и в наших дальнейших рассуждениях эта деталь не будет играть существенной роли.

Для вывода выражения для теплоемкости нам понадобится выражение для внутренней энергии фононного газа. Если идея аналогии между фотонами и фононами имеет право на жизнь, то нам можно воспользоваться готовым выражением для энергии теплового излучения. Согласно формуле (43.20) эта энергия u на единицу объема равна

$$u = \frac{4}{c} R^* = \frac{4}{c} \sigma T^4,$$

где c – скорость света, R^* – энергетическая светимость абсолютно черного тела, σ – постоянная Стефана-Больцмана. Спектральная плотность энергии u_ω , очевидно равна

$$u_\omega = \frac{4}{c} r_\omega^*,$$

где r_ω^* – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела. График функции u_ω , очевидно, полностью аналогичен хорошо знакомому нам графику r_ω^* (см. рис. 43.1).

Итак, мы предположили, что для частот ниже *дебаевской* (с точностью до констант) выражение для спектральной плотности внутренней энергии фононного газа совпадает с выражением для спектральной плотности внутренней энергии равновесного фотонного газа (обозначим ее той же буквой u_ω). Для частот *выше дебаевской* спектральная плотность внутренней энергии фононного газа равна нулю (просто в силу невозможности существования звуковых волн с длиной волны меньшей межатомного расстояния). Теперь можно провести анализ температурного поведения теплоемкости твердого тела в пределах низкой и высокой температур. Для того, чтобы понять, какие температуры считать высокими, а какие низкими, введем *дебаевскую температуру*: $k_B T_D = \hbar \omega_D$. Расчеты по этой формуле для большинства твердых тел дают для T_D примерно комнатную температуру.

Низкотемпературный предел ($T \ll T_D$). Из раздела 43 мы знаем, что почти все отличные от нуля значения функции r_ω^* сосредоточены в области низких частот. В нашем случае фононного газа это будет означать, что почти все отличные от нуля значения функции u_ω сосредоточены в области частот $\omega < \omega_D$. Полная внутренняя энергия получается интегрированием по частотам $\omega < \omega_D$:

$$u = \int_0^{\omega_D} u_\omega d\omega \approx \int_0^\infty u_\omega d\omega \sim \int_0^\infty r_\omega^* d\omega \sim R^* = \sigma T^4.$$

В последнем равенстве мы, очевидно, использовали закон Стефана-Больцмана (43.15). Таким образом, при $\omega \ll \omega_D$ внутренняя энергия твердого тела должна быть пропорциональна четвертой степени температуры. Отсюда по определению молярной теплоемкости и учитывая, что внутренняя энергия моля U пропорциональна энергии единицы объема u , имеем:

$$C = \frac{dU}{dT} \sim \frac{du}{dT} \sim \frac{d}{dT}(T^4) \sim T^3.$$

С точностью до коэффициента пропорциональности мы вывели закон Дебая! Ну, а как же с «классическим» законом Дюлонга и Пти? Ведь хорошая теория должна объяснить и его.

Высокотемпературный предел ($T \gg T_D$). Опять вспомним тепловое излучение. При высоких температурах максимум кривой r_ω^* сдвигается в область высоких частот (закон смещения Вина), в нашем случае максимум сдвигается выше дебаевской частоты. Как мы знаем, в области низких частот формула Планка (43.10) переходит в формулу Рэлея–Джинса (43.6)

$$r_\omega^* \approx \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B T.$$

Аналогично случаю низких температур

$$u = \int_0^{\omega_D} u_\omega d\omega \sim \int_0^{\omega_D} r_\omega^* d\omega = T \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B d\omega = \text{const} \cdot T.$$

Отсюда по определению молярной теплоемкости, учитывая опять, что внутренняя энергия моля U пропорциональна энергии единицы объема u , имеем:

$$C = \frac{dU}{dT} \sim \frac{du}{dT} \sim \text{const} \frac{d}{dT}(T) = \text{const}.$$

Более подробные и последовательные вычисления дают для const значение $3R$, то есть как раз закон Дюлонга и Пти! Переход (в окрестности дебаевской температуры) от закона Дебая $C \sim T^4$ к закону Дюлонга и Пти $C=3R$ происходит плавно и без изломов.

Мы пришли к выводу, что теплоемкость твердых тел хорошо объясняется через формальное сведение энергии тепловых колебаний кристаллической решетки к энергии газа **бозонов**. Другой пример из физики твердого тела будет касаться уже газа **фермионов**, или, как говорят физики, **электронного ферми-газа**.

Электронная теплоемкость металлов. Говоря о теплоемкости твердых тел, мы должны разрешить еще один парадокс. Все атомы состоят не только из ядер, но и из электронов. При отличной от нуля температуре последние, наряду с ядрами, должны участвовать в тепловом движении со средней энергией $\sim(3/2)k_B T$ на один электрон. Это увеличит внутреннюю энергию (а значит, и теплоемкость) кристалла в несколько раз. Но ничего подобного не наблюдается, молярная теплоемкость *всех* твердых тел не превышает $3R$! Даже если предположить, что в изоляторах из-за **локализации** на атомах электроны не могут участвовать в хаотическом тепловом движении, то как быть с металлами, в которых электроны проводимости **коллективизированы**? Разгадать эту загадку позволяет учет того факта, что, в отличие от фононов, электроны являются **фермионами**.

Вспомним принцип Паули. Электроны заполняют все уровни энергии, начиная с самого нижнего. Самый верхний уровень энергии, заполненный при $T \rightarrow 0$ называется энергией Ферми (или **уровнем Ферми**) и обозначается E_F .

Рассмотрим **электроны проводимости** металла, они занимают часть уровней энергии, находящейся, внутри интервала энергии, называемым **зоной проводимости** (уровни энергии внутри зоны проводимости расположены настолько тесно, что спектр энергий свободных электронов можно считать почти непрерывным). Если отсчитывать энергию Ферми от **нижней границы** («дна») зоны проводимости, то типичная для металлов величина $E_F \sim 1$ эВ. Легко прикинуть непосредственно, что энергия $1 \text{ эВ} \approx k_B \cdot 11000 \text{ К}$. Это очень высокая температура! При гораздо более низких температурах металлы существуют только в газооб-

разном состоянии. Таким образом, во всех практически значимых случаях мы имеем приближение $k_B T \ll E_F$.

Для того, чтобы участвовать в тепловом движении при $T > 0$ электрону проводимости необходимо увеличить свою энергию на величину $\sim k_B T$ и перейти в новое **незанятое** состояние с энергией **больше** E_F (все состояния с энергией меньше E_F заняты; переход на них запрещен принципом Паули). Но таких электронов *очень мало*, всего доли процента от общего числа электронов проводимости; все они занимают тонкую полосу энергий толщиной $\sim k_B T$ прямо *под* уровнем Ферми. Поэтому вклад электронов проводимости в теплоемкость твердого тела **пренебрежимо мал**.

На основании сказанного попробуем определить *вид* температурной зависимости электронной теплоемкости. Во-первых, количество электронов, участвующих в тепловом движении должно быть пропорционально $k_B T$. Во-вторых, каждый такой электрон сам имеет среднюю энергию теплового движения $\sim (3/2)k_B T$. Перемножение этих двух факторов дает для внутренней энергии электронного газа величину $U_e \sim T^2$. Отсюда обычным способом получаем для электронной теплоемкости:

$$C_e = \frac{dU_e}{dT} \sim \frac{d}{dT}(T^2) \sim T.$$

Таким образом, электронная теплоемкость металла **линейно** зависит от температуры, обращаясь в ноль, как и фонная, при абсолютном нуле. Вклад электронной теплоемкости в общую теплоемкость настолько мал, что его можно экспериментально наблюдать только вблизи абсолютного нуля температур, где фонная теплоемкость спадает по более «сильному» закону $\sim T^3$ и становится ниже электронной.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте принцип тождественности квантовых частиц.
2. Чем отличаются друг от друга волновые функции бозонов и фермионов?
3. Объясните, чем квантовый способ подсчета вероятностей отличается от классического.

4. С чем связано явление бозе-конденсации?
5. Сформулируйте принцип Паули.
6. В чем сходство и в чем различие между фотонами и фотонами?
7. Сформулируйте закон Дебая и закон Дюлонга и Пти.
8. Почему электроны не дают существенного вклада в теплоемкость твердого тела?
9. Какой вид имеет температурная зависимость электронной теплоемкости металла?

48. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Состав ядра. Ядро состоит из двух видов ядерных частиц – нуклонов: протонов (p) и нейтронов (n). Протоны обладают элементарным электрическим зарядом $+e$, нейтроны заряда не имеют. Протоны и нейтроны очень близки по массе (ее принято выражать в энергетических единицах mc^2): $m_n=938$ МэВ, $m_p=940$ МэВ, что позволяет говорить о них как о разных состояниях одной и той же частицы, отличающихся проекциями так называемого изотопического спина. Масса нуклона примерно в 2000 раз больше массы m_e электрона, которая составляет примерно 500 МэВ. И протоны, и нейтроны являются фермионами. Количество нуклонов в ядре называют **массовым числом** A (это число также называют **барионным зарядом**). Заряд ядра характеризуют количеством протонов Z (или, что то же самое – номером в таблице Менделеева). Поэтому количество нейтронов $N=A-Z$. Химический элемент X с известными Z и A будем обозначать A_ZX . Ядра с одинаковым Z и равными A называют **изотопами**. Пример: изотопы водорода. ${}^1_1\text{H}$ – водород, ${}^2_1\text{H} \equiv {}^2_1\text{D}$ – дейтерий, ${}^3_1\text{H} \equiv {}^3_1\text{T}$ – тритий. Ядра с одинаковыми A называются **изобарами**. Ядра с одинаковыми N – **изотонами**.

Размер ядра r по порядку величины $\sim 10^{-15}$ м = 1 фм («фм» читается «фемтометр»). Стоит сравнить с ангстремом Å (характерным размером атома) $1\text{Å}=10^{-10}$ м. Радиус ядра в 100 тысяч (!) раз меньше радиуса атома.

Дефект массы. Масса ядра $M_{\text{я}}$ всегда **меньше** суммарной массы составляющих его нуклонов:

$$Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}} \equiv \Delta m > 0.$$

Эта разница в массах Δm и называется **дефектом массы**. Дефект массы связан с ядерными взаимодействиями (их называют **сильными взаимодействиями**). Согласно специальной теории относительности, масса и энергия связаны соотношением $E=mc^2$. Ядерные силы суть силы **притяжения** между нуклонами, поэтому при объединении нуклонов в ядро общая энергия (а значит и суммарная масса) **понижается**.

Работа внешних сил, необходимая для разделения ядра на составляющие его нуклоны называется **энергией связи** $E_{\text{св}}$. По своей величине она равна дефекту массы, выраженному в энергетических единицах: $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$. Удельная (расчете на один нуклон) энергия связи $E_{\text{св}}/A$ в зависимости от массового числа показана на рис. 48.1.

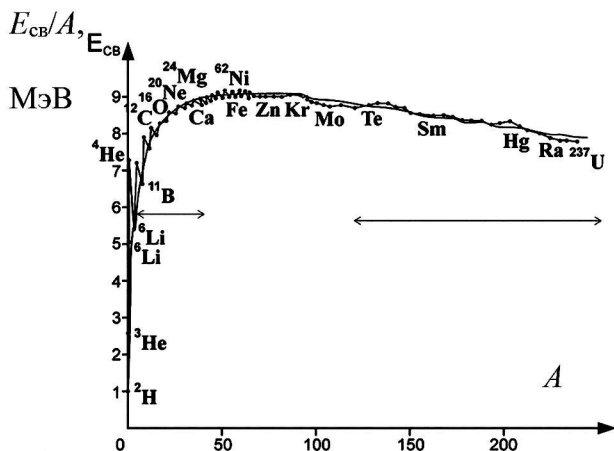


Рис. 48.1

Из графика видно, что при возрастании числа нуклонов удельная энергия связи резко возрастает: все большее число нуклонов связывается между собой. Затем кривая выходит на **насыщение**: ядерные силы существенно **короткодействующие**, поэтому каждый нуклон может быть связан с ограниченным числом нуклонов. Определенную загадку составляет то, что после железа энергия связи начинает медленно спадать. Но если принять во

внимание, что силы **кулоновского** взаимодействия между протонами суть силы **отталкивания**, то ясно, что они **уменьшают** энергию связи. При этом, кулоновские силы, в отличие от ядерных, являются **дальнодействующими** (не имеют свойства насыщения), и электростатическая энергия постоянно возрастает ростом Z и имеет **отрицательный** знак. С этим и связано уменьшение энергии связи после «железного» максимума. Данное поведение энергии связи объясняет «парадокс»: при взрыве «водородной» бомбы (объединении более легких ядер в более тяжелые) выделяется положительная энергия, а при взрыве «атомной» (разделении тяжелого ядра на более легкие) ... тоже положительная! На первый взгляд это очень странно. Но, заметим, что в первом случае выделяется энергия ядерных сил, а во втором – электростатических (хоть бомба и называется «атомной»). В природе ядерных сил до сих пор много непонятого. Например, пики на кривой энергии связи связанные с определенными числами A и Z (эти числа в ядерной физике называются «магическими»). Самый резкий из них наблюдается при $A=4$ и $Z=2$. Этот пик соответствует ядру ${}^4_2\text{He}$, или, как его еще называют, **альфа-частице**. Отметим, что альфа-частицы являются **бозонами**.

Природа ядерных сил. Взаимодействие между нуклонами осуществляется посредством **обмена виртуальными π -мезонами** (существуют три вида π -мезонов – с зарядом $+e$, $-e$ и 0 – π^+ , π^- и π^0 соответственно). Схему взаимодействия между нуклонами удобно представлять специальными рисунками – **фeyнмановскими диаграммами** (рис. 48.2).

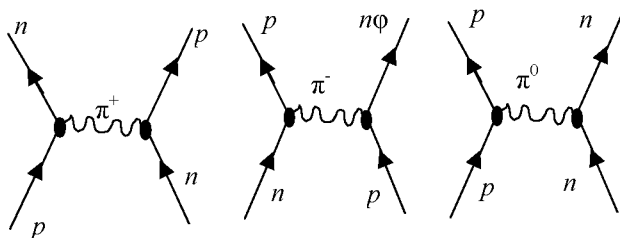


Рис. 48.2

Как понимать эти диаграммы? Возьмем, например, первую диаграмму («читаем» справа налево и снизу вверх): «протон (в левой жирной точке) испускает π^+ -мезон, превращаясь в нейтрон; π^+ -мезон (в правой жирной точке) поглощается нейтроном; последний при этом превращается в протон». Согласно теории, именно такой обмен π -мезонами и приводит к сильному взаимодействию (притяжению) между нуклонами.

Виртуальные частицы. Когда мы изучали тему «фотоэффект», мы видели, что испускание/поглощение даже «безмассовой» частицы – фотона – электроном, вообще говоря, запрещено законом сохранения энергии. Каким же образом нуклонам удается рождать и поглощать π -мезоны? Дело в том, что принцип неопределенности в переменных энергия-время ($\Delta E \Delta t < \hbar$) говорит нам, что если время наблюдения Δt некоторого процесса конечно, то энергия в этом процессе имеет неопределенность $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. Именно эта неопределенность энергии позволяет на короткое время нарушать закон сохранения энергии в пределах ΔE . Частицы, которые «существуют» за счет неопределенности энергии в быстрых процессах называются виртуальными. В отличие от реальных частиц (реальные π -мезоны тоже существуют) виртуальные частицы не могут быть зарегистрированы никакими приборами, они «существуют» как бы «на грани бытия и небытия», будучи введенными в теорию, чтобы сделать хоть сколько-нибудь наглядными процессы, происходящие в микромире.

Оценка массы π -мезонов. Попробуем на основании принципа неопределенности оценить массу m_π π -мезона. В качестве Δt возьмем самое простое – характерный ядерный размер $r \sim 10^{-15}$ м, деленный на скорость порядка скорости света $3 \cdot 10^8$ м/с. Отсюда (не забываем, что $\hbar = h/2\pi$):

$$m_\pi c^2 \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar}{\left(\frac{r}{c}\right)} = \frac{\hbar c}{r} = \frac{hc}{2\pi r} = \frac{h}{m_e c} \cdot m_e c \cdot c \cdot \frac{1}{2\pi r} =$$

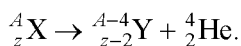
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_K}{r} \cdot m_e c^2 \approx \frac{2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-15}} \approx 300 \cdot m_e c^2.$$

Для удобства прикидки в уме мы использовали известную нам комптоновскую длину волны электрона $\lambda_K = h/m_e c \approx 2 \cdot 10^{-12}$ м.

Итак, по нашей (очень грубой) оценке масса π -мезона составляет примерно 300 электронных масс (этот расчет подтвержден экспериментом). Название «мезон» означает «промежуточный»: масса π -мезона является промежуточной между массой электрона и массой нуклона ($\approx 2000 m_e$).

Радиоактивность. Радиоактивностью называют самопроизвольное испускание ядрами радиоактивных изотопов элементарных частиц или ядер. К радиоактивности относят обычно: α -распад, β -распад, протонную радиоактивность, спонтанное деление тяжелых ядер. Рассмотрим в качестве важных примеров первые два вида радиоактивности.

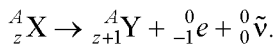
Альфа-распад заключается в испускании радиоактивным ядром α -частиц высоких (порядка нескольких МэВ) энергий, которые посредством туннельного эффекта (см. разд. 46) преодолевают потенциальный барьер, созданный сильными взаимодействиями. Из-за электрического заряда α -частицы испытывают интенсивное взаимодействие с любым веществом, быстро теряя свою энергию (задерживаются обычным листом бумаги) и, захватывая два электрона, превращаются в обычные атомы гелия. Уравнение α -распада ядра X (с превращением его в ядро Y) записывают следующим образом:



Как правильно записывать подобные уравнения? Это очень просто: нужно, чтобы суммы по верхним и по нижним индексам в правой и левой частях уравнения совпадали. Сохранение по нижним индексам – это, очевидно, закон сохранения заряда. Сохранение по верхним индексам (массовым числам) физики связывают с так называемым законом сохранения барионного заряда (классических аналогов не имеет). Итак, мы видим, что при α -распаде образуется новый элемент Y, смещенный на две клетки таблицы Менделеева влево по отношению к первоначальному элементу X.

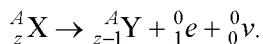
Бета-распад состоит в испускании ядром электронов или позитронов (β -частиц). Проникающая способность « β -лучей» выше, чем для α -частиц. Для полного поглощения β -излучения

требуется, например, алюминиевая пластинка толщиной в несколько сантиметров. Уравнение β -распада для случая испускания электронов выглядит так:



Поясним некоторые особенности данного уравнения. Электрону приписывается массовое число $A=0$ не потому, что он не имеет массы, а потому что, в отличие от нуклонов (они относятся к классу **барионов**), он является частицей другого класса – **лептонов**. Вместо фразы «электрон не является нуклоном» физики говорят: «электрон имеет нулевой **барионный заряд**». Лептонный заряд тоже **сохраняется**. Именно поэтому в правой части уравнения появляется третье слагаемое – ${}^0_0\tilde{\nu}$ – **электронное антинейтрино** (знак « \sim » над ν означает античастицу). Электронное антинейтрино, как и электрон, является лептоном, но приставка «анти» означает, что ее лептонный заряд равен по величине и противоположен по знаку лептонному заряду электрона. Таким образом, электронное антинейтрино как бы отрицает «лептонную сущность» электрона, возвращая в уравнение баланс по лептонному заряду.

Электрон (как и вообще почти все частицы) тоже имеет свою античастицу – **позитрон** (его обозначают 0_1e , без знака « \sim »), позитрон имеет ту же массу, что и электрон, но заряд $+e$). Поэтому возможен и **позитронный β -распад**, уравнение которого, очевидно,



Итак, мы видим, что при **электронном β -распаде** возникает элемент Y , смещенный вправо на одну клетку таблицы Менделеева относительно исходного X , а при **позитронном**, наоборот, на одну клетку влево. β -распад связан с особым типом взаимодействий в ядре – **слабыми взаимодействиями**.

Гамма-излучение. И α - и β -распад сопровождаются излучением γ -квантов – **фотонов** очень высоких энергий (порядка нескольких МэВ). Понять природу этого излучения можно на основании универсальной закономерности квантовой механики: если движение частиц **финитно** (ограничено в пространстве), то

«разрешенные» значения энергии частиц имеют **дискретный спектр** (достаточно вспомнить уже известные нам потенциальную яму, гармонический осциллятор или атом водорода). Расстояние между уровнями энергии тем **больше**, чем в **меньших** объемах заключены частицы. Поэтому уровни энергии нуклонов в атомном ядре так же **дискретны**, как и в атоме, но расстояния между ними, как показывают расчеты, в миллион раз **больше**, чем в атоме. Так же, как и для атомов, для ядер существует **основное состояние** (с наименьшей энергией) и много **возбужденных**. Переход из возбужденных состояний в основное сопровождается γ -излучением. То, что в процессах как α -, так и β -распада наблюдается γ -излучение доказывает, что в этих процессах ядро проходит через возбужденные состояния. На очень высоких частотах все вещества почти **прозрачны**. Поэтому, γ -излучение имеет огромную проникающую способность (даже толстые свинцовые стены не являются достаточно надежной защитой от него).

Закон радиоактивного распада. Радиоактивный распад является существенно **вероятностным** процессом: **невозможно** предугадать **момент** распада конкретного ядра, можно лишь говорить о **вероятности** распада (а с помощью вероятности предсказать в очень большом количестве радиоактивных ядер **среднюю долю** распавшихся). О вероятности dP распада конкретного ядра в момент времени от t до $t+dt$ можно сказать лишь, что она не зависит от t и пропорциональна интервалу dt ; коэффициент пропорциональности, обозначим его λ , называют **постоянной** распада ядра. Пусть мы имеем N **нераспавшихся** ядер, тогда среднее количество dN ядер ($dN < 0$ так как при распаде N уменьшается), распавшихся за время dt , равно $-NdP = -N\lambda dt$. Итак,

$$dN = -N\lambda dt;$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt;$$

$$\ln N = -\lambda t + \text{const.}$$

Обозначая через N_0 количество **нераспавшихся** ядер при $t = 0$, имеем окончательно:

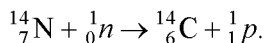
$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Это и есть искомый закон радиоактивного распада. Как мы видим, количество нераспавшихся ядер уменьшается экспоненциально. Очень часто этот закон записывают в эквивалентном виде:

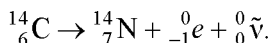
$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \left(2^{\log_2 e} \right)^{-\lambda t} = N_0 \left(2^{\frac{1}{\ln 2}} \right)^{-\lambda t} = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\lambda}{\ln 2} t} \equiv N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}},$$

где $T = \lambda / \ln 2$ – период полураспада. За время T количество нераспавшихся ядер уменьшается вдвое. Величина T для известных изотопов варьируется необычайно широко: от 10^{-7} сек до 10^{15} лет.

Радиоуглеродный анализ. В качестве примера применения закона радиоактивного распада рассмотрим радиоуглеродный анализ, часто применяемый в археологии. 90% космических лучей, падающих на Землю суть протоны высоких энергий. Взаимодействуя с ядрами атмосферных газов, они выбивают из них нейтроны или новые протоны, которые вступают в новые реакции. Одна из распространенных реакций такая:



Получающийся изотоп ${}^{14}_6\text{C}$ β -радиоактивен с $T \approx 5730$ лет. Процесс распада происходит так:

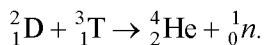


Если предположить, что интенсивность и состав космического излучения мало меняется за тысячелетия (характерные времена процессов во Вселенной – миллиарды лет), то количество углерода-14 на Земле практически постоянно. Во время роста животного или растительного организма углерод-14 входит в состав его клеток в одной и той же пропорции. После смерти организма количество углерода-14 падает по закону радиоактивного распада. Определяя процент углерода-14 от общего числа углерода в клетках, можно определить примерный возраст археологического артефакта. Радиоуглеродный анализ считается одним из самых надежных в археологии.

Цепная реакция деления. Данный процесс имеет огромное значение, так как лежит в основе атомных электростанций и атомных бомб. Суть процесса в следующем: при попадании

нейтрона в любое из трех ядер $^{235}_{92}\text{U}$, $^{233}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$ – ядро делится примерно пополам, испуская при этом 2–3 новых нейтрона, которые вызывают деление новых ядер с образованием новых нейтронов. Таким образом, процесс деления развивается лавинообразно, в геометрической прогрессии. При делении каждого ядра выделяется огромная энергия – примерно 200 МэВ (типичное выделение энергии в химических реакциях составляет примерно один эВ на атом). Так деление 1 кг урана-235 эквивалентно сжиганию 1 900 000 т сырой нефти или взрыву 20 мегатонн тротила. Вспомним (см. выше), что выделяемая энергия – это энергия электростатического отталкивания осколков деления. Для инициации цепной реакции деления необходимо, чтобы количество нейтронов приводящих к делению новых ядер урана-235 (или плутония-239) увеличивалось со временем. Если образец достаточно мал, то большинство нейтронов покидает его, не успевая вызвать деления, и цепная реакция затухает. Существует критическая масса ядерного вещества при достижении которой реакция возникает сама собой. Соединение (при помощи обычного взрыва) нескольких образцов докритической массы в один с массой превосходящей критическую лежит в основе атомной бомбы. Цепная реакция деления используется и в мирных целях – на атомных электростанциях (АЭС). Чтобы реакция не носила взрывной характер, а ее течение могло регулироваться в АЭС используют медленные нейтроны (вероятность деления для них выше, чем для быстрых) и поглотители нейтронов. В качестве замедлителя нейтронов используют тяжелую воду D_2O или графит. Для регулирования течения реакции в область реактора вводят стержни из кадмия или бора, которые хорошо поглощают нейтроны. На Земле изотопы урана-235 составляют всего 1/140 часть от общего количества урана (основной изотоп – уран-238). Выделение урана-235 из урановой руды очень дорогостоящая задача. Поэтому в АЭС и ядерном оружии используется также $^{239}_{94}\text{Pu}$. Этот изотоп вырабатывается в реакторах на быстрых нейтронах (при облучении «обычно-го» урана-238 быстрыми нейтронами) и может быть выделен из $^{238}_{92}\text{U}$ химическим путем, что несколько дешевле.

Термоядерный синтез. При соединении легких ядер в более тяжелое выделяется огромная энергия. Термоядерный синтез – источник энергии Солнца и других звезд (так называемый многоступенчатый протон-протонный цикл). Наиболее простая реакция – это синтез гелия-4 при реакции дейтерия и трития:



Выделяемая энергия составляет 13,6 МэВ, и это в чистом виде «ядерная» энергия (энергия сильных взаимодействий). Так как сильные взаимодействия являются короткодействующими, реагирующие ядра должны сблизиться до расстояния порядка фм, то есть обладать кинетической энергией достаточной для преодоления огромного кулоновского отталкивания. Для того, чтобы такое стало возможным, продукты реакции должны иметь температуру порядка сотен миллионов градусов. В звездах вещество (плазма) удерживается от разлета гравитационным полем. Чтобы удержать плазму на Земле используется неоднородное магнитное поле, выталкивающее заряженные частицы в направлении противоположном градиенту модуля магнитной индукции (соответствующее устройство было изобретено в 1950 г. в СССР и называется ТОКАМАКом – ТОроидальной КАмерой с МАгнитной Ка-тушкой). Несмотря на то, что термоядерная энергетика могла бы удовлетворить все потребности человечества в энергии, из-за огромных технических трудностей работы по ее созданию находятся на стадии научно-исследовательских вот уже свыше 70 лет.

Элементарные частицы. Частицы называют элементарными, если нет никаких экспериментальных оснований считать их состоящими из каких-то других (еще более «элементарных»). Это и есть самые что ни на есть «кирпичики Мироздания» - то, из чего состоит Вселенная. Получить представление об элементарных частицах можно из табл. 48.1

Сделаем некоторые комментарии к таблице. Перечисленные частицы следует дополнить их двойниками – античастицами: частицами, обладающими той же массой и тем же спином, но отличающимися знаками всех других характеристик взаимодействия, таких как электрический и цветовой заряды, барионное и лептонное квантовые числа. Для некоторых бозонов (например, γ ,

Z_0 , χ) частица совпадает с античастицей. Число лептонов равно числу кварков, и такая ситуация называется **кварк-лептонной симметрией**. Лептоны не участвуют в сильном взаимодействии. Наконец, гравитон, квант гравитационного взаимодействия, предсказан теоретически, но до сих пор экспериментально не обнаружен.

Таблица 48.1

Фермионы		Бозоны – переносчики взаимодействий
Лептоны	Кварки (заряд в единицах e)	
ν_e – электронное нейтрино	u – англ. up, $(+\frac{2}{3})$	γ – фотон, электромагнитное g – (англ. glue) глюон, сильное Z_0, W промежуточные бозоны, слабое G – гравитон, гравитационное χ – бозон Хиггса
e – электрон	d – down, $(-\frac{1}{3})$	
ν_μ – мюонное нейтрино	c – charm, $(+\frac{2}{3})$	
μ – мюон	s – strange, $(-\frac{1}{3})$	
ν_τ – таонное нейтрино	t – top, $(+\frac{2}{3})$	
τ – таон	b – bottom, $(-\frac{1}{3})$	

Кварки в силу особенностей притяжения между ними (оно возрастает с увеличением расстояния) не наблюдаются экспериментально как отдельные частицы. В эксперименте они «видны» только как составляющие более сложных частиц – адронов. Кварки имеют дробный электрический заряд (в единицах элементарного заряда e): $+2/3$ и $-1/3$.

Адроны – частицы, состоящие из кварков и участвующие в сильных взаимодействиях. Адроны, состоящие из пары кварк-антикварк называются **мезонами**. Например, уже известные нам π -мезоны: $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$, π^0 – смесь $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$. Частицы, состоящие из трех кварков ($q_1q_2q_3$) называются **барионами**. Это самый многочисленный класс частиц (гипероны, барионные резонансы и другие). Например, **нуклоны** являются адронами: $n=udd$, $p=uud$.

Все фундаментальные взаимодействия (сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное) осуществляются путем **обмена** соответствующими виртуальными **бозонами**. Последний бозон в третьем столбце таблицы, бозон Хиггса, является квантом особого поля, придающего инертную массу бозонам, ею обладающим.

Контрольные вопросы и задания

1. Из каких частиц состоит ядро? Каковы его размеры?
2. Что такое дефект массы и энергия связи? Как зависит удельная энергия связи от массового числа?
3. Объясните уменьшение удельной энергии связи с ростом массового числа для тяжёлых ядер?
4. Как происходит обмен виртуальными пи-мезонами?
5. Перечислите и охарактеризуйте виды радиоактивности.
6. Сформулируйте закон радиоактивного распада.
7. Что такое цепная реакция деления?
8. При каких условиях происходит термоядерный синтез?
9. Охарактеризуйте основные виды элементарных частиц.
10. Что такое мезоны и барионы?

ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Атомная единица массы	$1 \text{ а.е.м.} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,49 \text{ МэВ}$
Заряд элементарный	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Заряд удельный электрона	$e/m_e = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda = h/m_e c = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B = e\hbar / 2m_e = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Масса нейтрона	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939,57 \text{ МэВ}$
Масса протона	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,27 \text{ МэВ}$
Масса электрона	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,511 \text{ МэВ}$
Объем моля идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 0,0224 \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} =$ $= 0,862 \cdot 10^{-4} \text{ эВ/К}$
Постоянная газовая универсальная	$R = 8,314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$
Постоянная гравитационная	$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Постоянная магнитная	$\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R_\infty = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$
Постоянная Фарадея	$F = 9,648 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
Постоянная электрическая	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Радиус боровский	$a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Радиус электрона классический	$r_e = 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Скорость света в вакууме	$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абражевич, Э.Б. Сборник задач по общей физике: учеб. пособие / Э.Б. Абражевич, В.М. Белокопытов, И.В. Иванова и др.; под редакцией В.М. Белокопытова. – 3-е изд., перераб. и дополн. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007.

2. Варава, А.Н. Общая физика: учеб. пособие / А.Н. Варава, М.К. Губкин, Д.А. Иванов и др.; под ред. В.М.С. Белокопытова. – М.: Издательский дом МЭИ, 2010.

3. Губкин, М.К. Курс общей физики. Оптика. Атомная физика: Конспект лекций: учеб. пособие / М.К. Губкин, А.В. Кириченко, В.С. Спивак и др. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008.

4. Иванов, Д.А. Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Конспект лекций: учеб. пособие / Д.А. Иванов, И.В. Иванова, А.Н. Седов и др. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.

5. Иванов, Д.А. Электричество и магнетизм. Конспект лекций: учеб. пособие / Д.А. Иванов, И.В. Иванова, А.Н. Седов. – М.: Изд-во МЭИ, 2006.

6. Савельев, И.В. Курс общей физики В. 3 Т. 1–3 / И.В. Савельев. – СПб., 2011.

Учебное издание

Губкин Михаил Константинович
Дедов Алексей Викторович
Иванов Дмитрий Александрович
Иванова Ирина Викторовна
Манухин Владимир Владимирович
Спивак Владислав Сергеевич

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Редактор Д.Р. Чернова
Компьютерная верстка З.Х. Айнетдиновой

Подписано в печать 26.04.21.	Печать офсетная.	Формат 60x90 1/16
Печ. л. 32,0.	Тираж 1000 экз.	Изд. № 20у-097 Заказ № 157.

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.