

**MOI**

---



---

***КНИГА-ПОБЕДИТЕЛЬ***  
**конкурса рукописей**  
**учебной, научно-технической**  
**и справочной литературы по энергетике,**  
**посвященного 90-летию МЭИ**  
**и 100-летию плана ГОЭЛРО**

Книга издана  
при поддержке  
ООО «Газпром энергохолдинг»

---



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

---

**А.П. Солодов, Д.В. Сиденков, В.И. Величко**

# ТЕПЛОМАССОБМЕН

Том 1

Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением  
в системе высшего образования по укрупненным группам  
специальностей и направлений подготовки  
13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика» в качестве учебного издания  
для реализации основных образовательных программ  
высшего образования по направлению подготовки  
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

*Под общей ред. А.П. Солодова*

Москва  
Издательство МЭИ  
2021

УДК 536.2 536.3

ББК 31.31

С 60

Рецензенты: И.А. Давлетшин, докт. техн. наук, ведущий научн. сотрудник ФИЦ КазНЦ РАН;  
А.П. Крюков, докт. техн. наук, проф. кафедры низких температур ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ»

**Солодов, А.П.**

С 60 Тепломассообмен: учебник: В 2 т. Т. 1 / А.П. Солодов, Д.В. Сиденков, В.И. Величко; под общ. ред. А.П. Солодова. – М.: Издательство МЭИ, 2021. – 484 с.

ISBN 978-5-7046-2459-2

ISBN 978-5-7046-2460-8 (Т. 1)

В учебнике изложены теоретические основы и методы расчета процессов теплопроводности и теплообмена излучением. Разделы конвективного теплообмена, включая процессы в двухфазных теплоносителях, будут рассмотрены во втором томе книги.

Изложение строится как последовательность физического описания процессов теплопереноса, разработки математических формулировок и получения решений для инженерных приложений (аналитическими или численными методами, с применением компьютерных технологий).

Рассмотрение теоретических основ теплообмена дополнено примерами решения задач в специализированных пакетах программирования и численного анализа MathCad, Matlab, Ansys.

Для студентов теплотехнических специальностей вузов.

**УДК 536.2 536.3**

**ББК 31.31**

ISBN 978-5-7046-2459-2

ISBN 978-5-7046-2460-8 (Т. 1)

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	8
ВВЕДЕНИЕ.....	9
<b>Раздел 1. ПРИНЦИПЫ ТЕПЛОМАССОБМЕНА.....</b>	<b>11</b>
Глава 1. ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ, ВЕЩЕСТВА, ИМПУЛЬСА.....	11
1.1. Теплообмен.....	11
1.2. Массообмен.....	32
1.3. Трение.....	37
Глава 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОМАССОБМЕНА.....	51
2.1. Общая форма балансового уравнения.....	51
2.2. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности	55
2.3. Закон сохранения 1-го компонента. Уравнение конвективной диффузии.....	55
2.4. Закон сохранения энергии. Уравнение энергии.....	57
2.5. Закон сохранения импульса. Уравнение движения.....	61
2.6. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена.....	65
2.7. Термодинамические соотношения и свойства теплоносителей.....	65
2.8. Математическая структура уравнений конвективного теплообмена	66
2.9. Дифференциальное уравнение турбулентной кинетической энергии.....	69
Глава 3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ.....	85
3.1. Контрольные объемы на границе.....	85
3.2. Граничные условия для задач теплопроводности.....	87
3.3. Граничные условия для задач конвективного теплообмена.....	90
3.4. Геометрия.....	92
3.5. Визуализация решений.....	94
<b>Раздел 2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ.....</b>	<b>97</b>
Глава 4. ОДНОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	97
4.1. Теплопроводность плоской стенки.....	99
4.2. Теплопередача через плоскую стенку.....	102

4.3. Одномерные стационарные модели: общая постановка.....	104
4.4. Плоская стенка без внутренних источников теплоты с переменным, зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности.....	106
4.5. Цилиндрическая стенка.....	108
4.6. Сферическая стенка.....	121
4.7. Теплопередача через стенки различной формы.....	125
4.8. Интенсификация теплопередачи посредством оребрения	126
4.9. Теплопроводность вдоль ребра.....	129
4.10. Оптимизация оребрения.....	138
<b>Глава 5. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ.....</b>	<b>142</b>
5.1. Введение.....	142
5.2. Пластина.....	144
5.3. Цилиндр.....	168
5.4. Задача о прогреве полуограниченного массива.....	172
5.5. Двух- и трехмерные нестационарные температурные поля	187
5.6. Температурные поля, создаваемые точечными и линейными источниками тепла.....	190
<b>Глава 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....</b>	<b>193</b>
6.1. Введение.....	193
6.2. Математическая формулировка задачи.....	194
6.3. Дискретное представление.....	195
6.4. Метод прогонки. Вычислительные программы.....	200
6.5. Встроенная функция Pdesolve для решения одномерных нестационарных задач.....	206
6.6. Работа с компьютерными программами.....	209
6.7. Численные методы для многомерных задач.....	213
<b>Глава 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....</b>	<b>231</b>
7.1. Введение.....	231
7.2. Физическая модель.....	232
7.3. Математическая формулировка задачи.....	233
7.4. Применение функций Pdesolve для решения одномерных нестационарных задач.....	242
7.5. Исследование затухания температурных волн.....	244
7.6. Задача о перемещающемся фронте плавления.....	255

7.7. Гиперболическое уравнение теплопроводности.....	263
7.8. Трудности в применении Pdesolve.....	276
<b>Раздел 3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ.....</b>	<b>281</b>
Глава 8. ЗАКОНЫ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ.....	281
8.1. Количественные характеристики излучения.....	282
8.2. Классификация потоков излучения.....	284
8.3. Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа.....	286
8.4. Законы излучения абсолютно черного тела.....	289
8.5. Излучение и поглощение нечерных тел.....	292
Глава 9. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ	294
9.1. Диатермичная среда.....	294
9.2. Понятие углового коэффициента излучения.....	294
9.3. Расчет угловых коэффициентов.....	299
9.4. Теплообмен излучением в замкнутой системе.....	303
9.5. Аналитические решения для простых систем.....	308
9.6. Примеры, приложения.....	314
Глава 10. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В СИСТЕМЕ	
С ИЗЛУЧАЮЩИМ И ПОГЛОЩАЮЩИМ ГАЗОМ.....	330
10.1. Расчет излучения и поглощения газов.....	330
10.2. Радиационно-конвективный теплообмен в камере сгорания.....	342
10.3. Компьютерная модель камеры сгорания.....	349
<b>Раздел 4. ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ: ПРОЦЕССЫ</b>	
<b>ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....</b>	<b>357</b>
Глава 11. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА.....	357
11.1. Методы подобия и размерностей.....	357
11.2. Теплопроводность твэла.....	364
11.3. Компьютерное моделирование теплообмена: пакет Matlab.....	374
11.4. Математическая формулировка.....	375
11.5. Задача о температурном поле твэла.....	377
11.6. Создание модели в графическом интерфейсе пользователя.....	378
11.7. Экспорт решения и постпроцессорная обработка.....	391
11.8. Примеры решения задач в пакетах MathCad и ANSYS.....	399
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	482

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Тепломассообмен принадлежит к числу инженерных дисциплин, роль которых крайне важна для проектирования и эффективной эксплуатации энергетических объектов различного уровня сложности. Изучение тепломассообмена является одним из важнейших условий формирования современного специалиста-энергетика и специалистов смежных отраслей промышленности и сферы обслуживания.

Отметим исключительно широкий спектр применения знаний тепломассообмена. Обеспечение необходимого *температурного режима* – это задача, важная в любой отрасли техники, не говоря уже о самом человеке как биологическом объекте, способном функционировать только в очень узком интервале температур. В *тепловой и ядерной энергетике* проблема безопасности напрямую связана с температурными режимами работы оборудования, особенно в нештатных, аварийных ситуациях. Эти примеры иллюстрируют меру ответственности специалистов в области тепломассообмена.

Другая характерная черта тепломассообмена – это глубокая математизация и компьютеризация учебной и научной составляющих дисциплины. В современных разработках требуется применение математических моделей на основе сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих пространственно-временную эволюцию скалярных полей температур и концентраций и векторных полей плотностей потоков тепла и массы.

В арсенале исследователей и инженеров – замечательные математические методы и модели, такие как теория пограничного слоя, методы возмущений и теории катастроф, модельные представления турбулентности, эффективные численные методы и специализированные компьютерные программы, такие как ANSYS, COMSOL, MATLAB, позволяющие рассчитывать характеристики процессов тепломассообмена для объектов сложной геометрии на современном уровне.

Авторы полагают, что учебник «Тепломассообмен», учитывающий вышеупомянутые особенности, станет полезной начальной школой научного и инженерного творчества, будет полезен не только студентам, обучающимся по программе бакалавриата, но и магистрантам, аспирантам и специалистам в области тепломассообменных процессов.

Авторы будут признательны за замечания и пожелания по улучшению книги, которые следует направлять по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная ул., 17, кафедра ТОТ.



## ВВЕДЕНИЕ

В первом разделе сформулированы законы переноса теплоты, вещества, импульса, законы сохранения и дифференциальные уравнения тепломассообмена, рассмотрены способы постановки граничных условий.

Во втором разделе рассмотрены задачи теплопроводности. Изучаются одномерные стационарные задачи как основа для расчета теплопередачи через плоскую, цилиндрическую и сферическую стенки. Ставится проблема интенсификации теплопередачи посредством оребрения, решается задача теплопроводности вдоль стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности. Излагается методика оптимизации оребрения. Решаются задачи с переменным коэффициентом теплопроводности, с внутренними источниками теплоты.

Классические задачи *нестационарной* теплопроводности рассмотрены как прообразы температурных полей в элементах энергетического оборудования при пусковых, переходных режимах. Формулируются теоремы, позволяющие оценить темп охлаждения/нагрева тел в регулярном режиме, а также теорема о перемножении решений с перечнем технически важных геометрий тел, для которых возможны ее применения. Подробно рассмотрены температурные поля, создаваемые линейными и точечными источниками тепла, ввиду их важности для техники измерения теплофизических свойств.

Изложены основы численных методов теплопроводности. Сопоставлены явная и неявная схемы дискретизации. Подробно, с реализацией в виде вычислительной программы, представлен метод прогонки. Рассмотрены численные методы для многомерных задач.

В третьем разделе рассматривается теплообмен излучением. При явно оговариваемых предположениях вводится матрица угловых коэффициентов, зависящая только от геометрии системы поверхностей и одинаковая для геометрически подобных конструкций. Получены решения для замкнутой системы изотермических поверхностей, разделенных прозрачной средой, а также для задач со смешанными условиями, когда на некоторых поверх-

ностях задана плотность результирующего потока излучения. Показано, как учитывается теплопроводность и конвекция в прозрачной газовой среде. Приведены аналитические решения для простых геометрических конфигураций. Матричная модель применяется также для систем с излучающим и поглощающим газом. Излучение газа представляют как *взвешенную* сумму излучений смешанных серых газов с различными коэффициентами поглощения. Изложение поддерживается работой со специализированными пакетами MathCad, Matlab, ANSYS. В четвертом разделе представлены базовые задачи курса, решенные ранее аналитическими методами в упрощенной, идеализированной постановке, могут быть воспроизведены теперь на численных компьютерных моделях – с усложненными, реальными краевыми условиями, переменными свойствами материалов и т.п.

# Раздел 1.

## ПРИНЦИПЫ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

### Глава 1. ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ, ВЕЩЕСТВА, ИМПУЛЬСА

#### 1.1. Теплообмен

**Температурное поле.** Как математический объект, температурное поле представляют в виде уравнения

$$t = t(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

означающего, что каждой точке материального объекта в каждый момент времени ставится в соответствие числовое значение температуры. Нахождение конкретного вида этой функциональной зависимости в каком-либо природном или техническом объекте является основной задачей теории тепломассообмена.

Материальными объектами, с которыми имеют дело в теории тепломассообмена, являются твердые тела различной геометрии (детали тепловых машин, стенки труб в теплообменниках и т.п.), газовые и жидкие теплоносители (воздух, вода и др.), обтекающие поверхности различной формы или движущиеся в каналах. Когда говорят о температуре в какой либо *точке* объекта, то предполагают, что тела являются *сплошными средами*. Если размеры технического объекта велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями, а это почти всегда так, то предположение о сплошности оправдано.

Наиболее сложными для расчета являются *трехмерные нестационарные температурные поля*, когда температура существенно изменяется по всем трем координатам и во времени. Если температура остается постоянной во времени, то имеют дело со *стационарными температурными полями*. Если существенным

является изменение только вдоль двух координат или вдоль одной координаты, то температурное поле называют соответственно двумерным или одномерным. Например,  $t = t(x, \tau)$  – это одномерное нестационарное поле.

**Изотермы.** Самым распространенным способом получить наглядное представление о температурном поле является изображение *изотерм*, т.е. поверхностей или линий, на которых температура имеет постоянное значение.

Предположим, что *известно* некоторое двумерное нестационарное поле  $t = t(x, y, \tau)$ , т.е. задан конкретный вид этой функциональной зависимости от координат и времени. Пусть необходимо построить изотерму  $t_1$  (например,  $t_1=20^\circ\text{C}$ ). Для фиксированного момента времени  $\tau_1$  можно записать:

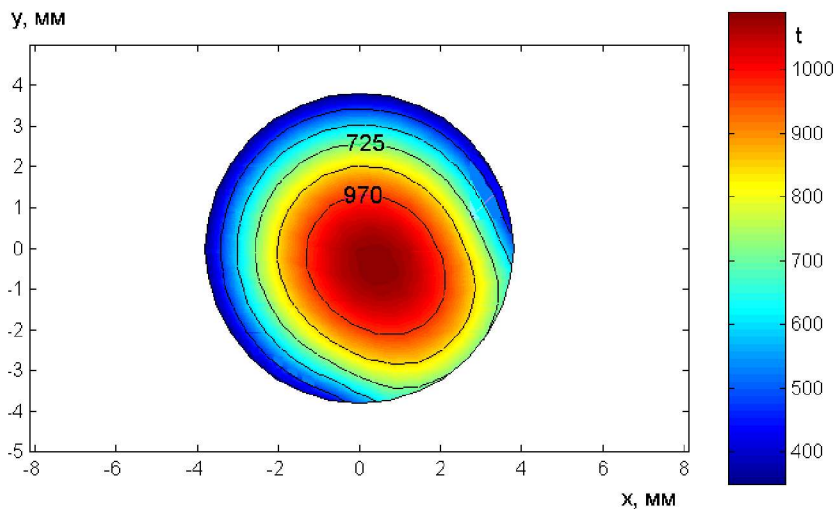
$$t_1 = t(x, y, \tau_1). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) связывает координаты  $x$  и  $y$  точек тела условием постоянства температуры. Геометрическое место таких точек с постоянной температурой является *изотермой*. В двумерном случае получается некоторая линия или контур на плоскости рисунка. Изотерма в трехмерном объекте – это поверхность, например, сферическая поверхность в охлаждаемом шаре.

Рассмотрим пример температурного поля в тепловыделяющем элементе (ТВэле) ядерного реактора (рис. 1.1).

ТВэл – это длинный цилиндрический стержень из двуокиси урана, покрытый тонкой циркониевой оболочкой. Внутри ТВэла происходит мощное тепловыделение за счет ядерной реакции. Снаружи стержень охлаждается водой. Если охлаждение недостаточное, то температура оболочки может превысить допустимое значение (примерно  $400^\circ\text{C}$ ) и последствия будут катастрофическими.

На рисунке продемонстрирована опасная ситуация, когда условия охлаждения в правой нижней четверти окружности ТВэла ухудшились, и изотерма  $725^\circ\text{C}$  вплотную приблизилась к оболочке.

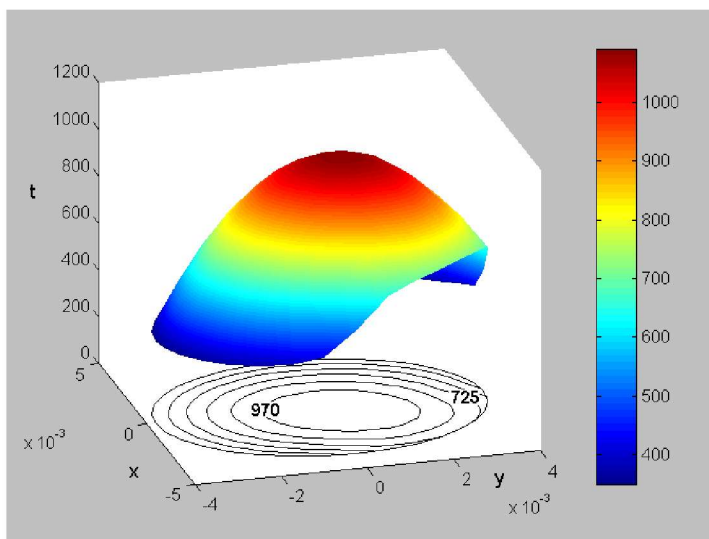


**Рис. 1.1. Температурное поле в твэле ядерного реактора**

Оттенки изображения (или градации серого) соответствуют значениям температуры по шкале, показанной в правой части рисунка. Это температурное поле было рассчитано и сделано видимым на компьютере. Способ визуализации отражает особенности профессионального, для специалиста в области теплообмена, видения различных объектов. Мы отслеживаем изменения температуры от точки к точке, внимание концентрируется на областях с *разной температурой* и в особенности там, где температура может превысить допустимое значение. Можно утверждать, что в любой отрасли техники обеспечение безопасного температурного режима в различных установках является одной из важнейших задач конструктора.

Другое часто применяемое представление температурного поля использует для идентификации температуры и цвет, и вертикальную координату.

Двумерное температурное поле  $t=t(x,y)$  в твэле представлено на рис. 1.2. Видно, что изотермы – это уровни постоянного значения температуры, спроектированные на плоскость  $(x,y)$ .



**Рис. 1.2.** Пространственное представление двумерного температурного поля

Для одномерной задачи используют обычные графики  $t=t(x)$  на плоскости. Для трехмерного поля приходится строить распределения температур в различных сечениях тела.

**Производные от температуры.** Кроме самих значений температуры в различных точках рассматриваемого объекта, нас интересует также скорость изменения температуры во времени и пространстве.

Частная производная

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}, \text{ К/с}$$

характеризует скорость изменения температуры во времени в данной точке. Если во всех точках объекта эта величина равна нулю, то говорят о стационарном температурном поле. Большинство технических объектов работает при стационарном режиме, так что в инженерной практике чаще всего приходится рассчитывать стационарные поля.

Известно, однако, что при эксплуатации различных установок самыми опасными считаются нестационарные – пусковые или переходные – режимы. Для оптимизации таких режимов необходимо рассчитывать *нестационарные* температурные поля.

При этом следят, чтобы температура не превысила допустимого предела. Важно также, чтобы перепады температуры не стали слишком большими, так как иначе могут возникнуть разрушающие термические напряжения или недопустимые уменьшения зазоров между движущимися частями машин из-за неодинакового расширения.

Частная производная по времени является важным индикатором теплового состояния объекта. Если, например, это ненулевая положительная величина, т.е. температура возрастает, то можно полагать, что из соседней окрестности подводится поток тепловой энергии.

Частные производные

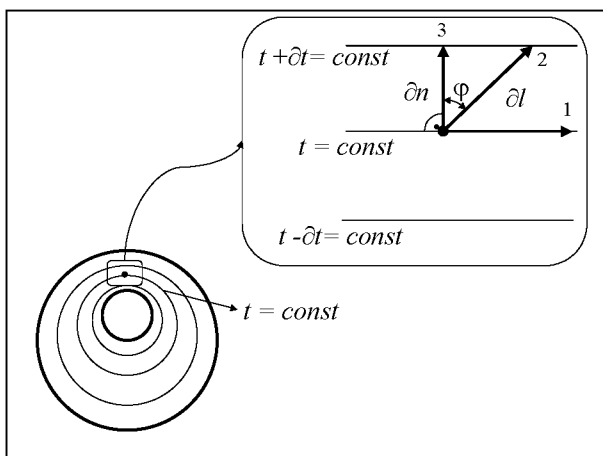
$$\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}, \text{ К/м}$$

характеризуют скорость изменения температуры вдоль координатных осей в фиксированный момент времени. Полезно представить себе, как следует производить измерения этих величин в некотором мысленном эксперименте. Например, для измерения частной производной по  $x$  необходимо иметь два датчика температуры, расположенных в близких точках вдоль оси  $x$ . Температуры в этих двух точках следует измерить в одно и то же мгновение и разделить разность температур на разность значений координаты  $x$ .

Можно поставить вопрос об интенсивности изменения температуры вдоль произвольного направления

$$\frac{\partial t}{\partial l}, \text{ К/м.}$$

Теперь опять будет полезен мысленный эксперимент с перемещением из некоторой точки в различных направлениях (рис. 1.3). Если это направление вдоль изотермы (1), то мы не заметим никакого изменения температуры: производная по этому направлению равна нулю. Существует и другое характерное направление (3), при перемещении в котором обнаруживается наиболее быстрое пространственное изменение. Из построений следует, что это – нормаль к изотерме. Положительным считается направление в сторону роста температуры.



**Рис. 1.3. Изотермы и производные по направлению:**

1 – перемещение вдоль изотермы;

2 – в произвольном направлении; 3 – по нормали к изотерме

В нижней левой части рисунка показано некоторое реальное температурное поле, изотермы которого криволинейны. Однако если рассмотреть окрестность выделенной точки под очень большим увеличением и построить изотермы с очень частой градицией температуры, то картина упростится и будет выглядеть как в правой верхней части рисунка. Изотермы со значениями температуры, отличающимися на малую величину  $\partial t$ , представляют собой систему параллельных прямых, расположенных на одинаковом расстоянии одна от другой.

Перемещаясь в любом направлении  $\partial l$  с одной изотермы на другую, мы обнаружим одно и то же изменение температуры  $\partial t$ , но расстояние, на котором происходит это изменение, будет различным. Самое короткое расстояние  $\partial n$  получается при перемещении по нормали к изотерме. Из очевидного соотношения

$$\partial t = \frac{\partial n}{\cos(\varphi)}, \quad \varphi = 0 \div \pi$$

следует

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \cos(\varphi), \quad \cos(\varphi) = 1 \div -1, \quad (1.3)$$



т.е. производная *по нормали* действительно имеет максимальное значение  $\varphi$  ( $\varphi = 0, \cos(\varphi) = 1$ ), а производная *вдоль изотермы* обращается в ноль ( $\varphi = \pi/2, \cos(\varphi) = 0$ ).

Производные по направлению являются *скалярными* величинами со знаком: отрицательные значения указывают на убывание температуры в рассматриваемом направлении.

**Градиент температуры.** Как мы видели, имеется особое направление – нормаль к изотерме и связанное с этим направлением численное значение, равное производной от температуры по нормали. Эту информацию можно хранить в одном математическом объекте – векторе градиента температуры.

Согласно определению, градиент температуры  $\text{grad } t$  есть вектор, направленный в сторону максимального возрастания температуры в пространстве (то есть по нормали к изотерме) и численно равный производной от температуры по этому направлению (рис. 1.4):

$$|\text{grad } t| = \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.4)$$

Если имеется карта изотерм (как на рис. 1.3 или на рис. 1.4), то построить градиент температуры в любой точке очень просто: следует провести нормаль к изотерме, а длину (модуль) вектора найти, поделив прирост температуры на расстояние между изотермами. Разумеется, градация изотерм должна быть достаточно частой, чтобы получить результат с приемлемой точностью.

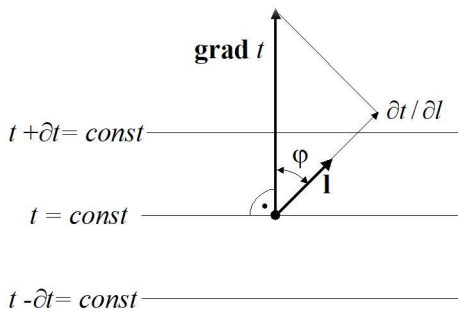


Рис. 1.4. Изотермы и градиент температуры

Другой способ задать вектор градиента – указать его проекции на оси координат. Выше мы уже определили понятие производной по направлению (1.3). Если в качестве направления взять единичный вектор  $\mathbf{i}$  вдоль оси координат  $x$  и спроектировать градиент температуры на это направление, т.е. построить скалярное произведение

$$\mathbf{i} \cdot \text{grad } t = 1 \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi),$$

то в соответствии с (1.4) и (1.3) получим в результате частную производную от температуры по  $x$ :

$$\mathbf{i} \cdot \text{grad } t = 1 \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi) = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\varphi) = \frac{\partial t}{\partial x},$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\mathbf{i}$  и  $\text{grad } t$ .

Таким образом,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \mathbf{i} \cdot \text{grad } t; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \mathbf{j} \cdot \text{grad } t; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \mathbf{k} \cdot \text{grad } t$$

и градиент можно записать как векторную сумму составляющих по осям координат (рис. 1.5):

$$\text{grad } t = \mathbf{i} \frac{\partial t}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial t}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.5)$$

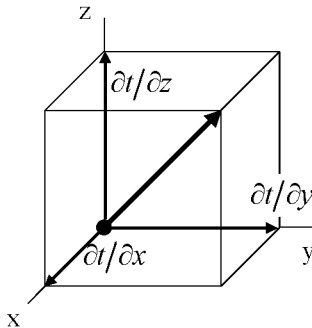


Рис. 1.5. Составляющие градиента температуры

С помощью градиента температуры легко определить скорость изменения температуры в любом направлении в пространстве. Для этого зададим интересующее нас направление единич-

ным вектором  $\mathbf{l}$  и спроектируем вектор градиента на это направление, т.е. составим скалярное произведение

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \mathbf{l} \cdot \text{grad } t = \mathbf{l} \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi). \quad (1.6)$$

Модуль градиента определяется как корень квадратный из суммы квадратов проекций (рис. 1.5):

$$|\text{grad } t| \equiv \frac{\partial t}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2}, \text{ К/м}. \quad (1.7)$$

По отношению к физическим полям в пространстве градиент похож на обычную производную от функции. Чтобы вычислить приращение обычной функции от одной переменной, записывают:

$$\frac{df}{dx} \cdot dx.$$

Аналогично, приращение полевой величины, такой как температура, при смещении в пространстве на вектор

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$$

вычисляется как скалярное произведение вектора градиента и вектора смещения:

$$\text{grad } t \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz. \quad (1.8)$$

Вектор градиента температуры является количественной мерой пространственной неоднородности температурного поля. Если температура в окрестности данной точки постоянна, то градиент равен нулю. Чем сильнее изменяется температура от точки к точке, тем больше абсолютная величина градиента.

**Плотность теплового потока.** Если неравномерно нагретое тело поместить в *адиабатическую* оболочку и предоставить систему самой себе, то по прошествии некоторого времени произойдет выравнивание температуры. Отсюда заключают, что возникают *потоки энергии* в направлении от областей с высокой температурой к областям с низкой температурой. Картина температурного поля должна быть теперь дополнена изображением потоков энергии.

Мы исходим из того фундаментального опытного факта, что если имеется пространственная неоднородность температурного поля (то есть температура в рассматриваемом объекте изменяется от одной точки к другой), то возникает самопроизвольный перенос тепловой энергии от более горячих участков тела к менее горячим. Этот *необратимый, самопроизвольный процесс, сопровождаемый ростом энтропии*, называется *теплопроводностью*.

С молекулярно-кинетической точки зрения, теплопроводность обусловлена непосредственным обменом энергией между движущимися микрочастицами вещества (молекулами, атомами, электронами). В литературе для обозначения такого механизма часто используется термин *кондуктивный перенос*.

Количественной мерой кондуктивного переноса энергии является *вектор плотности теплового потока*

$$\mathbf{q}, \text{ Дж}/(\text{м}^2\text{с}) = \text{Вт}/\text{м}^2,$$

указывающий направление переноса и численно равный количеству теплоты  $dQ$  (Дж), проходящему за единицу времени (с) через единицу контрольной поверхности  $dF$  ( $\text{м}^2$ ), нормальной к направлению переноса (рис. 1.6).

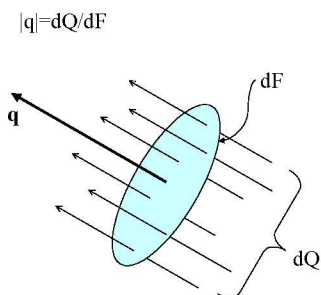


Рис. 1.6. Вектор плотности теплового потока

Проектируя вектор плотности потока на единичные орты, получают координатное разложение:

$$\mathbf{q} = \mathbf{i} q_x + \mathbf{j} q_y + \mathbf{k} q_z. \quad (1.9)$$

Расчет векторного поля плотности теплового потока является одной из основных задач теории тепломассообмена. На рис. 1.7 показаны два примера таких рассчитанных на компьютере полей.

В действительности масштабы левой и правой картинок отличаются в тысячу раз. Слева показано, как прогревается вечная мерзлота от проложенного в грунте трубопровода диаметром около одного метра, справа – как передается теплота от нагревателя к низкокипящему теплоносителю через оребренную металлическую стенку с характерным размером порядка миллиметра.

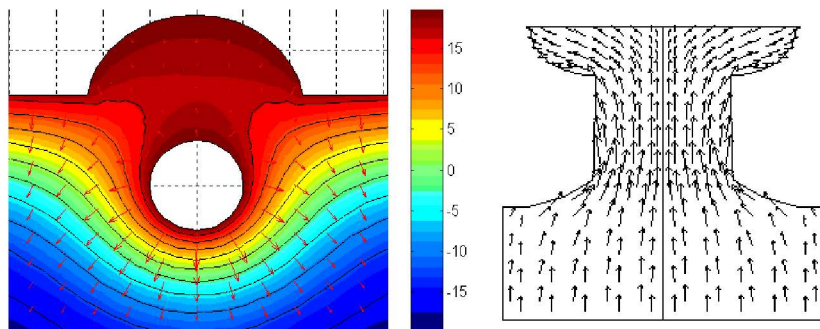


Рис. 1.7. Векторные поля плотности теплового потока

Сейчас мы предположим, что поле теплового потока известно, и рассмотрим несколько практически полезных операций с вектором  $\mathbf{q}$ .

Часто приходится вычислять тепловой поток через какую-либо произвольно ориентированную элементарную площадку  $dF$ , например, для того чтобы в конечном счете определить поток теплоты через поверхность  $F$  рассматриваемого объекта (рис. 1.8).

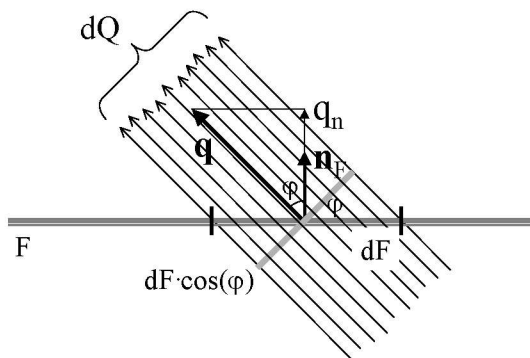


Рис. 1.8. Тепловой поток через поверхность

Вектор  $\mathbf{q}$  может быть различным образом ориентирован по отношению к  $dF$ . Пусть  $\mathbf{q}$  составляет угол  $\varphi$  с единичным вектором нормали  $\mathbf{n}_F$  к  $dF$ . Как показано на рисунке, искомый тепловой поток  $dQ$  через площадку  $dF$  такой же, как через площадку  $dF \cdot \cos(\varphi)$ , нормальную к  $\mathbf{q}$ . Поэтому

$$|dQ| = |\mathbf{q}| \cdot (dF \cdot \cos(\varphi))$$

или, после перегруппировки сомножителей

$$\frac{|dQ|}{dF} \equiv q_n = (|\mathbf{q}| \cdot \cos(\varphi)).$$

Величина в круглых скобках есть проекция вектора  $\mathbf{q}$  на направление нормали к  $dF$ . Удобно записать эту проекцию как скалярное произведение:

$$q_n = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F), \text{ Вт/м}^2. \quad (1.10)$$

Тогда

$$dQ = q_n dF = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF, \text{ Вт}. \quad (1.11)$$

Знак  $dQ$  зависит от того, в какую сторону ориентирован вектор  $\mathbf{n}_F$  – внутрь или наружу от поверхности  $F$ .

Полный тепловой поток через поверхность  $F$  выражается поверхностным интегралом:

$$Q = \int_F (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF, \text{ Вт}. \quad (1.12)$$

В качестве контрольных поверхностей обычно выступают границы тел или поверхности раздела фаз, как при конденсации или испарении.

Если  $F$  – замкнутая поверхность, ограничивающая область с объемом  $V$ , и объем стягивается к точке, то предельный переход

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_F (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF}{V} \equiv \text{div } \mathbf{q} \quad (1.13)$$

определяет *дивергенцию вектора* как суммарный поток вектора через замкнутую поверхность дифференциально малого контрольного объема, отнесенный к единице объема и направленный наружу (здесь  $\mathbf{n}_F$  – внешняя нормаль к поверхности).

В декартовых координатах дивергенция вычисляется по формуле:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad (1.14)$$

которую легко вывести, если взять контрольный объем в виде кубика и в производных в правой части увидеть превышение уходящих потоков через грани над входящими.

Дивергенция вектора плотности теплового потока является важной характеристикой теплового состояния объекта. Предположим, в какой-либо точке твердого тела выполняется условие:  $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ . Это означает, что суммарный поток теплоты через поверхность контрольного объема, построенного вокруг рассматриваемой точки, равен нулю. Поэтому можно предсказать, что температура в данной точке не будет изменяться во времени. Такого рода соображения, только более строгие, мы используем в дальнейшем при записи закона сохранения энергии.

Понятие плотности потока как *вектора* может потребовать дополнительных пояснений при первом знакомстве с предметом. Здесь будет полезен следующий мысленный эксперимент. Пусть мы располагаем инструментом для измерения потока  $q$  через единичную контрольную площадку, похожим на рамку пеленгатора. Поместим центр этой контрольной площадки в фиксированную точку и будем проводить измерения при различных ориентациях площадки. Мы обнаружим, что поток  $q$  будет различным, зависящим от ориентации контрольной площадки. Выяснится, что при некотором вполне определенном положении поток достигает максимума. Зафиксируем это характерное направление, а ориентацию других положений будем отсчитывать от него как угол  $\varphi$  отклонения нормали к поверхности. Итак, получится, что  $q = q(\varphi)$ , а  $q(\varphi = 0)$  – максимальное значение. Проводя обработку данных эксперимента, мы обнаружим, что отношение плотностей меняется как косинус угла отклонения:

$$\frac{q(\varphi)}{q(\varphi = 0)} = \cos(\varphi).$$

Это выражение совпадает с уравнением (1.10). Направления  $\varphi = 0$  принимают за направление вектора  $\mathbf{q}$ , а значение  $q(\varphi = 0)$  за величину вектора  $\mathbf{q}$ .

**Закон теплопроводности Фурье.** Выше говорилось о том, что тепловой поток возникает вследствие пространственной неоднородности температурного поля. Задача состоит в том, чтобы выразить это утверждение в математической форме, т.е. установить функциональное соотношение между вектором плотности теплового потока и количественной мерой пространственной неоднородности температуры – вектором градиента температуры.

Простейшей подходящей формулировкой является линейная пропорциональность между этими величинами:

$$\mathbf{q} \propto -\text{grad } t.$$

Это соответствует следующим фундаментальным экспериментальным фактам:

- если градиент температуры равен нулю, т.е. температура постоянна в окрестности данной точки, то плотность теплового потока равна нулю;
- чем больше абсолютная величина градиента, т.е. чем сильнее изменяется температура от точки к точке, тем больше величина плотности теплового потока;
- тепловой поток распространяется в сторону падения температуры (поскольку градиент указывает направление возрастания температуры, в формуле фигурирует знак минус).

Остается согласовать размерности левой и правой частей этого соотношения. Для этого вместо знака пропорциональности подставим коэффициент пропорциональности с нужной размерностью, называемый *коэффициентом теплопроводности* и запишем *закон теплопроводности* в виде:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } t ; \quad [\lambda] = \frac{[q]}{[\text{grad } t]}, \text{ Вт/(м К), или Вт/(м}^\circ\text{С)}. \quad (1.15)$$



Рисунок 1.9 показывает, как выглядит температурное поле, градиент и плотность теплового потока в окрестности какой-либо точки (в изотропной среде).

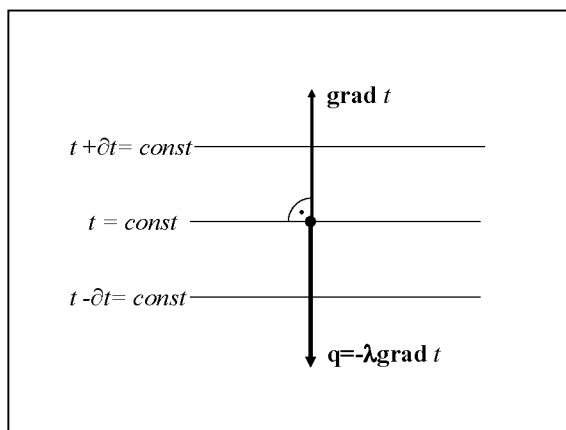


Рис. 1.9. Закон Фурье. Изотермы, градиент, тепловой поток

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  является физическим параметром (свойством) вещества (материала). Такая интерпретация соответствует эксперименту и просто повседневному опыту, согласно которому одни вещества – такие как металлы – хорошо проводят тепло, а другие – плохо (такие как газы, пористые строительные материалы и т.п.). Другими словами, при одинаковом градиенте температуры плотность теплового потока может быть очень большой (для металлов) или очень малой (для газовых прослоек). Представление о порядке величин коэффициента теплопроводности для разных веществ при нормальной температуре можно получить из следующей таблицы:

Вещество, материал	$\lambda$ , Вт/(м К)
Воздух	0,026
Вода	0,6
Дерево	0,2
Бетон	1,3
Сталь	50
Медь	380

Как свойство вещества, коэффициент теплопроводности, вообще говоря, зависит от параметров состояния, то есть от температуры и давления. Для газовых смесей или жидких растворов необходимо учитывать зависимость от концентрации. Для материалов, обладающих некоторой структурой, таких как пористые материалы, слоистые композитные материалы и т.п., теплопроводность зависит от характеристик структуры.

При решении большинства задач в этой книге мы будем считать коэффициент теплопроводности постоянной (или заранее осредненной в рассматриваемом интервале температуры) величиной, чтобы упростить решение и выяснить главные закономерности процессов теплопереноса. Во многих случаях (но не всегда) этого достаточно и для практических расчетов.

По умолчанию до сих пор коэффициент теплопроводности считался скалярной величиной, то есть характеризовался одним числом, как в вышеприведенной таблице. Однако математическая структура уравнения (1.15) допускает еще одну возможность:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{\Lambda} \cdot \text{grad } t, \quad (1.16)$$

где коэффициент теплопроводности записан как тензор, или квадратная матрица размерности  $3 \times 3$ . Эта возможность действительно полезна для практики, поскольку существуют *анизотропные* материалы (монокристаллы, слоистые композитные материалы), теплопроводность которых зависит от направления. Теперь понадобится девять чисел для задания значения коэффициента теплопроводности как матрицы  $3 \times 3$ . Однако эта матрица – симметричная и, следовательно, ее можно привести к диагональному виду, так что всего необходимо три числа.

Примером анизотропного материала является дерево, теплопроводность которого поперек волокон может быть в 2–3 раза меньше, чем вдоль волокон. Посмотрите, к чему это приведет, если градиент температуры направлен, скажем, под углом 45 градусов к волокнам (рис. 1.10):

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \\ & \lambda_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.3 & \\ & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

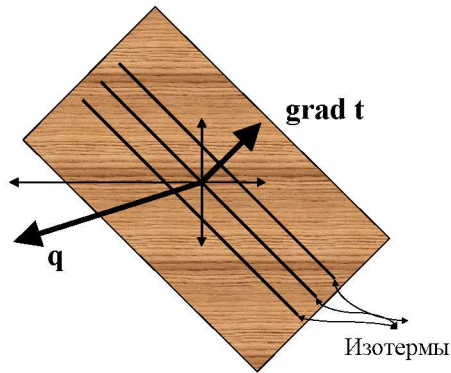


Рис. 1.10. Теплопроводность в анизотропном материале

Обратите внимание на то, что векторы градиента температуры и плотности теплового потока находятся теперь не на одной линии (рис. 1.9), а составляют некоторый (тупой) угол (рис. 1.10).

Все же большинство технических материалов изотропны, и мы будем использовать закон теплопроводности в форме (1.15).

Формулировка закона теплопроводности Фурье – важный этап в разработке математического описания процессов теплообмена. Мы говорили выше о том, что задачей теории является определение *неизвестных заранее* полей температуры и плотности теплового потока. Теперь с помощью закона Фурье между этими неизвестными установлена функциональная связь: поток  $\mathbf{q}$  пропорционален термодинамической движущей силе – градиенту температуры  $\text{grad } t$ .

Справедливость закона Фурье подтверждается экспериментами, хотя существуют особые случаи, когда формулировка (1.15) требует уточнения (задачи с очень быстрыми временными и пространственными изменениями температурного поля, см. гл.7). Фундаментальное обоснование закона Фурье и аналогичных соотношений для других процессов переноса (диффузии, молекулярного трения) дается *неравновесной термодинамикой*.

Динамическую, развивающуюся во времени картину сопряженных полей температуры и плотности теплового потока можно увидеть, запустив видеоролик о нестационарной дву-

мерной задаче теплопроводности при «включении» твэла с ухудшенным режимом охлаждения на части поверхности (ср. с рис. 1.1, рис. 1.2) [26].

**Конвективный перенос энергии.** При непосредственном контакте материальных объемов (частей тела) с различной температурой всегда возникает кондуктивный («кондукция» – проводимость) перенос энергии, независимо от того, рассматривается ли перемешиваемая жидкость или твердое тело, части которого неподвижны друг относительно друга.

С другой стороны, в движущихся средах энергия транспортируется вместе с перемещающимися материальными объемами жидкости или газа со скоростью течения жидкости. Такой перенос энергии называется *конвективным* («конвекция» – прине-сение, доставка).

Конвекция играет большую роль во многих природных явлениях и технологических процессах. Например, если в Москве быстро потеплело, то это произошло потому, что пришел *поток* теплого воздуха из Атлантики, передвигавшийся со скоростью примерно 10 м/с, а не потому, что через *тысячекилометровый слой* воздуха, отделяющий нас от теплого океана, передавалась теплота посредством теплопроводности.

Посредством конвекции в энергетических установках теплоносители (вода, воздух и др. вещества) транспортируют тепловую энергию в теплообменниках. Конвекция обеспечивает высокую интенсивность теплообмена между твердыми поверхностями и движущимися жидкостями (теплоносителями) благодаря непрерывному обновлению теплового контакта и сохраняющемуся вследствие этого высокому градиенту температуры в пристенной области. В *турбулентных* потоках конвективное *перемешивание* жидкости резко увеличивает интенсивность теплообмена.

Для количественного описания конвективного потока энергии необходимо начать с некоторого расширения привычного понятия скорости как перемещения за единицу времени. На рисунке 1.11 показан вектор скорости  $w$  и ориентированная по нормали к этому вектору контрольная поверхность.

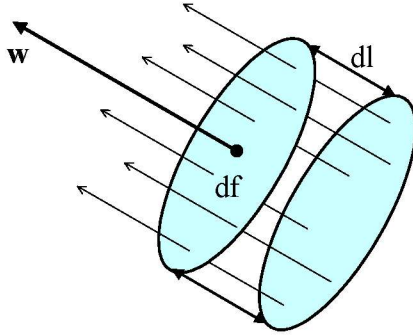


Рис. 1.11. Скорость как расходная характеристика

На контрольной поверхности  $df$ ,  $m^2$ , как на основании, построен цилиндр с высотой  $dl$ . За время  $dl/w$ , с, жидкость в объеме этого цилиндра  $df \cdot dl$  пройдет через контрольную поверхность  $df$ . Вычислим величину плотности объемного расхода в направлении вектора скорости как величину объема, переносимого через единичную площадку за единицу времени:

$$\frac{(df \cdot dl)}{df \cdot dl/w} = w, m^3/(m^2 \cdot c).$$

Получилось просто значение скорости. Итак, вектор скорости можно рассматривать как вектор плотности объемного расхода материальной среды. Численное значение этого вектора равно материальному объему, переносимому за единицу времени через единицу контрольной поверхности, нормальной к направлению переноса (то есть к направлению скорости).

Умножая  $w$  на плотность жидкости, получим вектор плотности потока массы:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}, \text{ кг}/(m^2 \cdot c), \quad (1.18)$$

показывающий, какое количество вещества (кг) переносится за единицу времени через единицу контрольной поверхности.

Теперь понятно, как рассчитать вектор конвективной плотности потока какой-либо экстенсивной (то есть связанной с массой вещества) величины, например, энтальпии. Для этого сле-

дует умножить вектор плотности потока массы на удельную энтальпию  $h$ , Дж/кг, т.е. на содержание энтальпии в единице массы теплоносителя:

$$\mathbf{q}_{h,conv} = \mathbf{j} \cdot h = \rho \mathbf{w} h, \text{ Вт/м}^2. \quad (1.19)$$

Ниже мы увидим, что аналогичные формулы определяют конвективные потоки компонентов смеси.

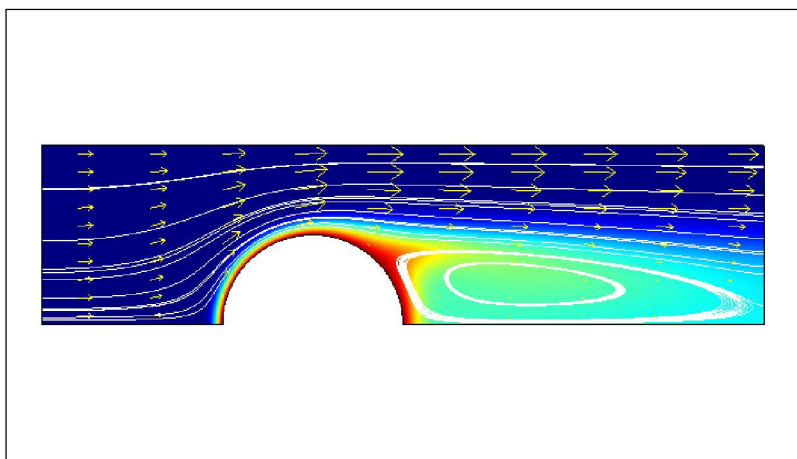
В технических устройствах движение жидкости чаще всего вынуждается действием насоса или вентилятора. При *вынужденной* конвекции поле скоростей  $\mathbf{w}$  можно найти заранее, решив гидродинамическую задачу, а затем перейти к расчету теплообмена, определяя конвективные потоки формулами вида (1.19). Однако такую процедуру следует рассматривать как первое приближение. Во многих случаях поля скорости и температуры взаимосвязаны. Например, так бывает в случае сильной температурной зависимости вязкости жидкости. В самых общих чертах можно представить себе, что в области течения, где жидкость холодная и поэтому более вязкая, происходит замедление потока.

При *свободной (естественной)* конвекции само движение жидкости возникает из-за неоднородности температуры жидкости: в поле силы тяжести горячая и поэтому менее плотная жидкость выталкивается вверх Архимедовой силой. Возникновение свободной циркуляции и развитие термогидродинамических полей вблизи включенного нагревателя – горизонтальной трубки можно наблюдать на анимации [26]. Теплообменные устройства, работающие на принципе свободной конвекции, имеют важное значение в технике. Развитие естественной циркуляции в испарительной градирне – крупномасштабном охлаждающем устройстве на ТЭС или АЭС – схематически представлено на анимации [26].

На атомных станциях системы СПОТ (системы пассивного отвода тепла, т.е. свободноконвективные устройства) представляют последний рубеж защиты при гипотетических авариях. Сложно переплетаются гидродинамика и теплообмен в двухфазных потоках при испарении (кипении) или конденсации. Кроме обычных твердых границ со стенками, большую роль играют межфазные поверхности раздела, многообразные по форме, изменчивые и неустойчивые. По указанным причинам на практике уравнения гидродинамики и теплообмена чаще всего образуют взаимосвязанную систему.

Визуализация конвективного теплообмена при вынужденном поперечном обтекании трубки нагревателя на рис. 1.12 дает совместное представление полей скорости и температуры. Стрелки изображают векторное поле скорости, светлые линии – линии тока. Цветом показано скалярное поле температуры: нагревающаяся жидкость вблизи горячей стенки – красного цвета, холодная вдали от нее – синего. Скорость обтекания в расчетном примере невелика, и в кормовой части цилиндра видна застойная зона со слабой регулярной циркуляцией. Градиент температуры в застойной зоне относительно низкий: это область с ухудшенной теплоотдачей, по сравнению с лобовой частью цилиндра.

u0(21)=0.0041 Surface: Temperature Arrow: Velocity field Streamline: Velocity field



**Рис. 1.12. Теплоотдача при поперечном обтекании цилиндра (отразить изображение вниз для получения полной картинки)**

В реальных теплообменниках скорость течения намного больше, и в кормовой части цилиндра наблюдается интенсивное беспорядочное вихревое течение, обеспечивающее высокую теплоотдачу. Цель демонстрации на рис. 1.12 – показать влияние поля течения на теплообмен. Изменения, которые мы могли бы наблюдать, постепенно увеличивая скорость вынужденного обтекания горячей трубы с постоянной температурой, можно увидеть на видеоролике [26].

## 1.2. Массообмен

**Концентрация.** Очень многие технологические и природные процессы сопровождаются массопереносом. Например, при горении твердой углеродной частицы кислород поступает к ее поверхности, реагирует при высокой температуре с углеродом, а газообразные продукты реакции, такие как окись углерода, отводятся от поверхности в обратном направлении.

Для формирования погоды и климата важно взаимодействие атмосферы и океана. Например, сухой горячий ветер пустыни, продвигаясь над поверхностью моря, насыщается парами воды.

Для экологии важно, как промышленные выбросы вредных веществ постепенно распространяются на большие расстояния.

Из этих примеров видно, что, во-первых, часто необходимо рассматривать газовые или жидкие среды как смеси двух или более компонентов и, во-вторых, что компоненты смеси могут перемещаться относительно друг друга (как кислород и углекислый газ в первом примере).

Мы будем рассматривать в дальнейшем двухкомпонентные системы. Этого достаточно для большинства практических задач.

Важнейшими характеристиками смеси являются:

- плотность компонента смеси

$$\rho_k, \text{ (кг k-компонента) / (м}^3 \text{ смеси),} \quad (1.20)$$

равная массовому содержанию k-компонента в единичном объеме смеси, и

- концентрация компонента:

$$c_k \equiv \frac{\rho_k}{\rho}, \text{ (кг k-компонента) / (кг смеси).} \quad (1.21)$$

По умолчанию в дальнейшем будем считать, что величины без индексов есть характеристики смеси в целом. Очевидно, плотность смеси равна сумме плотностей компонентов:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad (1.22)$$

а сумма массовых концентраций равна единице:

$$c_1 + c_2 = \frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\rho_2}{\rho} = 1. \quad (1.23)$$



При решении задач массообмена основной задачей является расчет поля концентрации рассматриваемого компонента:

$$c_1 = c_1(x, y, z, \tau). \quad (1.24)$$

Для двухкомпонентных систем достаточно рассчитать концентрацию одного из компонентов, например  $c_1$ , так как  $c_2 = 1 - c_1$ .

Все, что было сказано выше о способах изображения и характеристиках изменения температурного поля без всяких изменений переносится на поле концентрации. Таким образом, мы можем говорить об изоконцентрационных поверхностях, градиенте концентрации и т.д.

**Плотность потока массы компонентов смеси.** Представим движение компонентов смеси как перемещение двух взаимопроникающих континуумов (непрерывных сред) с *различными* скоростями. Тогда векторы плотности потока компонентов выражаются через эти индивидуальные скорости следующим образом:

$$\mathbf{j}_k = \rho_k \mathbf{w}_k, \text{ (кг } k\text{-компонента)/(м}^2\text{с)}. \quad (1.25)$$

Плотность потока смеси есть векторная сумма потоков компонентов смеси:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \rho_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 \mathbf{w}_2. \quad (1.26)$$

Ту же величину можно выразить через скорость смеси:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}. \quad (1.27)$$

Сравнивая правые части двух последних соотношений, получают следующее определение для скорости смеси:

$$\mathbf{w} = \frac{\rho_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 \mathbf{w}_2}{\rho}. \quad (1.28)$$

В этой формуле легко увидеть известное из курса механики определение скорости центра масс системы двух тел. Итак, скорость смеси – это скорость движения центра масс системы из двух компонентов. Такое определение позволяет описывать гидродинамику смеси точно так же, как для однокомпонентной жидкости.

**Закон диффузии Фика.** Пусть наблюдатель передвигается вместе со смесью со скоростью  $\mathbf{w}$ . Тогда компоненты смеси перемещаются относительно наблюдателя с различными скоростями  $(\mathbf{w}_k - \mathbf{w})$ . При этом возникают потоки массы компонентов:  $\rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w})$ .

Причиной, заставляющей компоненты смеси перемещаться относительно осредненного (наблюдаемого) движения смеси, является *неоднородность поля концентрации*. Это фундаментальный опытный факт, аналогичный возникновению теплового потока в неоднородном температурном поле. Явление, описанное выше, называется концентрационной диффузией. Кондуктивный (диффузионный) поток компонентов бинарной смеси описывается законом Фика:

$$\mathbf{j}_{k,\text{conduct}} \equiv \rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}) = -\rho D \mathbf{grad} c_k, \quad (1.29)$$

где  $D$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$  – коэффициент диффузии, физический параметр двухкомпонентной смеси. Для газовых смесей значения коэффициента диффузии составляют примерно  $(0.1-1)10^{-4}$ , для водных растворов – примерно  $10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Полный поток компонента смеси выражается формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_k &\equiv \rho_k \mathbf{w}_k = \rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}) + \rho_k \mathbf{w} = \\ &= \mathbf{j}_{k,\text{conduct}} + \rho_k \mathbf{w} = -\rho D \mathbf{grad} c_k + \rho_k \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Величина

$$\mathbf{j}_{k,\text{conv}} = \rho_k \mathbf{w} \quad (1.31)$$

является конвективной составляющей плотности потока компонента.

Поскольку кондуктивные потоки обоих компонентов описывают движение относительно центра масс, их сумма должна быть равна нулю. Следовательно, для двухкомпонентной смеси

$$\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} = -\mathbf{j}_{2,\text{conduct}}. \quad (1.32)$$

Этот результат получается непосредственно из определенных (1.26), (1.27), (1.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} &\equiv \rho_1 (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}); & \mathbf{j}_{2,\text{conduct}} &\equiv \rho_2 (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}); \\ \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \mathbf{j}_{2,\text{conduct}} &\equiv \rho_1 (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}) + \rho_2 (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}) = \\ &= \underbrace{(\rho_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 \mathbf{w}_2)}_{\mathbf{j}} - \underbrace{(\rho_1 + \rho_2)}_{\rho} \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \\ &\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \mathbf{j}_{2,\text{conduct}} = 0. \end{aligned}$$

**Энтальпия смеси.** В дальнейшем потребуется определять энтальпию смеси через концентрации и энтальпии компонентов. В термодинамике смесей используют следующее соотношение:

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2 \quad (1.33)$$

или, после умножения на плотность смеси:

$$\rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2, \quad (1.34)$$

где  $h_2$  и  $h_1$  – так называемые *парциальные* энтальпии компонентов, вообще говоря зависящие от концентрации. Эти величины могут быть вычислены, если известны удельные энтальпии чистых компонентов и теплота смешения. Для идеальных смесей, то есть таких что смешение компонентов не сопровождается изменением объема и тепловыми эффектами, парциальные энтальпии равны энтальпиям чистых исходных компонентов. Идеальными смесями являются многокомпонентные идеальные газы. Для идеальных газов энтальпия компонентов зависит только от температуры, а энтальпия смеси – от температуры и концентрации.

**Кондуктивный поток** энергии при наличии диффузии. Пусть  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$ , кг/(м<sup>2</sup>с) – полные потоки массы компонентов, определяемые формулой (1.30), и  $h_2$  и  $h_1$ , Дж/кг – удельные энтальпии компонентов. Предположим пока, что система изотермическая, и вычислим плотность потока энтальпии, переносимого компонентами смеси при их *различном* перемещении в пространстве, связанном, как мы видели, с возникновением диффузии:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2 &= (\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \rho_1 \mathbf{w}) h_1 + (\mathbf{j}_{2,\text{conduct}} + \rho_2 \mathbf{w}) h_2 = \\ &= \underbrace{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}_{\rho h} \mathbf{w} + \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} h_1 + \mathbf{j}_{2,\text{conduct}} h_2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Замечая, что в правой части множитель в скобках перед  $\mathbf{w}$  есть энтальпия смеси (см. формулу (1.34)) и учитывая соотношение между диффузионными потоками (1.32), получим для потока энтальпии:

$$\mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2 = \underbrace{\rho \mathbf{w} h}_{\text{convection}} + \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} (h_1 - h_2). \quad (1.36)$$

Первое слагаемое в правой части является обычным выражением для конвективного потока энтальпии (ср. с формулой (1.19)). Второе слагаемое в правой части

$$\mathbf{j}_{1,\text{conduct}}(h_1 - h_2) \quad (1.37)$$

связано с необратимым, самопроизвольным процессом кондуктивного (диффузионного) переноса массы.

Итак, если происходит совместный тепло – и массообмен, т.е. имеются неоднородные поля и температуры и концентрации, то *кондуктивный* поток энергии имеет две составляющие: связанную с теплопроводностью (1.15) и связанную с диффузией (1.37):

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} t + \mathbf{j}_{1,\text{conduct}}(h_1 - h_2). \quad (1.38)$$

Конвективный поток энтальпии смеси записывается так же, как для однокомпонентной среды (см. (1.19), (1.36)):

$$\mathbf{q}_{h,\text{conv}} = \mathbf{j} \cdot h = \rho \mathbf{w} h, \text{ Вт/м}^2, \quad (1.39)$$

где плотность и удельная энтальпия являются теперь параметрами смеси.

В неравновесной термодинамике анализируются и другие виды необратимых (связанных с ростом энтропии) процессов переноса, кроме рассмотренных нами теплопроводности и концентрационной диффузии. Например, очень большие градиенты температуры приводят к возникновению потоков массы компонентов смеси (эффект термодиффузии). Такой процесс использовался для разделения изотопов при создании атомной бомбы. Существует и так называемый перекрестный эффект, когда градиент концентрации приводит к возникновению теплового потока (диффузионный термоэффект). Однако в большинстве случаев в теплообменных и теплотехнологических установках, а также в окружающей среде условия таковы, что достаточно ограничиться рассмотренными выше необратимыми процессами переноса: теплопроводностью и концентрационной диффузией.

### 1.3. Трение

**Конвективный перенос импульса.** Мы видели, какую большую роль в тепломассообмене играет движение жидкости, обеспечивая конвекцию (перенесение, доставку) тепловой энергии и массы компонента смеси. Поэтому расчет поля скоростей является важным этапом при решении задачи конвективного тепломассообмена.

В предыдущих параграфах обсуждались процессы переноса энергии (энтальпии) и массы компонента. В гидродинамике переносимой величиной является *импульс* (количество движения):

$$m\mathbf{w}, \text{ (кг м/с)}.$$

Импульс единичной массы жидкости есть скорость:

$$\frac{(m\mathbf{w})}{m} = \mathbf{w}, \text{ м/с}.$$

Обратите внимание на то, что переносимая величина является вектором. Ранее мы имели дело со скалярными переносимыми величинами – массой, энтальпией.

Плотность *конвективного потока импульса* можно записать, умножая плотность потока массы  $\rho\mathbf{w}$  на импульс единицы массы  $\mathbf{w}$ :

$$\rho\mathbf{w}\mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/(м}^2\text{с)}. \quad (1.40)$$

Не следует ставить никакого знака умножения между векторами скорости в только что записанной формуле. Это особое произведение векторов, так называемое прямое произведение (не скалярное и не векторное). Оно образует *тензор потока импульса*, координатное разложение которого расписывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \rho u u & \rho u v & \rho u w \\ \rho v u & \rho v v & \rho v w \\ \rho w u & \rho w v & \rho w w \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Здесь  $(u, v, w)$  – составляющие вектора скорости по координатным осям. Каждая составляющая тензора потока импульса связана с двумя направлениями: одно из них – направление переноса, второе – направление переносимой величины (рис. 1.13).

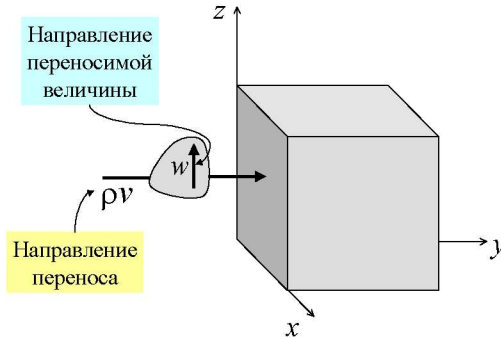


Рис. 1.13. Плотность потока импульса

Пусть необходимо определить плотность потока импульса через контрольную поверхность, нормальную к оси  $y$ . Поскольку импульс – векторная величина, необходимо уточнить, какую именно составляющую импульса имеется в виду. В нашем примере это вертикальная составляющая  $w$ . Через контрольную поверхность протекает поток массы жидкости  $\rho v$ . Каждая единица массы этого потока содержит импульс  $w$ . Следовательно, искомая плотность потока импульса есть  $\rho vw$ . Для диагональных элементов тензора направления переноса и переносимой величины совпадают.

**Тензор напряжений.** Рассмотрим теперь силы *контактного* взаимодействия между элементами жидкости, разделенными какой-либо контрольной поверхностью, или, как говорят, в сопротивлении материалов, напряженное состояние в точке.

Чтобы охарактеризовать напряжения (силы, отнесенные к единице площади), следует задать ориентацию площадки (например, единичным вектором нормали) и вектор силы, действующей на эту площадку. Мы опять имеем дело с величиной,

связанной с двумя направлениями, и представляем напряжения в виде тензора, координатное разложение которого записывается следующим образом:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \text{ Н/м}^2 = (\text{кг м/с})/(\text{м}^2\text{с}). \quad (1.42)$$

Например, на единичную площадку, нормальную к оси  $y$  (рис. 1.14) действует сила  $\mathbf{P}_y$ , которая в координатном разложении представляется как

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{i}\sigma_{yx} + \mathbf{j}\sigma_{yy} + \mathbf{k}\sigma_{yz}. \quad (1.43)$$

где, в частности,  $\sigma_{yx}$  есть касательное напряжение, действующее в направлении  $x$  на площадку, нормальную к оси  $y$  (ориентация площадки – первый индекс, направление силы – второй).

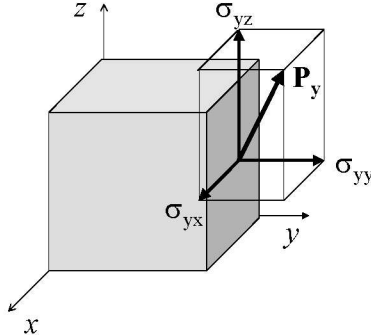


Рис. 1.14. Тензор напряжений в вязкой жидкости

Знак напряжения определяется правилом «отброшенной» жидкости: направления стрелок таковы, что это силы, действующие со стороны жидкости, находящейся справа от контрольной поверхности, как говорят, «отброшенной» со стороны положительного направления оси  $y$ .

В гидродинамике принято интерпретировать напряжения как плотности потока импульса. Действительно, если на грань контрольного объема со стороны контактирующей жидкости действует напряжение (сила), то это означает, что контрольному объему сообщается через эту площадку некоторый импульс. Следует принять во внимание правило знаков: плотность потока импульса за счет действия поверхностных сил – это тензор напряжений с обратным знаком.

Диагональные элементы тензора называются по понятной причине нормальными напряжениями, а внедиагональные – касательными, или сдвиговыми напряжениями.

**Давление.** Для *идеальной* (невязкой) жидкости на гранях контрольного объема действуют только силы давления, всегда нормальные к рассматриваемой площадке. В этом случае тензор напряжений записывается просто:

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \equiv -p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \equiv -p\mathbf{I}, \quad (1.44)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

При течении *вязкой* жидкости возникают дополнительные, так называемые *вязкие* напряжения. Прежде всего это касательные, или сдвиговые напряжения. Менее очевидно то, что и в нормальных напряжениях возникают вязкие составляющие, в связи с чем возникает вопрос о том, что понимать под давлением в движущейся вязкой жидкости. Принимают, что давление есть среднеарифметическое значение нормальных напряжений (среднее давление) с обратным знаком:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (1.45)$$

Это определение с очевидностью подходит для идеальной жидкости (см. (1.44)), и его распространяют на вязкие жидкости. Заметим, что сумма диагональных элементов тензора является инвариантом, т.е. не зависит от ориентации системы координат, как и должно быть для давления.



**Вязкие напряжения.** При записи тензора напряжений выделяют давление и вязкие напряжения (величина со «штрихом»):

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \sigma' . \quad (1.46)$$

Другими словами, считают, что отклонения напряжений от давления связано с возникновением вязких напряжений.

Чтобы сохранить определение (1.45) для давления, необходимо потребовать, чтобы сумма диагональных элементов тензора вязких напряжений была равна нулю:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0. \quad (1.47)$$

Это условие используется далее при формулировке закона вязких напряжений.

**Плотность потока импульса.** После этого обсуждения можно записать выражение полной плотности потока импульса:

$$-\sigma + \rho \mathbf{w} \mathbf{w} \equiv p\mathbf{I} - \sigma' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w} , \quad (\text{кг м/с})/(\text{м}^2\text{с}), \quad (1.48)$$

согласно которому поток импульса возникает вследствие действия сил давления, вязких напряжений и конвективного переноса импульса.

Остается получить выражение для тензора вязких напряжений, или, в другой интерпретации, кондуктивного потока импульса  $\sigma'$ .

**Закон трения Стокса.** Свойство вязкости проявляется только при движении жидкости, таком, что имеет место сдвиг слоев жидкости относительно друг друга. Движения жидкости, похожие на движение твердого тела, когда не происходит относительных перемещений частиц, не подвержены влиянию вязкости. Эти качественные соображения могут быть выражены математически, если воспользоваться теоремой Гельмгольца о разложении движения элементарного объема жидкости на три составляющие (рис. 1.15):

- поступательное перемещение как твердого тела (с одинаковой для всех частиц скоростью);
- твердое вращение (с одинаковой для всех частиц угловой скоростью);
- деформация (сдвиг, перекашивание углов).

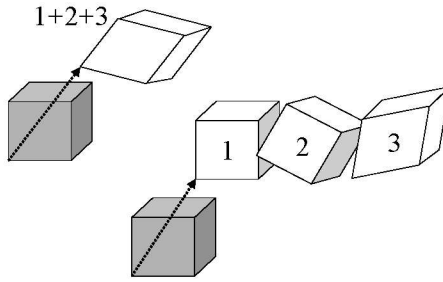


Рис. 1.15. Разложение движения элементарного объема на поступательное перемещение (1), поворот (2) и деформацию (3)

Поскольку первые две составляющие не дают сдвига (относительного смещения) частиц, остается искать связь между вязкими напряжениями и деформациями.

Деформации возникают из-за неравномерности поля скорости. Мерой этой неравномерности является *градиент скорости* – тензор, координатное разложение которого составлено из производных от проекций скорости  $(u, v, w)$  по координатам  $(x, y, z)$ :

$$\text{grad } w = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Как поясняется в следующем пункте, внедиагональные компоненты

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ и т.п.},$$

описывают угловую скорость поворотов линий, составленных из жидких частиц, а диагональные компоненты

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

определяют скорость относительного удлинения жидких отрезков, расположенных вдоль данной координаты. При сложении градиента скорости с его транспонированным значением

$$\mathbf{grad} \mathbf{w} + (\mathbf{grad} \mathbf{w})^T$$

получается симметричный тензор, описывающий скорость деформаций элементарного объема жидкости.

Принимают, что *вязкие напряжения пропорциональны скоростям деформации в жидкости*. Это основное содержание закона вязкого трения (закона Стокса), который записывается в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu \left( \mathbf{grad} \mathbf{w} + (\mathbf{grad} \mathbf{w})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{I}. \quad (1.50)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  называется коэффициентом динамической вязкости и является физическим параметром жидкости. Его размерность есть

$$[\mu] = \frac{[\boldsymbol{\sigma}']}{[\mathbf{grad} \mathbf{w}]} = (\text{Н/м}^2) / ((\text{м/с})/\text{м}) = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Отметим аналогию в формулировках законов переноса (1.50), (1.15), (1.29). Вязкие напряжения (т.е. плотность потока импульса) пропорциональны градиенту скорости, подобно тому как плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры (закон теплопроводности Фурье (1.15)) или диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации (закон диффузии Фика (1.29)).

Запишем приведенные выше соотношения в форме координатных разложений:

$$\mathbf{grad} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{grad} \mathbf{w})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (1.51)$$

$$\sigma' = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Тензор в правой части этого соотношения (1.52) определяет скорость деформации элементарного объема жидкости.

Дополнительное слагаемое с дивергенцией в уравнениях (1.50) или (1.52) для несжимаемых жидкостей обращается в ноль, а в случае среды с переменной плотностью обеспечивает выполнение требования (1.47). Это легко проверить, учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.53)$$

Итак соотношения (1.50) и (1.52) задают закон вязкого трения Стокса соответственно в векторной и координатной форме.

Некоторые детали и дополнительные обоснования этих формулировок приводятся ниже.

**Деформации в жидкости.** Поясним кинематический смысл компонентов тензора в правой части закона Стокса (1.52):

$$\begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Начнем с внедиагональных компонентов тензора, например, с величины

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

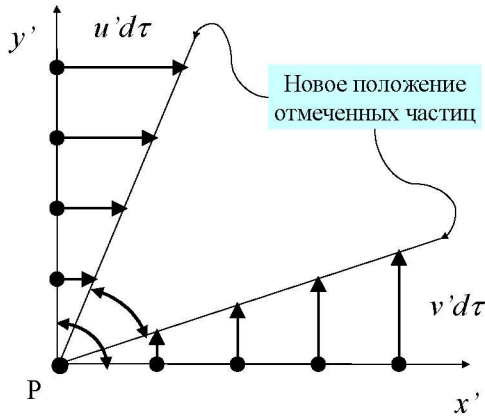


Рис. 1.16. Угловые деформации

Рассмотрим течение в окрестности какой-либо материальной точки  $P$  (рис. 1.16).

Перемещаясь вместе с этой точкой, таким образом что система координат  $x', y'$  будет *поступательно перемещаться* вместе с частицей жидкости  $P$ . Проследим за частицами, первоначально расположенными по осям координат, для чего используем разложение поля скорости в ряд и ограничимся линейными членами:

– составляющие скорости частиц на вертикальной оси:

$$u = u_P + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P y'; \quad v = v_P; \quad (1.55)$$

– составляющие скорости частиц на горизонтальной оси:

$$u = u_P; \quad v = v_P + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_P x'. \quad (1.56)$$

Эти разложения показывают, что движение частиц можно представить как сумму поступательного перемещения со скоростью  $(u_P, v_P)$  и относительного движения со скоростями соответственно:

– для частиц на вертикальной оси:

$$u' \equiv u - u_P = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P y'; \quad v' \equiv v - v_P = 0; \quad (1.57)$$

– и для частиц на горизонтальной оси:

$$u' \equiv u - u_P = 0; \quad v' \equiv v - v_P = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_P x'. \quad (1.58)$$

На рисунке 1.16 показан результат относительного смещения, т.е. того, что увидит наблюдатель, перемещающийся поступательно вместе с частицей Р. Вертикальная линия повернется за единичный промежуток времени на угол:

$$\frac{u'}{y'} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P, \quad (1.59)$$

а горизонтальная – на угол

$$\frac{v'}{x'} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_P. \quad (1.60)$$

Из построений (рис. 1.16) следует, что сумма

$$\frac{u'}{y'} + \frac{v'}{x'} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.61)$$

характеризует изменение угла между осями в исходном и конечном положениях. Правильнее говорить о скорости угловой деформации, поскольку построение сделано для единичного промежутка времени.

Таким образом, внедиагональные компоненты тензора (1.54) определяют скорость угловой деформации в жидкости.

Рассмотрим теперь специальный случай – вращение жидкости как *твердого тела* с постоянной для всех точек угловой скоростью (рис. 1.17) – и вновь проследим за значениями внедиагонального компонента:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Первоначально положение частиц совпадает с координатными осями, а через единичный промежуток времени они оказываются на линиях, повернутых относительно исходного положе-

ния. Однако угол между линиями положения частиц в исходном и в конечном положении (отмечен на рисунке дугами) *не изменяется*, остается прямым, как и должно быть для твердого вращения. Чтобы обеспечить это условие равенства нулю скорости угловой деформации, при построении (рис. 1.17) было принято:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u' = v' \text{ при } y' = x'.$$

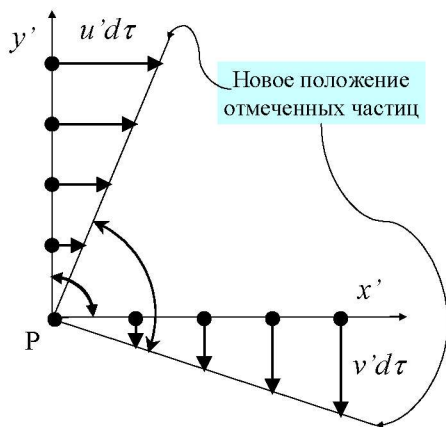


Рис. 1.17. Вращение жидкости как твердого тела

Легко проверить, что касательные напряжения по формуле закона трения (1.52) будут при этом нулевыми, как и должно быть при твердом вращении, когда частица жидкости *не деформируется*.

Теперь ясно, почему потребовалось вводить в формулировку закона трения (1.50) сумму обычного и транспонированного градиента скорости. При внимательном рассмотрении выражений для этих величин обнаруживается, что сами они есть несимметричные тензоры (см. (1.49)), а результат их сложения – симметричный тензор. Благодаря симметрии учитывается фундаментальное требование, согласно которому *вязкие напряжения не возникают, если жидкость вращается как твердое тело*.

Рассмотрим далее кинематический смысл *диагональных компонентов* тензора (1.54):

$$2 \frac{\partial u}{\partial x}, 2 \frac{\partial v}{\partial y}, 2 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Повторяя с небольшими изменениями описанные выше операции разложения проекций скорости вблизи точки Р, получим: продольная скорость частиц на горизонтальной оси:

$$u = u_P + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P x'; \quad (1.62)$$

скорость смещения частиц жидкости в продольном направлении относительно точки Р:

$$u' \equiv u - u_P = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P x'. \quad (1.63)$$

Следовательно жидкий отрезок с первоначальной длиной  $x'$  за малый промежуток времени  $d\tau$  удлинится на величину  $(u' d\tau)$ , относительное удлинение составит  $(u' d\tau)/x'$ , а скорость относительного удлинения:

$$\frac{(u' d\tau)/x'}{d\tau} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P. \quad (1.64)$$

Итак, производная от проекции скорости по одноименной координате определяет скорость относительного удлинения жидкого отрезка, расположенного вдоль данной координаты.

Рассмотрим далее деформации растяжения-сжатия первоначально кубического (квадратного в плане) объема (рис. 1.18).

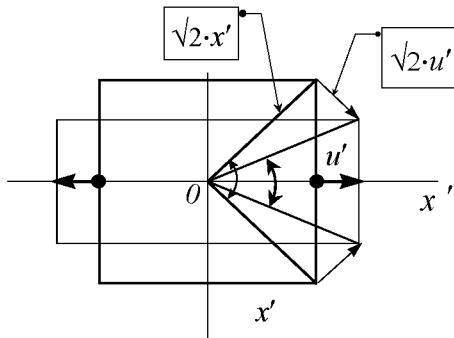


Рис. 1.18. Изменение углов при растяжении вдоль оси  $x$



Как следует из построений на рис. 1.18, и в этом случае прямые углы деформируются. Если объем остается постоянным (то есть жидкость несжимаема), то небольшое увеличение размера по горизонтали приводит к такому же сокращению по вертикали, а скорость угловой деформации составит

$$2 \frac{(\sqrt{2}u')}{(\sqrt{2}x')} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.65)$$

Итак, угловая деформация при растяжении-сжатии равна удвоенному относительному удлинению. Эти вычисления поясняют, каким образом возникают вязкие нормальные напряжения.

Рассмотрим теперь условие (1.47), согласно которому сумма диагональных элементов тензора вязких напряжений должна быть равна нулю:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости это условие выполняется автоматически, а в общем случае, как говорилось выше, в выражение закона Стокса необходимо добавить слагаемое с дивергенцией вектора скорости. В качестве обоснования этого шага приведем следующее обсуждение деформаций растяжения-сжатия.

Если жидкость *сжимаемая*, то наш расчет (см. формулу (1.65) и рис. 1.18) включает мгновенные изменения объема, связанные не только с деформацией, но и со всесторонним расширением (или сжатием) за счет изменения плотности жидкости. Эту вторую составляющую мы должны вычесть в соответствии с основной идеей: вязкость проявляется только при деформациях (изменениях формы) объема.

Если наблюдать за изменением первоначально единичного ( $V = 1 \cdot 1 \cdot 1$ ) кубического объема, составленного из *одних и тех же жидких* частиц, то, вследствие описанного выше удлинения его сторон (см. формулу (1.64)), *скорость относительного увеличения объема* составит величину, равную *дивергенции вектора скорости*:

$$\frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} d\tau\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} d\tau\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} d\tau\right) - (1 \cdot 1 \cdot 1)}{(1 \cdot 1 \cdot 1) d\tau} = \quad (1.66)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{w}$$

Этот результат можно получить и непосредственно из определения понятия дивергенции вектора скорости, учитывая, что скорость – это плотность объемного расхода (см. рис. 1.11):

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau}. \quad (1.67)$$

При малых изменениях относительное увеличение объема равно трехкратному удлинению сторон (скажем, если стороны удлинились на 1%, то объем увеличился на 3%). Или, что то же самое, удлинение составит 1/3 от увеличения объема, т.е.  $1/3 \cdot \operatorname{div}(\mathbf{w})$ . Эту величину необходимо вычесть из полного удлинения  $\partial u / \partial x$ , чтобы осталась только часть, связанная с деформацией. Следовательно истинная (угловая) деформация в случае сжимаемой жидкости составит

$$2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{w} \right). \quad (1.68)$$

## Глава 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

### 2.1. Общая форма балансового уравнения

Из элементарных процессов переноса, представленных в предыдущей главе, складывается следующая общая картина тепломассообмена (рис. 2.1):

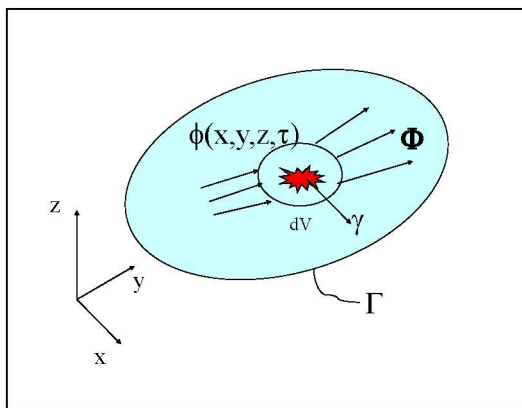


Рис. 2.1. К формулировке обобщенного уравнения сохранения ( $\phi$  – плотность переносимой величины,  $[\phi] = (*) / \text{м}^3$ ;  $\Phi$  – плотность потока этой величины, включающая кондуктивную и конвективную составляющие,  $[\Phi] = (*) / (\text{м}^2\text{с})$ ;  $\gamma$  – мощность внутреннего источника,  $[\gamma] = (*) / (\text{м}^3\text{с})$ )

В некоторой области, отделенной границей  $\Gamma$  от окружающей среды, движется со скоростью  $\mathbf{w}(x, y, z, \tau)$  двухкомпонентная жидкость с переменной температурой  $t(x, y, z, \tau)$  и концентрацией  $c_1(x, y, z, \tau)$ . Жидкость перемещается под действием давления  $p(x, y, z, \tau)$  и вязких напряжений, а также массовых сил (таких как гравитация).

Неоднородность полей температуры и концентрации вынуждает появление *кондуктивных* (пропорциональных градиен-

там температуры и концентрации) потоков теплоты  $q(x,y,z,\tau)$  и массы  $j_{1,conduct}(x,y,z,\tau)$ .

Движение жидкости обеспечивает *конвективный* перенос экстенсивных (пропорциональных массе) величин, таких как энтальпия или масса компонента смеси. Векторные поля плотностей конвективных потоков энтальпии и массы рассматриваемого компонента «1» определяются через поле скорости  $w$  соответственно как  $\rho w h$  и  $\rho_1 w$ .

На границе области происходит взаимодействие с окружающей средой, которое должно быть описано *граничными условиями*. Например, через границу могут проходить потоки вещества и энергии, или граница может быть непроницаемой для этих субстанций. На практике граница  $\Gamma$  чаще всего отделяет элементы конструкций (твердых тел) от обтекающих их потоков газов или жидкостей (теплоносителей). Специально выделяют также входные и выходные участки границы, через которые теплоноситель поступает в теплообменный аппарат и покидает его.

В общем случае система (рис. 2.1) эволюционирует, развивается во времени из некоторого начального состояния, которое должно быть определено *начальными условиями*.

Если заданы начальные и граничные условия, геометрическая конфигурация системы и физические свойства жидкости, мы должны уметь рассчитать поля:

- температуры  $t(x,y,z,\tau)$
- концентрации  $c_1(x,y,z,\tau)$
- давления  $p(x,y,z,\tau)$
- скорости  $w(x,y,z,\tau)$ .

Мы намереваемся далее в этой главе использовать фундаментальные *законы сохранения массы, импульса, энергии* с целью получить замкнутое математическое описание задачи – *в форме системы дифференциальных уравнений в частных производных* для указанных искоемых величин температуры, концентрации, давления и скорости.

Когда эти поля становятся известными, можно рассчитать также потоки энергии и вещества, применяя формулировки *законов переноса*, рассмотренные в предыдущей главе. В том числе, могут быть рассчитаны потоки энергии и вещества *через границы*, разде-

ляющие элементы конструкций и потоки теплоносителей, что и является чаще всего главной задачей при инженерных расчетах.

Выделим в окрестности какой-либо внутренней точки (рис. 2.1) дифференциально малый *фиксированный в пространстве* контрольный объем  $dV$ . Наблюдая во времени за состоянием контрольного объема, мы обнаружим, вообще говоря, изменение значений  $t, c_1, p, w$ . Например, может увеличиться температура, и это означает, что увеличилась внутренняя энергия в контрольном объеме.

Имеется две возможных причины таких изменений. Во-первых, *через поверхность* контрольного объема проходят потоки энергии (вещества, импульса).

Во-вторых, *внутри объема* могут действовать внутренние источники или стоки (например, тепловая энергия может «порождаться» в процессе ядерных превращений в энергетическом атомном реакторе, или поглощаться при эндотермической химической реакции и т.п.).

Это описание можно представить в компактной универсальной форме балансового уравнения, или *уравнения сохранения*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\text{div}(\Phi) + \gamma . \quad (2.1)$$

Согласно (2.1), увеличение содержания какой-либо экстенсивной величины в единичном контрольном объеме (левая часть) является следствием притока через его поверхность (первое слагаемое в правой части) и действия внутреннего источника (второе слагаемое).

В уравнении (2.1):

■  $\varphi$  – плотность некоторой экстенсивной величины, т.е. ее содержание в единице контрольного объема,  $[\varphi] = (*) / \text{м}^3$ .

■  $\Phi$  – плотность потока этой величины, включающая кондуктивную и конвективную составляющие,  $[\Phi] = (*) / (\text{м}^2\text{с})$ .

■  $\gamma$  – мощность внутреннего источника, т.е. производство в единице объема за единицу времени,  $[\gamma] = (*) / (\text{м}^3\text{с})$ .

Символ (\*) в формулах размерности заменяет конкретную размерность переносимой экстенсивной величины (массы «кг», энергии «Дж», импульса «кг·м/с»).

Подчеркнем, что контрольный объем фиксирован в пространстве, т.е. фиксированы его координаты  $(x,y,z)$  и размер. Именно поэтому мы используем *частную* производную по времени от *плотности*  $\phi$  для описания локальной скорости увеличения переносимой величины (левая часть уравнения (2.1)).

Поясним смысл первого слагаемого в правой части балансового уравнения. Согласно определению, дивергенция есть суммарный поток вектора через замкнутую поверхность дифференциально малого контрольного объема, отнесенный к единице объема и направленный наружу. Это как раз то, что необходимо, за исключением направления – мы рассчитываем приток в контрольный объем, поэтому необходим знак минус.

Если просуммировать дифференциальные балансы (2.1) для всех дифференциально малых контрольных объемов, заполняющих рассматриваемую фиксированную область  $V$ , то получится уравнение сохранения в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dV &= - \int_V \operatorname{div}(\Phi) dV + \int_V \gamma dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \int_V \phi dV = - \int_{F_\Gamma} (\Phi \cdot \mathbf{n}_\Gamma) dF_\Gamma + \int_V \gamma dV, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{n}_\Gamma$  – единичный вектор *внешней* нормали к граничной поверхности  $F_\Gamma$ . Согласно (2.2), приращение какой-либо величины  $\phi$  в рассматриваемом объеме (левая часть) является следствием притока через его поверхность (первое слагаемое в правой части) и действия внутреннего источника (второе слагаемое). Ясно, почему при интегрировании оператора дивергенции получился поверхностный интеграл.

На *внутренних* границах соседних элементарных объемов  $dV$  поток  $\Phi$  суммируется два раза с разными знаками, т.е. сокращается. Поэтому остается только поток через границу области  $F_\Gamma$ , как и записано в (2.2).

Таким образом, структура балансового соотношения остается одинаковой как для элементарного объема, так и для конечных частей объекта – с потоком через поверхность в правой части,

записанным либо в форме оператора дивергенции в (2.1), либо как поверхностный интеграл в (2.2). Такую форму записи называют *дивергентной* или *консервативной*.

Нам остается далее наполнить универсальную форму (2.1) конкретным содержанием.

## 2.2. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

В этом случае

$$\varphi \equiv \rho; \quad \Phi \equiv \rho \mathbf{w}; \quad \gamma \equiv 0.$$

Напомним, что скорость жидкости можно интерпретировать как объемный расход через единичную контрольную поверхность. Тогда произведение скорости на плотность даст плотность потока массы  $\rho \mathbf{w}$ . Внутренние источники отсутствуют, так как масса, конечно, сохраняется.

После соответствующих подстановок в (2.1) получают *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}). \quad (2.3)$$

Для несжимаемых жидкостей (и для газов при скоростях не выше примерно трети скорости звука) плотность практически постоянна. Поэтому уравнение неразрывности можно записать приближенно в более простом виде:

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \text{ или } \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0. \quad (2.4)$$

## 2.3. Закон сохранения 1-го компонента.

### Уравнение конвективной диффузии

В этом случае

$$\varphi \equiv \rho_1 = \rho c_1; \quad \Phi \equiv \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \rho_1 \mathbf{w} \equiv \mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \rho \mathbf{w} c_1; \quad \gamma \equiv 0.$$

Предполагается, что *химических реакций в объеме среды не происходит*, поэтому источник массы считается нулевым.

После подстановки этих выражений в универсальную форму балансового соотношения (2.1) получают уравнение сохранения (баланса) компонента смеси:

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} + \rho \mathbf{w} c_1), \quad (2.5)$$

согласно которому увеличение содержания рассматриваемого компонента в контрольном объеме происходит вследствие притока массы этого компонента через поверхность контрольного объема; потоки массы обусловлены диффузией и конвективным переносом.

Кондуктивный (диффузионный) поток массы выражается законом диффузии Фика:

$$\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} = -\rho D \operatorname{grad} c_1,$$

подстановка которого в уравнение баланса (2.5) приводит к *дифференциальному уравнению конвективной диффузии*, определяющему поле концентрации  $c_1$ :

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} c_1). \quad (2.6)$$

Концентрация второго компонента двухкомпонентной смеси легко вычисляется через  $c_1$ :  $c_2 = 1 - c_1$ .

Напомним, что уравнение конвективной диффузии (2.6) записано без учета химических реакций *в объеме* среды. Однако указанное ограничение оставляет в рамках нашего анализа еще очень широкий круг практически важных задач, в том числе, с химическими реакциями, происходящими на *поверхностях раздела* (на стенках). Это так называемые каталитические реакции. Их скорость контролируется подводом необходимых компонентов из газовой фазы, т.е. процессами, описываемыми уравнением (2.6). Примером может служить горение твердой частицы углерода.

Важной областью применений уравнения (2.6) является анализ распространения пассивных примесей (в том числе, опасных загрязнений в окружающей среде), расчет процессов испарения и конденсации двухкомпонентных смесей и т.д.



Уравнение (2.6) можно записать в явной форме относительно концентрации. Следует раскрыть дифференциальные операции для произведения двух функций  $(\rho \cdot c_1)$  и  $(\rho \mathbf{w} \cdot c_1)$ , как показано ниже, и привлечь уравнение неразрывности (2.3):

$$\rho \frac{\partial(c_1)}{\partial t} + c_1 \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1) - \left\{ \rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} c_1 + c_1 \cdot \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) \right\}.$$

В левой и правой частях присутствует уравнение неразрывности (2.3), умноженное на  $c_1$ . Сокращая, получим:

$$\rho \frac{\partial c_1}{\partial t} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1) - \rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} c_1. \quad (2.7)$$

Явная форма может быть удобной для анализа. Но это *неконсервативная* форма записи, в отличие от (2.6), поскольку оператор конвективного переноса (второй в правой части) не является дивергенцией. Различие форм представления может быть существенным в рамках приближенного численного анализа. Чаще предпочитают консервативность, т.е. такие численные схемы, для которых законы сохранения выполняются строго, несмотря на то, что поля величин (скорости и давления, температуры, концентрации), рассчитываются только приближенно.

## 2.4. Закон сохранения энергии. Уравнение энергии

Вообще говоря, мы должны были бы здесь записать закон сохранения полной энергии, включающей *внутреннюю* и *кинетическую* энергию, и учесть перенос энергии не только в форме теплоты, но и в форме работы.

Однако, принимая во внимание реальные условия, при которых происходит тепломассообмен в большинстве теплообменных и теплотехнологических установок, а также в природе, можно ввести ряд вполне оправданных упрощений. Скорость потоков обычно относительно мала – меньше примерно трети скорости звука, и поэтому вклад *кинетической* энергии в баланс энергии оказывается пренебрежимо малым. Поскольку при таких скоростях перепады давления в потоке малы по сравнению с самим

значением давления, то в термодинамическом смысле можно считать процесс тепломассообмена происходящим *при постоянном давлении*. Как известно, для изобарических процессов теплота, подведенная к системе, расходуется на увеличение энтальпии. Поэтому мы запишем балансовое соотношение (2.1) для *энтальпии* двухкомпонентной среды, сделав подстановки:

$$\varphi \equiv \rho h; \quad \Phi \equiv \mathbf{q} + \rho \mathbf{w} h; \quad \gamma \equiv q_V.$$

Согласно получившемуся уравнению (2.8) :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\mathbf{q} + \rho \mathbf{w} h) + q_V, \quad (2.8)$$

увеличение энтальпии в единичном контрольном объеме происходит за счет кондуктивного потока энергии  $\mathbf{q}$  и конвективного переноса энтальпии через поверхность контрольного объема, а также вследствие действия внутреннего источника тепла.

Для кондуктивного потока энергии (теплового потока) используется выражение (1.38):

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} t + \mathbf{j}_{1,\text{conduct}}(h_1 - h_2).$$

Кондуктивный поток массы определяется законом Фика:

$$\mathbf{j}_{1,\text{conduct}} = -\rho D \operatorname{grad} c_1.$$

После подстановки этих выражений в (2.8) получают *дифференциальное уравнение энергии*:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} h) + q_V. \quad (2.9)$$

Это уравнение является определяющим для расчета температурного поля. Заметим, что необходимы дополнительные термодинамические соотношения, устанавливающие зависимость энтальпии от температуры и концентрации.

### *Уравнение энергии в явной форме относительно температуры*

Проведем дополнительные преобразования уравнения (2.9) с целью перейти к явной форме относительно температуры. Раскроем операции дифференцирования в левой части и дивергенции – в правой:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} + h \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) + q_V -$$

$$-\cancel{h \cdot \operatorname{div}(\rho w)} - \rho w \cdot \operatorname{grad} h.$$

Сокращая в левой и правой частях уравнение неразрывности (2.3), умноженное на  $h$ , получим:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} \dots \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho (h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) = \rho w \cdot \operatorname{grad} h. \quad (2.10)$$

Учтем теперь, что энтальпия смеси  $h$  зависит от температуры и концентрации компонентов  $h(t, c_1, c_2)$ , и продифференцируем  $h$  как сложную функцию от времени:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = \rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{p, c_1, c_2} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial c_1} \Big|_{T, p, c_2} \frac{\partial c_1}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial c_2} \Big|_{T, p, c_1} \frac{\partial c_2}{\partial \tau} \right\}.$$

Это выражение для изменения энтальпии оправдано применительно к идеальным газам или несжимаемым средам, когда изменением энтальпии в зависимости от давления можно пренебречь, а также для теплообменников, в которых скорость потока и перепады давления обычно относительно невелики.

Согласно известным термодинамическим соотношениям

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{p, c_1, c_2} = c_p; \quad \frac{\partial h}{\partial c_1} \Big|_{T, p, c_2} = h_1; \quad \frac{\partial h}{\partial c_2} \Big|_{T, p, c_1} = h_2, \quad (2.11)$$

где  $c_p$  – теплоемкость смеси,  $h_1, h_2$  – парциальные энтальпии компонентов. Учитывая, что  $c_2 = 1 - c_1$ , получим для левой части:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = \rho \left\{ c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + (h_1 - h_2) \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \right\}.$$

Аналогично преобразуется  $\operatorname{grad} h$  в правой части уравнения:

$$\operatorname{grad} h = c_p \operatorname{grad} t + (h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1.$$

Теперь уравнение энергии (2.10) запишется в виде:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + (h_1 - h_2) \rho \frac{\partial c_1}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) + q_V - \rho \mathbf{w} \cdot (c_p \operatorname{grad} t + (h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1),$$

где в левой и правой части взаимно сокращаются операторы уравнения (2.7), домноженные на  $(h_1 - h_2)$ . Окончательно получаем уравнение для температуры в следующей форме:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) - \rho c_p \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} t + q_V + \rho D \operatorname{grad} c_1 \cdot \operatorname{grad}(h_1 - h_2). \quad (2.12)$$

Для теплообмена, не осложненного диффузией, т.е. при  $c_1 = 0$  или  $c_1 = \text{const}$ :

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) - \rho c_p \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} t + q_V. \quad (2.13)$$

Если отключить механизм конвективного переноса, т.е. считать нулевым поле скорости в системе координат, связанной с объектом, то получится *дифференциальное уравнение теплопроводности*:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) + q_V. \quad (2.14)$$

Это уравнение применяют для расчета температурных полей в твердых телах, а также жидких или газообразных средах, если в них гарантированно отсутствует перемешивание. Согласно (2.14), увеличение энтальпии в единичном контрольном объеме (левая часть) происходит за счет кондуктивного потока энергии (т.е. за счет теплопроводности) через поверхность контрольного объема (первый оператор справа), а также вследствие действия внутреннего источника тепла (второй оператор справа).

**Замечание о радиационном переносе.** Дополнительно к механизму теплопроводности в уравнении (2.13) следует, в общем случае, учитывать перенос энергии  $q_R$  посредством электромагнитного излучения (теплообмен излучением, радиационный

теплообмен), т.е. в правой части (2.13)) должен появиться дополнительный оператор  $(-\operatorname{div}(\mathbf{q}_R))$ .

Когда говорят о *тепловом* излучении, предполагают, что поглощение электромагнитного излучения в некотором диапазоне длин волн приводит к изменению теплового состояния тела, точно так же как и испускание электромагнитных волн определяется тепловым состоянием (температурой) тела.

Согласно закону Планка, максимум на спектре теплового излучения при обычных для теплоэнергетики температурах находится в области видимых и инфракрасных волн. Поэтому указанный диапазон электромагнитных волн принято в технике относить к тепловому излучению.

Имеется ряд предельных случаев, когда радиационные потоки можно не включать в уравнение (2.13). Например, это случай прозрачной среды когда излучение практически не поглощается в объемах среды и не излучается этими объемами. Следовательно, потоки входящего в контрольный объем и покидающего его излучения должны быть одинаковыми, т.е.  $\operatorname{div}(\mathbf{q}_R) = 0$ .

Мы ограничимся здесь этими общими замечаниями. Так называемый сложный теплообмен (комбинированный перенос энергии с участием теплопроводности, конвекции и излучения) является предметом специальных разделов учебного курса.

## 2.5. Закон сохранения импульса.

### Уравнение движения

Идентифицируем переменные  $\varphi$ ,  $\Phi$ ,  $\gamma$  в обобщенном уравнении сохранения (2.1) для гидродинамической задачи. Импульс  $\varphi$  единичного контрольного объема есть произведение его массы (т.е. плотности жидкости) на скорость:

$$\varphi \equiv \rho \mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/м}^3.$$

Плотность потока импульса  $\Phi$  определяется действием сил давления, вязких напряжений и конвективным переносом импульса, поэтому:

$$\Phi \equiv p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/(м}^2\text{с)}.$$

Порождение  $\gamma$  импульса внутри контрольного объема является результатом действия внешних сил, таких как сила гравитации или электромагнитные силы при течении проводящей жидкости в магнитном поле. Ограничимся учетом гравитационных эффектов как наиболее важных на практике. Сила гравитации, действующая на единичный объем (т.е. вес), есть произведение плотности на ускорение силы тяжести:

$$\gamma = \rho \mathbf{g}, \text{ (кг м/с)/(м}^3\text{с)}.$$

Итак, обобщенные величины в случае переноса импульса записываются следующим образом:

$$\varphi \equiv \rho \mathbf{w}; \quad \Phi \equiv p \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}; \quad \gamma \equiv \rho \mathbf{g}.$$

После подстановки этих выражений в универсальную форму (2.1), получают уравнение сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\mathbf{div}(p \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + \rho \mathbf{g}, \quad (2.15)$$

или после вычисления дивергенции от тензора давления  $p \mathbf{I}$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\mathbf{grad} p - \mathbf{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + \rho \mathbf{g}. \quad (2.16)$$

При подстановке в уравнение сохранения импульса (2.16) закона вязкого трения Стокса (см. 1.3):

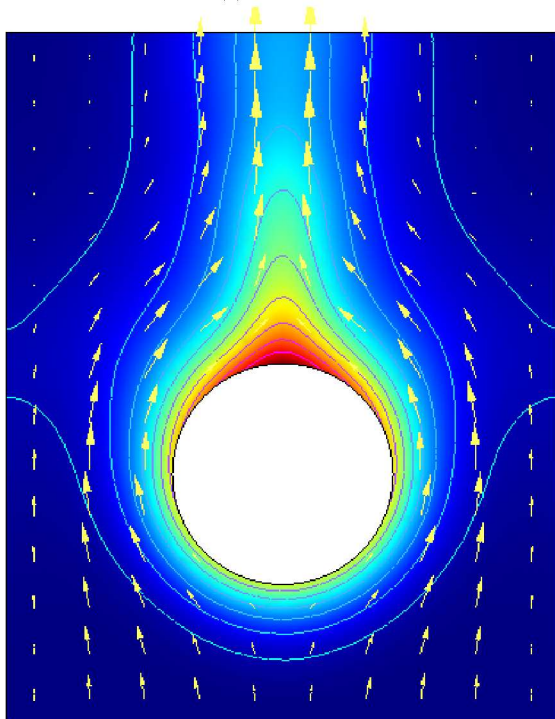
$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu(\mathbf{grad} \mathbf{w} + (\mathbf{grad} \mathbf{w})^T) - \frac{2}{3}\mu(\mathbf{div} \mathbf{w})\mathbf{I}$$

получится *дифференциальное уравнение движения* вязкой жидкости – определяющее уравнение для векторного поля скорости.

Если поле температуры  $t(x, y, z)$  в жидкости неравномерное, то и распределение плотности  $\rho(t)$  будет неравномерным. Можно представить себе, что более нагретые объемы погружены в холодную и потому более плотную жидкость. Если система находится в поле силы тяжести, то в результате возникнут Архимедовы силы, вызывающие движение, даже если в системе нет перекачивающих насосов. Такие процессы называются *естественной конвекцией*, в противоположность *вынужденной конвекции*, когда движение

вынуждается внешними источниками. Различие плотностей может быть вызвано переменностью температуры и (или) концентрации смеси в пространстве. Соответственно говорят о *термогравитационной* и *концентрационно-гравитационной конвекции*. Для задач с заметным влиянием свободной конвекции предпочитают при записи уравнения движения (2.16) учесть Архимедовы силы в явном виде, как показано далее.

Пример свободноконвективного течения представлен на рис. 2.2. Нагревательный элемент в виде горизонтальной трубки помещен в вертикальный канал. Движение жидкости представлено векторным полем скорости, поле температур – изотермами и цветом (или градациями серого на черно-белом изображении). Вблизи стенки жидкость горячая (показана теплыми оттенками цвета), вдали – остается холодной.



**Рис. 2.2.** Свободная конвекция  
вблизи обогреваемой горизонтальной трубы

Анимация показывает формирование свободноконвективного течения во времени. Мы включаем нагреватель и наблюдаем, как прогревается жидкость вблизи стенки, как возникает и усиливается подъемное движение жидкости под действием Архимедовых сил.

Формализуем эти наблюдения следующим образом. Пусть контрольный объем с плотностью  $\rho(t)$  погружен в окружающую жидкость с отличающейся плотностью  $(\rho_\infty)$ . Тогда возникает Архимедова сила, «равная весу вытесненной жидкости»:  $(-\rho_\infty \mathbf{g})$ . Результирующая этих двух сил называется *выталкивающей силой*. Мы добавляем в правую часть (2.16) слагаемое  $(-\rho_\infty \mathbf{g})$  и объединяем с силой тяжести  $(\rho \mathbf{g})$ ; следует одновременно вычесть такую же величину, чтобы не внести ошибки в правую часть:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\text{grad } p - \text{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} + \rho_\infty \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

Применим теперь это уравнение для области, где плотность постоянна  $\rho = \rho_\infty$  и движение отсутствует или поле скоростей однородное,  $\mathbf{w} = \text{const}$ , так что не остается никаких сил в потоке, кроме гидростатического давления и гравитации:

$$0 = -\text{grad } p_{hs} + \rho_\infty \mathbf{g} \Rightarrow \rho_\infty \mathbf{g} = \text{grad } p_{hs},$$

т.е. величина  $(\rho_\infty \mathbf{g})$  определяет поле *гидростатического* давления  $p_{hs}$ . Делая в (2.17) соответствующую подстановку вместо последнего слагаемого  $(\rho_\infty \mathbf{g})$  в правой части, объединяя градиенты давления и обозначая  $p - p_{hs} \equiv p_m$ , получим формулировку уравнения движения жидкости с выталкивающей силой:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\text{grad } p_m - \text{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

Давление  $p_m$  называют движущим (motive, англ.) давлением. Оно связано с ускорением, силами вязкости и выталкивающей силой. В неподвижной и однородной среде градиент этого давления нулевой. Если же жидкость неподвижна, например, в начальный момент времени, но распределение плотности стало неравномерным при включении нагревателя, то возникает ненулевой градиент

$$\text{grad } p_m = (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g},$$

под действием которого и начнет развиваться свободноконвективное течение.



## 2.6. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена

Приведем сводку полученных выше дифференциальных уравнений теплообмена.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}). \quad (2.19)$$

Уравнение конвективной диффузии:

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} c_1). \quad (2.20)$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} h) + q_V. \quad (2.21)$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(p_m \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}, \quad (2.22)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu(\operatorname{grad} \mathbf{w} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})^T) - \frac{2}{3} \mu(\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{I}.$$

Число неизвестных, а это: 1) температура  $t(x, y, z, \tau)$ , 2) концентрация  $c_1(x, y, z, \tau)$ , 3) давление  $p(x, y, z, \tau)$  и 4) скорость  $\mathbf{w}(x, y, z, \tau)$ , равно числу уравнений, и в этом смысле получено замкнутое описание задачи конвективного теплообмена.

## 2.7. Термодинамические соотношения и свойства теплоносителей

Величины  $(t, c_1, p, \mathbf{w})$  составляют набор параметров, полностью определяющих состояние рассматриваемой нами системы (рис. 2.1). Мы стремимся к тому, чтобы посредством интегрирования уравнений (2.19)–(2.22) найти поля этих величин.

Кроме  $(t, c_1, p, w)$ , уравнения содержат и другие величины – плотность и энтальпию, коэффициенты теплопроводности, диффузии, вязкости. Поэтому необходимы дополнительные соотношения, устанавливающие их связь с основным набором переменных.

В число этих соотношений входят, прежде всего, термодинамические уравнения состояния:

$$\rho = \rho(T, p, c_1) \quad (\text{термическое});$$

$$h = h(T, p, c_1) \quad (\text{калорическое}).$$

Например, для идеально-газовой смеси:

$$\frac{p}{\rho} = RT; \quad R = c_1 R_1 + (1 - c_1) R_2,$$

и, если принять теплоемкость примерно постоянной величиной в актуальном интервале температур,

$$h = c_p \cdot t; \quad c_p = c_1 c_{p1} + (1 - c_1) c_{p2}.$$

Кроме того, необходимы данные по коэффициентам переноса:

$$\lambda = \lambda(t, p, c_1); \quad D = D(t, p, c_1); \quad \mu = \mu(t, p, c_1).$$

По свойствам веществ в литературе имеется обширная справочная информация.

## 2.8. Математическая структура уравнений конвективного теплообмена

Уравнения конвективного теплообмена (2.19)–(2.22) записаны в компактной векторной форме. Такая запись ясно отражает физический смысл уравнений. Векторная форма уравнений одинакова для различных систем координат.

Приведем краткую математическую справку о применявшихся выше векторных операциях для ортогональных систем координат (например, декартовой, цилиндрической, сферической).

Вектор представляют его координатным разложением:

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_j w_j \equiv \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j w_j. \quad (2.23)$$

Условились проводить суммирование по повторяющимся индексам, даже если знак суммы явно не фигурирует.

Тензор записывают, указывая два характерных направления

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k D_{jk}. \quad (2.24)$$

В результате двойного суммирования получается девятикомпонентное разложение. Традиционно тензор представляют в виде квадратной матрицы, опуская единичные векторы.

Скалярное произведение вычисляют, пользуясь правилами умножения единичных векторов в ортогональной системе координат:

$$\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk}, \quad (2.25)$$

где символ Кронекера  $\delta_{jk} = 1$ , если  $j = k$ ;  $\delta_{jk} = 0$ , если  $j \neq k$ .

Операция, указанная точкой (знаком скалярного произведения), должна совершаться над единичными векторами, *стоящими непосредственно слева и справа от знака операции*. Например, для скалярного произведения векторов имеем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{i}_j a_j \cdot \mathbf{i}_k b_k = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k. \quad (2.26)$$

Теперь в двойной сумме останутся только компоненты с  $j = k$  (для других слагаемых символ Кронекера равен нулю), и мы продолжаем вычисления следующим образом, применяя правило суммирования по повторяющимся индексам:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{jk} a_j b_k = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2.27)$$

В дальнейшем очевидный этап с подстановкой символа Кронекера мы будем опускать.

Скалярное произведение векторов полезно для вычисления потока вектора через произвольно ориентированную площадку, заданную вектором единичной нормали.

Вычислим скалярное произведение тензора на вектор, как в формулировке закона Фурье для анизотропных материалов:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{i}_i \mathbf{i}_k D_{jk} \cdot \mathbf{i}_n a_n = \mathbf{i}_j (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_n) D_{jk} a_n = \mathbf{i}_j D_{jn} a_n = \\ &= \mathbf{i}_1 (D_{11} a_1 + D_{12} a_2 + D_{13} a_3) + \\ &+ \mathbf{i}_2 (D_{21} a_1 + D_{22} a_2 + D_{23} a_3) + \\ &+ \mathbf{i}_3 (D_{31} a_1 + D_{32} a_2 + D_{33} a_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Результат вычислений – вектор. Скалярное произведение тензора на вектор полезно также для вычисления потока тензор-

ной величины (потока импульса) через произвольно ориентированную площадку, заданную вектором единичной нормали.

Операции с дифференциальными векторными операторами дивергенции и градиента производить так же легко, если ограничиться только декартовыми координатами, для которых *единичные векторы постоянны* (не меняются от точки к точке).

Вычислим, например, дивергенцию от градиента температуры, как это необходимо сделать в уравнении энергии (2.21):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) &= \nabla \cdot \nabla T = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Результат вычислений – оператор Лапласа от температуры (скаляр).

Еще одним видом умножения является прямое умножение, без использования какого-либо символа. Прямое произведение вектора скорости на вектор скорости образует тензор плотности потока:

$$\rho \mathbf{w} \mathbf{w} = \rho \mathbf{i}_j w_j \mathbf{i}_k w_k. \quad (2.30)$$

Последняя операция, которую мы рассмотрим, есть дивергенция от тензора, как это имеет место в уравнении движения (2.22):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_k \sum_n \rho w_j w_k \delta_{kn} \right) \\ &= \sum_j \sum_k \sum_n \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (w_k w_n \delta_{kn}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Результат вычислений – вектор.

Вычисления для давления в уравнении движения производятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_k \sum_n \rho w_j w_k \delta_{kn} \right) = \sum_j \sum_k \sum_n \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (w_k w_n \delta_{kn}) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho w_k w_k) = \operatorname{grad} (\rho w_k w_k). \end{aligned} \quad (2.32)$$

На первый взгляд, приведенные вычисления кажутся слишком формальными. Однако это самые простые правила, с помощью которых можно производить векторные и тензорные операции, выражающие в символической форме фундаментальные законы переноса и сохранения.

## 2.9. Дифференциальное уравнение турбулентной кинетической энергии (ТКЭ)

### *Турбулентный перенос*

В несколько метафорическом смысле можно сказать, что, наблюдая за различными потоками жидкости в природе, мы визуально фиксируем решения (интегралы) дифференциальных уравнений движения (2.19), (2.22).

Это верно и для спокойной *ламинарной* струйки воды, вытекающей из приоткрытого крана, и для бурного *турбулентного* потока горной реки. Однако если в первом случае мы можем без особых трудностей *воспроизвести* наблюдаемое решение с помощью аналитических преобразований на бумаге, то во втором для моделирования *во всех деталях* наблюдаемого нестационарного неупорядоченного – т.е. турбулентного – движения окажется недостаточно всей мощи современных суперкомпьютеров.

Ламинарно-турбулентный переход в потоках различной конфигурации совершается при достижении некоторых критических значений числа Рейнольдса,

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{L}} \approx \frac{\text{"динамическое давление"}}{\text{"напряжение вязкого трения"}},$$

где  $U$  и  $L$ ,  $\rho$  и  $\nu$  – соответственно характерные значения скорости и размера потока, плотность и кинематическая вязкость жидкости. Критические значения  $Re$ , при которых ламинарные потоки *теряют устойчивость*, таковы, что большинство практически важных течений в технике и природе являются турбулентными. В связи с этим необходимо приспособить полученные выше уравнения (2.19 – 2.22) для решения задач теплообмена в турбулентных потоках.

Инженерный подход состоит в следующем.

■ Самой важной наблюдаемой особенностью турбулентного потока является высокая интенсивность процессов переноса теплоты, концентрации, импульса – вследствие интенсивного турбулентного перемешивания жидкости. Поэтому коэффициенты теплопроводности  $\lambda$ , диффузии  $D$ , вязкости  $\mu$  в выражениях законов переноса:

$$\lambda \text{grad};$$

$$i = -p \text{ grad } i;$$

$$\mu (\text{grad } + (\text{grad } )^T) - \frac{2}{3} \mu \text{ div},$$

как и в самих дифференциальных уравнениях тепломассообмена (2.19–2.22), считают *эффективными* величинами, содержащими дополнительно к молекулярным коэффициентам переноса (индекс «M» в (2.33)) турбулентную составляющую (индекс «T» в (2.33)):

$$\lambda = \lambda_M + \lambda_T; \quad D = D_M + D_T; \quad \mu = \mu_M + \mu_T. \quad (2.33)$$

■ Заменяв молекулярные коэффициенты *эффективными* значениями и одновременно отказываются от детального описания мелкомасштабных хаотических *пульсационных* движений, рассматривая только *сглаженное, осредненное основное течение*.

Проблема состоит в определении коэффициентов турбулентного переноса. Существует целая иерархия расчетных моделей турбулентности, применяемых к течениям различной сложности. Например, для многих инженерных задач достаточно *скалярного* представления (2.33), однако в случае каналов сложной формы или вблизи межфазных границ следует учитывать *тензорную* природу коэффициентов, поскольку турбулентность, вообще говоря, *неизотропна* (пример коэффициента переноса как тензорной величины рассматривался в связи с теплопроводностью в анизотропном теле).

В рамках краткого теоретического введения, мы рассмотрим далее две расчетных модели турбулентности начального уровня сложности:

- прандтлевскую модель длины пути смешения;

- *k*-модель турбулентности на основе одного дифференциального уравнения для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) и алгебраических соотношений, связывающих эту новую сохраняемую и переносимую величину с коэффициентами турбулентного переноса.

### **Газокинетическая аналогия**

Простейшая модель турбулентного переноса основывается на газокинетической аналогии.

Молекулярный перенос осуществляется микрочастицами вещества (молекулами, атомами) при их хаотическом тепловом движении, сопровождаемом многочисленными столкновениями.

Как метафору, этот образ используют для турбулентного переноса. В качестве «частиц» выступают макроскопические, громадные по сравнению с молекулярными масштабами, объемы жидкости, так называемые турбулентные моли, хаотически перемещающиеся с пульсационными скоростями  $w'$  на фоне осредненного, сглаженного основного течения  $\bar{w}$ .

Таким образом, истинное – хаотическое – поле скорости  $w$  представляют как сумму осредненного во времени, сглаженного упорядоченного распределения скорости  $\bar{w}$  и хаотических турбулентных пульсаций  $w'$ :

$$w = \bar{w} + w' \Rightarrow \overline{w} = \overline{\bar{w} + w'} \Rightarrow \overline{w} = \bar{w} + \overline{w'} = \bar{w} + 0. \quad (2.34)$$

Черта сверху означает осреднение локальных величин вектора скорости по времени. Из определения (2.34) следует, что среднее по времени значение пульсационной составляющей  $\overline{w'}$  равно нулю. Поэтому в качестве количественной меры пульсаций принимают среднеквадратичное значение.

Следующие простые вычисления используют известное равенство, согласно которому скалярное произведение вектора на самого себя дает квадрат модуля этого вектора:

$$w'^2 = w' \cdot w',$$

где через  $w'$  обозначен модуль мгновенного значения пульсационной скорости. Применяя операции осреднения для квадрата модуля скорости, получим последовательно:

$$\begin{aligned}
 w \cdot w &= (\bar{w} + w') \cdot (\bar{w} + w') = \bar{w} \cdot \bar{w} + 2\bar{w} \cdot w' + w' \cdot w'; \\
 \overline{w \cdot w} &= \overline{(\bar{w} + w') \cdot (\bar{w} + w')} = \overline{\bar{w} \cdot \bar{w}} + \overline{2\bar{w} \cdot w'} + \overline{w' \cdot w'} = \\
 &= \bar{w} \cdot \bar{w} + \cancel{2\bar{w} \cdot w'} + \overline{w' \cdot w'}; \\
 \overline{w^2} &= (\bar{w})^2 + \overline{w'^2}; \\
 k &\equiv \frac{\overline{w'^2}}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Квадрат скорости (с множителем  $\frac{1}{2}$ ) можно интерпретировать как удельную (т.е. в расчете на единицу массы) *кинетическую энергию*. Поэтому результат (2.35) означает, что кинетическая энергия турбулентного потока складывается из кинетической энергии осредненного (основного) течения и *турбулентной кинетической энергии  $k$* , Дж/кг.

Энергия  $k$ , в конечном счете, *рассеивается*, превращается в теплоту в так называемом *каскадном* процессе. Крупные энергичные моли гидродинамически неустойчивы и дробятся на более мелкие моли, наследующие энергию первых поколений. Наконец, на самых малых масштабах, турбулентная энергия рассеивается силами вязкости.

Следовательно, требуется постоянное восполнение турбулентной энергии. Генерация  $k$  происходит при работе основного потока против сил турбулентного трения (в конечном счете, за счет работы перекачивающего насоса).

Важно отметить, что сложные нестационарные поля скоростей турбулентных потоков могут быть надежно измерены в экспериментах с применением термоанемометров и лазерных доплеровских анемометров. Эти приборы непосредственно фиксируют мгновенные локальные значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  *проекций* вектора скорости (при соответствующей ориентации датчиков), так что после измерений в



необходимом числе точек и статистической обработки (см. (2.34–2.36)) могут быть получены распределения локальных величин среднеквадратичных пульсаций и ТКЭ в потоке:

$$\overline{w'^2} = \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \cdot \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) = \frac{\overline{w'^2}}{2} = \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2}. \quad (2.36)$$

Упомянутая выше анизотропия турбулентности проявляется в неодинаковости составляющих  $\overline{v'^2}$  (нормальной к обтекаемой стенке),  $\overline{u'^2}$  (продольной) и  $\overline{w'^2}$  (параллельной стенке и нормальной к основному потоку).

Анализируя степень *корреляции* между пульсационными скоростями  $w'$  в *двух соседних точках* в зависимости от расстояния между ними, можно измерить также *линейный масштаб турбулентности*  $l_T$ . Ясно, что говорить о турбулентном моле как консолидированном объеме жидкости имеет смысл, если только наблюдается согласованность (коррелированность) скоростей составляющих частиц. Масштаб  $l_T$  дает также меру *длины пути смешения* как аналога длины свободного пробега в рамках газокинетической аналогии.

Итак, среднеквадратичная пульсация и турбулентный масштаб являются непосредственно измеряемыми величинами. На основе экспериментальных данных, в качестве общей, весьма грубой оценки можно принять:

$$\sqrt{\overline{w'^2}} \approx 0.1 \cdot W; \quad l_T \approx 0.1 \cdot L, \quad (2.37)$$

где  $W$  и  $L$  – характерные значения скорости и поперечного размера основного потока. Например, при течении воздуха со скоростью 10 м/с в трубе диаметром 1 м пульсации составят примерно 1 м/с, а характерный размер турбулентного моля – примерно 1/10 м.

Сопоставим теперь по порядку величин молекулярные и турбулентные коэффициенты переноса на примере вязкости.

Напомним, как вычисляются коэффициенты молекулярного переноса в элементарной газокинетической теории (см. схему на рис. 2.3).

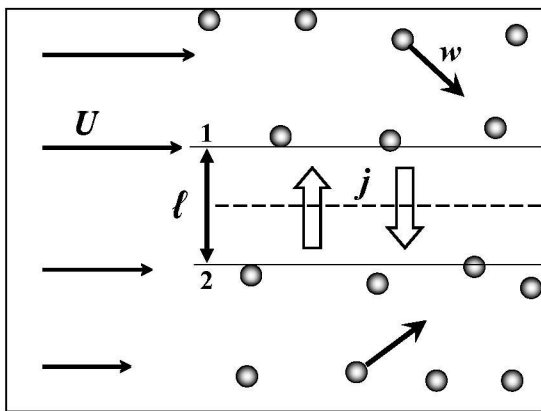


Рис. 2.3. Молекулярный перенос

В сдвиговом течении с профилем макроскопической скорости  $U$  (стрелки в левой части рисунка) проведены контрольные поверхности 1 и 2 на расстоянии длины свободного пробега  $l$ . Одинаковые, компенсирующие друг друга массовые потоки  $j \sim \rho w$ , обусловленные хаотическим тепловым движением молекул со скоростью  $w$ , переносят – через пунктирную контрольную поверхность (рис. 2.3) – *неодинаковые* удельные (т.е. в расчете на единицу массы) продольные импульсы  $U_1$  и  $U_2$ . Результирующий поток импульса (левая часть второго уравнения (2.38)) интерпретируется как молекулярное вязкое трение, которое может быть выражено также посредством феноменологического закона вязкого трения Ньютона (правая часть второго уравнения (2.38)):

$$j = \frac{1}{6} (\rho \cdot w);$$

$$\underbrace{j \cdot U_1 - j \cdot U_2}_{\text{результрующий поток импульса}} = \underbrace{\mu}_{\text{динамическая вязкость}} \cdot \underbrace{\frac{U_1 - U_2}{l}}_{\text{градиент скорости}} \Rightarrow \quad (2.38)$$

$$\mu = \frac{1}{6} (\rho \cdot w) \cdot l; \quad \nu \equiv \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{6} w \cdot l$$

Поясним, что множитель  $1/6$  оценивает вероятность движения молекул в заданном направлении (сверху вниз или снизу вверх на рисунке), поскольку всех возможностей шесть: три координатных оси и для каждой из них два противоположных возможных направления.

Итак, согласно (2.38), вязкость газа пропорциональна произведению скорости  $w$  теплового движения молекул (т.е. примерно скорости звука) и длине свободного пробега  $l$ :

$$\mu = \frac{1}{6} \rho (wl). \quad (2.39)$$

Для воздуха при нормальных условиях ( $w \approx 300$  м/с,  $l \approx 10^{-7}$  м,  $\rho \approx 1$  кг/м<sup>3</sup>):

$$\mu \approx \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 300 \cdot 10^{-7} \approx 0,5 \cdot 10^{-5}, \text{ кг м/с.}$$

*Турбулентную* вязкость – в рамках газокINETической аналогии – рассчитывают по той же формуле (2.39), подставив среднеквадратичную пульсацию скорости и линейный масштаб турбулентности  $l_T$ :

$$\mu_T \approx \frac{1}{6} \rho \sqrt{w'^2} l_T. \quad (2.40)$$

Используя оценки (2.37), получим для турбулентной вязкости в примере с течением воздуха в трубе диаметром 1 м со скоростью 10 м/с:

$$\mu_T \approx \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (0,1 \cdot 10) \cdot (0,1 \cdot 1) \approx 0,2 \cdot 10^{-1}, \text{ кг м/с,}$$

т.е. величину, превосходящую молекулярное значение примерно на четыре порядка (!).

Соотношение (2.40) для турбулентной вязкости принято записывать (с учетом (2.35), (2.36)) в следующей форме:

$$\mu_T = C_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu, \quad (2.41)$$

где  $C_\mu$  – эмпирическая константа,  $l_\mu \sim l_T$  – так называемый переносной масштаб турбулентности (см. ниже формулы (2.52)).

Полагая, что одни и те же турбулентные моли, перемещаясь со скоростью  $\sim \sqrt{k}$  на расстояние  $\sim l_T$ , переносят и импульс, и теплоту и массу компонента смеси, получают:

$$\begin{aligned}
 & \mu \sqrt{\mu}; \\
 & \tau \equiv \frac{\tau}{\tau} \mathbf{1} ; \quad \tau_{DT} \equiv \frac{\tau}{\tau} \mathbf{1} , \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

т.е. в рамках газокINETической аналогии турбулентные числа Прандтля  $R_{\tau}$  и  $R_{\tau_{DT}}$  равны единице. Подчеркнем, что коэффициенты турбулентного переноса *не являются* физическими параметрами (свойствами) жидкости. Они зависят от характерных значений скорости и размера потока и являются неизвестными до решения задачи переменными величинами.

Для применения формул вида (2.40), (2.42) в инженерных расчетах необходима информация о среднеквадратичной пульсации скорости (или кинетической энергии турбулентности) и линейном масштабе турбулентности.

### *Линейный масштаб турбулентности*

Основное, что известно о *турбулентном масштабе* из эксперимента, можно кратко выразить в форме распределения Эскудиера. В непосредственной близости от твердой обтекаемой стенки  $l_{\tau}$  увеличивается пропорционально расстоянию  $y$  от стенки, а затем, в ядре турбулентного потока, остается постоянной величиной, пропорциональной характерному поперечному размеру  $\delta$  (толщине пограничного слоя, или половине толщины плоского канала, или радиусу трубы). В алгоритмической форме сказанное записывается следующим образом:

$$\tau(y) = \min(\tau_w, L\delta); \quad L \cong 0,09; \quad \tau_w \cong 0,41. \quad (2.43)$$

Стыковка происходит на расстоянии от стенки, равном:

$$\delta_w = \frac{c_L}{\kappa} \delta \cong 0,207\delta.$$

Таким образом, масштаб турбулентности растет в пределах примерно 20%-го пристенного слоя ( $0 < y < \delta_w$ ), а затем в ядре потока остается постоянным на уровне около 10% от толщины турбулентного пограничного слоя (или от характерного поперечного размера канала). Ниже мы дополним формулировку (2.43) демпфирующей поправкой на влияние вязкости у самой стенки и модифицируем для явлений переноса и диссипации.

### Модель пути смешения

Простой способ теоретической оценки пульсаций скорости в сдвиговом потоке иллюстрируется рис. 2.4. Наблюдатель, находящийся на расстоянии  $y$  от стенки, фиксирует *пульсацию скорости*  $w'$  благодаря тому, что турбулентный молекула, переместившийся сверху, приносит повышенное значение скорости с уровня  $(y+l_T)$ , где  $l_T$  – длина пути смешения, или длина свободного пробега турбулентного молекула.

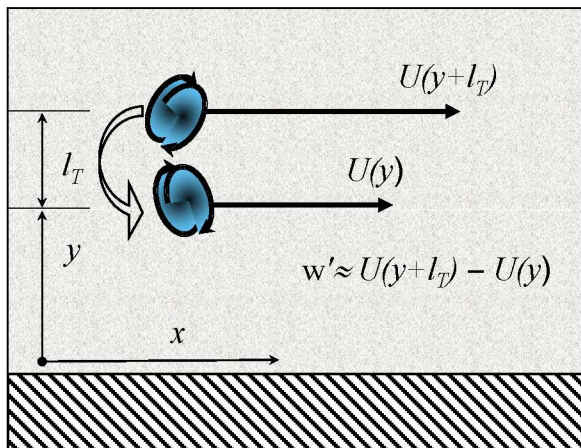


Рис. 2.4. Турбулентный перенос в пристенном потоке

Применяя формулу газокинетической аналогии (2.40) и выражая пульсацию  $w'$  как изменение скорости  $U$  осредненного основного потока на малом отрезке  $l_T$  (рис. 2.4), получают *формулу Прандтля* для турбулентной вязкости:

$$\left. \begin{aligned} v_T &\approx l_T w' \\ w' &\approx (U(y+l_m) - U(y)) \approx \frac{\partial U}{\partial y} \cdot l_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{v_T \approx l_T^2 \frac{\partial U}{\partial y}}, \quad (2.44)$$

где линейный масштаб турбулентности, называемый в контексте формулы Прандтля *длиной пути смешения*, задается соотношением вида (2.43).

Таким образом, дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (2.19 – 2.22) с эффективными значениями коэффициентов переноса, определяемыми формулами (2.33),

(2.42) и (2.44), дают замкнутое описание тепломассообмена в турбулентных потоках. Замечательным результатом Прандтлевской модели является воспроизведение наблюдаемого в экспериментах *универсального логарифмического профиля скорости* в пристенной области турбулентных потоков.

Однако модель пути смешения является лишь простейшим представлением турбулентности и пригодна только для ограниченного перечня простых течений.

Очевидный недостаток теории состоит в *обращении турбулентного коэффициента переноса в ноль* там, где градиент скорости нулевой (см. формулу (2.44)). Например, это означает, что вблизи оси трубы течение остается ламинарным при любых числах Рейнольдса, что противоречит опыту. Тот же недостаток не позволяет правильно рассчитать скорость конденсации или сорбции на *свободной* (без трения, следовательно, с нулевым градиентом скорости) поверхности раздела турбулентных потоков жидкости и газа. Простейшая модель не может описать явление затухания турбулентности за успокаивающей решеткой аэродинамической трубы, и т.п.

### *k-модель турбулентности*

Совершенствование модели турбулентности связано с применением формулы (2.41),

$$\mu_T = C_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu,$$

в которой *турбулентная энергия k* рассматривается как сохраняемая субстанция, переносимая посредством диффузии и конвекции, подверженная диссипации и восполняемая специальным механизмом генерации. Другими словами, как величина, подчиняющаяся балансовому уравнению вида (2.1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\text{div}(\Phi) + \gamma,$$

где

■  $\phi$  – плотность турбулентной кинетической энергии (ТКЭ), т.е. ее содержание в единице контрольного объема,  $[\phi] = \text{Дж} / \text{м}^3$

;

■  $\Phi$  – плотность потока этой величины, включающая кондуктивную и конвективную составляющие,  $[\Phi] = \text{Дж} / (\text{м}^2\text{с})$ :

$$\equiv \underbrace{-(\mu + \mu_T) \text{grad}}_{\text{диффузия турбулентной энергии}} \rho \quad ; \quad \underbrace{\quad}_{\text{конвекция}}$$

■  $\gamma$  – мощность внутреннего источника, т.е. производство и диссипация в единице объема за единицу времени,  $[\gamma] = \text{Дж} / (\text{м}^3\text{с})$ :

$$\gamma \equiv \underbrace{P}_{\text{производство}} + \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{диссипация}} .$$

После указанных подстановок в (2.1), получают дифференциальное уравнение ТКЭ:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial \tau} = -\text{div}(-(\mu + \mu_T) \text{grad} \rho) - \rho \varepsilon. \quad (2.45)$$

Мы возвращаемся здесь к принятому ранее в уравнениях (2.19)–(2.22) обозначению скорости  $\mathbf{w}$ , однако теперь это скорость *осредненного* основного потока, отфильтрованного от хаотических турбулентных пульсаций.

Приведем часто используемую в расчетной практике развернутую запись (2.45) в координатной форме, в приближении двумерного *пограничного слоя* для потока жидкости с постоянными физическими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < x < L; \quad 0 \leq y \leq \delta; \\ \text{Re} \equiv \frac{u_\infty L}{\nu} \gg 1 \Rightarrow \delta \ll L \Rightarrow \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( (\mu + \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x} \right)}_{\text{Диффузия по } x} \ll \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( (\mu + \mu_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right)}_{\text{Диффузия по } y} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.46)$$

$\underbrace{\rho \frac{\partial k}{\partial \tau}}_{\text{Скорость локального увеличения ТКЭ}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( (\mu + \mu_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right)}_{\text{Диффузия}} - \underbrace{\left( \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} \right)}_{\text{Конвекция}} + \underbrace{P}_{\text{Порождение}} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{Диссипация}}$
--

где  $(x, y)$  – координаты вдоль обтекаемой поверхности и по нормали к ней,  $(u, v)$  – продольная и поперечная составляющие скорости. По сравнению с полной двумерной формулировкой, в ука-

знном приближении можно пренебречь продольной диффузией по сравнению с поперечной, что существенно упрощает вычислительные процедуры.

Остается указать способ определения диссипации  $\epsilon$  и производства  $P$  турбулентной энергии в (2.45), (2.46).

При расчете удельной скорости диссипации  $\epsilon$  полагают, что энергия  $k$  рассеивается за характерное время существования турбулентного моля  $\tau_{\text{Diss}}$ , определяемое линейным масштабом турбулентности и пульсационной скоростью турбулентного моля, как показано в нижеследующих оценках:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &\approx \frac{\text{рассеиваемая энергия, } \frac{Дж}{кг}}{\text{время, сек}} \approx \frac{k}{\tau_{\text{Diss}}} \\ \tau_{\text{Diss}} &\approx \frac{\text{расстояние}}{\text{скорость}} \approx \frac{l_\epsilon}{\sqrt{w'^2}} \approx \frac{l_\epsilon}{\sqrt{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l_\epsilon}} \quad (2.47)$$

где  $l_\epsilon$  – т.н. диссипативный масштаб турбулентности.

Моделируя механизм диссипации энергичных молей масштаба  $l_T$  как торможение под действием динамического давления:

$$\underbrace{\underbrace{l_T^2}_{\text{Площадь сечения моля}} \cdot \underbrace{\rho_{\text{Fluid}} \overline{w'^2}}_{\text{Динамическое давление}} \cdot \underbrace{l_\epsilon}_{\text{Путь}}}_{\text{Работа силы сопротивления}} \approx \underbrace{\rho_{\text{Mole}} \underbrace{l_T^3}_{\text{Объем моля}} \overline{w'^2}}_{\text{Кинетическая энергия моля}} \Rightarrow l_\epsilon \approx l_T, \quad (2.48)$$

$\rho_{\text{Fluid}} \equiv \rho_{\text{Mole}} \quad (!)$

получают, что *характерный размер* турбулентного моля  $l_T$ , как и *расстояния*, на которые моль перемещается в осредненном потоке (т.е. диссипативный  $l_\epsilon$  или переносной  $l_\mu$  масштабы), есть величины одного порядка:  $l_T \approx l_\epsilon \approx l_\mu$  (заметим, что мы сопоставляем масштабы на уровне *порядка величин*, в то время как в конкретных реализациях различных расчетных моделей турбулентности числовые значения этих величин могут различаться в несколько раз). Это означает, что газокинетическая аналогия – т.е. аналогия с идеальным, разреженным газом – имеет ограниченное применение.



Производство  $P$  турбулентной энергии определяется как та часть работы сил *турбулентного* трения  $\tau_T$ , которая затрачивается на *деформацию* контрольного объема. Вычисления просты для течения типа пограничного слоя с координатой  $y$ , нормальной к обтекаемой твердой стенке. В таком течении главную роль играют касательные напряжения в плоскости, параллельной стенке (см. рис. 2.5):

$$\tau \cong (\mu_M + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \tau_T = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сначала выписывается работа, совершенная силами, приложенными к верхней и нижней границам контрольного объема ( $1 \times dy \times 1$ ); при этом скорость  $u$  означает перемещение за единицу времени (см. рис. 2.5). Работа отнесена к единице объема, так что в пределе получается операция дифференцирования (верхняя строка в (2.49)):

$$\frac{(\tau_T)_{y+dy} - (\tau_T)_y}{1 \cdot 1} \approx \underbrace{-(\tau_T)}_{\text{Полная работа}} \underbrace{\tau_T}_{\text{Работа на деформацию}} \underbrace{\frac{\tau_T}{\mu_T}}_{\text{Работа на увеличение кинетической энергии основного потока}} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_T \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_T \mu_T \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{= \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}. \quad (2.49)$$

Далее мы замечаем, что приращение  $\delta\tau_T$  является суммой сил, приложенных на верхней и нижней гранях (см. рис. 2.5), и что эта сумма сил приложена в центре масс контрольного объема. Действие суммы сил  $\delta\tau_T$  приводит к ускорению, а совершаемая работа – к увеличению кинетической энергии *основного* потока.

Оставшаяся часть полной работы турбулентного трения расходуется на деформацию и, в конечном счете, рассеивается в теплоту, но через промежуточную стадию образования энергичных турбулентных завихрений, т.е. стадию генерации турбулентности. (Понятно, почему не учитывалась работа молекулярного трения в (2.49): вязкая деформация означает непосредственную диссипацию, превращение в теплоту).

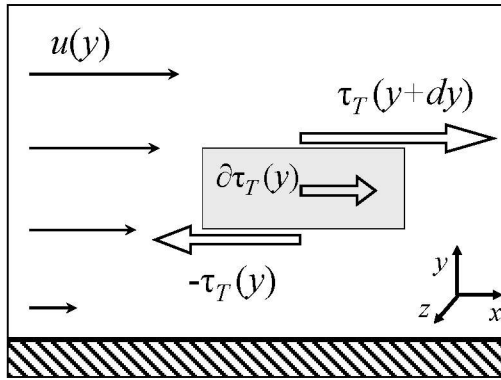


Рис. 2.5. Силы турбулентного трения, действующие на контрольный объем ( $1 \times dy \times 1$ )

Подставляя выражения для диссипации (2.47) и произведения (2.49) в (2.46), получают дифференциальное уравнение турбулентной энергии в приближении пограничного слоя:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( (\mu + \mu_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right)}_{\text{Диффузия}} - \underbrace{\left( \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} \right)}_{\text{Конвекция}} + \underbrace{\mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{\text{Порождение}} - \underbrace{\rho \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon}}_{\text{Диссипация}}. \quad (2.50)$$

Турбулентная вязкость рассчитывается по обсуждавшемуся выше (см. формулы (2.40), (2.41)) соотношению:

$$\mu_T = C_\mu \rho^{1/2} \mu; \quad C_\mu = 0.09. \quad (2.51)$$

Для переносного  $l_\mu$  и диссипативного  $l_\varepsilon$  масштабов турбулентности применяются формулы, основанные на распределении Эскудиера (2.43) и снабженные демпфирующими факторами  $f_\mu$  и  $f_\varepsilon$ , работающими в вязком подслое непосредственно у стенки:

$$\begin{aligned} l_\mu &= \min(l_\mu^*, L\delta); \quad l_\mu^* \cong 0.09; \quad l_\mu^* \cong 0.41; \\ \mu &= C_\mu^{1/2} \rho^{1/2} \mu; \quad \varepsilon = C_\mu^{1/2} \rho^{1/2} \mu; \quad C_\mu = 0.09; \\ \mu &= 1 - \exp\left(-\frac{y}{70}\right); \quad \varepsilon = 1 - \exp\left(-\frac{y}{2 C_\mu^{1/2}}\right); \quad (2.52) \\ y &\equiv \frac{y}{l_\mu}. \end{aligned}$$

На твердой стенке для турбулентной энергии  $k$  ставится нулевое граничное условие:

$$k|_{y=+0} = 0, \quad (2.53)$$

как это следует из условия прилипания.

Неопределенность при расчете скорости диссипации  $\varepsilon$  на стенке раскрывается следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{1/2} k^{3/2}}{1 - \exp\left(-\frac{y}{2 C_\mu^{1/2}}\right)}; \quad y = \frac{v}{\nu}; \quad (2.54)$$

$$\varepsilon|_{\rightarrow 0} = \frac{C_\mu^{1/2} k^{3/2}}{\left(\frac{1}{2} y\right)} = \frac{C_\mu^{1/2} k^{3/2}}{\left(\frac{1}{2} \frac{v}{\nu}\right)} = 2 \frac{C_\mu^{1/2} k^{3/2} \nu}{v} \Big|_{\rightarrow 0},$$

т.е. диссипация  $\varepsilon$  на стенке остается конечной, если турбулентная энергия  $k$  убывает по квадратичному закону, как это и отмечается в экспериментах.

Итак, дифференциальное уравнение турбулентной энергии  $k$  (2.45) (совместно с алгебраическими соотношениями вида (2.52) для линейного масштаба турбулентности) дополняет систему дифференциальных уравнений (2.19–2.22) для температуры, концентрации, давления и скорости и, таким образом, создает замкнутое описание конвективного теплообмена в турбулентных потоках. Принципиальным усовершенствованием в  $k$ -модели, по сравнению с моделью пути смешения, является возможность проследить эволюцию турбулентности под действием диссипации и генерации, диффузии и конвекции.

Модели турбулентности следующего уровня содержат уже два дополнительных дифференциальных уравнения переноса. Например, наиболее популярная  $k\varepsilon$ -модель, наряду с уравнением переноса для турбулентной энергии  $k$  (см. (2.45)–(2.46)), содержит аналогичное по структуре уравнение для скорости диссипации  $\varepsilon$  как новой сохраняемой и переносимой величины. Это позволяет отказаться от чисто эмпирического и далеко не универсального способа задания масштаба турбулентности (2.43), принятого в исходной  $k$ -модели. Масштаб турбулентности становится теперь внутренней, определяемой в процессе решения величиной, связанной с переменными  $k$ ,  $\varepsilon$  соотношением (2.47):

$$l_\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}.$$

На переднем фронте исследований находятся методы *прямого* численного моделирования турбулентных течений, призванные воспроизвести в деталях хаотические гидротермодинамические поля в технических устройствах и в природе. Однако проведение таких расчетов требует исключительно больших вычислительных ресурсов. Действительно, даже если осредненный основной поток относительно прост, турбулентная составляющая имеет хаотическую нестационарную трехмерную структуру, для пространственного и временного разрешения которой в интересной для инженеров области *больших чисел Рейнольдса* требуется слишком мелкая вычислительная сетка, например, с числом узлов  $10^{16}$ , что относится пока к области фантастики.

Дифференциальные уравнения тепломассообмена (2.19) – (2.22), (2.50) образуют систему уравнений в частных производных второго порядка. В полной постановке это нелинейная система уравнений. Источниками нелинейности являются операторы конвективного переноса, содержащие вторые степени зависимых переменных (произведения скорости на скорость, скорости на концентрацию, скорости на энтальпию). Нелинейность появляется также, если молекулярные коэффициенты переноса зависят от температуры и концентрации. Нелинейны задачи турбулентного переноса. Эта краткая характеристика показывает, что интегрирование уравнений тепломассообмена является сложной задачей. Только при существенных упрощениях, при работе с асимптотическими ситуациями оказываются возможными аналитические решения. Хотя роль таких решений для понимания сущности тепломассообмена очень важна, при математическом моделировании реальных, возникающих на практике задач аналитические методы часто оказываются неприменимыми.

Основная тенденция в теории и практике тепломассообмена – все более широкое использование компьютерного моделирования, с тем чтобы максимально учесть принципиально важные эффекты и работать с полными математическими моделями, а не быть вынужденными «упрощать» задачу до такой степени, что модель совсем перестает быть похожей на реальный объект.

## Глава 3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

### 3.1. Контрольные объемы на границе

В предыдущей главе была сформулирована *система дифференциальных уравнений* в частных производных для нахождения полей температуры, концентрации, скорости, давления в исследуемом объекте. Чтобы получить полное, замкнутое математическое описание задачи, необходимо также поставить *граничные и начальные условия*.

*Граничные условия* описывают взаимодействие на границе между исследуемым объектом и окружающей средой. Например, если пластина из плохо проводящего тепло материала охлаждается в термостате с интенсивно перемешиваемой жидкостью, можно принять температуру пластины *на ее поверхности* (т.е. на границе) равной температуре жидкости в термостате.

*Начальные условия* определяют начальное состояние, из которого происходит дальнейшая эволюция объекта во времени. Начальные условия задаются в виде *пространственных распределений* искомым переменных. Например, следует указать начальное распределение температуры по толщине машиностроительной детали, если необходимо проследить за режимом ее термической обработки. Начальных условий, конечно, не ставят при рассмотрении *стационарных, установившихся состояний*: сами эти стационарные пространственные распределения являются предметом анализа.

Начальные и граничные условия объединяют термином *краевые условия*. Постановка краевых условий является необходимым и часто самым ответственным этапом математического моделирования, в особенности если речь идет об объектах со сложной геометрией, с границами раздела, на которых происходят фазовые превращения вещества, действуют силы поверхностного натяжения и т.п.

Сейчас мы рассмотрим только самые простые аспекты постановки граничных условий, в основном применительно к задачам теплопроводности.

Возвращаясь к схеме, использованной при формулировке уравнений сохранения, заметим, что среди контрольных объемов  $dV$ , заполняющих рассматриваемую область, должны быть и такие, которые попадут на границу раздела  $\Gamma$  (рис. 3.1).

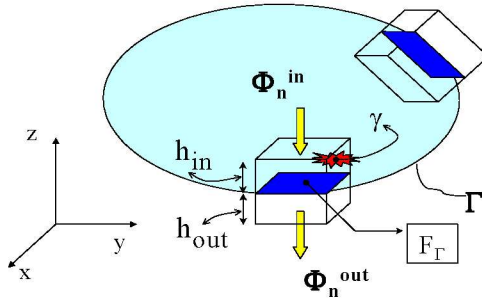


Рис. 3.1. Специальный контрольный объем на границе

Стороны  $h$  специального, построенного на участке границы  $F_\Gamma$  контрольного объема, перпендикулярны границе. Одна из граней (на расстоянии  $h_{in}$  от границы) всегда находится внутри, а другая ( $h_{out}$ ) – всегда снаружи объекта.

Процедура записи балансов в форме обобщенного уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\text{div}(\Phi) + \gamma$$

теперь должна быть изменена, чтобы учесть, что за пределами границы  $F_\Gamma$  находится окружающая среда с совершенно другими свойствами. Необходимо разбить контрольный объем на два по схеме:

$$(h_{in} + h_{out}) \cdot F_\Gamma \Rightarrow (h_{in} \cdot F_\Gamma) + (h_{out} \cdot F_\Gamma) .$$

Контрольный объем стягивается к поверхности  $F_\Gamma$  таким образом, что высоты  $h$  стремятся к нулю, а участок границы  $F_\Gamma$  остается фиксированным. Благодаря указанному предельному переходу можно пренебречь потоками через боковые – бесконечно суживающиеся – грани контрольного объема, и при вычислении оператора  $\text{div}(\Phi)$  взять только потоки через внутреннюю и

наружную грани. Теперь обобщенное уравнение сохранения для специального граничного контрольного объема запишется следующим образом:

$$(h_{\text{in}} \cdot F_{\Gamma}) \cdot \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \tau} + (h_{\text{out}} \cdot F_{\Gamma}) \cdot \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \tau} = \Phi_n^{\text{in}} \cdot F_{\Gamma} - \Phi_n^{\text{out}} \cdot F_{\Gamma} + \gamma_{\text{in}} \cdot (h_{\text{in}} \cdot F_{\Gamma}) + \gamma_{\text{out}} \cdot (h_{\text{out}} \cdot F_{\Gamma}),$$

где  $\Phi_n$  – нормальные проекции вектора потока (см. рис. 3.1).

При предельном переходе ( $h_{\text{in}}, h_{\text{out}} \rightarrow 0$ ) объемные члены обращаются в ноль, и запись баланса сводится к условию на границе:

$$0 = \Phi_n^{\text{in}} \cdot F_{\Gamma} - \Phi_n^{\text{out}} \cdot F_{\Gamma} \quad \text{или} \quad \Phi_n^{\text{in}} = \Phi_n^{\text{out}}, \quad (3.1)$$

согласно которому плотности потоков по обеим сторонам границы раздела одинаковы (см. рис. 3.1).

Дальнейшая конкретизация (3.1) зависит от особенностей рассматриваемой задачи. Несколько примеров рассмотрено ниже.

### 3.2. Граничные условия для задач теплопроводности

Пусть рассматриваемый объект – это твердое тело (рис. 3.1), обменивающееся теплотой с окружающей средой. Требуется найти температурное поле  $t(x, y, z, \tau)$  в объекте. Математическая формулировка этой задачи состоит из *дифференциального уравнения теплопроводности*, полученного в предыдущей главе:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div}(-\lambda \text{grad } t) + q_V,$$

*начального условия*, которое может быть очень простым, например, заданием равномерного начального распределения температуры, и *описания теплового взаимодействия* с окружающей средой, которое предстоит составить.

**Граничное условие первого рода (условие Дирихле).** С чисто математической точки зрения, было бы достаточно положить температуру поверхности тела равной некоторой заданной (известной до решения задачи) функции  $t_{\Gamma}$  от координат точек на поверхности и от времени:

$$t(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, z_{\Gamma}, \tau) = t_{\Gamma}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, z_{\Gamma}, \tau). \quad (3.2)$$

В простейшем случае это может быть некоторая постоянная температура:

$$t(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, \tau) = t_\Gamma = \text{const}.$$

Однако пока остается неясным, как осуществить такое условие для реального объекта, в лабораторных или промышленных установках.

**Граничное условие второго рода (условие Неймана).** Пусть описание некоторой задачи на вербальном (словесном) уровне выглядит так: твердое тело обогревается снаружи мощным потоком высокотемпературного теплового излучения  $q_R$ . Соответствующая математическая формулировка получается из (3.1) следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_n^{in} = -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} \\ \Phi_n^{out} = q_R \end{array} \right\} \Rightarrow -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} = q_R, \quad (3.3)$$

где  $q_R$  – заданная величина теплового потока на поверхности, возможно, функция времени и координат точек на поверхности. Задав плотность потока, мы фактически задаем градиент температуры на поверхности:  $n$  означает внешнюю нормаль, а запись  $n = -0$  подчеркивает, что величины вычисляются *внутри* объекта бесконечно близко к его поверхности.

**Граничное условие третьего рода (условие смешанного типа, условие Роббина).** На практике граница  $\Gamma$  чаще всего отделяет элементы конструкций (твердые тела) от обтекающих их потоков газов или жидкостей (теплоносителей). В свое время Исаак Ньютон экспериментально, с помощью специально изготовленных им термометров, исследовал охлаждение первоначально сильно нагретых металлических тел в воздухе. Он обнаружил, что скорость падения температуры пропорциональна самой температуре тела:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - (t - t_f).$$

В современной формулировке закон охлаждения Ньютона записывается следующим образом:



$$q = \alpha(t_w - t_f), \quad (3.4)$$

где  $\Delta t \equiv t_w - t_f$  – температурный напор, разность температур стенки (поверхности) и окружающей среды. В отечественной литературе на (3.4) ссылаются как на закон (или уравнение) Ньютона–Рихмана.

Ясно, почему в уравнении (3.4) должен фигурировать температурный напор: при одинаковых температурах поверхности и окружающей среды никакого теплового потока не возникает. Из общих соображений понятно также, что если теплоотвод пропорционален разности температур, то и скорость понижения температуры тела будет пропорциональна этой разности температур (как в исходной формулировке Ньютона).

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (3.4) называется *коэффициентом теплоотдачи* и является мерой интенсивности конвективного теплообмена между поверхностью и теплоносителем (этот процесс для краткости называют теплоотдачей). Размерность коэффициента теплоотдачи находится из определяющего уравнения (3.4):

$$[\alpha] = [q] / [\Delta t] = \text{Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Представление о порядке величины коэффициента теплоотдачи дают следующие данные:

Процесс теплоотдачи	Теплоноситель	$\alpha$ , Вт/(м <sup>2</sup> К)
свободная конвекция	воздух	10 <sup>1</sup>
свободная конвекция	вода	10 <sup>2</sup>
вынужденная конвекция	воздух	10 <sup>2</sup>
вынужденная конвекция	вода	10 <sup>3</sup>
кипение, конденсация	вода	10 <sup>4</sup> – 10 <sup>5</sup>

Пусть охлаждение твердого тела в среде с температурой  $t_f$  происходит по закону Ньютона-Рихмана. Соответствующая математическая формулировка *граничного условия третьего рода* получается из (3.1) следующим образом:

$$\Phi_n^{\text{in}} = -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} ; \quad \Phi_n^{\text{out}} = \alpha(t_w - t_f)$$

и окончательно:

$$-\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} = \alpha (t_w - t_f). \quad (3.5)$$

При задании граничных условий третьего рода устанавливается связь между неизвестными заранее температурой и градиентом температуры на поверхности.

Вариация параметров  $\alpha$  и  $t_f$  предоставляет широкие возможности регулирования условий охлаждения (или нагрева) тел.

Если обеспечить очень высокое значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , например, посредством интенсивного перемешивания жидкости, то фактически будет реализовано условие Дирихле, поскольку из (3.5) следует, что  $t_w \rightarrow t_f$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  и при конечном значении теплового потока.

Если задать очень малое значение  $\alpha$ , то получится условие адиабатической поверхности, т.е. частный случай условия Неймана при нулевом тепловом потоке на поверхности.

Если  $t_f \gg t_w$ , то фактически опять будет задано условие Неймана с подводимым к поверхности тепловым потоком  $q \approx \alpha t_f$ .

### 3.3. Граничные условия для задач конвективного теплообмена

В предыдущем параграфе коэффициент теплоотдачи использовался при задании граничного условия в *задачах теплопроводности* и рассматривался как заданный параметр.

В действительности коэффициент теплоотдачи является сложной функцией скорости и режима течения, формы и размеров обтекаемой поверхности, свойств теплоносителя. Хотя к настоящему времени накоплен широкий перечень решенных задач, его ревизия и пополнение остается главным содержанием теории *конвективного теплообмена*. Именно с этой целью приходится интегрировать (в основном, численными методами) систему дифференциальных уравнений тепломассообмена.

В качестве тепловых условий на твердых границах в этом случае задают температуру или тепловой поток (или какие-либо распределения этих величин вдоль границ).

После того как получено распределение  $t(x, y, z, \tau)$  в потоке жидкости (в результате аналитического или численного решения системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена), коэффициент теплоотдачи вычисляют по определяющему соотношению:

$$\alpha \equiv \frac{q|_{n=+0}}{t_w - t_f} = \frac{-\lambda_f \frac{\partial t}{\partial n}|_{n=+0}}{t_w - t_f}, \quad (3.6)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к обтекаемой поверхности,  $q$  – плотность теплового потока в жидкости ( $n = +0$ ),  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности жидкости. Температура жидкости  $t_f$  берется на удалении от стенки, там, где она перестает заметно изменяться; для внутренних течений (как при теплообмене в трубе) обычно используют среднюю по теплосодержанию температуру потока.

### *Условия прилипания*

В теории теплообмена оперируют с моделью непрерывной (сплошной) вязкой жидкости. Считают, что при контакте с твердыми поверхностями силы молекулярного взаимодействия обеспечивают полное торможение, *прилипание* жидкости. Условие равенства нулю *касательной составляющей скорости* на твердой неподвижной стенке называется *условием прилипания*:

$$u|_{n=+0} = 0.$$

Более общей формулировкой, применимой также для движущихся границ раздела жидкость – газ, является равенство *касательных составляющих скорости* по обеим сторонам поверхности раздела.

В тех же предположениях о сплошности среды можно говорить о тепловом «условии прилипания»: температуры сред по обеим сторонам поверхности раздела одинаковы. Например, если посредством микротермопары измерена температура твердой поверхности, то можно утверждать, что такой же будет *температура газа* в бесконечной близости к стенке.

$$t|_{n=+0} = t|_{n=-0}.$$

Сказанное относится к задачам без фазовых превращений. При изучении интенсивных процессов конденсации и испарения вводят понятие о газокинетическом термическом сопротивлении на границе раздела и соответствующем скачке температур. Фундаментальное описание этих эффектов дается в книге [8].

### *Условие непроницаемости*

Для большинства теплообменных установок обычной является ситуация, когда твердая поверхность непроницаема для контактирующего с ней потока жидкости или газа. Для неподвижной стенки это условие записывается как равенство нулю нормальной составляющей скорости потока непосредственно на стенке:

$$v|_{n=+0} = 0.$$

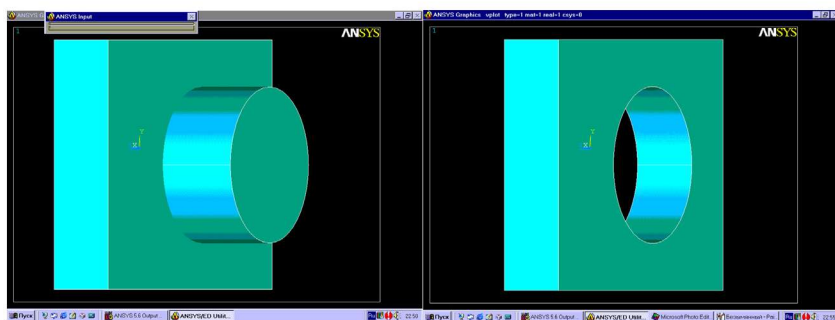
В специальных разделах теории тепломассообмена рассматривают задачи с проницаемыми для вещества поверхностями раздела: пористыми стенками со вдувом или отсосом, межфазными границами с испарением или конденсацией и другие. Граничные условия для скорости потока на стенке в таких случаях будут комбинированными: для продольных составляющих справедливо условие прилипания, но поперечные составляющие не равны нулю.

## 3.4. Геометрия

Постановка граничных условий тесно связана с заданием геометрии рассматриваемой области. В учебных курсах обычно ограничиваются задачами с простой геометрией, рассматривая в основном одномерные температурные поля в пластине или цилиндре. Однако реальные задачи, возникающие в инженерной практике, часто требуют определения температурных полей в трехмерных объектах очень сложной геометрической формы.

При этом даже самый первый этап моделирования – построение геометрической модели сложного реального объекта – становится невыполнимым без специального математического обеспечения, применяемого в системах автоматизированного проектирования (CAD-системах).

На рисунке 3.2 показано, как можно построить деталь с отверстием с помощью геометрического конструктора специального математического пакета. Конструктор предоставляет в распоряжение пользователя набор тел простой формы, так называемых примитивов (прямоугольный блок, цилиндр, призма, сфера, конус), а также ряд логических операций, позволяющих вычитать, складывать, приклеивать, перекрывать примитивы и таким образом строить все более сложные геометрические объекты.



**Рис. 3.2. Формирование геометрической модели объекта**

В левой части рисунка на экране дисплея показаны два выбранных пользователем пересекающихся примитива – блок и цилиндр. Далее к этим примитивам применяется логическая операция вычитания (subtract) и в результате получается деталь с отверстием. Одновременно задаются числовые геометрические параметры, такие как радиусы, размеры сторон и т.д. На следующем этапе работы можно идентифицировать участки границ и указать на них соответствующие граничные условия. Геометрический пример на рис. 3.2 построен в универсальном математическом пакете ANSYS (демонстрационная версия), предназначенном для решения задач прочности, теплофизики, электромагнетизма, гидродинамики.

Техника работы с геометрией объекта и постановкой граничных условий в инженерном математическом пакете Matlab подробно представлена в главе 11 на примере задачи о теплопроводности твэла – тепловыделяющего элемента ядерного реактора.

### 3.5. Визуализация решений

После того как разработана математическая модель некоторого теплообменного процесса или аппарата, включающая:

- дифференциальные уравнения неразрывности, энергии, движения и при необходимости турбулентной энергии, а также
- начальные и граничные условия, обсуждавшиеся выше в этой главе,

Задача отправляется на решение с целью получить распределения температур и тепловых потоков. Обычно приходится обращаться к численным методам и соответствующим математическим пакетам. Результаты получаются в виде обширных массивов (таблиц) чисел, мало пригодных для непосредственного восприятия. Поэтому заключительный этап работы – анализ результатов – начинается с их *визуализации*. Приведем несколько примеров.

Первый пример связан с компьютерным моделированием кипения. Этот процесс теплообмена трудно поддается формализации из-за его непосредственно наблюдаемой сложности и хаотичности. Однако элементарные составляющие, такие как рост пузырьков пара, доступны численному моделированию.

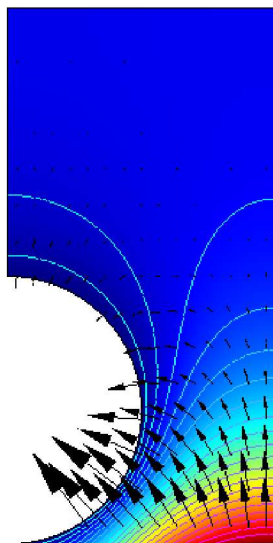


Рис. 3.3. Подвод теплоты к пузырьку пара на обогреваемой поверхности

Рассматривая рис. 3.3, полезно мысленно дополнить его отражением влево – это осесимметричная задача о пузырьке пара в перегретой жидкости на горизонтальной обогреваемой поверхности. Результаты численного решения представлены в виде контурной диаграммы для температуры и векторного поля теплового потока. Градиенты температуры и тепловые потоки локализованы в клиновидной зоне у основания пузырька (такие режимы возможны при высоком давлении в кипящей жидкости).

Постановка краевой задачи теплопроводности следующая. Левая граница рисунка соответствует вертикальной оси симметрии. Верхняя граница адиабатическая, она проведена на достаточном удалении от актуальной области вблизи нижнего правого угла, где имеют место значительные тепловые потоки. Правая поверхность – адиабатическая граница расчетной области, приходящейся на один пузырек. На нижней поверхности задана постоянная плотность теплового потока.

Цвет, как обычно, указывает на уровень температуры. Синий цвет – это жидкость при температуре насыщения, красный в нижнем правом углу – *перегретая* жидкость у стенки. Изотермы, как и следовало ожидать, перпендикулярны к адиабатическим поверхностям. Тесное расположение изотерм у стенки соответствует большим градиентам температуры и большим тепловым потокам.

Поскольку полная картина кипения включает рост пузырька в слое первоначально перегретой жидкости, показанная на рис. 3.3 стационарная картина должна быть дополнена анализом соответствующей нестационарной задачи теплопроводности.

Результат анализа оказывается следующим: при рассматриваемом режиме (кипении при высоком давлении) релаксация температурного поля вокруг пузырька происходит очень быстро, поэтому рис. 3.3 удовлетворительно представляет квазистационарное температурное поле в жидкости вблизи растущего пузырька пара.

Два важных наблюдения полезно зафиксировать. Во-первых, происходит очевидное уменьшение толщины прогретого слоя жидкости у стенки (толщины так называемого *теплового пограничного слоя*, показанного красным цветом на кадрах анимации) [26]. Это

означает, что градиент температуры у стенки увеличивается с ростом скорости обтекания и, следовательно, увеличивается плотность теплового потока. Во-вторых, происходит формирование циркуляционного течения в кормовой части цилиндра, что также влияет на температурное поле вблизи стенки трубы.

Приведенный пример наглядно показывает сложность и многообразие задач теплообмена, если иметь в виду многомерную геометрию реальных инженерных объектов, нелинейность уравнений, неустойчивость гидродинамических полей.

Универсальным средством решения таких задач становится все в большей мере численное моделирование на компьютерах. В главе 11 подробно рассмотрена технология построения компьютерной модели твэла (тепловыделяющего элемента ядерного реактора) в инженерном математическом пакете Matlab.



## Раздел 2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

### Глава 4. ОДНОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В главе 2 было получено математическое описание тепло-массообмена в форме системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.19) – (2.22). Интегрирование этой системы, вообще говоря, осуществляется численными методами, требует специального математического обеспечения и больших вычислительных мощностей.

Однако многие важные и широко применяемые инженерными расчетные формулы получены простыми аналитическими методами, поскольку в этих случаях имеют дело:

- с задачами теплопроводности в твердых телах, когда отсутствуют сложные механизмы переноса конвекцией;

- со стационарными задачами (для установившихся режимов работы энергетических установок);

- с одномерными задачами (благодаря простой форме рассматриваемых объектов).

В задачах *теплопроводности* полная система (2.19) – (2.22) сводится к единственному *дифференциальному уравнению теплопроводности* (2.14) (см. гл. 2) относительно температуры  $t$  ( $x, y, z, \tau$ ) как искомой переменной:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) + q_V. \quad (4.1)$$

Коэффициенты этого уравнения, а именно, теплофизические свойства (теплопроводность  $\lambda$ , Вт/(м К), удельная теплоемкость  $c_p$ , Дж/(кг К) и плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>), а также мощность внутренних источников теплоты  $q_V$ , Вт/м<sup>3</sup> могут зависеть от температуры, а также быть явными функциями координат и времени. Однако при решении основных, классических задач их полагают постоянными величинами.

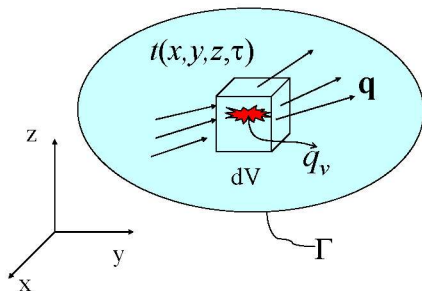


Рис. 4.1. Теплопроводность

Чтобы отчетливо выразить физическое содержание уравнения теплопроводности как *уравнения сохранения* (рис. 4.1), перепишем его в следующей форме:

$$\rho_p \frac{dt}{dt} = -\text{div}(\mathbf{q}) + q_v, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{q}$  – плотность теплового потока, вычисляемая по закону Фурье:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } t. \quad (4.3)$$

Согласно уравнению (4.2), энтальпия контрольного объема (см. рис. 4.1) увеличивается благодаря подводу теплоты через его грани посредством теплопроводности (первый оператор справа) и действию внутреннего источника  $q_v$ .

Для стационарных задач ( $\partial t / \partial \tau = 0$ ) уравнение теплопроводности запишется как

$$\text{div}(\mathbf{q}) = -q_v. \quad (4.4)$$

Физически уравнение (4.4) означает, что при *стационарном* режиме энергия, генерируемая внутренним источником  $q_v$ , должна целиком отводиться через поверхность контрольного объема  $dV$  (рис. 4.1) посредством теплопроводности (оператор  $\text{div} \mathbf{q}$ ).

В стационарных задачах без внутренних источников:

$$\text{div}(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.5)$$

т.е. суммарный подвод теплоты через поверхность любого контрольного объема будет нулевым. Самой простой и самой важной для практики задачей такого рода является *теплопроводность плоской стенки*.

## 4.1. Теплопроводность плоской стенки

В теплообменных аппаратах теплота передается от горячего теплоносителя  $t_{f1}$  к холодному  $t_{f2}$  через разделяющую их тонкую стенку (перегородку) толщиной  $\delta$  (рис. 4.2). Тепловой поток  $q$  распространяется по нормали к стенке, и температура изменяется по толщине стенки, в направлении нормальной координаты  $x$ :  $t = t(x)$ . Поскольку аппараты энергетических установок работают преимущественно на оптимизированных установившихся режимах, актуален анализ *стационарной* задачи. Внутренние источники теплоты отсутствуют.

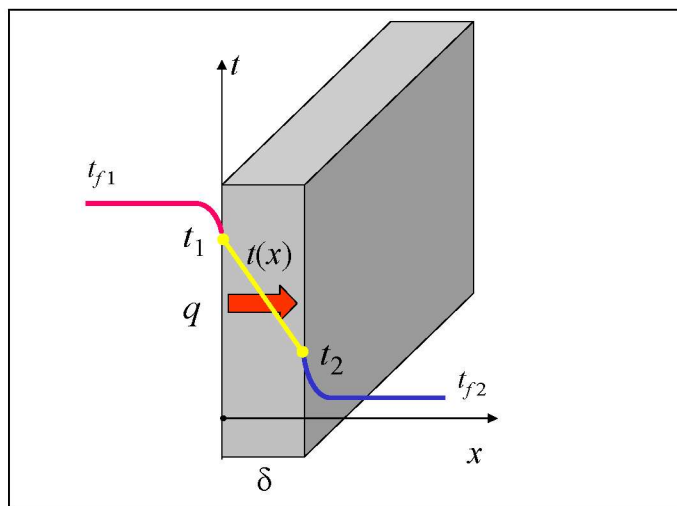


Рис. 4.2. Теплопроводность плоской стенки

Примем в качестве граничных условий заданные температуры на поверхностях пластины  $t_1$  и  $t_2$ . Теплопроводность  $\lambda$  материала стенки полагается постоянной величиной. Требуется найти распределение температуры  $t(x)$  по толщине стенки, а также вычислить плотность теплового потока  $q$ .

Сформулируем математическое описание этой задачи. Дифференциальное уравнение теплопроводности (4.1) радикально упрощается, как показано далее:

$$-0; -,-0 \Rightarrow \boxed{= ( )};$$

$$v 0; \Downarrow$$

$$0 \frac{\partial}{\partial x} \left( - \underbrace{\lambda}_{\text{const}} \frac{\partial t}{\partial x} \right) + 0 \Rightarrow 0 = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} 0.$$

Таким образом, получается следующая краевая двухточечная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} t(x) = 0; \quad (4.6)$$

$$t(0) = t_1;$$

$$t(\delta) = t_2.$$

Нетрудно догадаться, что функция с нулевой второй производной – это прямая линия, т.е. искомое распределение температуры – линейное. Но мы последовательно проведем вычисления для этой первой конкретной задачи курса тепломассообмена.

Понизим порядок уравнения посредством замены переменных и получим первый интеграл:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} t(x) \right) = 0 \xrightarrow{(x) \equiv \frac{d}{dx} t(x)} \frac{d}{dx} (x) = 0; \quad (4.7)$$

$$= C_1 \Rightarrow \frac{d}{dx} t(x) = C_1.$$

Второе интегрирование дает общий вид решения с двумя константами интегрирования:

$$\frac{d}{dx} t(x) = C_1 \Rightarrow t(x) = C_1 x + C_2. \quad (4.8)$$

Константы определяются при подстановке решения в граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} t(x=0) &= C_1 \cdot 0 + C_2 = t_1 \\ t(x=\delta) &= C_1 \cdot \delta + C_2 = t_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{t_2 - t_1}{\delta} \\ C_2 &= t_1 \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Окончательно, для температурного поля пластины получается линейное распределение (рис. 4.2):

$$t(x) = (t_2 - t_1) \cdot \frac{x}{\delta} + t_1. \quad (4.10)$$

Полезно представить себе (визуализировать) это распределение в форме системы изотермических поверхностей и применить цвет для отображения уровня температуры, подобно рисункам в гл. 1.

Вычисление теплового потока производится по закону теплопроводности Фурье, с использованием решения (4.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\lambda \operatorname{grad} t \quad \xrightarrow{t=t(x)} \quad q_x = -\lambda \frac{dt(x)}{dx} = \\ &= \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta}; \quad q_y, q_z = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Полученное *основное расчетное соотношение для плоской стенки* записывают в следующей традиционной форме (полагая  $q \equiv q_x$ ):

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{\lambda}} \equiv \frac{\Delta t}{R_\lambda}; \quad R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}. \quad (4.12)$$

Величина  $R_\lambda$  называется *термическим сопротивлением* плоской стенки.

Формула (4.12) играет в практике инженера-теплоэнергетика такую же важную роль, как аналогичная формула закона Ома ( $I = U/R$ ) для инженера-электрика. Величинами-аналогами являются:

- сила тока и тепловой поток;
- напряжение (разность потенциалов) и разность температур;
- электрическое (омическое) сопротивление и термическое сопротивление.

Ясно, что многослойная стенка, часто применяемая на практике (например, металлический лист плюс слой тепловой изоляции) – аналог последовательной цепи, в которой поток одинаков, а сопротивления складываются. Основываясь на этой аналогии, можно записать выражение для многослойной плоской стенки как для последовательной цепи термических сопротивлений ( $i$  – номер слоя):

$$\frac{\Delta t}{\sum_i R_i}, \quad , \quad i = \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad (4.13)$$

где  $\Delta t$  – *полный* суммарный перепад температур на составной стенке.

## 4.2. Теплопередача через плоскую стенку

Вернемся к постановке задачи о плоской стенке как элементе теплообменника (рис. 4.2). Анализируя *теплопроводность* в плоской стенке, мы считали заданными температуры на ее поверхностях  $t_1$  и  $t_2$ . На практике эти температуры обычно неизвестны, а задаются температуры теплоносителей  $t_{f1}$  и  $t_{f2}$  и коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по обе стороны стенки. Комбинированный процесс переноса теплоты от горячего теплоносителя к холодному теплоносителю через разделяющую их стенку (перегородку) называется *теплопередачей* (рис. 4.3).

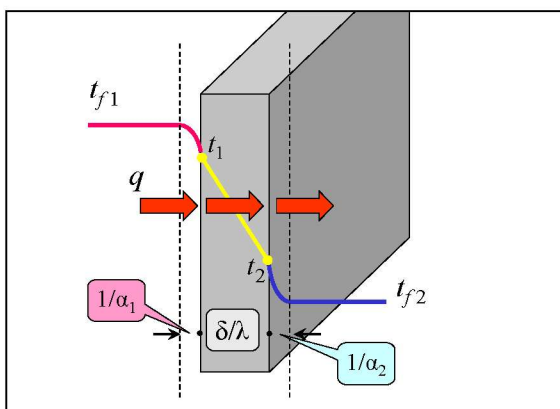


Рис. 4.3. Теплопередача через плоскую стенку

Теплопередача включает последовательно конвективный теплообмен (теплоотдачу) на левой поверхности, обтекаемой горячим теплоносителем, затем теплопроводность в твердой стенке, и далее теплоотдачу на правой поверхности, обтекаемой холодным теплоносителем. Ясно, что мы имеем дело с последовательной схемой включения термических сопротивлений теплоотдачи ( $1/\alpha_1$ ), теплопроводности ( $\delta/\lambda$ ) и теплоотдачи ( $1/\alpha_2$ ) (рис. 4.3):

$$q = \frac{t_{f1} - t_1}{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)}; \quad q = \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)}; \quad q = \frac{t_2 - t_{f2}}{\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)};$$

$$\boxed{t_{f1}} \xrightarrow{q} \boxed{t_1} \xrightarrow{q} \boxed{t_2} \xrightarrow{q} \boxed{t_{f2}}$$

По аналогии с последовательной электрической цепью (см. также (4.13)), опуская элементарные промежуточные выкладки, запишем формулу теплопередачи через плоскую стенку:

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (4.14)$$

Если стенка многослойная, то вместо  $(\delta/\lambda)$  следует подставить сумму термических сопротивлений (4.13).

При расчетах потребуются также выражения для отдельных участков тепловой цепи, например, чтобы найти температуры поверхностей  $t_1$  и  $t_2$ :

$$q = \frac{t_{f1} - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda}}; \quad q = \frac{t_2 - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_2}}; \quad q = \frac{t_1 - t_{f2}}{\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Коротко уравнение теплопередачи записывается следующим образом:

$$\boxed{q = k \cdot \Delta t}$$

$$\Delta t = t_{f1} - t_{f2}; \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (4.15)$$

где  $\Delta t$ , К – температурный напор между теплоносителями;  $k$ , Вт/(м<sup>2</sup>К) – коэффициент теплопередачи.

Полезно в терминах теплопередачи самостоятельно проанализировать функционирование такого хорошо известного теплообменника, как чайник с кипящей водой на сильном огне газовой горелки. Температуры горячего и холодного теплоносителя здесь соответственно 1200 и 100°С. Как быстро нагреется вода до кипения при включении горелки? Почему не плавится металл дна чайника при штатной ситуации? Почему дно чайника прогорит, если вода выкипит? За какое время выкипит чайник, оставленный без присмотра? Такого рода вопросы интересуют не только любознательного студента, но и, например, конструктора энергетического ядерного реактора.

### 4.3. Одномерные стационарные модели: общая постановка

Кроме плоских стенок, на практике часто имеют дело с цилиндрическими стенками (трубами) и, в более специальных случаях, – со сферическими стенками. Дополнительная проблема, не затронутая до сих пор – это зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, иногда весьма существенная. Наконец, имеются специальные одномерные задачи с внутренними источниками теплоты, важные для ядерной энергетики и при расчете электрических нагревателей.

Общая постановка таких одномерных стационарных задач дается уравнением (4.4):

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = q_v,$$

где плотность теплового потока вычисляется по закону Фурье с переменным, зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности:

$$\lambda(\ ) \operatorname{grad} .$$

Представим оператор дивергенции в форме специальных соотношений, пригодных для часто встречающихся на практике объектов с *плоской, цилиндрической и сферической геометрией* (рис. 4.4).

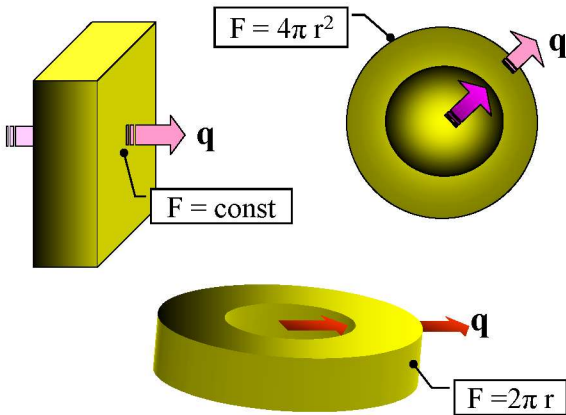


Рис. 4.4. Объекты с плоской, цилиндрической и сферической симметрией



Контрольные поверхности, к которым отнесены величины плотности теплового потока в указанных трех случаях, определяются формулами:

$$F = \text{const}; \quad F(r) = 2\pi r; \quad F(r) = 4\pi r^2.$$

Благодаря симметрии, эти поверхности являются *изотермами*.

Одномерной формулировкой закона теплопроводности Фурье будет:

$$q(r) = -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r}. \quad (4.16)$$

Сконструируем далее специальные *контрольные объемы*  $dV$ , ограниченные указанными контрольными поверхностями и представляющие собой *плоский, цилиндрический или сферический слой* с малой толщиной  $dr$  (рис. 4.4).

Чтобы вычислить дивергенцию, исходя непосредственно из определения понятия этой величины, следует найти суммарный поток вектора через поверхность контрольного объема  $dV$  и отнести результат к  $dV$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{[ \quad ]_{r+dr} - [ \quad ]_r}{d} \right) &= \frac{[ \quad ]_{r+dr} - [ \quad ]_r}{d} \\ &= \frac{\left( \frac{d}{d} \right) \cdot ( \quad )}{d} \cdot d \\ &= \frac{1}{d} ( \quad ) \cdot ( \quad ). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Переписывая (4.4) с учетом (4.17),

$$\frac{d}{dr} (q(r) \cdot F(r)) = F(r) \cdot q_v,$$

и интегрируя в пределах  $r_1 \div r$ , получим следующее *уравнение баланса*:

$$q(r) \cdot F(r) - q(r_1) \cdot F(r_1) = q_v \int_{r_1}^r F(r) \cdot dr. \quad (4.18)$$

Правая часть этого выражения есть внутреннее тепловыделение в слое толщиной  $(r - r_1)$ . Левая часть – разность тепловых потоков через поверхности  $F(r)$  и  $F(r_1)$ . Смысл балансового соотно-

шения (4.18) очевиден, и его можно было бы выписать сразу, минуя промежуточные выкладки.

Под  $r_1$  мы понимаем внутренний фиксированный радиус цилиндрического или сферического слоя. Для плоской стенки эту величину можно всегда считать нулевой, т.е. отсчитывать координату от одной из поверхностей слоя. Текущее значение координаты обозначается как  $r$ , а конечное значение будет далее обозначено как  $r_2$ .

Уравнение (4.18) определяет распределение теплового потока  $q(r)$  по координате  $r$ . Общий план дальнейших вычислений таков: подставляя в (4.18) выражение (4.16) теплового потока через градиент температуры, при *втором интегрировании* получим распределение температуры  $t(r)$  и завершим тем самым решение поставленной задачи (см. параграфы 4.4;4.5;4.6). Мы ограничимся в данной главе задачами без внутренних источников.

#### **4.4. Плоская стенка без внутренних источников теплоты с переменным, зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности**

Переписывая (4.18) с учетом условий  $q_V = 0$ ,  $F = \text{const}$ , получим уравнение сохранения в виде:

$$q(r_x) = q(r_1) \equiv q = \text{const} ,$$

т.е. плотность теплового потока  $q$ , Вт/м<sup>2</sup>, постоянна по толщине плоского слоя для стационарных задач без внутренних источников.

После подстановки (4.16) и замены обозначения координаты  $r \leftarrow x$  приходят к дифференциальному уравнению для температурного поля в плоской стене:

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} = -q = \text{const} . \quad (4.19)$$

Принимая во внимание зависимость коэффициента теплопроводности от температура,  $\lambda = \lambda(t)$ , приведем уравнение к форме с разделенными переменными:

$$\lambda(t) \cdot dt = -q \cdot dx; \quad (q = \text{const}) .$$

Интегрируя левую и правую часть в *согласованных* пределах и учитывая, что на поверхности  $x = 0$  поставлено граничное условие

$$t(x=0) = t_1,$$

получим:

$$\int_{t_1}^{t(x)} \lambda(t) \cdot dt = -q \cdot \int_0^x dx \Rightarrow \left[ \frac{\int_{t_1}^{t(x)} \lambda(t) \cdot dt}{(t(x) - t_1)} \right] \cdot (t(x) - t_1) = -q \cdot x \quad (4.20)$$

Величина в квадратных скобках есть среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности в интервале температур  $t_1 \div t(x)$ , т.е. в «текущем» слое  $0 \div x$ . Уравнение (4.20) дает  *неявное*  выражение для распределения температуры  $t(x)$ .

Если интегрирование провести в полных пределах  $0 \div \delta$ ,  $t_1 \div t_2$ , то после простых преобразований получится следующее *основное расчетное соотношение для плоской стенки*:

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta} \equiv \frac{\Delta t}{R_\lambda}; \quad R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda_m}. \quad (4.21)$$

Среднеинтегральное значение  $\lambda_m$  коэффициента теплопроводности определяется формулой:

$$\lambda_m \equiv \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \cdot dt}{t_2 - t_1}. \quad (4.22)$$

Подчеркнем важный результат, справедливый для *всех одномерных стационарных задач*: в качестве расчетного коэффициента теплопроводности в (4.21) следует использовать его среднеинтегральное значение на интервале изменения температуры в стенке.

Если  $\lambda = const$ , то из уравнения (4.20) сразу следует *линейное* распределения температуры:

$$t(x) = t_1 - q \frac{x}{\lambda}. \quad (4.23)$$

Подставляя выражение для  $q$  из (4.21), можно получить другую форму того же распределения:

$$t(x) = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{x}{\delta}. \quad (4.24)$$

Это повторение полученного ранее другим способом распределения (4.10).

Если  $\lambda$  зависит от температуры, то распределение температуры по толщине слоя будет нелинейным. Насколько сильны искажения и как они зависят от характера температурной зависимости  $\lambda$ , полезно исследовать самостоятельно. Пример такого расчета для цилиндрической стенки приведен ниже (рис. 4.8 – рис. 4.10).

#### 4.5. Цилиндрическая стенка

##### *Аналитическое решение*

Переписывая (4.18) с учетом условий:

$$q_V = 0, \quad F = 2\pi r,$$

получим уравнение сохранения в виде:

$$q(r) \cdot 2\pi \cdot r = q(r_1) \cdot 2\pi \cdot r_1 \equiv q_L = \text{const}, \quad (4.25)$$

где  $q_L$ , Вт/м – так называемая *линейная плотность теплового потока*, т.е. тепловой поток в расчете на единицу длины цилиндрической стенки по ее оси (на единицу длины трубы).

Смысл уравнения сохранения (4.25) следующий: линейная плотность теплового потока постоянна по толщине цилиндрического слоя для стационарных задач без внутренних источников.

Делая подстановку (4.16) и принимая во внимание возможную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры,  $\lambda = \lambda(t)$ , приведем уравнение (4.25) к следующей форме с разделенными переменными

$$\lambda(t) \cdot dt = -\frac{1}{2\pi} q_L \cdot \frac{dr}{r}.$$

Напомним, что  $q_L$  в этом выражении есть величина, *не зависящая* от текущего значения радиуса  $r$ . Интегрируя левую и

правую часть в согласованных пределах и учитывая, что на поверхности  $r = r_1$  поставлено *граничное условие* первого рода

$$t(r = r_1) = t_1,$$

получим:

$$\int_{t_1}^{t(r)} \lambda(t) \cdot dt = -\frac{1}{2\pi} q_L \cdot \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$(t(r) - t_1) \left[ \frac{\int_{t_1}^{t(r)} \lambda(t) \cdot dt}{(t(r) - t_1)} \right] = -\frac{1}{2\pi} q_L \cdot \ln \frac{r}{r_1}. \quad (4.26)$$

В квадратных скобках записано среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности в интервале температур  $t_0 \div t(r)$ , т.е. в «текущем» слое ( $r_0 \div r$ ) (ср. с (4.20) для плоской стенки). Уравнение (4.26) дает  *неявное*  выражение для распределения температуры  $t(r)$ . Как разрешить уравнение относительно  $t(r)$  в случае, когда температурная зависимость  $\lambda(t)$  существенна, показано ниже в вычислительном примере (рис. 4.8 – рис. 4.10).

Если интегрирование провести в полных пределах  $r_1 \div r_2$ ,  $t_1 \div t_2$ , то после простых преобразований получатся следующие *основные расчетные соотношения для цилиндрической стенки*:

$$q_L = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi \cdot \lambda_m} \ln \frac{r_2}{r_1}} \equiv \frac{\pi \cdot \Delta t}{R_{L,\lambda}}; \quad R_{L,\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \lambda_m} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.27)$$

Величина  $R_{L,\lambda}$  называется *линейным* термическим сопротивлением цилиндрической стенки. Среднеинтегральное значение  $\lambda_m$  коэффициента теплопроводности в интервале температур  $(t_1, t_2)$  определяется формулой (4.22).

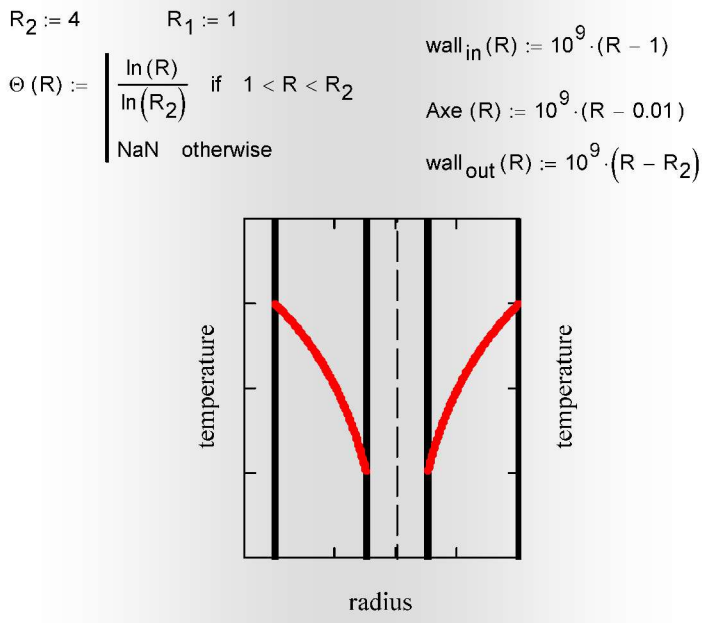
Если  $\lambda = \text{const}$ , то из (4.26) следует *логарифмический закон* изменения температуры по радиусу:

$$t(r) - t_1 = -\frac{1}{2\pi\lambda} q_L \cdot \ln \frac{r}{r_1}. \quad (4.28)$$

В относительной форме:

$$\frac{t(r) - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

распределение (4.28) представлено графически на рис. 4.5 для слоя с отношением радиусов  $r_2/r_1 = 4$ .



**Рис. 4.5. Распределение температуры в цилиндрическом слое ( $R = r/r_1$ )**

Для тонких цилиндрических стенок (4.27) переходит в формулу для плоской стенки. Покажем это, применив *символьные* вычисления из математического пакета Mathcad (рис. 4.6):

В первом блоке выписаны формулы (4.27) и (4.25) для линейной и обычной плотности теплового потока. В пояснительном втором блоке введена относительная толщина стенки  $\delta_r$  и показано, к чему приведет подстановка  $\delta_r$  в исходные формулы. Далее

оператор **series** выписывает разложение в ряд для плотности теплового потока  $q$  при  $\delta_r \rightarrow 0$ , т.е. для тонкой цилиндрической стенки. Наконец, делается обратная подстановка, чтобы вернуться к исходным переменным.

$q_L(r_1, r_2) := \frac{\Delta t}{\frac{1}{2 \cdot \pi \lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$	$q(r_1, r_2) := \frac{q_L(r_1, r_2)}{2 \cdot \pi \cdot r_1}$
$\delta_r = \frac{\delta}{r_1}$	$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \left  \begin{array}{l} \text{substitute, } r_2 = r_1 + \delta_r \cdot r_1 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \ln(1 + \delta_r)$
NofTerms := 2	
$q(r_1, r_2)$	$\left  \begin{array}{l} \text{substitute, } r_2 = r_1 + \delta_r \cdot r_1 \\ \text{series, } \delta_r = 0, \text{ NofTerms} \rightarrow \Delta t \cdot \frac{\lambda}{\delta} \\ \text{substitute, } \delta_r = \frac{\delta}{r_1} \end{array} \right.$

Рис. 4.6. Разложение для тонкой цилиндрической стенки

Результат соответствует формуле (4.21) для плоской стенки. Таким образом, для тонкостенных ( $(\delta/r) \ll 1$ ) труб в теплообменниках можно с некоторым приближением применять простые формулы теплопередачи для плоских стенок.

Определенные сложности при расчетах по формуле (4.27) возникают, если температуры на поверхностях стенки заранее неизвестны, в то время как они необходимы для расчета среднеинтегрального значения  $\lambda_m$ .

### Числовой пример

Рассмотрим задачу о приборе с *нагретой нитью*, предназначенном для измерения теплопроводности газов, например воздуха (рис. 4.7). При проектировании такого прибора необходима строгая математическая модель, которую мы разработаем и реализуем в пакете Mathcad (рис. 4.8 – рис. 4.10).

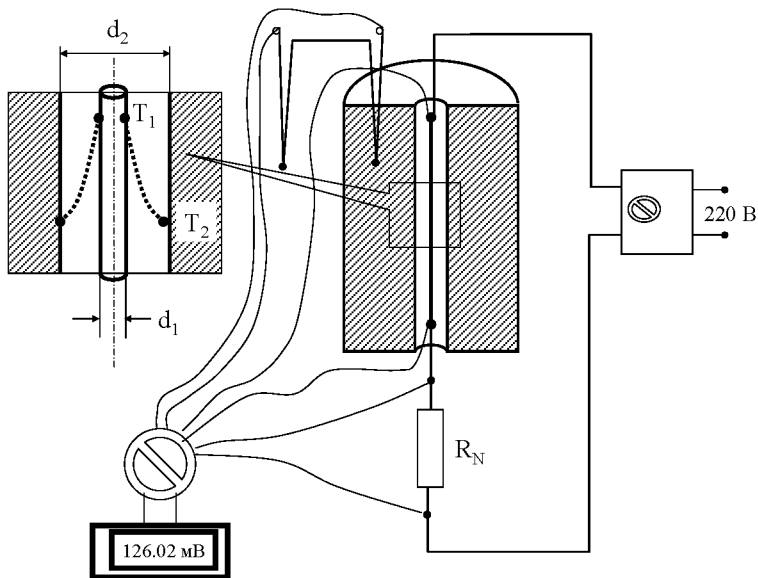


Рис. 4.7. Прибор для измерения коэффициента теплопроводности воздуха

Задача формулируется следующим образом. Теплота от обогреваемой электрическим током платиновой нити радиусом  $r_1$  передается механизмом теплопроводности через цилиндрический слой воздуха с наружным радиусом  $r_2$  к холодной стенке. При заданных температурах нити  $t_1$  и холодной стенки  $t_2$  требуется найти линейный тепловой поток  $q_L$  и распределение температуры  $t(r)$  в слое воздуха. Коэффициент теплопроводности воздуха  $\lambda(t)$  (и его зависимость от температуры) предполагается известной.

Заметим, что при эксплуатации прибора будет решаться обратная задача, т.е. по измерениям теплового потока и температур потребуется найти теплопроводность исследуемого газа, заполняющего цилиндрический зазор между нитью-нагревателем и массивным блоком, исполняющим роль термостата-холодильника. Однако сейчас мы рассмотрим калибровку прибора на теплоносителе с известными свойствами.

Подготовительная работа состоит во вводе информации о теплопроводности воздуха (рис. 4.8). Фрагмент таблицы стандартных справочных данных используется, чтобы посредством встроен-



ной в Mathcad функции `linfit` получить удобную для расчетов аналитическую аппроксимацию для коэффициента теплопроводности. Пользовательская функция  $\lambda_m$  предназначена для расчета среднеинтегрального значения в заданном интервале температур.

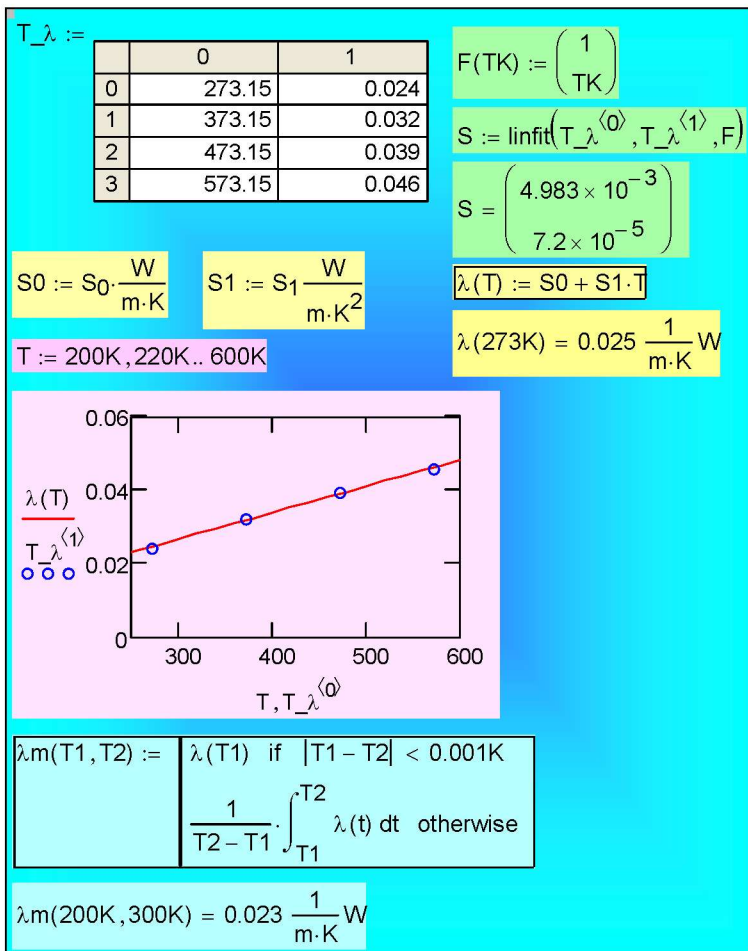


Рис. 4.8. Аппроксимации для коэффициента теплопроводности воздуха

Далее (рис. 4.9) по формуле (4.27) вычисляется значение линейной плотности теплового потока  $q_L$ . Полученная величина используется при последующих расчетах распределения температуры.

Уравнение (4.26) записывается таким образом, что все члены переносятся в одну сторону: выражение  $eq$  должно обращаться в ноль. Нахождение корня этого уравнения, т.е. значения температуры  $T$  при текущем значении радиуса  $r$ , осуществляется посредством встроенной функции *root*. Для простого случая постоянного значения коэффициента теплопроводности,  $\lambda = \lambda_{\text{mean}} = \text{const}$ , применяется явная формула (4.28), дающая логарифмическое распределение температуры по радиусу цилиндрического слоя.

$r1 := 0.0001 \text{ m}$	$r2 := 0.00125 \text{ m}$
$T1 := 493 \text{ K}$	$T2 := 293 \text{ K}$
$q_L := \frac{T1 - T2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_m(T1, T2)} \cdot \ln\left(\frac{r2}{r1}\right)}$	$q_L = 16.558 \frac{1}{\text{m}} \text{ W}$
$\lambda_{\text{mean}} := \lambda_m(T1, T2)$	$\lambda_{\text{mean}} = 0.033 \frac{1}{\text{m} \cdot \text{K}} \text{ W}$
$eq(T, r) := (T1 - T) - q_L \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_m(T1, T)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r1}\right) \right)$	
$T_{\lambda\_var}(r) := \text{root}(eq(T, r), T, T1, T2)$	
$T_{\lambda\_const}(r) := T1 - q_L \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{mean}}} \cdot \ln\left(\frac{r}{r1}\right) \right)$	

Рис. 4.9. Формирование пользовательских функций для расчета температурного поля в цилиндрическом слое

На завершающей стадии (рис. 4.10) результаты представляются графически. Видно, что точное распределение, полученное с учетом зависимости  $\lambda(T)$  (см. рис. 4.8), несколько отклоняется от логарифмической кривой. Это отклонение будет тем больше, чем сильнее температурная зависимость коэффициента теплопроводности.

С целью улучшения наглядности температурных распределений, на диаграммах их привязывают к геометрическим объектам. На графике (рис. 4.10) красным цветом показана нагретая

платиновая нить радиусом  $r_1$  и синим цветом – холодная стенка с радиусом  $r_2$ . Чтобы построить эти объекты на диаграмме, были введены две вспомогательные ступенчатые функции HotWall и ColdWall.

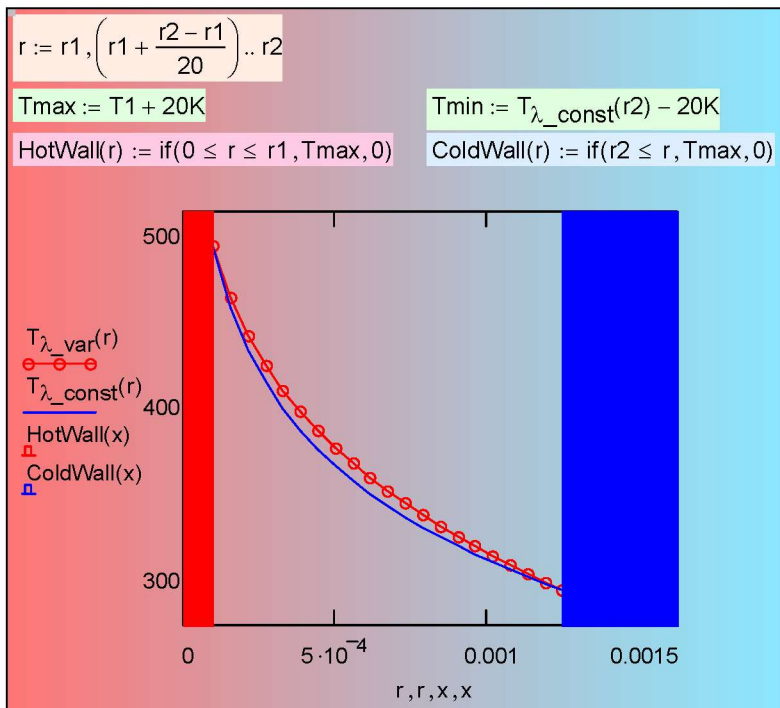
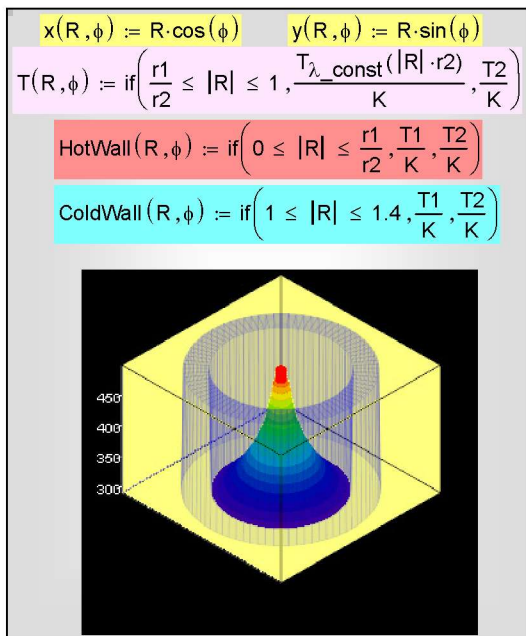


Рис. 4.10. Распределение температуры в цилиндрическом слое

Когда говорят об *одномерных* температурных полях, то имеется в виду их *математическое* представление. В действительности температурные поля всегда связаны с реальными трехмерными объектами – элементами конструкций тепловых машин, теплопередающими стенками в теплообменниках и т.д. Можно добиться большей наглядности в изображении температурного поля, если учесть трехмерный характер реальных объектов (рис. 4.11), как в рассматриваемом примере о температурном поле в зазоре между нагретой платиновой нитью и цилиндрической холодной стенкой.

На подготовительном этапе построения полученное ранее одномерное распределение температуры  $T_{\lambda\text{-var}}(r)$  преобразуется в функцию двух пространственных (полярных) координат. Дополнительно строятся две цилиндрические поверхности для изображения горячей нити и холодной стенки. Результат представлен в виде трехмерной картинке распределения температуры вокруг раскаленной нити (рис. 4.11).



**Рис. 4.11. Пространственное распределение температуры в цилиндрическом зазоре**

Большой информативностью обладают картины изотерм и векторных полей плотности теплового потока (рис. 4.12). Вблизи нагретой нити изотермы расположены очень часто, и это означает, что градиенты температуры велики и, следовательно, велики значения плотности теплового потока. Векторы плотности потока нормальны к изотермам. Для построения этих диаграмм применяется встроенная функция CreateMesh (создание сетки). О технических деталях построений можно узнать подробнее из справочной системы Mathcad.

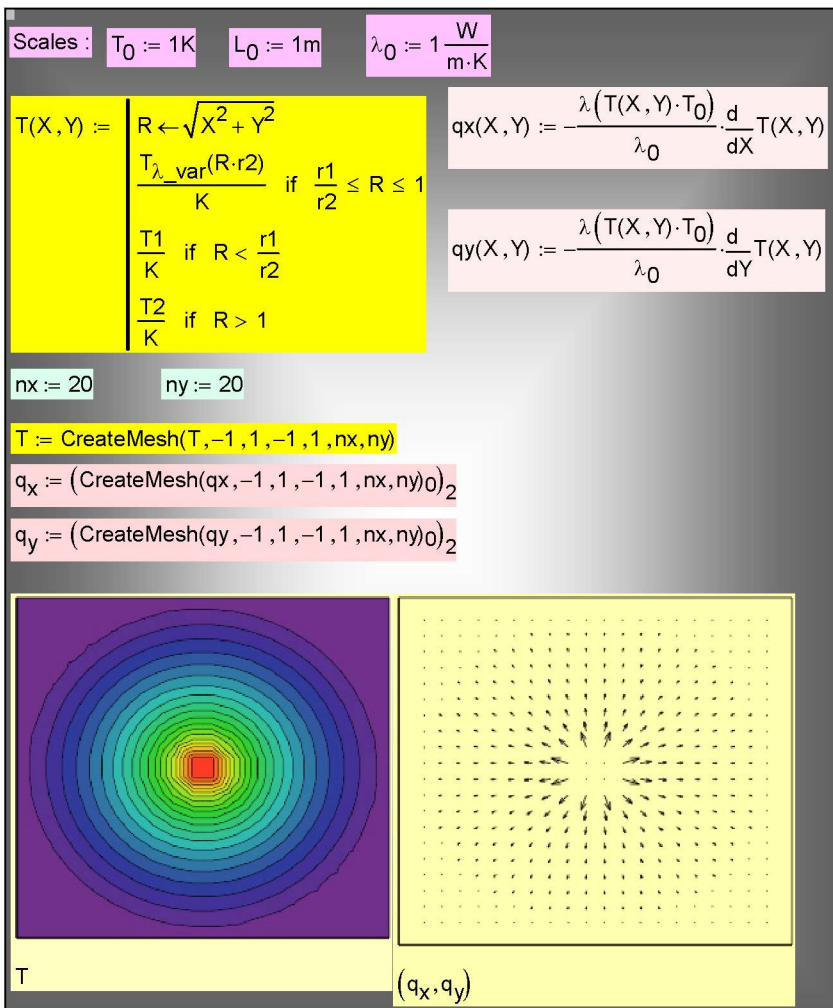


Рис. 4.12. Изотермы и векторное поле плотности теплового потока в цилиндрическом воздушном зазоре

**Важное замечание.** В реальном приборе для измерения теплопроводности воздуха методом нагретой нити теплота переносится не только теплопроводностью, но и излучением. Мы сознательно пренебрегли радиационной составляющей в приведенных выше вычислениях, поскольку темой раздела является теплопроводность.

Однако реалистичная модель установки должна учитывать вклад излучения. Дополнения к вычислительной программе сводятся к вычислению суммарного теплового потока, который должен быть обеспечен Джоулевым тепловыделением в нагреваемой нити:

$$q_{L\Sigma} = q_{L,\lambda} + q_{L,\text{Radiation}};$$

$$q_{L,\text{Radiation}} = \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_2^4)\pi d_1;$$

$$\varepsilon = 0,00013T_1 - 0,0025; \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2\text{К}^4),$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты платиновой нити,  $\sigma$  – константа Стефана–Больцмана,  $d_1$  – диаметр платиновой нити. Соответствующая модификация программы может быть темой самостоятельной работы.

### *Теплопередача через цилиндрическую стенку*

Формула (4.27) предназначена для расчета линейного теплового потока через цилиндрическую стенку, если заданы температуры на ее внутренней  $t_1$  и внешней  $t_2$  поверхностях:

$$q_L = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{R_{L,\lambda}}; \quad R_{L,\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \lambda_m} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $R_{L,\lambda}$  – *линейное* термическое сопротивление.

Получим теперь расчетное соотношение для *теплопередачи* через цилиндрическую стенку, когда заданными считаются температуры теплоносителей  $t_{f1}$  и  $t_{f2}$  и *коэффициенты теплоотдачи*  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по обе стороны стенки, как это было сделано ранее в случае плоской стенки (см.(4.14)).

Проблема состоит в вычислении *линейного* термического сопротивления теплоотдачи. Используя соотношение (4.25), связывающее линейную  $q_L$  и обычную  $q$  плотности теплового потока, получим на внутренней поверхности  $r_1$ :

$$q_L = q(r_1) \cdot 2\pi \cdot r_1 \xrightarrow{q(r_1) = \alpha_1(t_{f1} - t_1)} q_L = \alpha_1(t_{f1} - t_1) \cdot 2\pi \cdot r_1;$$

$$R_{L,\alpha 1} \equiv \frac{t_{f1} - t_1}{q_L} = \frac{1}{\alpha_1 2 \cdot r_1}$$

где  $R_{L,\alpha}$  – *линейное* термическое сопротивление теплоотдачи. Аналогично вычисляется линейное сопротивление теплоотдачи на поверхности  $r_2$ .

Формула теплопередачи получается для последовательной цепи трех *линейных* термических сопротивлений, через которые проходит один и тот же *линейный* тепловой поток  $q_L$ :

$$q_L = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_m} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi d_2}}. \quad (4.30)$$

Согласно (4.30), тепловой поток пропорционален температурному напору, что выражают краткой формулой:

$$q_L = k_L \cdot \pi (t_{f1} - t_{f2}), \quad (4.31)$$

где  $k_L$  – *линейный* коэффициент теплопередачи цилиндрической стенки:

$$k_L = \frac{1}{R_{L,\alpha1} + R_{L,\lambda} + R_{L,\alpha2}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_m} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (4.32)$$

*Линейные* термические сопротивления для цилиндрической задачи зависят от диаметра или соотношения диаметров, как это видно из формул (4.30), (4.32). Если зафиксировать внутренний диаметр  $d_1$  цилиндрического слоя и проследить за изменением  $q_L$  при увеличении наружного диаметра  $d_2$ , то обнаружатся две противодействующие тенденции: *уменьшение* внешнего сопротивления теплоотдачи  $R_{L\alpha2}$  против *увеличения* сопротивления цилиндрического слоя  $R_{L\lambda}$ :

$$d_2 \uparrow \Rightarrow \left( \frac{1}{2\lambda_m} \ln \frac{d_2}{d_1} \right) \uparrow; \quad \frac{1}{\alpha_2 d_2} \downarrow.$$

При этом следует ожидать появления экстремума на зависимости  $q_L(d_2)$ . Соответствующее исследование проведено в Mathcad с помощью символьного процессора (рис. 4.13). Действительно, обнаруживается максимум линейного потока  $q_L$  при некотором *критическом* значении диаметра  $d_2$ :

$$d_{cr} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \quad (4.33)$$

Как видно из определяющей формулы (4.33),  $d_{cr}$  является параметром, зависящим только от теплопроводности  $\lambda$  цилиндрического слоя (которая полагалась постоянной в этих вычислениях) и интенсивности теплоотдачи на внешней стороне (от коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2$ ).

$$q_L(d_2) := \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \pi \cdot d_1} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\alpha_2 \cdot \pi \cdot d_2}}$$

$$\frac{d}{d(d_2)}(q_L(d_2)) \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{\pi \cdot d_2^2 \cdot \alpha_2} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot d_2}\right) \cdot (t_{f1} - t_{f2})}{\left(\frac{1}{\pi \cdot d_1 \cdot \alpha_1} + \frac{1}{\pi \cdot d_2 \cdot \alpha_2} + \frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda}\right)^2}$$

$$\frac{d}{dd_2}q_L(d_2) = 0 \text{ solve } \rightarrow \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha_2} \qquad d_{cr} := \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha_2}$$

Рис. 4.13. Анализ функции  $q_L(d_2)$  на экстремум

Иллюстрацией зависимости  $q_L(d_2)$  служат график на рис. 4.14, где представлен случай  $d_1 < d_{cr}$ , когда линейный поток сначала возрастает при  $d_1 < d_2 < d_{cr}$ , достигает максимума при  $d_2 = d_{cr}$  и только затем начинает уменьшаться с ростом наружного диаметра  $d_2$  и толщины цилиндрического слоя  $(d_2 - d_1) / 2$ .

Понятие критического диаметра цилиндрического слоя имеет важное приложение в практике теплоизоляции трубопроводов. Для трубы с наружным диаметром  $d_1$ , на поверхность которой предполагается наносить слой изоляционного материала, следует проверить, выполняется ли условие  $d_{cr} < d_1$ , иначе тепловые потери только увеличатся, как на рис. 4.14. Установка такой «теплоизоляции» будет инженерной ошибкой.



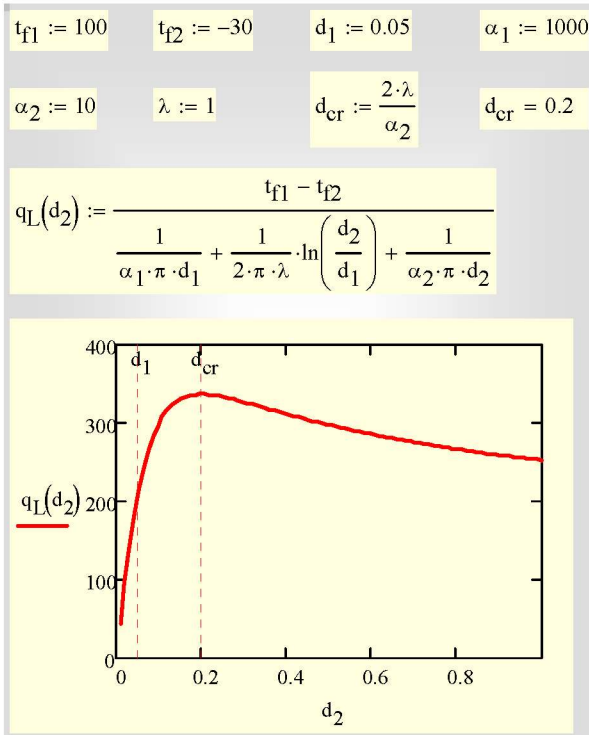


Рис. 4.14. Максимум на кривой  $q_L(d_2)$

## 4.6. Сферическая стенка

### Аналитическое решение

Запишем уравнение баланса (4.18) для сферического слоя  $F = 4\pi r^2$  без внутренних источников ( $q_V = 0$ ):

$$q(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = q(r_1) \cdot 4\pi \cdot r_1^2 \equiv Q = \text{const} . \quad (4.34)$$

Полный тепловой поток  $Q$ , Вт, распространяющийся в радиальном направлении, является постоянной величиной, не зависящей от радиуса  $r$ .

Выражая плотность теплового потока  $q(r)$  через градиент температуры в соответствии с (4.16) и принимая во внимание зависимость коэффициента теплопроводности от температуры,  $\lambda = \lambda(t)$ , приведем уравнение (4.34) к следующей форме с разделенными переменными:

$$\lambda(t) dt = -\frac{Q}{4\pi} \frac{dr}{r^2}; \quad Q = \text{const.}$$

Интегрируя левую и правую часть в согласованных пределах и учитывая, что на поверхности  $r = r_1$  поставлено *граничное условие* первого рода

$$t(r = r_1) = t_1,$$

получим:

$$\int_{t_1}^{t(r)} \lambda(t) \cdot dt = -\frac{Q}{4\pi} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\left[ \frac{\int_{t_1}^{t(r)} \lambda(t) \cdot dt}{(t(r) - t_1)} \right] \cdot (t(r) - t_1) = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \left( -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right). \quad (4.35)$$

В квадратных скобках записано среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности  $\lambda_m$  в интервале температур  $t_1 \div t(r)$ , т.е. в «текущем» слое  $r_1 \div r$ . Поэтому уравнение (4.35) дает  *неявное*  выражение для распределения температуры  $t(r)$ .

$$t(r) - t_1 = -\frac{Q}{4\pi\lambda_m} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (4.36)$$

Как разрешить уравнение относительно  $t(r)$  в случае, когда температурная зависимость  $\lambda(t)$  существенна, показано ранее в вычислительном примере для цилиндрического слоя с переменным коэффициентом теплопроводности (рис. 4.8 – рис. 4.10). Если же  $\lambda = \text{const}$ , то, согласно (4.36), температура в сферическом слое изменяется по *гиперболическому* закону  $1/r$ .

Интегрирование в полных пределах  $r_1 \div r_2$ ,  $t_1 \div t_2$  приводит к следующему основному расчетному соотношению для теплового потока через сферическую стенку:

$$Q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{4\pi \cdot \lambda_m} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \equiv \frac{\Delta t}{R_S}; \quad R_S = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_m} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.37)$$

где  $R_s$  – термическое сопротивление сферической стенки. Среднеинтегральное значение  $\lambda_m$  коэффициента теплопроводности в интервале температур  $(t_1, t_2)$  определяется формулой (4.22).

Замечательным свойством решения (4.37) для сферы является конечное, не равное нулю значение теплового потока  $Q$  для слоя бесконечной толщины,  $r_2 \rightarrow \infty, t_2 \rightarrow t_\infty$ :

$$Q = \frac{t_1 - t_\infty}{\frac{1}{4\pi \cdot \lambda_m r_1}}; \Rightarrow \frac{Q}{4\pi r_1^2} \equiv q_1 = \frac{\lambda_m}{r_1} (t_1 - t_\infty). \quad (4.38)$$

Получается, что термическое сопротивление бесконечного сферического слоя с внутренним радиусом  $r_1$  такое же, как для условной плоской стенки толщиной  $r_1$ .

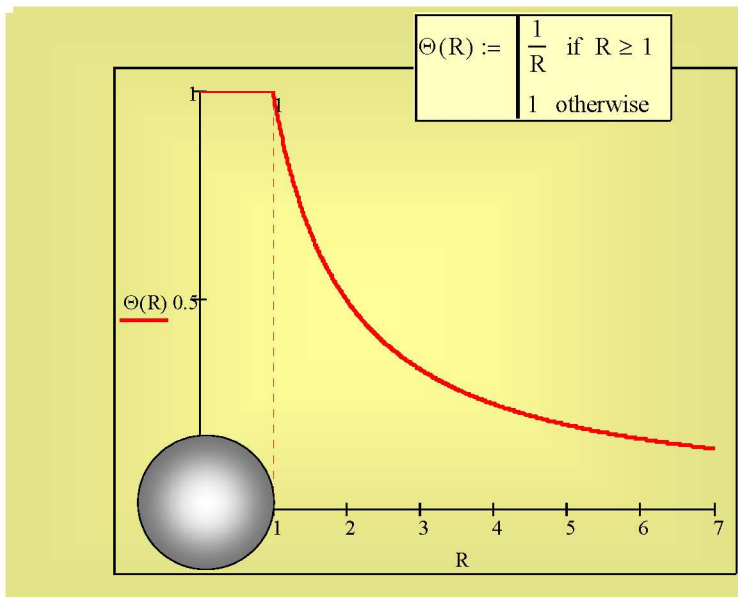
Предельное соотношение (4.38) для теплопереноса от твердой сферы в неподвижную окружающую среду (жидкость или газ) с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$  можно интерпретировать как процесс теплоотдачи и ввести соответствующий *коэффициент теплоотдачи*:

$$\frac{q_1}{(t_1 - t_\infty)} \equiv \alpha = 2 \frac{\lambda_m}{d_1}; \Rightarrow \frac{\alpha d_1}{\lambda_m} \equiv \text{Nu} = 2. \quad (4.39)$$

Безразмерное представление коэффициента теплоотдачи называется числом Нуссельта. Итак, для сферы в неподвижной среде  $\text{Nu} = 2$ .

Если поместить сферу с поддерживаемой на постоянном уровне температурой  $t_1$  в *бесконечную* среду с теплопроводностью  $\lambda$  и температурой  $t_\infty$ , то по прошествии некоторого времени установится *стационарное* состояние, описываемое уравнениями (4.38). Распределение температуры вокруг сферы будет определяться уравнением (4.36), которое в случае  $\lambda = \text{const}$  имеет вид (рис. 4.15):

$$\Theta \equiv \frac{(t(r) - t_\infty)}{t_1 - t_\infty} = \frac{1}{\left(\frac{r}{r_1}\right)}; \quad R \equiv \frac{r}{r_1} \geq 1.$$



**Рис. 4.15.** Стационарное температурное поле вокруг изотермической сферы

Здесь возникает видимый парадокс: теплота постоянно подводится к неподвижной окружающей среде, а температура в окрестности сферы не изменяется. Разрешение этого парадокса мы оставляем как предмет для самостоятельного анализа. Отметим, что для плоской и цилиндрической задач *не существует* стационарного решения при аналогичной постановке задачи.

### *Теплопередача через сферическую стенку*

Формула (4.37) предназначена для расчета теплового потока  $Q$ , Вт, через сферическую стенку, если заданы температуры на ее внутренней  $t_1$  и внешней  $t_2$  поверхностях:

$$Q = \frac{t_1 - t_2}{R_{S,\lambda}}; \quad R_{S,\lambda} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_m} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.40)$$

Чаще приходится рассчитывать *теплопередачу* через стенку сферического контейнера, когда заданными считаются темпе-

ратуры теплоносителей  $t_{f1}$  и  $t_{f2}$  и коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по обе стороны стенки.

Используя уравнение теплового баланса (4.34) и уравнение Ньютона-Рихмана, выпишем выражения теплового потока на внутренней и внешней поверхностях контейнера:

$$\begin{aligned}
 q(r_1) \cdot 4\pi r_1^2 &= q(r_2) \cdot 4\pi r_2^2 = Q; \\
 \alpha_1 (t_{f1} - t_1) \cdot 4\pi r_1^2 &= \alpha_2 (t_2 - t_{f1}) \cdot 4\pi r_2^2 = Q; \\
 Q &= \frac{(t_{f1} - t_1)}{\frac{1}{\alpha_1 4\pi r_1^2}} = \frac{(t_{f1} - t_1)}{R_{S,\alpha 1}}; \\
 Q &= \frac{(t_2 - t_{f1})}{\frac{1}{\alpha_2 4\pi r_2^2}} = \frac{(t_2 - t_{f1})}{R_{S,\alpha 2}},
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

где  $R_{S,\alpha}$  – термическое сопротивление теплоотдачи на сферической поверхности.

Формула теплопередачи получается для последовательной цепи трех термических сопротивлений (см. (4.40) и (4.41)), через которые проходит один и тот же тепловой поток  $Q$ :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{S,\alpha 1} + R_{S,\lambda} + R_{S,\alpha 2}} = \\
 &= \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 4\pi r_1^2} + \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_m \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} + \frac{1}{\alpha_2 4\pi r_2^2}}.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

#### 4.7. Теплопередача через стенки различной формы

Уравнения для расчета теплопередачи через плоскую стенку (формула (4.14), рис. 4.3), цилиндрическую (4.30) и сферическую (4.42) стенки можно записать в обобщенном виде:

$$Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda_m} \frac{1}{F_m} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}};$$

плоская стенка:  $F_m = F_1 = F_2 = F;$  (4.43)

цилиндрическая стенка:  $F_m = \frac{(F_2 - F_1)}{\ln(F_2 / F_1)};$

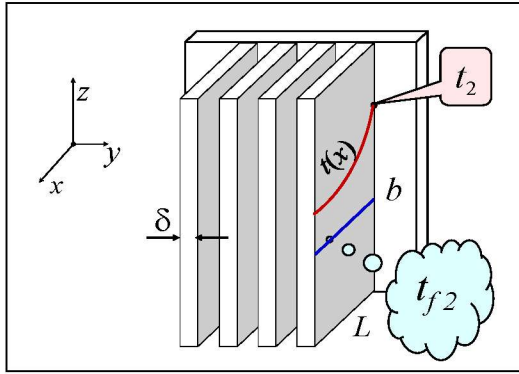
сферическая стенка  $F_m = \sqrt{F_1 F_2}.$

где  $F_1$  и  $F_2$  – площади внутренней и наружной поверхностей стенки,  $F_m$  – средняя расчетная поверхность стенки.

Расчетные соотношения (4.43) применяют также для приближенных оценок теплопередачи через стенки другой, более сложной геометрии, не включенной в приведенный перечень. Предварительно следует решить вопрос об отнесении нестандартной формы к тому или иному геометрическому типу. Например, толстостенный прямоугольный контейнер с тремя примерно равными размерами следует считать шаровой стенкой, а толстостенную трубу квадратного поперечного сечения рассматривать как цилиндрическую стенку. Если же требования к точности результатов высоки, то следует провести расчеты многомерных температурных полей в математических пакетах, таких как ANSYS или COMSOL.

#### 4.8. Интенсификация теплопередачи посредством оребрения

Анализируя формулу теплопередачи (4.43), мы замечаем, что конвективное сопротивление ( $1/\alpha F$ ) уменьшается с увеличением поверхности теплосъема  $F$ . Можно искусственно «развить» поверхность посредством оребрения (рис. 4.16), которое устанавливается на лимитирующей стороне поверхности теплопередачи, т.е. там, где коэффициент теплоотдачи наименьший, например, со стороны газа (с температурой  $t_2$  на рис. 4.16) в теплообменниках типа «жидкость-газ».



**Рис. 4.16. Оребренная поверхность теплопередачи:**  
 $\delta$  – толщина ребра;  $L$  – длина ребра (размер по осям);  
 $b$  – ширина ребра (размер по оси  $z$ )

Простейшая расчетная модель оребренной поверхности теплопередачи представлена последовательной схемой включения термических сопротивлений:

- теплоотдачи на неоребренной стороне поверхности;
- теплопроводности;
- эффективной теплоотдачи на оребренной стороне:

$$Q = \frac{t_{f1} - t_1}{\left(\frac{1}{\alpha_1 F_0}\right)}; \quad Q = \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{\delta}{\lambda F_0}\right)}; \quad Q = \frac{t_2 - t_{f2}}{\left(\frac{1}{\alpha_{2eff} F_0}\right)}$$

$$\boxed{t_{f1}} \xrightarrow{Q} \boxed{t_1} \xrightarrow{Q} \boxed{t_2} \xrightarrow{Q} \boxed{t_{f2}} \quad (4.44)$$

$$Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_0} + \frac{\delta}{\lambda_m F_0} + \frac{1}{\alpha_{2eff} F_0}} = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_m} + \frac{1}{\alpha_{2eff}}} F_0$$

Мы свели задачу с оребренной поверхностью к некоторой эквивалентной схеме с гладкой основной поверхностью  $F_0$ , но, как мы надеемся, с увеличенным *эффективным* значением коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{2eff}$ , благодаря увеличению поверхности теплосъема посредством оребрения. Покажем, что ожидаемое увеличение действительно имеет место.

Эффективная теплоотдача на оребренной поверхности рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q &= \underbrace{\alpha_2 (t_2 - t_{f2}) F_{free}}_{\text{свободная часть}} + \underbrace{\alpha_2 (t_2 - t_{f2}) F_{fin} E}_{\text{оребрение}} \Rightarrow \alpha_{2eff} F_0 (t_2 - t_{f2}); \\
 \alpha_{2eff} &= \alpha_2 \left[ \frac{F_{free}}{F_0} + \frac{F_{fin}}{F_0} E \right]; \\
 E &\equiv \frac{\alpha_2 (t_2 - t_{f2}) F_{fin} E}{\alpha_2 (t_2 - t_{f2}) F_{fin}} \equiv \\
 &\equiv \frac{\text{реальный теплосъем}}{\text{теплосъем со "сверхпроводящего" ребра}},
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

где  $F_{free}$  – часть поверхности  $F_0$ , не занятая основаниями ребер,  $F_{fin}$  – поверхность ребер,  $E$  – коэффициент эффективности ребра,  $E \leq 1$ .

Введение коэффициента эффективности  $E$  учитывает то обстоятельство, что избыточная температура ребра (по отношению к окружающей жидкости) *уменьшается* по его высоте, отсчитываемой от основания ребра (рис. 4.16), следствием чего является и уменьшение теплосъема с его поверхности. Предел  $E \rightarrow 1$  получается для идеального, «сверхтеплопроводного» ребра, температура которого остается постоянной (равной температуре основания  $t_2$ ) по всей высоте.

Величина

$$\frac{F_{free} + F_{fin}}{F_0} \tag{4.46}$$

называется *коэффициентом оребрения* и показывает, во сколько раз увеличивается поверхность теплосъема при установке оребрения. Степень «развития» поверхности может достигать тридцатикратного значения.

Из (4.44) следует, что предельная степень увеличения  $\alpha_{2eff}$  равна коэффициенту оребрения (4.46), если коэффициент эффективности  $E$  близок к предельному значению,  $E \rightarrow 1$ .



$$\alpha_{2eff} = \alpha_2 \left[ \frac{F_{free}}{F_0} + \frac{F_{fin}}{F_0} E \right] \xrightarrow{E \rightarrow 1} \alpha_{2eff} =$$

$$= \alpha_2 \left[ \frac{F_{free} + F_{fin}}{F_0} \right]. \quad (4.47)$$

Итак, теплопередача через ребренную стенку рассчитывается по формулам:

$$\alpha_{2eff} = \alpha_2 \left[ \frac{F_{free}}{F_0} + \frac{F_{fin}}{F_0} E \right];$$

$$Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_0} + \frac{\delta}{\lambda_m F_0} + \frac{1}{\alpha_{2eff} F_0}} = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_m} + \frac{1}{\alpha_{2eff}}} F_0. \quad (4.48)$$

Относительно коэффициента эффективности  $E$  можно предполагать, что его значение зависит от теплопроводности материала ребра, геометрии, интенсивности теплоотдачи поверхности. Для плоских ребер, как на рис. 4.16, справедлива следующая расчетная формула:

$$E = \frac{\tanh(mL)}{mL}; \quad m = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \frac{(2\delta + 2b)}{\delta b}} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \frac{2}{\delta}}. \quad (4.49)$$

Это соотношение будет результатом решения в следующем параграфе классической задачи теплопроводности вдоль стержня постоянного сечения.

#### 4.9. Теплопроводность вдоль ребра

Представление о стержне как геометрическом объекте (рис. 4.17) содержит по умолчанию соотношение размеров:

т.е. длина стержня  $L$  (вдоль оси  $x$  на рис. 4.17) полагается существенно большей его характерного поперечного размера  $\delta$ . Задано поперечное сечение  $f$ ,  $m^2$ , через которое распространяется тепловой поток вдоль стержня, и периметр сечения  $u$ ,  $m$ , по которому происходит теплоотдача в окружающую среду. Параметры  $f$ ,  $u$  постоянны по длине.

Температура левого торца стержня ( $x = 0$ ) поддерживается равной  $t_0$ , температура среды  $t_f$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  на поверхности стержня постоянны по длине. Для определенности принято  $t_0 > t_f$  (рис. 4.17).

Из списка теплофизических параметров материала стержня для рассматриваемой стационарной задачи актуальна теплопроводность  $\lambda$ , Вт/(м К).

Ясно, что вследствие тепловода с боковой поверхности температура стержня будет убывать вдоль  $x$ , пока – при достаточной длине  $L$  – практически не сравняется с температурой окружающей среды. При построении математической модели мы намереваемся *имитировать* теплосъем с поверхности посредством внутреннего стока тепла, поэтому на рис. 4.17 внутри элементарного контрольного объема ( $f dx$ ) изображена «черная дыра».

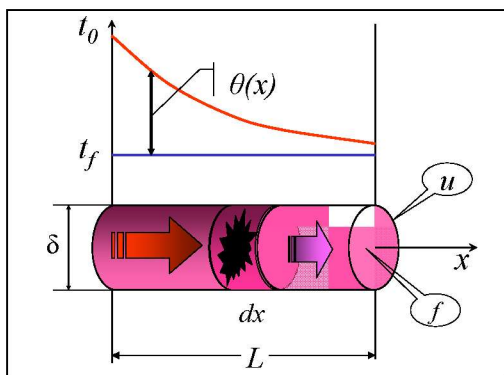


Рис. 4.17. Теплопроводность вдоль стержня

Предметом расчета является распределение температуры по длине стержня и тепловой поток, отдаваемый с поверхности в окружающую среду:

$$t(x) = ? \quad \vartheta(x) \equiv t(x) - t_f = ?$$

$$Q, \text{ Вт} = ?$$

Начнем с простых *оценок порядка величин*. Тепловой поток вдоль стержня определяется, в соответствии с законом теплопроводности Фурье, продольным *градиентом температуры* (рис. 4.17):

$$Q \approx \lambda \frac{t_0 - t_f}{L} f = \lambda \frac{\vartheta_0}{L} f; \quad \vartheta_0 \equiv t_0 - t_f.$$

Этот тепловой поток снимается с поверхности стержня посредством теплоотдачи под действием *температурного напора* порядка  $(t_0 - t_f)$ :

$$Q \approx \alpha (t_0 - t_f) (L \cdot u) = \alpha \vartheta_0 (L \cdot u).$$

Приравнивая правые части этих оценочных выражений, получают:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\vartheta_0}{L} f \approx \alpha \vartheta_0 (L \cdot u) &\Rightarrow \frac{\alpha u}{\lambda f} L^2 \approx 1; \\ \frac{f}{u} \equiv \delta_0; \quad \text{Bi} \equiv \frac{\alpha \delta_0}{\lambda} \equiv \frac{\delta_0 / \lambda}{1/\alpha}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{L}{\delta_0} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Bi}}}. \quad (4.50)$$

Величина  $\delta_0$  является характерным поперечным размером стержня. Для круглого сечения  $\delta_0$  есть четверть диаметра, а для плоского ребра на рис. 4.16 – примерно половина толщины.

Важным результатом (см. (4.50)) является формирование безразмерного параметра  $\text{Bi}$  – числа Био, задающего соотношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности и внешнего термического сопротивления теплоотдачи.

Видно, что характерная длина стержня, на которой «срабатывается» весь располагаемый температурный перепад  $(t_0 - t_f)$ , обратна корню из числа Био. Таким образом, указанное в начале параграфа характерное соотношение размеров в модели теплопроводности стержня,  $L \gg \delta_0$ , имеет место при *малых числах Био*. Далее, используя это условие, получают следующее отношение характерных температурных перепадов:

$$\begin{aligned} q \approx \alpha (t_{surf} - t_f) &\approx \frac{t_{axis} - t_{surf}}{\delta / \lambda} \Rightarrow \\ \frac{t_{axis} - t_{surf}}{t_{surf} - t_f} &\approx \frac{\alpha \delta}{\lambda} \equiv \text{Bi}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

т.е. при малых Био температура слабо изменяется по поперечному сечению стержня и может быть принята *примерно постоянной* в данном сечении. Результатом этой оценки является идея применить *одномерную модель* теплопроводности стержня, учитывающую только продольные, вдоль оси  $x$ , изменения температуры:  $t(x)$ .

Для *стационарной одномерной* задачи (рис. 4.17) дифференциальное уравнение теплопроводности записывается следующим образом:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t(x)}{\partial x} \right)}_{\substack{\text{Подвод теплоты} \\ \text{к единичному контрольному объему} \\ \text{посредством теплопроводности}}} + \underbrace{q_V}_{\substack{\text{Внутреннее} \\ \text{тепловыделение}}}. \quad (4.52)$$

Вообще говоря, мощность внутренних источников  $q_V$  характеризует скорость *объемного* тепловыделения (при ядерной или химической реакции, при прохождении электрического тока). Однако далее мы используем источник теплоты (с обозначением  $q_{V+}$ ) для *имитации теплоподвода* через боковую поверхность стержня:

$$\underbrace{q_s \cdot (u \, dx)}_{\substack{\text{Теплоподвод через} \\ \text{боковую поверхность}}} = \underbrace{q_{V+} \cdot (f \, dx)}_{\substack{\text{Имитация посредством} \\ \text{источника}}} \Rightarrow q_{V+} = q_s \frac{u}{f}. \quad (4.53)$$

где  $f$  – поперечное сечение,  $u$  – периметр сечения, по которому происходит теплообмен на боковой поверхности,  $q_s$  – плотность теплового потока на боковой поверхности.

Величина  $q_s$  определяется уравнением Ньютона-Рихмана, и для  $q_{V+}$  получим:

$$q_{V+} = q_s \frac{u}{f} \Rightarrow q_{V+} = \alpha (t_f - t(x)) \frac{u}{f}, \quad (4.54)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности,  $t_f$  – температура окружающей среды. (Поскольку мы рассчитываем *теплоподвод* к стержню, то в качестве температурного напора взята разность  $(t_f - t(x))$ , как будто температура среды больше температуры стержня).

С учетом выражения (4.54) для  $q_{V+}$ , дифференциальное уравнение теплопроводности записывается в следующем виде:

$$0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{t(x)}{\partial x} \right) \alpha_s \left( f \quad ( ) \right) \frac{u}{f}. \quad (4.55)$$

Полагая коэффициент теплопроводности постоянной величиной, получим для избыточной температуры  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{2\theta}{f}; \quad \theta(x) \equiv \theta_0 \cos \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} x = \text{const}. \quad (4.56)$$

На левом торце стержня  $x = 0$  (в основании ребра) задается температура  $t_0$  (т.е. ставится граничное условие Дирихле). На правом торце ( $x = L$ ) теплоотвод в окружающую среду будет пренебрежимо мал – по сравнению с теплосъемом с боковой поверхности *длинного* ребра ( $L u \gg f$ ); поэтому ставится условие Неймана с нулевым тепловым потоком (нулевым градиентом температуры). Соответственно сказанному формулируются краевые условия:

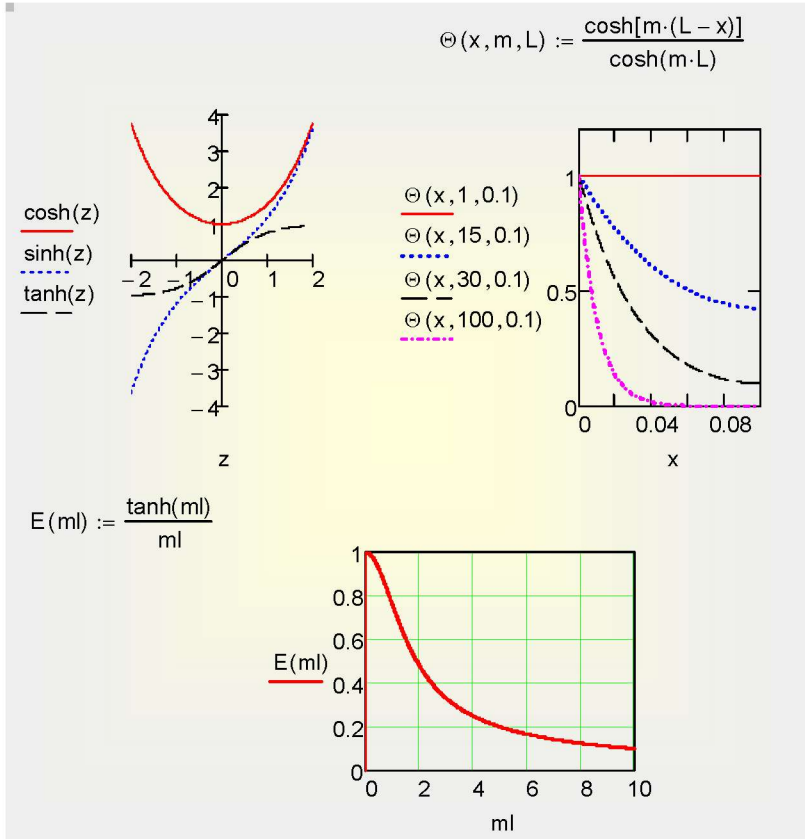
$$\theta(x=0) = \theta_0 \equiv t_0 - t_f; \quad \left. \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right|_{x=L} \equiv \left. \frac{\partial t(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.57)$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4.56) найти несложно. Корнями характеристического многочлена этого уравнения будут два различных действительных числа ( $\pm m$ ), поэтому общее решение строится как суперпозиция функций вида  $\exp(\pm mx)$ . С учетом краевых условий, получим следующее *распределение избыточной температуры*  $\theta$  (см. рис. 4.18) по длине стержня (ребра):

$$\theta(x) \equiv \theta_0 \cos \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} x; \quad \theta_0 \equiv t_0 - t_f. \quad (4.58)$$

Тепловой поток  $Q$ , снимаемый с поверхности, согласно тепловому балансу, равен тепловому потоку, проходящему через основание стержня (ребра) при  $x = 0$ :

$$\left( -\lambda \frac{d\theta(x)}{dx} \right)_{x=0} = \theta_0 \sqrt{\alpha \lambda} h \quad ( ). \quad (4.59)$$



**Рис. 4.18.** Распределения температуры вдоль стержня (ребра) при различных значениях параметра  $m$ . Коэффициент эффективности как функция приведенной длины  $ml$

Коэффициент эффективности, по определению, вычисляется как:

$$\equiv \frac{\vartheta_0 \sqrt{\lambda h} ( )}{\vartheta_0 ( )} = \frac{\vartheta_0 \sqrt{\lambda h} ( )}{\vartheta_0 ( )} \Rightarrow$$

Гипотетический максимальный  
 теплосъем с поверхности  
 изотермического ребра

$$\frac{h ( )}{h ( )} \quad (4.60)$$

Для плоского прямоугольного ребра (рис. 4.16) геометрические параметры и коэффициент  $m$  выражаются следующим образом:

$$+ \quad = \sqrt{\frac{\alpha (2\delta + 2b)}{\lambda \delta b}} \xrightarrow{\ll b} \approx \sqrt{\frac{\alpha 2}{\lambda \delta}}. \quad (4.61)$$

Распределение температуры по длине ребра (4.58) представлено графически (рис. 4.18) при различных значениях параметра  $m$  (4.56), являющегося мерой интенсивности теплоотвода с поверхности в окружающую среду. При больших значениях  $m$  температура ребра быстро убывает и сравнивается с температурой окружающей среды. Другими словами, большая часть поверхности ребра не участвует в теплообмене. Бесплезными оказываются затраты на изготовление излишне длинных ребер. Они *неэффективны*, о чем свидетельствует и график  $E(mL)$ .

Из этого обсуждения следует, что должна быть поставлена задача *оптимального проектирования* оребрения (см. следующий параграф).

Заметим, что в конце этого параграфа мы сделали акцент на одном, технически наиболее важном, приложении теории теплопроводности вдоль стержня, а именно, оребрению поверхности с целью интенсификации теплопередачи. Существуют и другие приложения. Например, при тепловых измерениях возникает ошибка из-за подвода / отвода тепла по элементам конструкции температурного зонда. Расчетной моделью может быть рис. 4.17, где стержень представляет зонд с датчиком температуры (спаем термопары, терморезистором) на правом торце. Тогда формула (4.58), записанная для ( $x = L$ ),

$$t(L) - t_f = (t_0 - t_f) \frac{1}{\cosh(mL)},$$

дает соотношение между истинной, подлежащей измерению температурой жидкости  $t_f$ , действительно измеренным значением  $t(L)$  и дополнительно контролируемым значением  $t_0$ . Разность температур  $(t(L) - t_f)$  определяет систематическую ошибку измерения.

Температурные поля в *стержневых и ребристых* дистанционирующих и обеспечивающих жесткость элементах конструкций, а также в различных *оболочках*, в случаях, когда выполняются соотношения:

$$\gg \delta; \quad \text{Bi} \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \ll 1,$$

также принадлежат к рассмотренному в данном параграфе кругу задач. Обобщение теории на нестационарные задачи, переменные значения параметров, таких как поперечное сечение  $f$  и т.п., см. в гл. 7.

### *Метод осреднения*

Более строгий способ вывода уравнения теплопроводности вдоль стержня (см. (4.55), (4.56)), позволяющий оценить принимаемые допущения, основывается на методе осреднения. Рассмотрим плоское бесконечное (по линии контакта со стенкой, вдоль координаты  $z$ ) ребро (рис. 4.16). Полагая  $x$  продольной, а  $y$  поперечной (то толщине ребра  $\delta$ ) координатой, выпишем точное уравнение теплопроводности для стационарной *двухмерной* задачи без внутренних источников тепла, а также граничные условия на боковой поверхности ( $y = \delta/2$ ) и на осевой линии (условие симметрии при  $y = 0$ ; координата  $y$  отсчитывается от середины ребра):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0; \quad (4.62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta/2} = \alpha (f - t(x, y = \delta/2)); \\ -\lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \end{array} \right.$$

Очевидно, нельзя просто пренебречь в ДУ теплопроводности (4.62) второй производной по  $y$ , основываясь на оценке (4.51). Это привело бы к *линейному* распределению температуры по длине  $x$ , как для совсем другой задачи – о теплопроводности через плоскую стенку (см. п. 4.1). Эффект теплосъема с *боковой поверхности* оказался бы полностью проигнорированным.



Вместо этого, *усредним* ДУ теплопроводности по поперечному сечению ребра (т.е. проинтегрируем по  $y$  в полных пределах  $0 \div \delta/2$ ):

$$\int_0^{\delta/2} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy + \int_0^{\delta/2} -\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) dy = 0;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \int_0^{\delta/2} dy + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) \Big|_0^{\delta/2} = 0; \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{\delta/2} \int_0^{\delta/2} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy.$$

Операция с первым интегралом проведена по *правилу дифференцирования интеграла по параметру*, в качестве которого здесь выступает  $x$ . Второй интеграл вычисляется непосредственно. Интегрирование по толщине ребра дает среднюю температуру по сечению ребра.

Завершим вычисления (4.63), применяя граничные условия (4.62) на боковой поверхности ( $y = \delta$ ) и на оси ( $y = 0$ ) для вычисления производной  $\partial t / \partial y$ :

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) \cdot \frac{\delta}{2} + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) \Big|_{y=\delta/2} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) \cdot \frac{\delta}{2} + \left[ -\alpha_f \left( \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \right) \right] = 0; \quad (4.64)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda \delta} \left( \frac{\delta}{2} \right).$$

(толщина ребра  $\delta$  принимается постоянной величиной).

Благодаря *осреднению*, удалось исключить независимую переменную  $y$  (т.е. понизить размерность задачи), сохранив при этом – в среднем (!) – эффекты поперечного теплового потока и теплосъема с боковой поверхности.

Результат с точностью до обозначений совпадает с полученным ранее уравнением (4.56). Мы видим теперь, что температура стержня  $t(x)$  есть среднеинтегральное значение по сечению стержня и что температура поверхности принимается равной этому среднему значению. Мерой справедливости принятого приближения является малость числа Био.

## 4.10. Оптимизация оребрения

При проектировании стремятся обеспечить заданный теплосъем (тепловой поток  $Q$ ) при *минимальной* массе оребрения. Это означает экономию металла, меньший вес и габариты, что особенно важно для мобильных устройств. Другой формулировкой этой же задачи будет обеспечение *максимального* теплового потока при *фиксированной* массе (металлоемкости) оребрения; тогда *целевой функцией* оптимизации является тепловой поток  $Q$ .

На практике добавляются определенные *ограничения*, связанные с технологичностью конструкции, ее прочностью и т.п. Например, толщина ребра не должна быть меньше некоторого минимума  $\delta_{\min}$ , оцениваемого несколькими десятками долями миллиметра, иначе вероятны повреждения при эксплуатации.

В число *варьируемых проектных параметров* входят прежде всего геометрические параметры ребра  $L$ ,  $\delta$ . Поскольку масса и ширина ребра фиксированы, фактически остается один варьируемый параметр, например, длина ребра  $L$ .

Краткой формулировкой задачи оптимизации будет:

Целевая функция:  $Q \rightarrow \max$

Варьируемый проектный параметр:  $L$

Ограничения:

$b = \text{const}$  (ширина ребра фиксирована)

$L \cdot \delta = \text{Mass} = \text{const}$  (масса ребра фиксирована)

$\delta \geq \delta_{\min}$

Алгоритм поиска несложен. Необходимо исследовать зависимость  $Q(L)$ , имея в виду, что увеличение длины  $L$  автоматически ведет к уменьшению толщины  $\delta$  из-за постоянства металлоемкости ребра (ограничения  $\text{Mass} = \text{const}$ ). Если обнаружится максимум, то следует зафиксировать его положение обычными способами поиска экстремума.

Вычисления в Mathcad показаны на рис. 4.19 – рис. 4.21. Видно, что оптимум существует: зависимость теплового потока от длины ребра имеет максимум. Положение максимума следующее:

$$\begin{aligned}(mL)_{opt} &= 1.42; \\ E_{opt} &= 0.63\end{aligned}\quad (4.65)$$

Характерное распределение температуры вдоль оптимального ребра показано на рис. 4.20 и рис. 4.21. Видно, что по длине ребра «срабатывается» примерно половина полного температурного напора.

Изменение оптимальных размеров ребра в зависимости от интенсивности теплоотдачи  $\alpha$  можно проследить, сопоставляя рис. 4.20 (свободная конвекция) и рис. 4.21 (вынужденная конвекция, установка вентилятора).

**Оптимизация оребрения** SI

$b := 1000 \text{ mm}$      $L_0 := 50 \text{ mm}$      $\delta_0 := 0.5 \text{ mm}$      $\lambda := 110 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

$\alpha := 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$      $T_0 := 350 \text{ K}$      $T_f := 300 \text{ K}$

$\text{Mass} := L_0 \cdot \delta_0$      $\text{Mass} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$

$Q_M(L_X) :=$   $\left\{ \begin{array}{l} \delta \leftarrow \frac{\text{Mass}}{L_X} \\ u \leftarrow 2 \cdot b + 2 \cdot \delta \\ f \leftarrow b \cdot \delta \\ m_{\text{fin}} \leftarrow \sqrt{\frac{\alpha \cdot u}{\lambda \cdot f}} \\ Q \leftarrow (T_0 - T_f) \cdot \sqrt{\alpha \cdot u \cdot (\lambda \cdot f)} \cdot \tanh(m_{\text{fin}} \cdot L_X) \end{array} \right.$

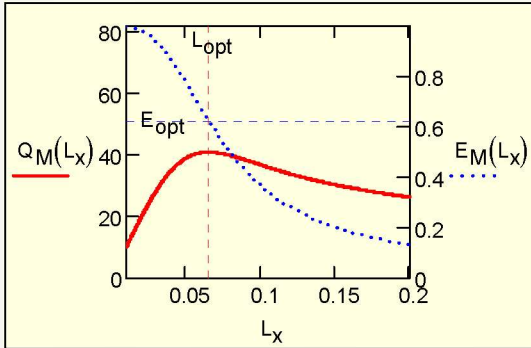
$E_M(L_X) :=$   $\left\{ \begin{array}{l} \delta \leftarrow \frac{\text{Mass}}{L_X} \\ u \leftarrow 2 \cdot b + 2 \cdot \delta \\ f \leftarrow b \cdot \delta \\ m_{\text{fin}} \leftarrow \sqrt{\frac{\alpha \cdot u}{\lambda \cdot f}} \\ E \leftarrow \frac{\tanh(m_{\text{fin}} \cdot L_X)}{m_{\text{fin}} \cdot L_X} \end{array} \right.$      $dQ_M(L_X) := \frac{d}{dL_X} Q_M(L_X)$

Рис. 4.19. Расчет теплового потока и коэффициента эффективности в зависимости от длины ребра при фиксированной металлоемкости Mass

$$L_{\text{opt}} := \text{root}(dQ_M(X), X, 1 \text{ mm}, 200 \text{ mm}) \quad L_{\text{opt}} = 65.163 \cdot \text{mm}$$

$$\delta_{\text{opt}} := \frac{\text{Mass}}{L_{\text{opt}}} \quad \delta_{\text{opt}} = 0.384 \cdot \text{mm}$$

$$E_{\text{opt}} := E_M(L_{\text{opt}}) \quad E_{\text{opt}} = 0.627$$



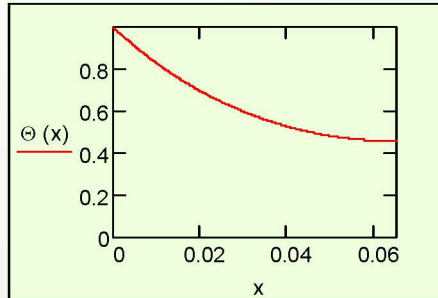
$$Q_M(L_{\text{opt}}) = 40.861 \text{ W}$$

$$\alpha = 10 \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \text{ W}$$

$$\lambda = 110 \frac{1}{\text{m} \cdot \text{K}} \text{ W}$$

$$m_{\text{opt}} := \sqrt{\frac{\alpha \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot \delta_{\text{opt}})}{\lambda \cdot (b \cdot \delta_{\text{opt}})}} \quad m_{\text{opt}} = 21.774 \frac{1}{\text{m}} \quad m_{\text{opt}} \cdot L_{\text{opt}} = 1.419$$

$$\Theta(x) := \frac{\cosh[m_{\text{opt}} \cdot (L_{\text{opt}} - x)]}{\cosh(m_{\text{opt}} \cdot L_{\text{opt}})}$$



**Рис. 4.20. Поиск оптимума для латунного ребра в режиме свободной конвекции воздуха**

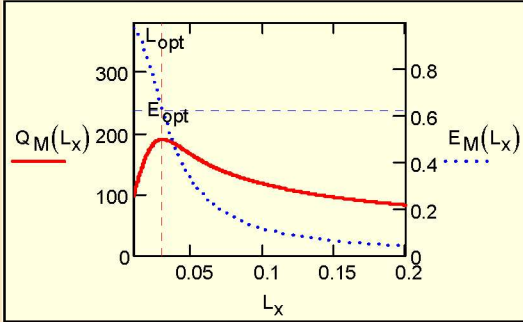
$$L_{\text{opt}} := \text{root}(dQ_M(X), X, 1 \text{ mm}, 200 \text{ mm}) \quad L_{\text{opt}} = 30.235 \cdot \text{mm}$$

$$\delta_{\text{opt}} := \frac{\text{Mass}}{L_{\text{opt}}}$$

$$\delta_{\text{opt}} = 0.827 \cdot \text{mm}$$

$$E_{\text{opt}} := E_M(L_{\text{opt}})$$

$$E_{\text{opt}} = 0.627$$



$$Q_M(L_{\text{opt}}) = 189.716 \text{ W}$$

$$\alpha = 100 \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \text{ W}$$

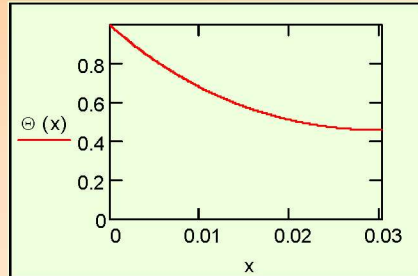
$$\lambda = 110 \frac{1}{\text{m} \cdot \text{K}} \text{ W}$$

$$m_{\text{opt}} := \sqrt{\frac{\alpha \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot \delta_{\text{opt}})}{\lambda \cdot (b \cdot \delta_{\text{opt}})}}$$

$$m_{\text{opt}} = 46.912 \frac{1}{\text{m}}$$

$$m_{\text{opt}} \cdot L_{\text{opt}} = 1.418$$

$$\Theta(x) := \frac{\cosh[m_{\text{opt}} \cdot (L_{\text{opt}} - x)]}{\cosh(m_{\text{opt}} \cdot L_{\text{opt}})}$$



**Рис. 4.21. Поиск оптимума для латунного ребра в режиме вынужденной конвекции воздуха**

Список варьируемых проектных параметров может быть расширен. Ясно, например, что при охлаждении в режиме свободной конвекции слишком тесное расположение ребер приведет к уменьшению коэффициента теплоотдачи, так как движение охлаждающего воздуха в зазоре между ребрами будет затруднено. Поэтому следует включить в указанный список шаг оребрения. Увеличение числа варьируемых параметров приводит к *многомерным задачам оптимизации*, анализ которых составляют предмет специального раздела прикладной математики.

## Глава 5. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

### 5.1. Введение

Для оптимального управления пусковыми и переходными (т.е. *нестационарными*) режимами энергетических или теплотехнологических установок необходимо рассчитывать *нестационарные* температурные поля в элементах машин и оборудования. Прогнозирование температурного поля позволяет избежать недопустимого повышения температуры или возникновения слишком больших перепадов температуры. Характерным примером служит управление пуском мощной паровой турбины на тепловой электростанции. Естественное стремление оперативно ввести резервную энергетическую мощность наталкивается на ограничения – могут произойти недопустимые изменения осевых зазоров в проточной части турбины из-за неодинакового расширения или возникнуть недопустимые температурные напряжения в массивных деталях ротора и статора турбины.

Нестационарные задачи теплопроводности, связанные с расчетом времени нагрева или охлаждения различных объектов, оценкой скорости выравнивания температуры, определением количества аккумулируемой или отдаваемой теплоты, часто возникают в различных теплотехнологических процессах, при термической обработке материалов и т.д.

Математические модели для этого круга задач представляются дифференциальными уравнениями в *частных производных*, в отличие от ранее рассмотренных (гл. 4) более простых *одномерных стационарных* задач, описываемых *обыкновенными* дифференциальными уравнениями. В данной главе предметом анализа будут классические нестационарные линейные задачи теории теплопроводности для тел простой геометрии, допускающие аналитические решения.

Напомним физическое содержание *дифференциального уравнения теплопроводности* (5.1), выведенного ранее в гл. 2 (рис. 5.1):

$$\rho_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t + q_v). \quad (5.1)$$

Увеличение во времени теплосодержания единичного контрольного объема  $dV$  (левая часть уравнения (5.1)) происходит благодаря

- внутреннему тепловыделению  $q_v$  и
- подводу тепла посредством теплопроводности через границы контрольного объема (оператор  $\operatorname{div} \mathbf{q}$ , где плотность теплового потока определяется законом Фурье  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} t$ ).

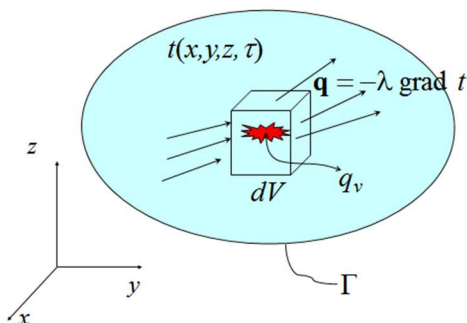


Рис. 5.1. Теплопроводность

Коэффициенты уравнения (5.1), а именно, теплофизические свойства (теплопроводность  $\lambda$ , Вт/(м К), удельная теплоемкость  $c_p$ , Дж/(кг К) и плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>), а также мощность внутренних источников теплоты  $q_v$ , Вт/м<sup>3</sup>, могут зависеть от температуры, а также быть явными функциями координат и времени. Однако при решении основных, классических задач курса их полагают постоянными величинами, и тогда уравнение теплопроводности записывается следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c_p}; \quad a \equiv \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (5.2)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\nabla^2 \equiv \Delta$  – оператор Лапласа, в декартовых координатах:

$$\nabla^2 t \equiv \Delta t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

## 5.2. Пластина

Рассмотрим процесс охлаждения пластины, первоначально нагретой до температуры  $t_0$ , в среде с постоянной температурой  $t_f < t_0$  и при заданной постоянной интенсивности теплоотдачи ( $\alpha$ ) на поверхности (рис. 5.2). Начальное распределение  $t_0$  и условия охлаждения симметричны относительно средней плоскости пластины. Благодаря этому, распределения температуры в последующие различные моменты времени  $\tau$  также останутся симметричными относительно оси. Ясно, что процесс охлаждения завершится установлением температуры на уровне окружающей среды.

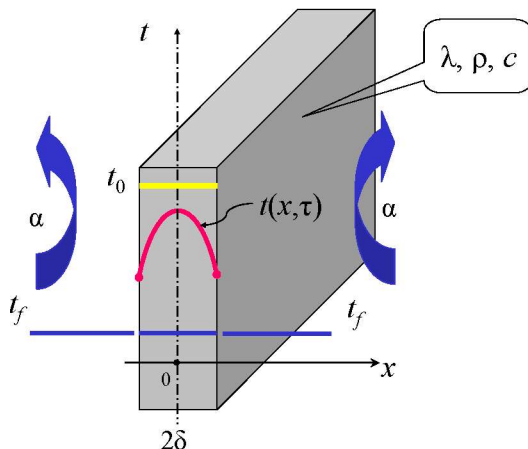


Рис. 5.2. Охлаждение пластины

Нестационарное температурное поле пластины будет *одномерным*, изменяющимся по ее толщине (по координате  $x$ , как на рис. 5.2), если

- пластина *тонкая* и, следовательно, можно пренебречь теплопроводом с ее торцов;
- условия охлаждения ( $t_f, \alpha$ ) постоянны вдоль поверхностей пластины;
- начальное распределение равномерное или, по крайней мере, одномерное, изменяющееся только вдоль координаты  $x$ .



При постановке задачи задают теплофизические свойства материала: коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , плотность  $\rho$ , удельную теплоемкость  $c$ , которые полагаются постоянными величинами. Единственным геометрическим параметром задачи является толщина пластины ( $2\delta$ ).

Результатом решения будет некоторое конкретное выражение для температурного поля пластины:

$$t = t(x, \tau; t_0, t_f, \lambda, \rho, c_p, \delta, \alpha),$$

где  $t$  – температура, зависимая переменная, функция независимых переменных – координаты  $x$  и времени  $\tau$ . Решение зависит также от параметров, перечисленных в списке.

### *Математическая формулировка задачи*

*Дифференциальное уравнение* теплопроводности (5.2) для плоской одномерной нестационарной задачи без внутренних источников теплоты и с постоянными физическими параметрами записывается следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (5.3)$$

Благодаря симметрии, достаточно рассмотреть половину пластины, например, правую, заменив отброшенную левую половину формулировкой *условия симметрии* в виде граничного условия второго рода с нулевым тепловым потоком:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (5.4)$$

Эту формулировку называют также условием адиабатичности поверхности. Для симметричной задачи центральная плоскость является, очевидно, адиабатической.

На правой поверхности ( $x = \delta$ ) пластины происходит тепловое взаимодействие со средой, которое мы опишем *граничным условием третьего рода*:

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \alpha \cdot (t(x = \delta, \tau) - t_f). \quad (5.5)$$

В этом соотношении приравнены значения плотности теплового потока,

- подводимого изнутри тела к поверхности посредством теплопроводности и вычисляемого по закону Фурье (левая часть);
- отводимого в окружающую среду и вычисляемого по уравнению Ньютона-Рихмана (правая часть).

Начальное условие задает распределение температуры по толщине пластины для нулевого момента времени; в данном случае это равномерное распределение:

$$t(x, \tau = 0) = t_0. \quad (5.6)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (5.3) и краевые условия (5.4), (5.5) и (5.6) составляют математическое описание задачи об охлаждении пластины. Эти же уравнения описывают нагревание пластины, если задать температуру среды более высокой, чем начальная температура пластины.

### **Оценки порядка величин**

Когда некоторая величина, например, координата  $x$ , меняется в конкретной задаче в пределах  $0 \div \delta$ , говорят, что она порядка  $\delta$  и записывают:  $O(x) = \delta$  (order of value, англ.) или коротко  $x \sim \delta$ .

Температуру в рассматриваемой задаче удобно отсчитывать от уровня окружающей среды и называть *избыточной* температурой:

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_f; \quad \vartheta_0 = t_0 - t_f. \quad (5.7)$$

Очевидно, избыточная температура изменяется в пределах  $0 \div \vartheta_0$ .

Таким образом, в задаче об охлаждении пластины координата и избыточная температура есть величины порядка:

$$x \sim \delta; \quad \vartheta \sim \vartheta_0. \quad (5.8)$$

При оценке производной записывают отношение полного изменения функции к соответствующему интервалу изменения аргумента. Например, нам понадобится в дальнейшем оценка производной по пространственной координате:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sim \frac{\vartheta_0}{\delta}. \quad (5.9)$$

Условием применимости такой оценки является монотонность изменения функции на заданном интервале. (Поэтому, если бы рассматривалась *периодическая* функция, то следовало бы разделить амплитуду на *период* изменения аргумента, но не на полный интервал наблюдения, который может составлять десятки и сотни периодов).

Иногда функция заметно изменяется на ограниченном отрезке, а затем остается почти постоянной, как это бывает при асимптотическом стремлении к стационарному состоянию. В таком случае следует взять отношение полного изменения функции к интервалу быстрого изменения. С такой ситуацией мы имеем дело при оценке временной производной в левой части дифференциального уравнения теплопроводности (5.3):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \sim \frac{\vartheta_0}{\tau_0}. \quad (5.10)$$

Здесь  $\tau_0$  – *оценочное* время установления теплового равновесия, неизвестная величина, которую мы надеемся определить из анализа дифференциального уравнения теплопроводности (5.3). Но это не тот очень большой промежуток времени, формально *бесконечно большой*, в течение которого избыточная температура будет *асимптотически* приближаться к нулевому значению.

Вторую производную оценивают как производную от первой производной:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)}{\partial x} \sim \frac{\frac{\vartheta_0}{\delta}}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \sim \frac{\vartheta_0}{\delta^2}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.10), (5.11) в (5.3), получают дифференциальное уравнение теплопроводности в символах порядка величин:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_0}{\tau_0} \sim a \frac{\vartheta_0}{\delta^2} \quad (5.12)$$

откуда следует оценка времени остывания пластины:

$$\tau_0 \sim \frac{\delta^2}{a}. \quad (5.13)$$

Это замечательный результат: без решения сложной задачи интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (5.3), а только с помощью элементарных операций получена приближенная оценка времени остывания в зависимости от размера пластины ( $\delta$ ) и свойств материала (коэффициента температуропроводности  $a$ ).

Соотношению (5.13) может быть придан более общий смысл. Это оценка времени  $\tau_0$ , в течение которого затухают (релаксируют) температурные возмущения с масштабом пространственной неоднородности  $\delta$ . Мы видим, что *мелкомасштабные* неоднородности затухают существенно быстрее, чем *крупномасштабные*. Исходя из физического содержания дифференциального уравнения теплопроводности, это объясняется большими значениями *градиента температуры* для мелкомасштабных возмущений и, следовательно, большими значениями *тепловых потоков*, выравнивающих температурные неравномерности.

Важная информация получается из оценок граничного условия третьего рода (5.5) на поверхности пластины:

$$\lambda \frac{t(x=0, \tau) - t(x=\delta, \tau)}{\delta} \sim \alpha \cdot (t(x=\delta, \tau) - t_f). \quad (5.14)$$

Заменяя обозначения температур более наглядными, с индексами *centre* (центр пластины) и *surface* (поверхность пластины) и перегруппируя члены в (5.14), получим соотношение:

$$\frac{t_{\text{centre}} - t_{\text{surface}}}{t_{\text{surface}} - t_f} \sim \frac{\alpha \delta}{\lambda} \equiv \frac{\delta}{\frac{\lambda}{\alpha}} \equiv \text{Bi}, \quad (5.15)$$

согласно которому отношение перепада температур внутри пластины к перепаду снаружи определяется новым *безразмерным параметром* – числом Био  $\text{Bi}$ , равным отношению характерных термических сопротивлений: внутреннего сопротивления теплопроводности ( $\delta/\lambda$ ) к внешнему сопротивлению теплоотдачи ( $1/\alpha$ ).

Рассматривая совместно оценки для дифференциального уравнения (см. (5.12)) и для граничного условия (5.15), нетрудно видеть, что полученное значение для  $\tau_0$  (см. (5.13)) справедливо, если  $\text{Bi} \sim 1$  или  $\text{Bi} \gg 1$ .

В предельном случае  $Bi \ll 1$  следует применить соотношение (5.15) для перепада температуры по толщине пластины и скорректировать соответствующим образом оценку второй производной в (5.11). Полезно провести дальнейшие выкладки в качестве самостоятельного упражнения.

Подробнее о влиянии безразмерного параметра  $Bi$  см. пункт «Асимптотический анализ решения».

### *Математическое описание в безразмерной форме*

Для координаты  $x$  полутолщина пластины  $\delta$  служит естественным масштабом, с помощью которого получают нормированную, безразмерную координату  $X$ :

$$X \equiv \frac{x}{\delta}; \quad 0 \leq X \leq 1. \quad (5.16)$$

Для температуры сначала выбирают специальную точку отсчета – температуру окружающей среды и вводят избыточную температуру

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_f, \quad (5.17)$$

а затем нормируют эту величину, относя ее к максимальному перепаду:

$$\vartheta_0 \equiv t_0 - t_f. \quad (5.18)$$

В результате получается безразмерная избыточная температура:

$$\Theta \equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0}. \quad (5.19)$$

Для независимой переменной – времени – нет непосредственно заданного характерного масштаба, как это имеет место для пространственной координаты ( $\delta$ ) или для избыточной температуры ( $\vartheta_0$ ). Однако такой масштаб диктуется дифференциальным уравнением теплопроводности при его приведении к безразмерному виду.

Произведем замену переменных в (5.3) по формулам (5.16), (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_0 \partial \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \tau} &= \frac{a}{\delta^2} \frac{\vartheta_0 \partial^2 \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{\delta} \right) \partial \left( \frac{x}{\delta} \right)} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\left( \frac{\delta^2}{a} \right)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \left( \frac{\tau}{\left( \frac{\delta^2}{a} \right)} \right)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ясно, что оставшиеся размерными значения времени  $\tau$ , сек, и постоянной  $\delta^2/a$ , сек, *должны быть* скомбинированы с образованием *безразмерного времени*, называемого числом Фурье Fo:

$$Fo \equiv \frac{\tau}{\left( \frac{\delta^2}{a} \right)}. \quad (5.21)$$

Величина  $\delta^2/a$ , сек, является «внутренним» масштабом времени, не заданным непосредственно в списке определяющих параметров, но получающимся при анализе математической формулировки задачи.

Полезно сопоставить этот результат с соотношением (5.13), полученным при оценках порядка величин.

Завершая преобразования (5.20) подстановкой (5.21), дифференциальное уравнение теплопроводности для задачи об охлаждении пластины представляют в виде:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}. \quad (5.22)$$

Граничное условие симметрии (5.4) переписется в безразмерной форме как

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0. \quad (5.23)$$

Граничное условие (5.5) на поверхности пластины преобразуется следующим образом:

$$-\lambda \frac{\vartheta_0 \partial \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\delta \partial \left( \frac{x}{\delta} \right)} \Bigg|_{X=1} = \alpha \vartheta_0 \frac{\vartheta(x=\delta, \tau)}{\vartheta_0} \Rightarrow \quad (5.24)$$

$$-\frac{\lambda}{\delta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Bigg|_{X=1} = \alpha \Theta(X=1, Fo) \Rightarrow -\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Bigg|_{X=1} = \left( \frac{\alpha \delta}{\lambda} \right) \cdot \Theta(X=1, Fo).$$

Размерные величины  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\lambda$  составляют *безразмерный комплекс* – число Био  $Bi$ , уже полученный нами ранее при оценке порядка величин (см. (5.15)):

$$Bi \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \equiv \frac{\frac{\delta}{1}}{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.25)$$

Число Био является заданным безразмерным параметром и характеризует отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности ( $\delta/\lambda$ ) к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи ( $1/\alpha$ ).

Подчеркнем, что параметр  $Bi$  появляется при анализе граничного условия третьего рода, физическое содержание которого раскрыто выше в комментарии к уравнению (5.5). Безразмерная форма граничного условия (5.5), как следует из (5.24) и (5.25), есть

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Bigg|_{X=1} = Bi \cdot \Theta(X=1, Fo). \quad (5.26)$$

Начальное условие (5.6) в безразмерной виде записывается следующим образом:

$$\Theta(X, Fo = 0) = 1. \quad (5.27)$$

Соберем вместе безразмерные соотношения, составляющие математическое описание задачи об охлаждении пластины:

Дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}$$

Граничное условие симметрии на центральной плоскости пластины:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0$$

Граничное условие третьего рода на поверхности:

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1} = Bi \cdot \Theta(X=1, Fo)$$

Начальное условие:

$$\Theta(X, Fo=0) = 1$$

Из (5.28) следует:

$$\Theta = \Theta(X, Fo, Bi);$$

$$1 \geq \Theta > 0; \quad 0 \leq X \leq 1; \quad Fo \geq 0; .$$

$$0 < Bi < \infty$$

Для сравнения запишем перечень размерных переменных и параметров, основываясь на исходной (размерной) формулировке задачи (см. уравнения (5.3) – (5.6)):

$$t - t_f = t(x, \tau; t_0 - t_f, \lambda, \rho c_p, \delta, \alpha).$$

Видно, что операции приведения к безразмерному виду (нормирование) позволили сократить список параметров. Согласно системе (5.28), безразмерная избыточная температура  $\Theta$  есть функция от безразмерных независимых переменных: координаты  $X$  и времени  $Fo$ , а также единственного безразмерного параметра – числа  $Bi$ , т.е. всего *трех* безразмерных величин – вместо *семи* в размерной формулировке. Далее мы получим конкретное представление решения системы (5.28). Но уже сейчас следует подчеркнуть важность проделанной предварительной работы. Неисчерпаемое многообразие реальных объектов – пластин различной толщины ( $\delta$ ) с различными свойствами ( $\lambda, \rho, c_p$ ), охлаждаемых при различных условиях ( $\alpha$ ) – сведено к однопараметрической задаче (5.28). Можно представить себе некоторую «обобщенную» пластину единичной полутолщины ( $0 \leq X \leq 1$ ) со стандартными свойствами (с единичной теплопроводностью), скорость охлаждения которой определяется единственным параметром – безразмерным коэффициентом теплоотдачи (числом  $Bi$ ).



Приведение к безразмерному виду, или обобщенное представление – широко используемый в тепломассообмене метод, дополнительную информацию о котором можно получить в гл. 11 п. «Методы подобия и размерностей».

### *Решение методом разделения переменных*

Решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (5.28) можно искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной:

$$\Theta(X, Fo) = \Psi(X) \cdot \Phi(Fo). \quad (5.29)$$

При подстановке предполагаемого решения (5.29) в дифференциальное уравнение (5.22) получают:

$$\Psi(X)\Phi_{Fo}(Fo) = \Phi(Fo)\Psi_{XX}(X), \quad (5.30)$$

где символьные индексы означают дифференцирование по времени  $Fo$  (в левой части) и двукратное дифференцирование по координате  $X$ . Поделив обе части (5.30) на произведение  $\Psi\Phi$ , получают следующее уравнение с *разделенными переменными*:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = \frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)}. \quad (5.31)$$

Поскольку левая часть уравнения (5.31) зависит только от переменной  $Fo$ , а правая часть – только от  $X$ , то равенство обеих частей возможно, только если каждая из них есть константа:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = \frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)} = -\varepsilon^2, \quad (5.32)$$

которую мы обозначили как существенно отрицательную величину ( $-\varepsilon^2$ ), поскольку избыточная температура в задаче об охлаждении (нагревании) пластины убывает, стремясь к нулю.

Соотношение (5.32) с разделенными переменными можно записать как два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = -\varepsilon^2 \Rightarrow \Phi_{Fo}(Fo) = -\varepsilon^2 \Phi(Fo); \quad (5.33)$$

$$\frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)} = -\varepsilon^2 \Rightarrow \Psi_{XX}(X) = -\varepsilon^2 \Psi(X). \quad (5.34)$$

Таким образом, исходное уравнение в частных производных (5.22) расщепляется на два обыкновенных дифференциальных уравнения: (5.33) – относительно времени  $F_0$  и (5.34) – относительно координаты  $X$ .

Оба уравнения классифицируются как линейные однородные с постоянными коэффициентами. Решения таких уравнений отыскивают, составляя характеристическое уравнение, соответственно для (5.33):

$$k^1 = -\varepsilon^2 k^0 \Rightarrow k = -\varepsilon^2 \quad (5.35)$$

и для (5.34):

$$k^2 = -\varepsilon^2 k^0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm \varepsilon \sqrt{-1}. \quad (5.36)$$

Согласно известному правилу, если корни действительные, то решения – это экспоненты, а если мнимые – то синусы и косинусы. Для дифференциального уравнения (5.33) получают:

$$\Phi(F_0) = C_1 \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0), \quad (5.37)$$

а для (5.34):

$$\Psi(X) = C_2 \cos(\varepsilon X) + C_3 \sin(\varepsilon X). \quad (5.38)$$

Подстановка в (5.29) дает решение исходного дифференциального уравнения в частных производных (5.22):

$$\Theta(X, F_0) = (C_2 \cos(\varepsilon X) + C_3 \sin(\varepsilon X)) \cdot (C_1 \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0)). \quad (5.39)$$

Произвольные константы интегрирования  $C$  и  $\varepsilon$  должны быть найдены при подстановке решений (5.39) в выражения для краевых условий. Заметим, что благодаря *линейности* дифференциального уравнения (5.22) *сумма решений* вида (5.39) с различными наборами произвольных пока констант также будет решением (5.22). Это проявление *принципа суперпозиции* для линейных систем.

## Определение констант интегрирования

### *Условие симметрии*

Можно избежать формальных подстановок, сразу заметив, что для представления симметричного решения, т.е. для *четной*

функции  $\Theta$ , нечетные функции  $\sin$  не годятся. Поэтому должно быть  $C_3 = 0$ ; объединяя константы  $C_1$  и  $C_2$ , получим:

$$\Theta(X, Fo) = A \cdot \cos(\varepsilon X) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot Fo). \quad (5.40)$$

**Граничное условие третьего рода на поверхности**

Подстановка решения (5.40) в граничное условие (5.26) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} A \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot Fo) &= Bi \cdot A \cdot \cos(\varepsilon) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot Fo) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon) &= Bi \cdot \cos(\varepsilon) \end{aligned}$$

или

$$\frac{\varepsilon}{Bi} = \operatorname{ctg}(\varepsilon). \quad (5.41)$$

Получившееся трансцендентное уравнение определяет собственные числа  $\varepsilon$  как функцию от числового параметра  $Bi$  (числа Био). Графически решение представлено на рис. 5.3.

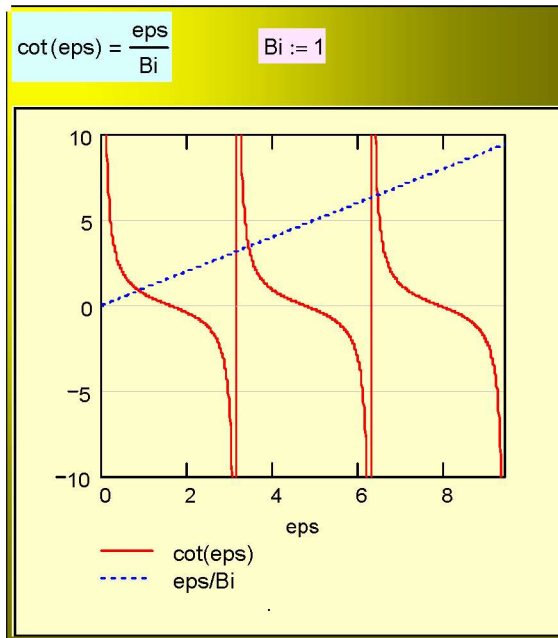


Рис. 5.3. Решение трансцендентного уравнения (5.41) для определения собственных чисел задачи

Имеется бесконечное множество значений  $\varepsilon$ , удовлетворяющих уравнению (5.41). Мы пронумеруем их индексами  $i$ ,  $i = 1 \div \infty$  в порядке возрастания:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \dots \quad (5.42)$$

В предельных случаях  $Bi \rightarrow 0$  и  $Bi \rightarrow \infty$  последовательности чисел  $\varepsilon$  будут такими (см. построения на рис. 5.3):

	1	2	3	4	5	6
$Bi \rightarrow 0$	0	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$5\pi$
...	...	...	...	...	...	...
$Bi \rightarrow \infty$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$	$11\pi/2$

Численное решение (5.41) для определения  $\varepsilon$  с необходимой для практических расчетов точностью приведено ниже (см. рис. 5.7).

Итак, на данном этапе получен набор решений

$$\Theta_i(X, Fo) = A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X) \cdot \exp(-\varepsilon_i^2 \cdot Fo), \quad (5.43)$$

удовлетворяющих дифференциальному уравнению и граничным условиям. Значения констант  $\varepsilon$  определяются уравнением (5.41). Константы  $A$  остаются пока неопределенными величинами.

### *Начальное условие*

*Равномерное* распределение температуры, заданное начальным условием (5.27) для момента времени, не может быть удовлетворено никаким отдельно взятым косинусоидальным решением вида (5.43) (за исключением асимптотического случая  $Bi \rightarrow 0$ , см. ниже). Однако можно воспользоваться *суперпозицией решений* (5.43) для начального момента времени  $Fo = 0$  и построить разложение начального распределения (5.27), т.е. единичной функции в нашей задаче, в ряд Фурье на отрезке  $0 - 1$ :

$$\Theta(X, Fo = 0) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X). \quad (5.44)$$

Поясним, что экспоненциальные множители  $\exp(-\varepsilon_i^2 Fo)$  в (5.43) обращаются в 1 при  $Fo = 0$ .

Коэффициенты разложения Фурье  $A_i$  легко определяются благодаря свойству ортогональности системы функций  $\cos(\varepsilon_i X)$ , т.е.:

$$\int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cos(\varepsilon_n X) dX \begin{cases} = 0 & \text{if } m \neq n \\ \neq 0 & \text{if } m = n \end{cases} \quad (5.45)$$

Это свойство нетрудно проверить в пакете Mathcad в режиме символьных вычислений (аналитических преобразований), как показано на рис. 5.4. Подстановки (substitute) взяты из уравнения (5.41).

$$\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) \cdot \cos(\varepsilon_n \cdot x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } \sin(\varepsilon_m) = \left( \frac{\cos(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m} \cdot \text{Bi} \right) \\ \text{substitute, } \sin(\varepsilon_n) = \left( \frac{\cos(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \cdot \text{Bi} \right) \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) \cdot \cos(\varepsilon_m \cdot x) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\varepsilon_m) \cdot \sin(\varepsilon_m) + \varepsilon_m}{\varepsilon_m}$$

Рис.5.4. Ортогональность функций: иллюстрация в Mathcad

Для вычисления коэффициента  $A$  с заданным номером  $m$  необходимо умножить обе части (5.44) на  $\cos(\varepsilon_m X)$  и проинтегрировать:

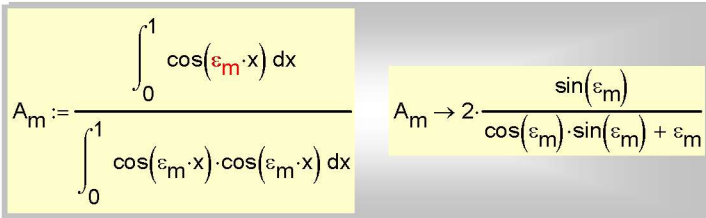
$$\begin{aligned} \int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_i X) dX \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX = A_m \int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Мы сохранили множитель «1» в левой части с целью показать, что при другом (но по-прежнему симметричном) начальном распределении температуры на этом месте будет располагаться соответствующая, не обязательно единичная функция.

Благодаря свойству ортогональности (5.45), все члены ряда в правой части (5.46) с номерами  $i \neq m$  обращаются в ноль, и для коэффициентов  $A_m$  получается следующая формула:

$$A_m = \frac{\int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX}{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX} = \frac{2 \sin(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m + \sin(\varepsilon_m) \cos(\varepsilon_m)}. \quad (5.47)$$

Эти выкладки продублированы в пакете Mathcad в режиме символьных (аналитических) преобразований, как показано на рис. 5.5.



$$A_m := \frac{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) dx}{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) \cdot \cos(\varepsilon_m \cdot x) dx}$$

$$A_m \rightarrow 2 \cdot \frac{\sin(\varepsilon_m)}{\cos(\varepsilon_m) \cdot \sin(\varepsilon_m) + \varepsilon_m}$$

Рис. 5.5. Вычисление коэффициентов  $A$  в Mathcad

### **Результаты решения**

Окончательно, решение задачи об охлаждении пластины представляется соотношениями:

$$\Theta(X, Fo; Bi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X) \cdot \exp(-\varepsilon_i^2 \cdot Fo);$$

$$A_i = \frac{2 \sin(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i + \sin(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i)}; \quad (5.48)$$

$$\frac{\varepsilon_i}{Bi} = \text{ctg}(\varepsilon_i).$$

Как организовать вычисления по этим формулам, показано в Mathcad-программе на рис. 5.7. Собственные числа задачи представлены как функция  $\varepsilon(Bi, i)$  от числа Био и номера  $i$ . Решение уравнения (5.41) производится посредством встроенной функции

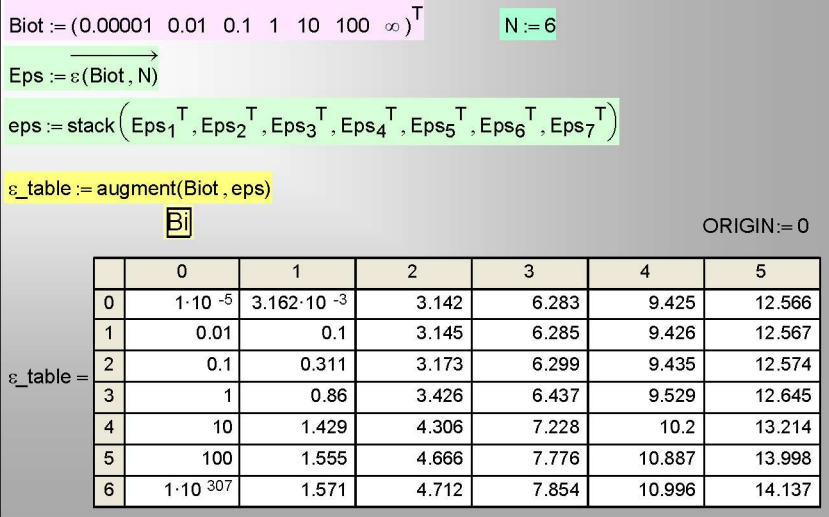
root, два последних аргумента которой задают левую и правую границы отрезка, где отыскивается корень. Далее вычисляются коэффициенты  $A$  и безразмерная избыточная температура  $\Theta$ . В список аргументов функции  $\Theta$  включено число удерживаемых в разложении членов ряда  $Nser$ . Это важный параметр при практических расчетах. При *малых* значениях числа  $Fo$ , т.е. безразмерного времени охлаждения, сходимость ряда очень медленная.

Поэтому могут потребоваться десятки членов ряда, чтобы обеспечить нужную точность. Возможно, лучшим решением в этом случае будет переход к специальным, *асимптотическим* решениям.

$\varepsilon(Bi, N) := \begin{array}{l} \gamma \leftarrow 10^{-12} \\ \text{for } i \in 1..N \\ \varepsilon_i \leftarrow \text{root} \left[ \cot(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{Bi}, \varepsilon, (i-1) \cdot \pi + \gamma, i \cdot \pi - \gamma \right] \\ \varepsilon \end{array}$
$\Theta(X, Fo, Bi, Nser) := \begin{array}{l} \varepsilon \leftarrow \varepsilon(Bi, Nser) \\ A \leftarrow \frac{2 \cdot \sin(\varepsilon)}{\varepsilon + \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)} \\ \sum_{i=1}^{Nser} A_i \cdot \cos(\varepsilon_i \cdot X) \cdot \exp[-(\varepsilon_i)^2 \cdot Fo] \end{array}$

**Рис. 5.6. Mathcad-программа для расчета температурного поля при охлаждении (нагревании) пластины (аналитическое решение)**

В справочных пособиях приводятся таблицы собственных чисел  $\varepsilon$ , чтобы упростить «ручные» вычисления температурного поля пластины. Фрагмент Mathcad-программы на рис. 5.7 показывает, как можно построить такую или еще более подробную таблицу с помощью функции  $\varepsilon(Bi, N)$  из фрагмента программы на рис. 5.6.



**Рис. 5.7.** Вычисление и табличное представление собственных чисел для задачи об охлаждении пластины (столбец с номером 0 – значения числа Био, столбцы с номерами 1..5 – числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ )

Результаты расчета температурного поля пластины по аналитическим решениям (5.48) при значении параметра Био, равном 1, показаны на рис. 5.8 как серия распределений по толщине пластины для различных моментов времени. Отметим ряд важных особенностей решения.

Видно, что почти полное охлаждение и выравнивание температуры потребовало промежутка времени в несколько единиц числа  $Fo$  – безразмерного времени. Соответствующее физическое время (в единицах времени, например, секундах) можно получить из формулы (5.21).

На начальной стадии (при  $Fo = 0.01$  на рис. 5.8) охлаждение затронуло только узкую приповерхностную зону, называемую *температурным пограничным слоем*, а в центральной части температура осталась еще неизменной (единичной в безразмерном выражение, или равной  $t_0$  в градусах столбчатой шкалы). Только по прошествии времени  $Fo \approx 0.1$  утолщающиеся пограничные слои смыкаются в центре и охлаждение становится заметным по всей толщине пластины.



Скорость охлаждения убывает со временем, что объясняется уменьшением перепада температур, под действием которого теплота отводится в окружающую среду.

Перепады температур *внутри* пластины «середины – поверхности» и *снаружи* «поверхности – окружающая среда» соизмеримы, что определяется значением параметра Био:  $Bi = 1$  (см. соотношения (5.15)).

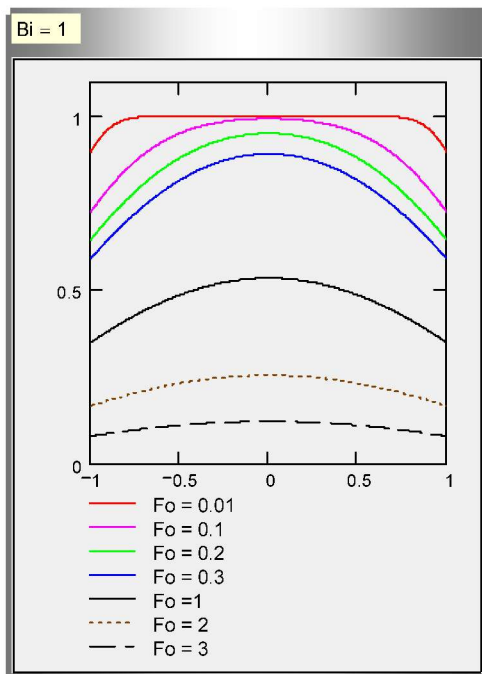


Рис. 5.8. Нестационарное температурное поле пластины при  $Bi = 1$

### Асимптотический анализ решения

#### *Поведение решения при больших $Bi$*

Пользуясь Mathcad-программой (рис. 5.6), мы можем провести математический эксперимент, чтобы исследовать влияние параметра  $Bi$  на процесс охлаждения (нагрева) пластины.

Результаты расчета при больших значениях числа Био,  $Bi \gg 1$  показаны на рис. 5.9. Главная непосредственно наблюдаемая особенность температурного поля – резкое падение температуры поверхности до температуры окружающей среды в самом

начале процесса охлаждения и затем постепенное остывание середины пластины.

Объяснение этого эффекта дается ранее полученным соотношением (5.15). При больших  $Bi$  внутреннее термическое сопротивление теплопроводности  $\delta/\lambda$  намного больше внешнего  $1/\alpha$ , поэтому и перепад температуры внутри пластины намного больше разности температур между поверхностью и окружающей средой. В таких случаях говорят об остывании *термически толстых* объектов. Образом этой задачи может быть остывание очень толстой бетонной стены (толщина  $\delta$  велика, теплопроводность  $\lambda$  мала) при интенсивном внешнем охлаждении в скоростном потоке среды (коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  велик).

Так как при больших  $Bi$  (при относительно больших  $\alpha$ ) температура поверхности сразу становится равной самому низкому значению – температуре охлаждающей среды, то достигается наибольшая возможная скорость охлаждения, которая определяется исключительно «внутренними» свойствами объекта: размером (толщиной) пластины и ее теплофизическими свойствами.

$Bi = 100$

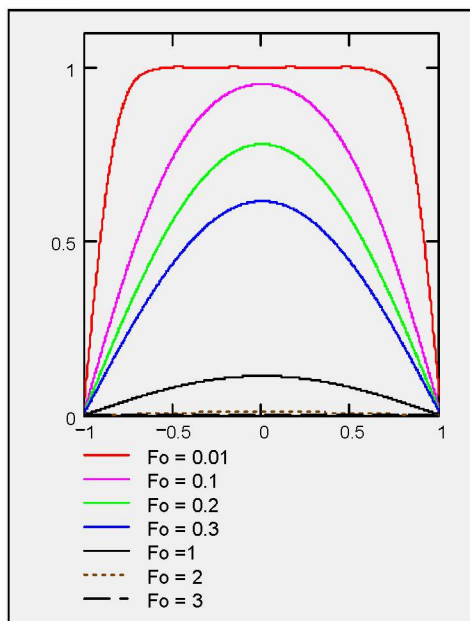


Рис. 5.9. Охлаждение пластины при больших  $Bi$ ,  $Bi \gg 1$

Аналитическое представление для случая больших  $Bi$  получают, подставляя предельные значения собственных чисел  $\varepsilon$  списка корней (рис. 5.3) в общие формулы (5.48). Выпишем результат, принимая дополнительно условие  $Fo \geq 0.3$ :

$$\Theta(X, Fo; Bi) \cong \frac{4}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi X}{2}\right) \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot Fo\right]. \quad (5.49)$$

$Fo \geq 0.3$   
 $Bi \gg 1$

Формула (5.49) служит теоретической основой экспериментального определения коэффициента температуропроводности методом регулярного режима. Перепишем ее в размерном виде, прологарифмируем и затем продифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &\cong \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2 \delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 a}{4 \delta^2} \tau\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m &\cong \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -\left(\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\delta^2}\right) a. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Результат формулируется следующим образом: относительная скорость охлаждения пропорциональна коэффициенту температуропроводности  $a$  материала пластины. Относительную скорость охлаждения  $m$  (часто говорят, *темп охлаждения*) трудно определить в эксперименте, измеряя термопарой избыточную температуру во времени. Подчеркнем, что такой эксперимент следует проводить, обеспечив соотношение  $Bi \gg 1$ .

### ***Поведение решения при малых числах Био***

Результаты расчета по Mathcad-программе (рис. 5.6) при малых значениях числа Био,  $Bi \ll 1$ , показаны на рис. 5.10. Главная особенность температурного поля – практически равномерное распределение температуры по толщине пластины для любого фиксированного момента времени. Кроме того, следует отметить большую длительность процесса охлаждения, измеряемого в единицах безразмерного времени  $Fo$ .

При малых  $Bi$  *внутреннее* термическое сопротивление теплопроводности  $\delta/\lambda$  намного меньше *внешнего*  $1/\alpha$ , поэтому перепад температуры внутри пластины намного меньше разности

температур между поверхностью и окружающей средой (см. отношение (5.15)). В таких случаях говорят об остывании *термически тонких* объектов. Подходящим примером является остывание тонкой медной пластины (фольги) (толщина  $\delta$  мала, теплопроводность  $\lambda$  велика) в спокойной воздушной атмосфере (коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  мал).

Поскольку при  $Bi \ll 1$  внутреннее термическое сопротивление пренебрежимо мало, скорость охлаждения контролируется (относительно малыми) значениями коэффициента теплоотдачи.

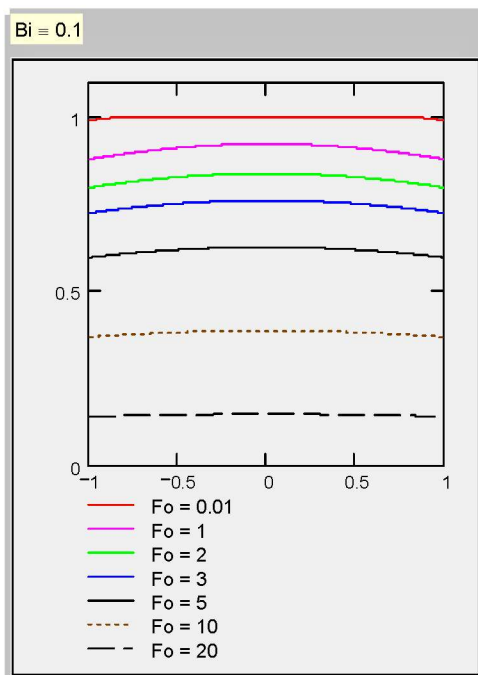


Рис. 5.10. Охлаждение пластины при малых  $Bi$ ,  $Bi \ll 1$

Аналитическое представление для случая малых Био получают, подставляя предельные значения собственных чисел  $\epsilon$  списка корней (рис. 5.3) в общие формулы (5.48). Очевидно, коэффициенты  $A_i$ , начиная со второго, обращаются в ноль, а при вычислении первого коэффициента возникает неопределенность, которая раскрывается как показывает фрагмент символьных вычислений в Mathcad:

$$A_1 := \frac{2 \cdot \sin(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \sin(\varepsilon_1) \cdot \cos(\varepsilon_1)} \quad \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} A_1 \rightarrow 1 \quad (5.51)$$

В следующем блоке преобразуется характеристическое уравнение (5.41) с учетом  $Bi \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon_1 \cdot \tan(\varepsilon_1) = Bi \quad \varepsilon_1 \cdot \tan(\varepsilon_1) \text{ series, } \varepsilon_1, 3 \rightarrow 1 \cdot \varepsilon_1^2 \quad (5.52)$$

где series – оператор Mathcad разложения в ряд вблизи нуля. В результате получаются асимптотические представления:

$$Bi \rightarrow 0: \quad \varepsilon_1^2 = Bi; \quad \varepsilon_1 = \sqrt{Bi}, \quad (5.53)$$

а общие формулы (5.48) для температурного поля переписываются следующим образом:

$$\Theta(X, Fo; Bi) \Big|_{Bi \ll 1} \cong \exp(-Bi \cdot Fo);$$

$$Bi \cdot Fo \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \frac{a \tau}{\delta^2} \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \frac{\lambda \tau}{\rho c_p \delta^2} \equiv \frac{\tau}{\left( \frac{\rho c_p \delta}{\alpha} \right)}. \quad (5.54)$$

Таким образом, в пределе  $Bi \rightarrow 0$  скорость охлаждения перестает зависеть от коэффициента теплопроводности материала, а определяется теплоемкостью, плотностью, размерами объекта и значением коэффициента теплоотдачи на его поверхности.

### ***Поведение решения при больших значениях времени***

Для каждого члена ряда (5.48) (см. также (5.43)) зависимость от времени определяется экспоненциальными множителями  $\exp(-\varepsilon_i^2 Fo)$ . При этом собственные числа  $\varepsilon_i$  образуют возрастающую последовательность чисел (5.42). Следовательно, чем больше номер  $i$  члена ряда, тем быстрее убывание во времени, как показано на рис. 5.11.

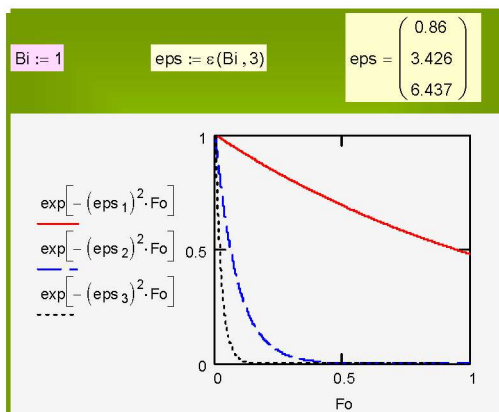


Рис. 5.11. Экспоненциальные множители для 1-го, 2-го, 3-го членов ряда (5.48) при  $\text{Bi} = 1$

С приемлемой для большинства инженерных расчетов точностью, можно сохранить в разложении только первый член ряда для больших значений времени  $\text{Fo} \geq 0.3$  и записать вместо (5.48):

$$\Theta(X, \text{Fo}; \text{Bi})|_{\text{Fo} \geq 0.3} \cong A_1 \cdot \cos(\varepsilon_1 X) \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 \cdot \text{Fo});$$

$$A_1 = \frac{2 \sin(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \sin(\varepsilon_1) \cos(\varepsilon_1)}; \quad (5.55)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\text{Bi}} = \text{ctg}(\varepsilon_1).$$

Получившееся простое предельное решение для больших значений времени характерно тем, что избыточная температура во всех точках пластины убывает во времени по единому экспоненциальному закону  $\Theta \sim \exp(-\varepsilon_1^2 \text{Fo})$ , а распределение по толщине пластины описывается косинусоидой  $\Theta \sim \cos(\varepsilon_1 X)$  (рис. 5.8, кривые для  $\text{Fo} \geq 0.3$ ). Простые формулы (5.55) находят важное применение как теоретическая основа для экспериментальных методов измерения теплофизических свойств веществ (так называемый метод регулярного режима).

#### Замечание о представлении решения в виде ряда

Выше мы отметили тот факт, что собственные числа образуют возрастающую последовательность (5.42) и что благодаря этому старшие по номеру члены ряда (5.48) затухают во времени

существенно быстрее, чем младшие (рис. 5.11). Однако физическое содержание этого явления осталось необъясненным.

Если зафиксировать момент времени (число  $Fo$ ) в решении (5.48), то получится пространственное распределение температуры, записанное как сумма гармоник  $\cos(\varepsilon_i X)$  с возрастающей пространственной частотой  $\varepsilon_i$ . Старшие по номеру члены ряда – это пространственные гармоники с увеличивающейся частотой и уменьшающейся длиной волны.

Теперь можно переформулировать эффект затухания следующим образом: *мелкомасштабные* пространственные неоднородности температурного поля затухают во времени существенно быстрее чем *крупномасштабные*. Объяснение этому эффекту следует искать в дифференциальном уравнении теплопроводности (5.3). Главный результат уже получен выше и выражен формулой (5.13), согласно которой время затухания (релаксации) пропорционально квадрату пространственного масштаба (см. также комментарий к формуле (5.13)).

Располагая вычислительной программой (рис. 5.6), можно поэкспериментировать с разложениями, содержащими различное число членов ряда, и проследить за поведением частных решений во времени.

$Fo := 0.001$

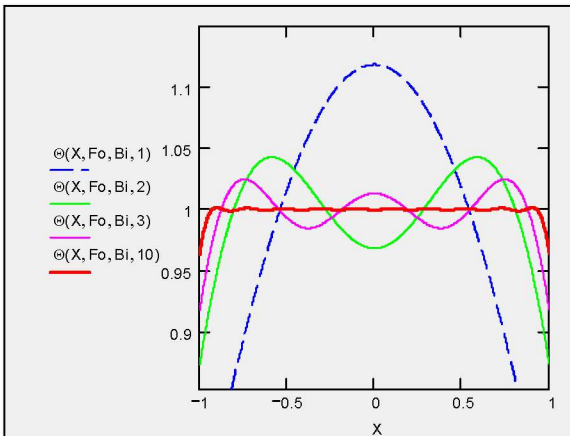


Рис. 5.12. Распределение температуры, рассчитанное по разложениям с одним, двумя, тремя и десятью членами ряда

Результаты можно увидеть на рис. 5.12

### 5.3. Цилиндр

Задача об охлаждении (нагревании) цилиндра (рис. 5.13) решается аналогично тому, как это было сделано для пластины в параграфе 5.2. Решение получается в виде бесконечного ряда, структура каждого члена которого такая же, как в соотношениях для пластины (5.48) – это произведение коэффициента разложения, функции координат и экспоненциального временного фактора:

$$\Theta(R, Fo; Bi) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot J_0(\mu_i R) \cdot \exp(-\mu_i^2 \cdot Fo);$$

$$B_i = \frac{2 J_1(\mu_i)}{\mu_i (J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i))}; \quad (5.56)$$

$$\frac{\mu_i}{Bi} = \frac{J_0(\mu_i)}{J_1(\mu_i)}.$$

Однако функции от координаты (собственные функции) другие, а именно, функции Бесселя, или цилиндрические функции (рис. 5.14).

Собственные числа задачи  $\mu$  определяются уравнением, получающимся из формулировки граничного условия третьего рода на поверхности цилиндра и представленном на рис. 5.15 графически.

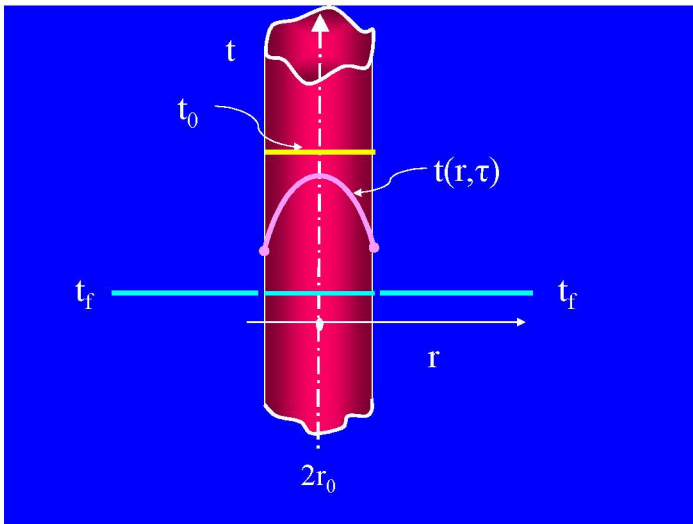


Рис. 5.13. Задача об охлаждении цилиндра



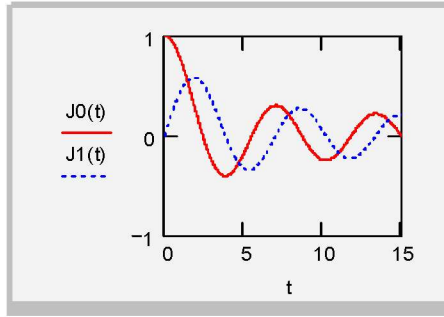


Рис. 5.14. Функции Бесселя первого рода нулевого ( $J_0$ ) и первого ( $J_1$ ) порядка от действительного аргумента

Расчеты температурного поля проводятся по Mathcad-программе (рис. 5.16), построенной на основе аналитического решения.

Программа включает блоки для вычисления корней функций Бесселя, которые являются предельными значениями для асимптотик  $Bi \rightarrow 0$  (zero\_J0) и  $Bi \rightarrow \infty$  (zero\_J1) и задают интервал локализации для корней  $\mu$  при конечных значениях числа Био.

В последнем блоке программы формируется сумма членов ряда. Число удерживаемых членов ряда задается параметром Nser.

Формирование таблицы собственных чисел представлено на рис. 5.17.

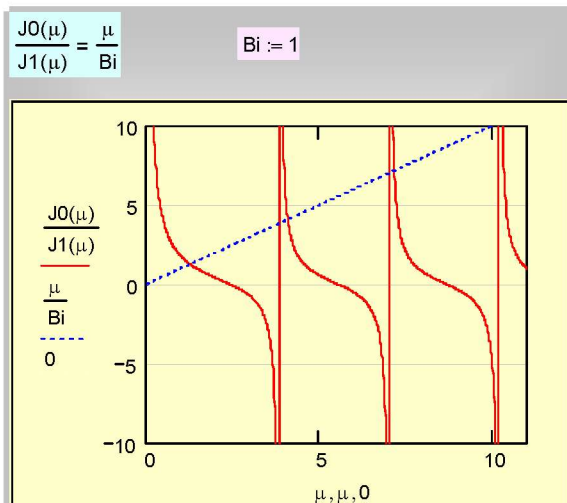
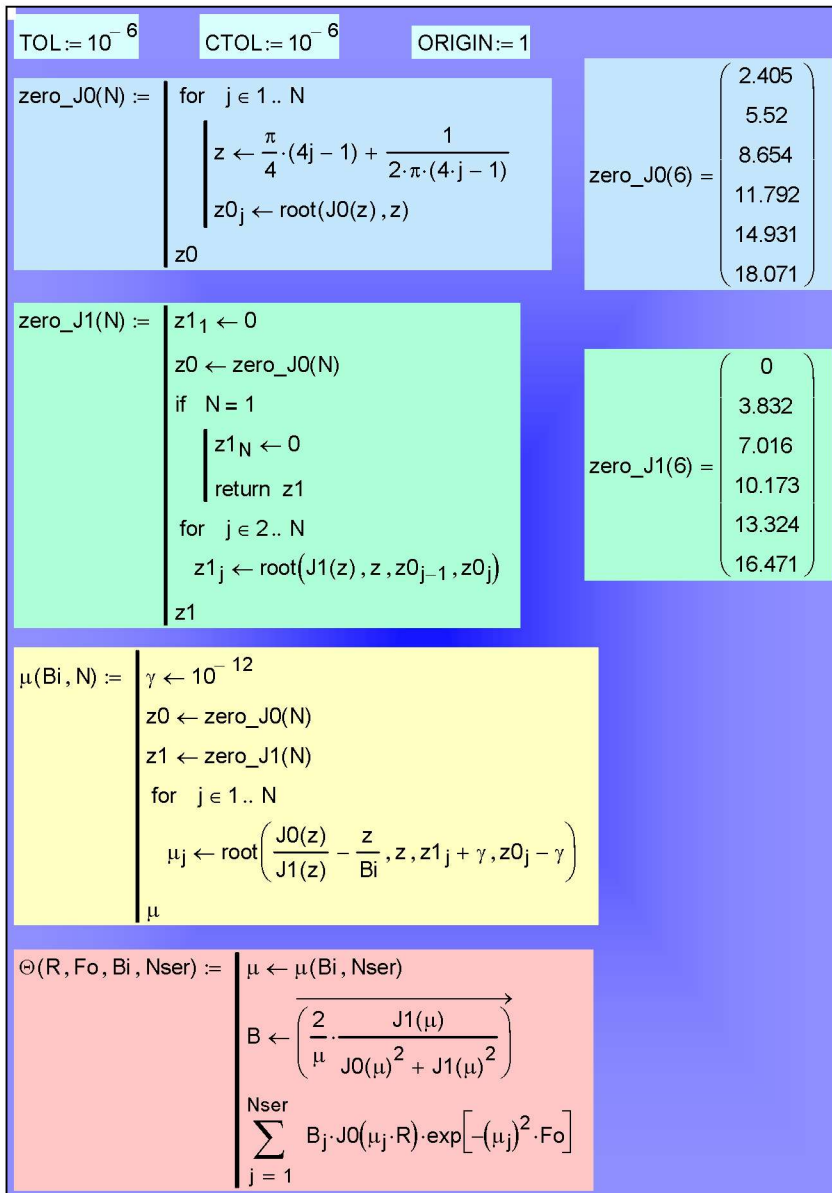


Рис. 5.15. Собственные числа для задачи об охлаждении цилиндра



**Рис. 5.16. Mathcad-программа для расчета температурного поля при охлаждении (нагревании) бесконечного цилиндра (аналитическое решение)**

```
Biot := (0.001 0.01 0.1 1 10 100 1000)T
```

```
N := 6
```

```
→  
Mu := μ(Biot, N)
```

```
mu := stack(Mu1T, Mu2T, Mu3T, Mu4T, Mu5T, Mu6T, Mu7T)
```

```
μ_table := augment(Biot, mu)
```

**Bi**

ORIGIN:= 0

μ\_table =

	0	1	2	3	4	5	6
0	1·10 <sup>-3</sup>	0.045	3.832	7.016	10.174	13.324	16.471
1	0.01	0.141	3.834	7.017	10.174	13.324	16.471
2	0.1	0.442	3.858	7.03	10.183	13.331	16.477
3	1	1.256	4.079	7.156	10.271	13.398	16.531
4	10	2.179	5.033	7.957	10.936	13.958	17.01
5	100	2.381	5.465	8.568	11.675	14.783	17.893
6	1·10 <sup>3</sup>	2.402	5.515	8.645	11.78	14.916	18.053

Рис. 5.17. Вычисление и табличное представление собственных чисел для задачи об охлаждении бесконечного цилиндра (столбец с номером 0 – значения числа Био, столбцы с номерами 1..6 – числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ )

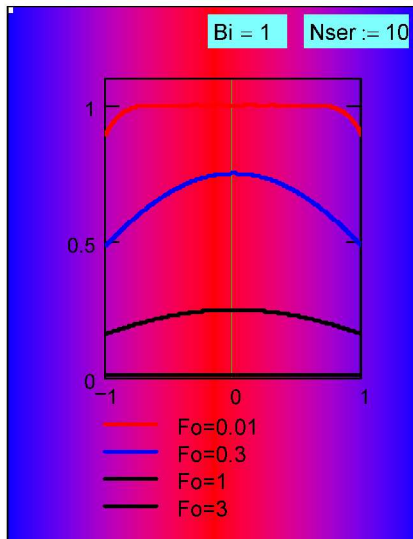


Рис. 5.18. Распределение температуры по радиусу цилиндра для различных моментов времени (аналитическое решение)

Распределение температуры по радиусу бесконечного цилиндра (рис. 5.18) и во времени, вычисленное по программе на рис. 5.16, качественно аналогично распределениям для пластины. Результаты асимптотического анализа для больших значений числа  $Fo$ , малых и больших чисел Био также полностью аналогичны полученным ранее для пластины.

#### 5.4. Задача о прогреве полугограниченного массива

Полугограниченный массив (рис. 5.19) простирается в бесконечность в положительном направлении оси  $x$ . Начальная температура установлена на уровне  $t_\infty$ .

На поверхности раздела  $x = 0$  происходит внезапный контакт со средой, имеющей температуру  $t_0$ . Предполагается, что благодаря интенсивному теплообмену температура поверхности массива сразу устанавливается и поддерживается далее на уровне  $t_0$ . Происходит постепенный прогрев массива на все большую глубину  $\delta_T(\tau)$ , которую мы назовем толщиной температурного пограничного слоя. За пределами этого слоя температура тела остается на уровне  $t_\infty$ .

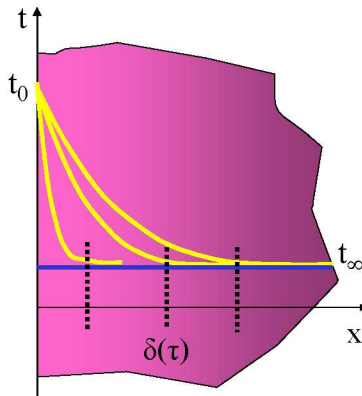


Рис. 5.19. Задача о полугограниченном массиве

Задача состоит в определении нестационарного одномерного температурного поля в полугограниченном массиве  $t(x, \tau)$ .

### *Математическая формулировка задачи*

Примем в качестве искомой функции избыточную температуру массива, отсчитанную от уровня  $t_\infty$ :

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_\infty.$$

*Дифференциальное уравнение* теплопроводности для одномерной нестационарной задачи без внутренних источников теплоты и в предположении о постоянстве физических параметров запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (5.57)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Начальное условие задает распределение температуры по глубине полуограниченного массива для нулевого момента времени:

$$\vartheta(x, \tau = 0) = t_0 - t_\infty \equiv 0. \quad (5.58)$$

На поверхности  $x = 0$  ставится граничное условие первого рода

$$\vartheta(x = 0, \tau) = t_0 - t_\infty \equiv \vartheta_0. \quad (5.59)$$

На удалении от поверхности, за пределами температурного пограничного слоя избыточная температура остается нулевой:

$$\vartheta(x \rightarrow \infty, \tau) = t_\infty - t_\infty \equiv 0. \quad (5.60)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (5.57), начальное (5.58) и граничные условия (5.59), (5.60) составляют математическое описание задачи о прогреве полуограниченного массива.

### *Решение методом оценки порядка величин*

Для дифференциального уравнения (5.57) оценки порядка производятся аналогично тому, как это делалось в задаче об охлаждении пластины (см. соотношения (5.8)–(5.12)):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_0}{\tau} \sim a \frac{\vartheta_0}{\delta_T(\tau)^2}. \quad (5.61)$$

Отличие состоит в том, что обозначение  $\delta_T$  применяется теперь для *толщины пограничного слоя* – неизвестной заранее и изменяющейся во времени величины, а обозначение  $\tau$  – для текущего момента времени (времени прогрева на глубину  $\delta_T$ ).

Из (5.61) получаем для глубины прогрева:

$$\delta_T(\tau) \approx \sqrt{\alpha\tau}. \quad (5.62)$$

Теперь можно оценить также плотность теплового потока на поверхности раздела:

$$\begin{aligned} q_w(\tau) &= -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=+0} \Rightarrow \\ \Rightarrow q(\tau) &\approx \frac{\lambda}{\delta_T(\tau)} \vartheta_0 \approx \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p} \tau}} \vartheta_0 \approx \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\sqrt{\tau}} \vartheta_0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Полученные оценки отражают основные закономерности прогрева массива. При полном решении далее будут получены конкретные числовые множители (порядка единицы) в формулах вида (5.62), (5.63), однако характер функциональных зависимостей останется таким же:

- глубина прогрева увеличивается пропорционально корню квадратному из времени;
- тепловой поток  $q_w$  пропорционален температурному перепаду  $\theta_0$ ; коэффициент пропорциональности между этими величинами (тепловая проводимость) убывает обратно пропорционально корню из времени:

$$\frac{\lambda}{\delta_T(\tau)} \approx \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\sqrt{\tau}}. \quad (5.64)$$

Согласно (5.63), при заданном перепаде температур  $\theta_0$  тепловой поток  $q_w$  на поверхности раздела будет очень большим в начальный период ( $\tau \rightarrow 0$ ), когда время контакта и глубина прогрева еще невелики, а *градиент температуры достигает очень больших значений*. Другими словами, *интенсивность* теплоотвода внутрь массива будет очень большой, благодаря большой термической проводимости (5.64) тонкого пограничного слоя.

С определенными оговорками эти результаты можно применить для качественного анализа *теплоотдачи* при обтекании поверхностей, понимая теперь под «*массивом*» объем холодной жидкости, контактирующей с твердой горячей поверхностью протяженностью  $z$  (по вертикали на рис. 5.19). Если *скорость движения* жидкости  $W$  высока, то время термического контакта, т.е. время «скольжения» вдоль  $z$ ,

$$\tau \approx \frac{z}{W},$$

будет малым и интенсивность теплообмена – высокой.

Можно также в общих чертах понять роль турбулентности, которая обеспечивает *интенсивное перемешивание* и, следовательно, *обновление контактов* между объемами жидкости с различной температурой (между так называемыми *турбулентными молями*). Благодаря этому, возникают большие локальные градиенты температуры и большие тепловые потоки, т.е. происходит интенсивный теплообмен. Если речь идет о массообмене, то такой же механизм обеспечивает интенсивный перенос массы компонентов смеси благодаря возникновению больших локальных градиентов концентрации.

### *Оценка для аналогичной гидродинамической задачи*

Аналогичные результаты получаются для *гидродинамической задачи* о внезапном приведении в движение поверхностного слоя покоящейся жидкости. Величинами-аналогами в тепловой и гидродинамической задачах будут температура  $\theta(x, \tau)$  и вертикальная (вдоль вертикальной оси  $z$ ) скорость  $w(x, \tau)$ , температуропроводность  $a$  и кинематическая вязкость жидкости  $\nu$ , плотность теплового потока  $q$  и напряжение трения (плотность потока импульса)  $s$ , толщина теплового пограничного слоя  $\delta_T$  и толщина динамического пограничного слоя  $\delta$ .

Рисунок (рис. 5.19) сохранится с точностью до обозначений. Следует только представить себе, что вертикальный поверхностный ( $x = 0$ ) слой жидкости внезапно приводится в движение с вертикальной скоростью  $W$  некоторым механизмом, например, вертикальной лентой транспортера. Затем все более глубокие слои жидкости будут ускоряться силой вязкого трения.

Уравнение движения жидкости для рассматриваемой задачи нетрудно вывести из формулировок второго закона механики и закона вязкого трения:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{[\rho(dx \cdot dy \cdot dz) \cdot w(x, \tau)]}_{\substack{\text{Импульс} \\ \text{Скорость увеличения импульса}}} = \\
 & = \underbrace{-\mu \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} \Big|_x}_{\text{Сила трения на левой грани } dy \cdot dz} (dy \cdot dz) + \underbrace{\mu \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x+dx}}_{\text{Сила трения на правой грани } dy \cdot dz} (dy \cdot dz) \Rightarrow \\
 & \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x+dx} \underbrace{\cong}_{\text{Разложение в ряд}} \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial x^2} \Big|_x \cdot dx
 \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$

Для дифференциального уравнения движения оценки порядка производятся аналогично тому, как это делалось в задаче о прогреве (см. соотношения (5.61)–(5.64)):

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{\tau} \sim \nu \frac{W}{\delta(\tau)^2}.$$

Отсюда следуют оценки толщины динамического слоя и напряжения трения на поверхности:

$$\begin{aligned}
 & \delta(\tau) \approx \sqrt{\nu \tau}; \\
 & s_w(\tau) = \mu \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \Rightarrow \\
 \Rightarrow & s_w(\tau) \approx \frac{\mu}{\delta(\tau)} W \approx \frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho} \tau}} W = \frac{\sqrt{\mu \rho}}{\sqrt{\tau}} W.
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Сопоставляя формулы (5.62), (5.65), получают соотношения толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев:

$$\frac{\delta}{\delta_T} \approx \sqrt{\frac{\nu}{a}}; \quad \frac{\nu}{a} \equiv \text{Pr}. \tag{5.66}$$



Отношение кинематической вязкости к температуропроводности является безразмерным комплексом, носит название числа Прандтля и играет большую роль в теории конвективного теплообмена.

### *Автомодельные переменные*

Подобно тому как в задаче о пластине вводилась безразмерная координата посредством отнесения к *заранее заданному масштабу* – толщине пластины, мы отнесем теперь координату к *толщине теплового пограничного слоя* – внутреннему масштабу, определившемуся при предварительном анализе задачи в предыдущем параграфе:

$$\eta \equiv \frac{x}{\delta_T(\tau)} \equiv \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}. \quad (5.67)$$

Дополнительный множитель 2 несуществен с принципиальной точки зрения; его введение связано с традицией и соображениями удобства промежуточных вычислений.

Безразмерная координата  $\eta$  показывает, в какой части пограничного слоя находится выбранная точка. Например, значение  $\eta = 0,5$  указывает, что точка находится в середине пограничного слоя (на расстоянии от стенки, равном половине толщины пограничного слоя). Естественно предположить, что в этой точке избыточная температура будет иметь *фиксированное* значение, равное примерно половине от общего перепада  $\theta_0$ , независимо от того, какова толщина пограничного слоя. Сказанное можно выразить короче:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \equiv \frac{t(x, \tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \Theta \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \equiv \Theta(\eta), \quad (5.68)$$

т.е. относительная (безразмерная) избыточная температура  $\Theta$  есть функция одной – *автомодельной* – переменной  $\eta$ .

Далее необходимо произвести замену переменных в дифференциальном уравнении (5.57). Если высказанное предположение (5.68) о форме решения верно, то должно получиться *обыкновенное* дифференциальное уравнение с единственной независимой

переменной  $\eta$  вместо исходного уравнения в *частных производных* с переменными  $x, t$ . Эти вычисления эффективно выполняются в математическом пакете Maple.

### Решение в Maple

Для дифференциального уравнения в частных производных PDE (см. (5.69)) преобразования *tr* (*transformation*) задают выражения

- старых независимых переменных  $x, t$  через новые:  $\eta$  и  $t \equiv \tau$ ;
- старой зависимой переменной  $\theta(x, t)$  как функции двух переменных через новую зависимую переменную  $\Theta(\eta)$  как функцию одной автотельной переменной.

Функция Maple *dchange* проводит замены переменных, результатом которых является обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $\Theta(\eta)$ . Действительно, время  $t$ , содержащееся в *явной форме* в последнем уравнении блока (5.69), сокращается, и остаются только переменные  $\eta$  и  $\Theta(\eta)$ .

```

restart
> with(PDEtools, dchange)
[dchange]
> PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
> tr := {x = η √(4 a t), τ = t, θ(x, τ) = Θ(η)}
tr := {x = 2 η √(a t), τ = t, θ(x, τ) = Θ(η)}
> dchange(tr, PDE, params = a, simplify)
1/4 * 2 η (d/dη Θ(η)) + (d²/dη² Θ(η)) = 0

```

В блоке (5.70) отыскивается аналитическое решение для  $\Theta(\eta)$ . Последовательность выражений *bvp* (*boundary value problem*, красная задача) задает краевые условия (5.59), (5.60). Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка *deq* для  $\Theta(\eta)$  решается аналитически с применением встроенной функции *dsolve*.

$$\begin{aligned}
&> \text{bvp} := \Theta(0) = 1, \Theta(\infty) = 0 \\
&\text{bvp} := \Theta(0) = 1, \Theta(\infty) = 0 \\
&> \text{deg} := \left( \frac{d^2}{d\eta^2} \Theta(\eta) \right) + 2 \eta \left( \frac{d}{d\eta} \Theta(\eta) \right) \\
&\text{deg} := 2 \eta \left( \frac{d}{d\eta} \Theta(\eta) \right) + \left( \frac{d^2}{d\eta^2} \Theta(\eta) \right) \\
&> \text{dsolve}(\{ \text{deg}, \text{bvp} \}, \Theta(\eta)) \\
&\Theta(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Температурное поле в полуограниченном массиве выражается через функцию ошибок  $\text{erf}(\eta)$ . Напомним, что автомодельная переменная  $\eta$  связана с физическими переменными ( $x, \tau$ ) соотношением (5.67).

График решения (см. рис. 5.20) удобно рассматривать как распределение температуры по глубине массива для некоторого фиксированного момента времени. Решение асимптотически стремится к нулю, поэтому в качестве толщины температурного пограничного слоя условно принимают такое значение координаты, при котором перепад температуры внутри пограничного слоя составляет 99% от максимального значения. Соответствующие вычисления проведены в Mathcad (рис. 5.20). В размерном виде, привлекая (5.67), получают:

$$\eta_{99} \equiv \frac{\delta_{99}}{2\sqrt{a\tau}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{99} = \eta_{99} 2\sqrt{a\tau} \equiv 3,6\sqrt{a\tau}. \tag{5.71}$$

Полезно сопоставить этот строгий количественный результат с полученной ранее оценкой (5.62).

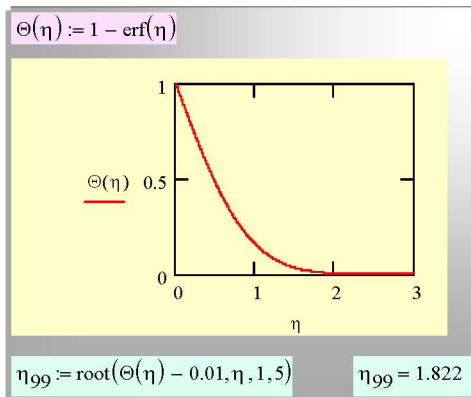


Рис. 5.20. Решение о прогреве полуограниченного массива в автомодельных переменных

*Температурное поле полуграниченного массива при заданном тепловом потоке на поверхности*

Математическое описание этой задачи задается следующими уравнениями:

Дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (5.72)$$

Граничное условие второго рода на поверхности

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=+0} = \text{const}, \quad (5.73)$$

где  $q_w$  – заданное значение плотности теплового на поверхности, постоянная величина

Граничное условие на бесконечном удалении от поверхности:

$$\vartheta(x \rightarrow \infty, \tau) = t_\infty - t_\infty \equiv 0. \quad (5.74)$$

Начальное условие:

$$\vartheta(x, \tau = 0) = t_\infty - t_\infty \equiv 0. \quad (5.75)$$

Как и ранее, температура отсчитывается от начального уровня  $t_\infty$ . Однако, в отличие от рассмотренной выше задачи с заданной температурой поверхности, теперь не существует заранее определенного фиксированного масштаба для избыточной температуры  $\theta$ . Более того, ясно, что температура поверхности  $\theta(x = 0, \tau)$  будет возрастать с течением времени.

Для оценки избыточной температуры на поверхности используем граничное условие на поверхности:

$$\begin{aligned} q_w &= -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=+0} \Rightarrow \\ \Rightarrow q_w &\approx \frac{\lambda}{\delta(\tau)} \vartheta_{scale}(\tau) \approx \frac{\lambda}{2\sqrt{a\tau}} \vartheta_{scale}(\tau) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vartheta_{scale}(\tau) &\approx \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau} \end{aligned} \quad (5.76)$$

При переходе к безразмерному описанию мы отнесем координату  $x$  к толщине пограничного слоя:

$$\eta \equiv \frac{x}{\delta_T(\tau)} \equiv \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}, \quad (5.77)$$

а избыточную температуру – к определенному в (5.76) масштабу:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_{scale}(\tau)} \equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}}. \quad (5.78)$$

Предполагая подобие такого нормированного профиля температуры, мы будем искать решение в виде:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}} = \Theta(\eta). \quad (5.79)$$

Таким образом, замены переменных в дифференциальном уравнении и граничных условиях будут следующими:

- для независимых переменных – см. уравнение (5.77);
- для зависимой переменной:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \Theta(\eta) \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}; \\ \vartheta(x, \tau) &= \Theta(\eta) C \sqrt{\tau}; \quad C \equiv \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Дальнейшие вычисления выполняются в математическом пакете Maple. Аналитические преобразования (5.81) описывают замены переменных, в результате которых получается обыкновенное дифференциальное уравнение для  $T(\eta)$ , где  $T$  – другое обозначение для  $\Theta$ .

```

> restart
> with(PDEtools, dchange)
[dchange]
> PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
> tr := {x = η √(4 a t), τ = t, θ(x, τ) = T(η) C √t}
tr := {τ = t, x = 2 η √(a t), θ(x, τ) = T(η) C √t}
> dchange(tr, PDE, params = [a, C], simplify)
1 C (2 η (d/dη T(η)) - 2 T(η) + (d²/dη² T(η)))
----- = 0
4 √t

```

В блоке (5.82) ставится краевая задача (*bvp*) с граничным условием второго рода (оператор  $D(T)(0)$  означает дифференцирование в точке  $\eta = 0$ ) и выписывается дифференциальное уравнение (*deq*). Функция Maple `dsolve` выводит аналитическое решение, которое преобразуется в функцию  $\Theta(\eta)$  посредством оператора `unapply`.

```

>
bvp := D(T)(0) = -1, T(infinity) = 0
deq := 2 * eta * (d/deta T(eta)) - 2 * T(eta) + (d^2/deta^2 T(eta))
> dsolve({deq, bvp}, T(eta)); expand(%)
T(eta) = -eta + 1/(sqrt(pi) * e^(eta^2)) + erf(eta) * eta
> Theta := unapply(-eta + 1/(pi^(1/2) * e^(eta^2)) + eta * erf(eta), eta)
Theta := eta -> -eta + 1/(sqrt(pi) * e^(eta^2)) + erf(eta) * eta
> Theta(0)
1/sqrt(pi)

```

Выпишем результаты решения в следующем виде:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0(\tau)} = \exp(-\eta^2) - \sqrt{\pi} \eta (1 - \operatorname{erf}(\eta));$$

$$\vartheta_0(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{q_w}{\lambda} \sqrt{a\tau},$$
(5.83)

где  $\theta_0(\tau)$  – избыточная температура поверхности, возрастающая пропорционально корню квадратному из времени.

Пример расчета (рис. 5.21, рис. 5.22) относится к высокотемпературным технологиям. Стальной образец подвергается воздействию мощного теплового потока. Видно, что в течение короткого промежутка времени (десятка миллисекунд) температура поверхности поднимается до очень высоких значений (несколько тысяч градусов) в тонком приповерхностном слое (доли миллиметра). Математическое моделирование таких экстремальных режимов важно для проблем термоядерного синтеза, термической обработки материалов с целью поверхностного упрочнения и т.п.

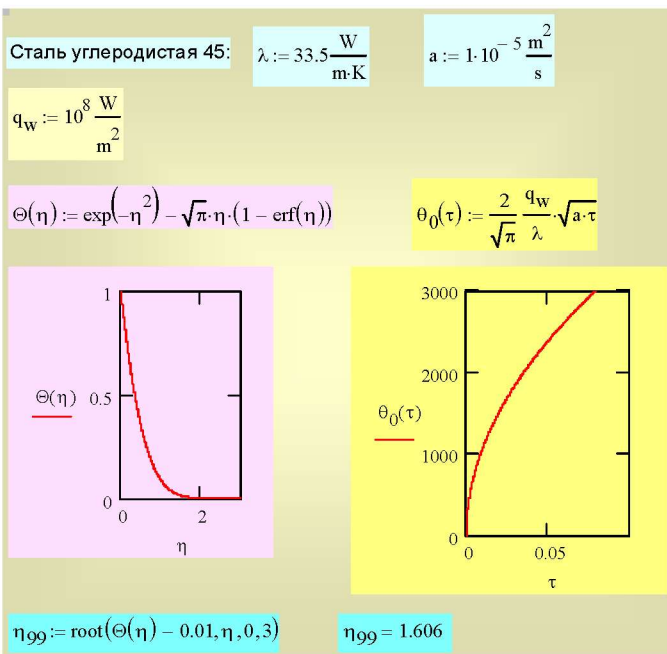


Рис. 5.21. Воздействие мощного теплового потока на стальной образец

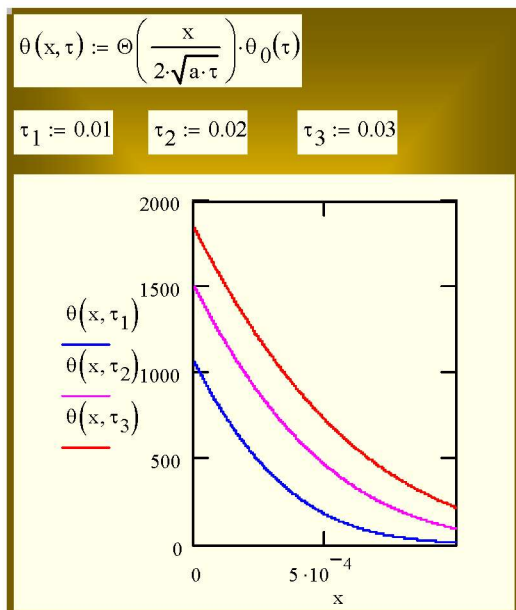


Рис. 5.22. Распределение температуры для различных моментов времени при воздействии мощного теплового потока на стальной образец

Если на поверхности раздела ставятся *граничные условия третьего рода*, т.е. заданы значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  на поверхности и температура среды  $t_f$ , то температурное поле рассчитывается по формуле:

$$\frac{t(x, \tau) - t_\infty}{t_f - t_\infty} = [1 - \operatorname{erf}(\eta)] - \exp[\operatorname{Bi}_\delta (2\eta + \operatorname{Bi}_\delta)] [1 - \operatorname{erf}(\eta + \operatorname{Bi}_\delta)];$$

$$\operatorname{Bi}_\delta \equiv \frac{\alpha \sqrt{a\tau}}{\lambda}, \quad (5.84)$$

где  $\operatorname{Bi}_\delta$  – модифицированный параметр Био (в качестве характерного размера выступает величина, пропорциональная толщине пограничного слоя).

### *Задача Томсона об остывании Земли*

В историческом масштабе времени совсем недавно, примерно 150 лет назад, английский физик Уильям Томсон (Кельвин) разрушил господствовавшую в то время *стационарную* модель Земли, указав, что Земля должна остывать, отдавая в космос тепловую энергию, выделившуюся первоначально при гравитационном объединении и сжатии исходных компонентов. Томсон рассчитал время охлаждения от момента затвердевания Земли до ее современного состояния и, таким образом, получил оценку для времени существования Земли в пределах 20 – 400 млн. лет.

Идея вычислений состоит в том, чтобы зная современное тепловое состояние Земли и располагая расчетной моделью теплоотвода, определить время, которое потребовалось для эволюции из начального в сегодняшнее состояние.

Современное тепловое состояние задается следующими параметрами. Средняя температура поверхности Земли оценивается примерно как  $0^\circ$ . Градиент температуры у поверхности Земли, согласно измерениям температуры в шахтах на разных глубинах, составляет примерно  $0,037$  К/м, причем температура повышается с глубиной. Ранее, в геологическом масштабе времени, градиент был более высоким.

В начальном состоянии Земля рассматривалась как расплавленная сфера при температуре примерно  $2000^\circ\text{C}$ . Температура поверхности, благодаря интенсивному радиационному теплоотводу в Космос, должна была за короткое время снизиться до современного уровня, т.е.  $0^\circ\text{C}$ .



Ясно, что эта словесная формулировка приводит к классической задаче о прогреве (охлаждении) полуограниченного массива, если предположить дополнительно, что толщина температурного пограничного слоя мала по сравнению с радиусом Земли, величиной примерно равной 6400 км.

Коэффициент теплопроводности земной коры можно оценить как  $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Решение задачи о том, за какое время  $\tau_c$  приповерхностный температурный градиент *gradt*, первоначально очень большой, снизился до современного уровня, выполнено в Mathcad (рис. 5.23).

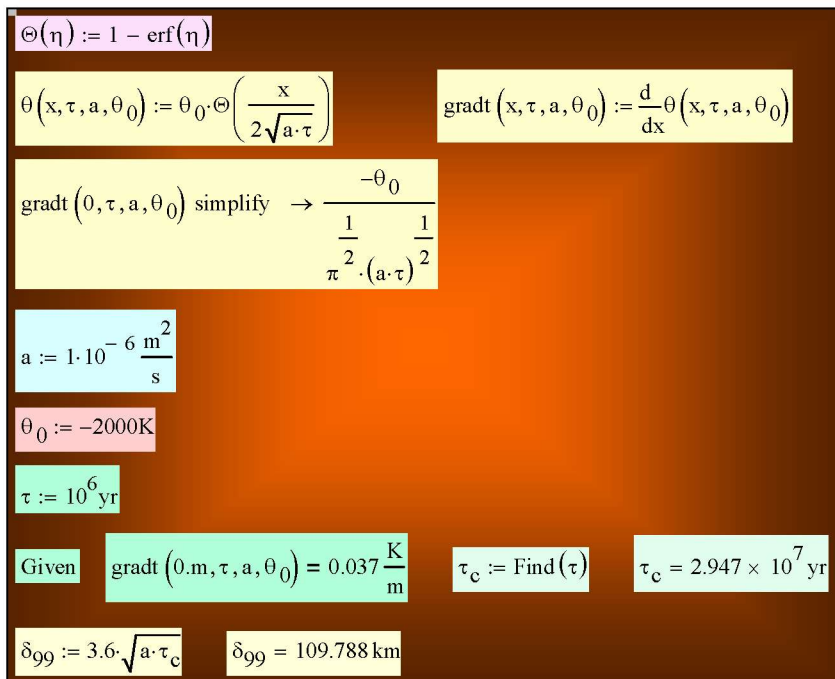


Рис. 5.23. Задача Томсона об остывании Земли

Сначала, в режиме символьных вычислений, дифференцируется распределение температуры (5.70) и выводится формула для градиента температуры на поверхности:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{-\theta_0}{\sqrt{\pi a \tau}}. \quad (5.85)$$

Далее в вычислительном блоке Given ... Find формулируется и решается уравнение, согласно которому в современных условиях, спустя время  $\tau_c$  с начала охлаждения, значение градиента составляет 0,037 К/м. В результате получается время охлаждения  $\tau_c$  примерно 30 млн. лет.

Глубина температурного пограничного слоя, согласно (5.71), составляет примерно 110 км, что существенно меньше радиуса Земли. Этот относительно тонкий приповерхностный слой сферы большого радиуса допустимо рассматривать как плоский слой.

Распределение температуры по глубине для трех моментов времени показано на рис. 5.24. Наклон кривых в начале координат представляет градиент температуры у поверхности Земли.

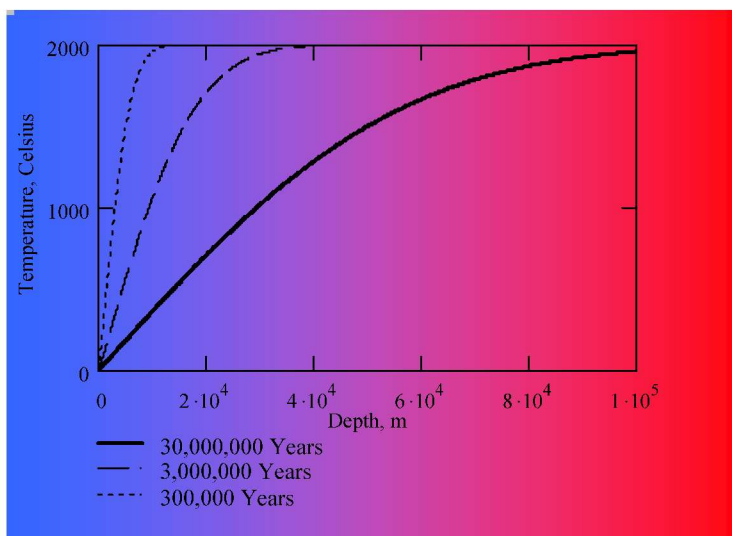


Рис. 5.24. Распределение температуры по глубине Земли в задаче Томсона для трех моментов времени: 30 млн лет, 3 млн лет, 300 тыс. лет

Сейчас мы знаем, что возраст Земли составляет примерно 4500 млн лет. Это существенно больше, чем полученная оценка в 30 млн лет. Тепловое состояние Земли определяется продолжающимся действием *внутренних источников тепла*, имеющих *радиоактивную* природу, о чем не мог знать Томсон, поскольку до открытия радиоактивности оставалось еще при-

мерно полвека. Однако теория Томсона как одна из первых космогонических *количественных* моделей представляет для нас большой интерес, тем более что она базируется на классической задаче теории теплообмена.

### 5.5. Двух- и трехмерные нестационарные температурные поля

Полученные выше аналитические решения описывают одномерные нестационарные поля в идеализированных объектах – *бесконечной* пластине (5.48), *бесконечном* цилиндре (5.56), *полуограниченном* массиве (5.70), (5.83), (5.84). Однако реальные тела, в которых приходится рассчитывать температурные поля, трехмерны. Простейшие реальные геометрические объекты получаются при пересечении указанных выше идеализированных *примитивов* (прототипов, базисных элементов).

Примером является цилиндр конечных размеров, образованный пересечением бесконечной пластины и бесконечного цилиндра (рис. 5.25).

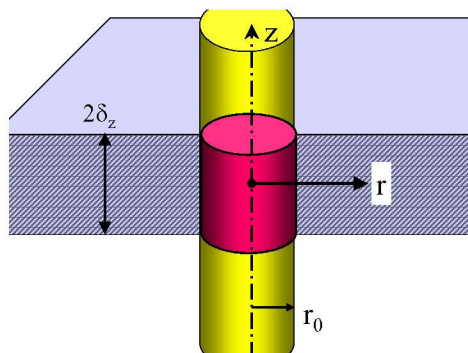


Рис. 5.25. Цилиндр конечных размеров как пересечение бесконечной пластины и бесконечного цилиндра

Замечательным результатом теории теплопроводности является тот факт, что *безразмерное* температурное поле сложного объекта равно произведению *безразмерных* температурных полей соответствующих примитивов. Это утверждение может быть доказано прямой подстановкой предполагаемого вида решения в дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия.

Для примера с цилиндром конечных размеров имеем:

$$\underbrace{\frac{t(z, r, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Цилиндр конечных размеров}} = \underbrace{\frac{t(z, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Бесконечная пластина}} \cdot \underbrace{\frac{t(r, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Бесконечный цилиндр}} \quad (5.86)$$

Пример расчета температурного поля цилиндра конечных размеров приведен на рис. 5.26.

Решается следующая задача. Стальной цилиндр длиной  $2\delta_{\text{Plate}}$  и радиусом  $r_{\text{Cyl}}$  нагревается в высокотемпературной ванне ( $t_f = 1000\text{K}$ ). Технология нагрева такова, что на торцевых поверхностях обеспечивается высокое значение коэффициента теплоотдачи, в то время как на боковой поверхности коэффициент теплоотдачи относительно невысок. Требуется построить графики временного изменения температур в трех характерных точках: в центре цилиндра, в центре торцевой поверхности и в середине боковой поверхности. Подробности вычислений ясны из текста программы. Оценивая результаты расчета, следует обратить внимание на быстрый рост температуры на торцах цилиндра. Полезно дать объяснение этому эффекту. Поскольку имеется доступ к Mathcad-программе, можно провести вычислительные эксперименты при вариациях параметров и получить документированный ответ.

Описанный метод перемножения решений применим для следующих конфигураций.

- ✓ Бесконечно длинный брус как пересечение двух пластин.
- ✓ Параллелепипед как пересечение трех пластин.
- ✓ Конечный цилиндр как пересечение бесконечной пластины и бесконечного цилиндра.
- ✓ Двумерный угол как пересечение двух полуограниченных массивов.
- ✓ Трехмерный угол как пересечение трех полуограниченных массивов.
- ✓ Полуограниченная пластина как пересечение бесконечной пластины и полуограниченного массива.
- ✓ Полуограниченный брус как пересечение бесконечно длинного бруса и полуограниченного массива.
- ✓ Полуограниченный цилиндр как пересечение бесконечного цилиндра и полуограниченного массива.

### Plate x Cylinder

$$\lambda := 33.5 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$c := 450 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\rho := 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$$

$$a = 9.423 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha_{\text{Plate}} := 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\alpha_{\text{Cyl}} := 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\delta_{\text{Plate}} := 0.10 \text{m}$$

$$r_{\text{Cyl}} := 0.10 \text{m}$$

$$T_0 := 300 \text{K}$$

$$T_f := 1000 \text{K}$$

$$N_{\text{ser}} := 6$$

► Teta.Plate(X,Fo,Bi,Nser)

► Teta.Cyl(R,Fo,Bi,Nser)

$$T(x, r, \tau) := \left[ \left[ \left( X \left\langle \frac{x}{\delta_{\text{Plate}}} \right\rangle \right) \left( R \left\langle \frac{r}{r_{\text{Cyl}}} \right\rangle \right) \right] \right. \\ \left[ \left[ \left( Fo_{\text{Plate}} \left\langle \frac{a \cdot \tau}{\delta_{\text{Plate}}^2} \right\rangle \right) \left( Fo_{\text{Cyl}} \left\langle \frac{a \cdot \tau}{r_{\text{Cyl}}^2} \right\rangle \right) \right] \right] \\ \left[ \left[ \left( Bi_{\text{Plate}} \left\langle \frac{\alpha_{\text{Plate}} \cdot \delta_{\text{Plate}}}{\lambda} \right\rangle \right) \left( Bi_{\text{Cyl}} \left\langle \frac{\alpha_{\text{Cyl}} \cdot r_{\text{Cyl}}}{\lambda} \right\rangle \right) \right] \right] \\ \ominus_P \leftarrow \ominus_{\text{Plate}}(X, Fo_{\text{Plate}}, Bi_{\text{Plate}}, N_{\text{ser}}) \\ \ominus_C \leftarrow \ominus_{\text{Cyl}}(R, Fo_{\text{Cyl}}, Bi_{\text{Cyl}}, N_{\text{ser}}) \\ \ominus \leftarrow \ominus_P \cdot \ominus_C \\ T \leftarrow T_f + (T_0 - T_f) \cdot \ominus \\ T$$

$$T(0\text{m}, 0\text{m}, 1000\text{s}) = 858.772 \text{K}$$

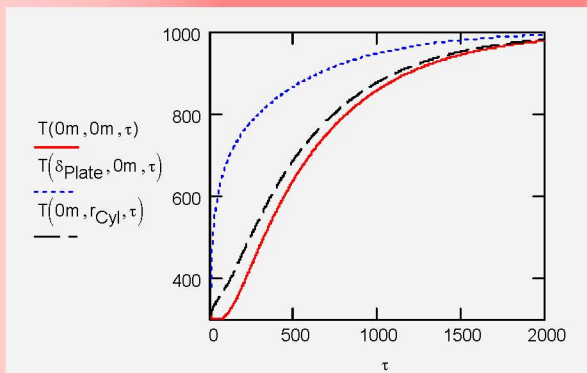


Рис. 5.26. Расчет температурного поля цилиндра конечных размеров

## 5.6. Температурные поля, создаваемые точечными и линейными источниками тепла

### *Температурное поле, создаваемое линейным источником постоянной мощности.*

Математическое описание этой задачи состоит из дифференциального уравнения Фурье, записанного в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right), \quad (5.87)$$

граничного условия 2-го рода на оси:

$$\left( 2\pi r \frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = -\frac{q_l}{\lambda}, \quad (5.88)$$

где  $q_l$ , Вт/м – мощность линейного источника, и начального условия:

$$\vartheta(r, \tau = 0) = 0. \quad (5.89)$$

Решение выражается через интегральную показательную функцию  $Ei$ :

$$\vartheta(r, \tau) = \left( \frac{q_l}{\lambda} \right) \frac{1}{4\pi} Ei \left( \frac{r^2}{4a\tau} \right). \quad (5.90)$$

Эта задача имеет существенное прикладное значение. В теплофизическом эксперименте она лежит в основе зондового метода измерения теплопроводности материалов. Так как решение имеет особенность при  $r \rightarrow 0$ , то на практике его используют для больших значений времени:

$$\tau \gg \frac{r_0^2}{8a} \Rightarrow \delta(\tau)_{\tau \gg \frac{r_0^2}{8a}} \gg r_0, \quad (5.91)$$

где  $r_0$  – радиус проволоки, обогреваемой электрическим током, электрического кабеля или трубопровода, проложенного в неограниченном массиве (рис. 5.27).

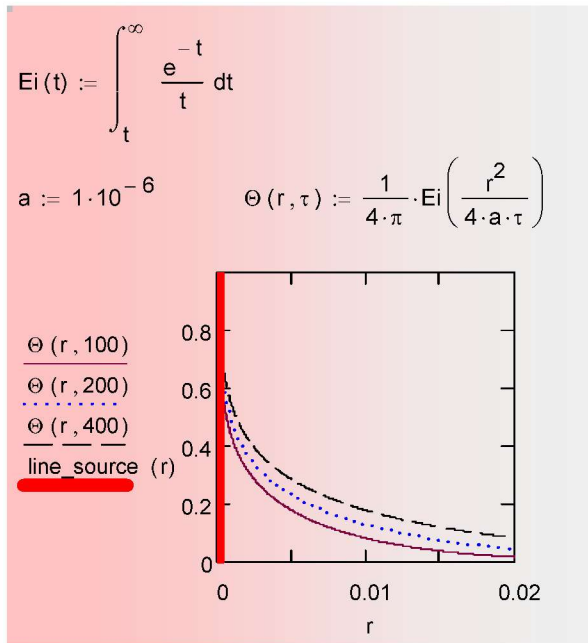


Рис. 5.27. Нестационарное температурное поле вокруг линейного источника тепла

**Температурное поле, создаваемое точечным источником постоянной мощности**

Математическое описание задается соотношениями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right);$$

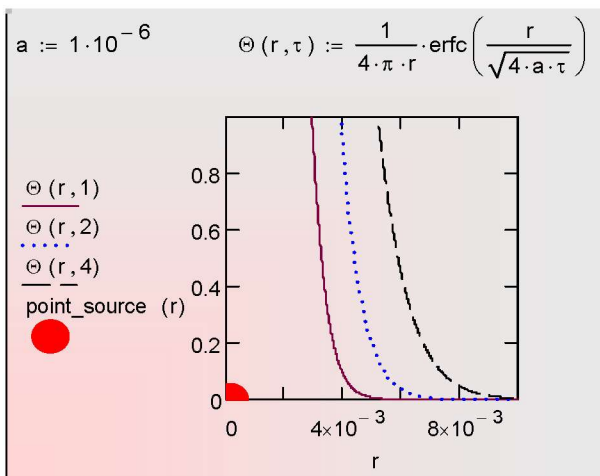
$$\left( 4\pi r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = -\frac{Q}{\lambda};$$

$$\vartheta(r, \tau = 0) = 0,$$
(5.92)

где  $Q$ , Вт/м – мощность точечного источника.

Решение (рис. 5.28) выражается через интеграл вероятностей:

$$\vartheta(r, \tau) = \left( \frac{Q}{\lambda} \right) \frac{1}{4\pi r} \operatorname{erfc}\left( \frac{r}{\sqrt{4a\tau}} \right).$$
(5.93)



**Рис. 5.28. Нестационарное температурное поле вокруг точечного источника тепла**

Задача о плоском источнике тепла уже решена выше, см.: «Температурное поле полуограниченного массива при заданном тепловом потоке на поверхности».



# Глава 6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 6.1. Введение

Задачи теплопроводности, возникающие в инженерной практике, редко поддаются аналитическим методам решения, либо такие решения оказываются неэффективными. Причиной может быть

- сложная геометрия реальных объектов, отличных по форме от простых пластин, цилиндров или сфер, с которыми имеют дело в аналитическом курсе теории теплопроводности, или
- нелинейность математических моделей, из-за сильной температурной зависимости теплофизических свойств, источников членов, коэффициентов в граничных условиях.

Универсальным способом решения являются численные методы, требующие компьютерной реализации.

Центральной темой главы является разработка дискретного представления математического описания. На примере одномерной нестационарной задачи мы обсудим явную и неявную схемы дискретизации, выведем уравнения для коэффициентов конечно-разностных уравнений, применив *символьный* процессор системы Mathcad, чтобы продемонстрировать современную технику громоздких математических преобразований.

Для решения получающейся большой системы алгебраических уравнений будет применена специальная Mathcad-программа, основанная на знаменитом в численном анализе *методе прогонки* – сверхбыстром алгоритме решения больших систем со специальной диагональной структурой. Результаты этой работы представлены как компактный программный комплекс в пакете Mathcad, к которому имеется открытый доступ – для детального ознакомления с методом и для численных экспериментов с компьютерными моделями.

По аналогичной схеме выводятся сеточные уравнения для многомерной (двухмерной) задачи, однако решатель запрограммирован на основе итерационного метода Гаусса-Зайделя. Имеется доступ к соответствующей Mathcad-программе, открытой для

ознакомления, модификации и применения. Как пример, анализируется температурное поле платы компьютера.

Кратко рассмотрено применение встроенной функции Mathcad Pdesolve (подробное изложение для одномерной нестационарной задачи теплопереноса в обобщенной формулировке см. в гл. 7).

## 6.2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим далее в качестве модели следующую одномерную нестационарную задачу теплопроводности с внутренними источниками теплоты (рис. 6.1).

Предположим, что пространственные изменения происходят только вдоль оси координат  $x$ . Боковую поверхность будем считать адиабатически изолированной. Если потребуются учесть теплообмен на боковой поверхности, то можно (при некоторых ограничениях) имитировать теплосъем посредством внутреннего стока.

Чтобы обеспечить универсальность модели, воспользуемся численным методом и разработаем для этой цели специальную Mathcad-программу. В ее основе будет лежать *метод прогонки* – сверхбыстрый алгоритм для решения больших систем линейных уравнений со специальной диагональной структурой.

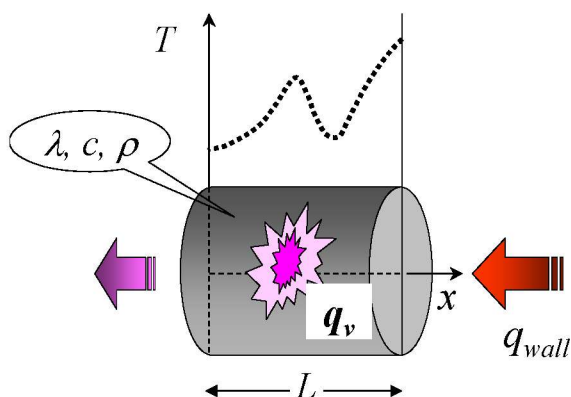


Рис. 6.1. Одномерная нестационарная задача теплопроводности

В качестве исходной формулировки принимается уравнение теплопроводности (2.14) из гл. 2, в котором следует учесть одномерность задачи,  $t = t(x, \tau)$ :

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v. \quad (6.1)$$

На левом и правом торцах объекта (рис. 6.1) происходит тепловое взаимодействие со средой, и здесь необходимо задать граничные условия. Универсальным способом описать самые различные ситуации будет применение *граничных условий третьего рода* на левом ( $x = 0$ ) и правом ( $x = L$ ) торцах объекта:

$$\begin{aligned} -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=+0} &= \alpha_1 (t_{f1} - t(x=0, \tau)); \\ -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=L-0} &= \alpha_2 (t(x=L, \tau) - t_{f2}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $\alpha$  и  $t_f$  – коэффициенты теплоотдачи и температуры окружающей среды на торцах стержня.

В этих соотношениях приравнены значения плотности теплового потока,

- поступающего из окружающей среды и вычисленного по уравнению Ньютона–Рихмана (правые части);
- и отводимого внутрь тела посредством теплопроводности и вычисленного по закону Фурье (левые части).

Следует подчеркнуть, что такое равенство справедливо *при отсутствии* фазовых превращений на поверхности раздела. Поскольку мы не собираемся сейчас решать сложные задачи с фазовыми превращениями, ограничимся этим предупреждением. В общем случае разность потоков по обеим сторонам границы раздела расходуется на плавление, отвердевание, испарение и т.п.

### 6.3. Дискретное представление

Для численного интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (6.1) необходимо вывести его конечно-разностную аппроксимацию.

Запишем закон сохранения энергии для малого *контрольного объема*, сформированного в окрестности узла  $P$  (рис. 6.2). Последний находится сейчас в фокусе нашего внимания, но выведенные далее соотношения будут годиться для любого *внутреннего узла*.

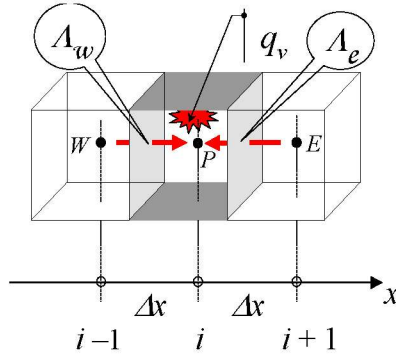


Рис. 6.2. Контрольный объем и потоки энергии

От соседних, западного  $W$  и восточного  $E$  узлов поступают потоки теплоты за счет теплопроводности. Внутри контрольного объема выделяется теплота при действии внутреннего источника. В результате произойдет увеличение тепловой энергии в рассматриваемом объеме, что будет обнаружено по повышению температуры – от  $T_p^0$  до  $T_p$  за время  $\Delta t$ . Нулевой баланс *bal* для всех составляющих, перенесенных в одну сторону уравнения, запишется следующим образом:

$$bal = \frac{\rho c_p \Delta x (T_p - T_p^0)}{\Delta t} - \lambda \Lambda_w \frac{T_w - T_p}{\Delta x} - \lambda \Lambda_e \frac{T_e - T_p}{\Delta x} - q_v \Delta x. \quad (6.3)$$

Величина  $\lambda$  без индекса означает некоторое характерное значение теплопроводности. Большими греческими «лямбда»  $\Lambda$  обозначены относительные зна

чения коэффициента теплопроводности, вычисленные для контрольных поверхностей, проходящих между узлами. Например, для восточной поверхности:

$$\Lambda_e \equiv \frac{\lambda_e}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Lambda_P + \Lambda_E}{\Lambda_P \Lambda_E}. \quad (6.4)$$

Если коэффициент теплопроводности постоянен, то достаточно указать значение  $\lambda$ , а величинам  $\Lambda$  приписать единичные значения. Если же коэффициент теплопроводности сильно зависит от температуры или даже испытывает разрывы из-за слоистой структуры материала, *среднегармонический* способ осреднения (6.4) обеспечит вычисление тепловых потоков с хорошей точностью.

Мощность внутренних источников  $q_v$  в (6.3) полагается независимой от температуры, но может быть заданной функцией координат и времени.

Уравнение (6.3) записано для внутренних узлов. Ниже будет получено аналогичное уравнение для граничных узлов.

### ***Неявная схема***

Подчеркнем, что температура  $T_p$  в центральном узле и температуры  $T_W$  и  $T_E$  в окружающих узлах – неизвестные величины из «будущего», в то время как  $T_p^0$  – известное значение, взятое с *предыдущего* шага по времени либо из начальных условий. Поэтому (6.3) представляет собой уравнение с тремя неизвестными. Всего таких уравнений можно записать столько же, сколько имеется неизвестных температур в узлах сетки. Для нахождения температур необходимо решить систему уравнений.

Можно повторить то же другими словами: *не существует* явного выражения для неизвестных, а требуется решать уравнения для их определения. Такие схемы в численном анализе называются *неявными*. Они обладают важным *свойством: устойчивости* при счете, хотя и сложны из-за необходимости решать систему уравнений. Мы разработаем для этой цели специальную Mathcad-программу. В ее основе будет лежать знаменитый в численном анализе *метод прогонки* – сверхбыстрый алгоритм для решения больших систем уравнений со специальной диагональной структурой.

### ***Явная схема***

Если в уравнении (6.3) разности температур во втором и третьем операторах (теплопроводности) записать из «прошлого» и снабдить обозначением « $\theta$ », то получится *явная* схема: в каждом уравнении содержится одно единственное неизвестное значение

$T_P$  (в первом операторе, описывающем изменение энергии во времени). Программа и вычисления будут очень простыми, но если временной шаг превысит некоторое значение, при счете возникнут прогрессирующие паразитные осцилляции. Ограничения на шаг довольно обременительны, поэтому в настоящее время предпочитают неявные схемы.

### **Коэффициенты неявной схемы**

Вернемся к анализу уравнения баланса (6.3), задающего неявную численную схему. Упростим форму его записи, поделив почленно на  $(\rho c \Delta x / \Delta \tau)$ :

$$bal = (T_P - T_P^0) - Fo \Lambda_w (T_W - T_P) - Fo \Lambda_e (T_E - T_P) - Fo \frac{q_V \Delta x^2}{\lambda};$$

$$Fo \equiv \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}, \quad (6.5)$$

где  $Fo$  – безразмерной шаг по времени, так называемое *сеточное* число Фурье.

Перепишем (6.5) в стандартной форме линейного уравнения для неизвестных  $T_W, T_P, T_E$ :

$$C T_W + B T_P + A T_E + D = 0;$$

$$C_k T_{k-1} + B_k T_k + A_k T_{k+1} + D_k = 0. \quad (6.6)$$

Первое из этих уравнений представлено в мнемонической форме, второе – в индексной, необходимой для составления программы.

Сравнивая выражения (6.6) и (6.5), получают значения коэффициентов  $A, B, C, D$ . Необходимые символьные операции можно выполнить в Mathcad, как показано на рис. 6.3. В первом блоке вычислений применяется оператор collect, собирающий вместе члены с каждой из перечисленных неизвестных. Во втором блоке приводится альтернативный вариант с оператором coeffs, выписывающим коэффициенты полинома (в нашем случае – первой степени) для указанной переменной.

$$\text{bal} := (T_P - T_{0P}) - Fo \cdot \Lambda_W \cdot (T_W - T_P) - Fo \cdot \Lambda_e \cdot (T_E - T_P) - Fo \cdot \frac{q_V \cdot \Delta x^2}{\lambda}$$

bal collect,  $T_W, T_P, T_E \rightarrow$

$$-Fo \cdot \Lambda_W \cdot T_W - Fo \cdot \Lambda_e \cdot T_E + (Fo \cdot \Lambda_W + Fo \cdot \Lambda_e + 1) \cdot T_P - q_V \cdot Fo \cdot \frac{\Delta x^2}{\lambda} - T_{0P}$$

$$C := -Fo \cdot \Lambda_W \quad A := -Fo \cdot \Lambda_e \quad B := 1 - A - C \quad D := -T_{0P} - \frac{q_V \cdot \Delta x^2}{\lambda} \cdot Fo$$

$$\text{coeffsTP} := \text{bal coeffs}, T_P \rightarrow \begin{pmatrix} -T_{0P} - Fo \cdot \Lambda_W \cdot T_W - Fo \cdot \Lambda_e \cdot T_E - Fo \cdot q_V \cdot \frac{\Delta x^2}{\lambda} \\ 1 + Fo \cdot \Lambda_W + Fo \cdot \Lambda_e \end{pmatrix}$$

$$B := \text{coeffsTP}_1 \rightarrow 1 + Fo \cdot \Lambda_W + Fo \cdot \Lambda_e$$

Рис. 6.3. Коэффициенты неявной схемы

Структура получившейся линейной системы уравнений с коэффициентами  $A, B, C, D$  оказывается *трехдиагональной*, как в примере для сетки из пяти узлов:

$$\begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 & B_4 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & B_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \\ -D_3 \\ -D_4 \\ -D_5 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

При большом числе узлов матрица коэффициентов окажется почти пустой. Например, для 100 узлов всего 3% ячеек будет занято числами, остальные останутся нулевыми. Ясно, что при использовании классического Гауссова исключения в основном будут перемножаться и складываться нули.

Существует специальный вариант метода исключения – *метод прогонки*, учитывающий трехдиагональную структуру матрицы, и мы применим его в разрабатываемой вычислительной программе.

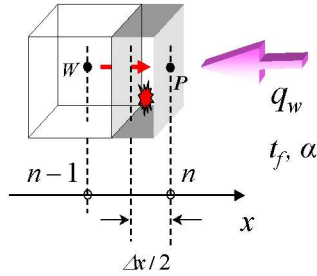


Рис. 6.4. Баланс энергии для поверхностного узла

Для *граничных* узлов контрольные объемы оказываются половинного размера, как показано на рис. 6.4. Кроме того, для контрольной грани, попадающей на поверхность объекта, необходимо специальным образом записать тепловой поток:

$$bal = \frac{1}{2} \frac{\rho c_p \Delta x (T_P - T_P^0)}{\Delta \tau} - \alpha (T_f - T_P) - \lambda \Lambda_{in} \frac{T_{in} - T_P}{\Delta x} - \frac{1}{2} q_w \Delta x. \quad (6.8)$$

Это уравнение является дискретным аналогом граничных условий, заданных выше соотношениями (6.2). Индекс «in» означает ближайший внутренний узел:  $(n-1)$  правого торца,  $2$  – левого торца. Мы не будем повторять вычисления для коэффициентов в уравнениях для поверхностных узлов. Они полностью аналогичны тем, что выполнены для внутренних узлов. Окончательные выражения можно прочитать в тексте программы Coef (рис. 6.5).

## 6.4. Метод прогонки.

### Вычислительные программы

#### *Mathcad-программа Coef*

Функция Coef (см. рис. 6.5) вычисляет коэффициенты A, B, C, D для системы уравнений, структура которой иллюстрируется соотношением (6.7).

Величина T0 в списке формальных параметров означает вектор начальных значений температуры. Индексация начинается с единицы, т.е. значение переменной Origin среды Mathcad следует установить в единицу. Размерность вектора (одномерного массива) T0 равна числу узлов сетки.



Величины  $T_f$  и  $B_i$  – векторы из двух элементов, задающие соответственно температуры среды и числа Био на левом и правом торцах объекта (рис. 6.1). Число Био – это «безразмерный коэффициент теплоотдачи»:  $B_i = \alpha \Delta x / \lambda$ , сеточное число Био.

Цикл `for` обеспечивает вычисления коэффициентов во внутренних узлах. Отдельно рассчитываются коэффициенты для граничных узлов, исходя из соотношения (6.8).

Параметр `iTime` сообщает подпрограмме, на каком шаге по времени находится процесс вычислений. Это важно для вычисления температуры среды, контактирующей с правым торцом. Задавая в векторе `Pulse` ненулевую амплитуду `Ampl` и некоторое значение частоты `v`, мы сможем имитировать периодические тепловые воздействия на объект.

Программа `Coef` возвращает массив, собранный посредством функции `augment` из векторов **A**, **B**, **C**, **D**.

```

.....

$$Q_v := Fo \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{q_v}{\lambda}$$

Coef(Fo, Δ, Qv, T0, Tf, Bi, Pulse, iTime) :=
| iUp ← last(T0)
| for i ∈ 2.. iUp - 1
|   ( Ai ← -Fo · Δi   Ci ← -Fo · Δi-1 )
|   Bi ← 1 - Ai - Ci
|   Di ← T0i + Qv
| A1 ← -2 · Fo · Δ1
| B1 ← 1 - A1 + 2 · Fo · Bi1
| C1 ← 0
| D1 ← T01 + Qv + 2 · Fo · Tf1 · Bi1
| (Ampl ← Pulse1   v ← Pulse2)
| Bi2 ← Bi2
| Tf2 ← Tf2 · (1 + Ampl · sin(v · iTime))
| CiUp ← -2 · Fo · ΔiUp
| BiUp ← 1 - CiUp + 2 · Fo · Bi2
| AiUp ← 0
| DiUp ← T0iUp + Qv + 2 · Fo · Tf2 · Bi2
| augment(A, B, C, D)

```

Рис. 6.5. Подпрограмма для вычисления матрицы коэффициентов

### Mathcad-программа SysTRD

Функция SysTRD (рис. 6.6) решает трехдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки.

```

SYSTRD(A, B, C, D) := | iUp ← last(A)
                       | for i ∈ 2.. iUp
                       |   temp ←  $\frac{C_i}{B_{i-1}}$ 
                       |   ( Bi ← Bi - temp · Ai-1   Di ← Di - temp · Di-1 )
                       |   DiUp ←  $\frac{D_{iUp}}{B_{iUp}}$ 
                       |   for j ∈ iUp - 1, iUp - 2.. 1
                       |     Dj ←  $\frac{(D_j - A_j \cdot D_{j+1})}{B_j}$ 
                       | D
    
```

Рис. 6.6. Метод прогонки

Матрицы коэффициентов A, B, C, D подготовлены подпрограммой Coef. В процедуре значения коэффициента D замещаются вычисленными значениями температуры в узлах сетки. Функция SysTRD возвращает вектор (одномерный массив) решений системы.

### Mathcad-программа TimeHistory

Программа TimeHistory организует вычисления по временным шагам (рис. 6.7) и возвращает распределения температуры по координате x для последовательных моментов времени iTime как столбцы матрицы F. Параметр nTime задает число шагов по времени.

```

TimeHistory(Fo, Λ, Qv, T0, Tf, Bi, Pulse, nTime) := | for iTime ∈ 1.. nTime
                                                    | S ← Coef(Fo, Λ, Qv, T0, Tf, Bi, Pulse, iTime)
                                                    | T ← SYSTRD(S(1), S(2), S(3), S(4))
                                                    | T0 ← T
                                                    | F(iTime) ← T
                                                    | F
    
```

Рис. 6.7. Главная программа

На каждом шаге по времени вызывается процедура Coef для вычисления коэффициентов A, B, C, D. Затем происходит обращение к решателю системы уравнений методом прогонки SysTRD. Обновляется вектор значений температуры T0 на предыдущем временном шаге и добавляется столбец к матрице F, хранящей распределения температуры для последовательных моментов времени.

### *Компьютерное моделирование периодических тепловых воздействий*

Подготовка исходных данных для расчета показана на рис. 6.8. Предполагается исследовать температурные колебания в латунном стержне длиной 39 мм, если на правом торце задана температура, пульсирующая около среднего значения  $800^{\circ}\text{C}$  с амплитудой  $320^{\circ}\text{C}$ , а на левом торце – постоянная нулевая температура.

Из вербальной формулировки следует, что на обоих торцах ставятся граничные условия Дирихле (граничные условия первого рода). В программном коде реализованы смешанные условия (условия третьего рода), но их легко приспособить для любой ситуации. Присваивая нужные значения температурам жидкости Tf ( $Tf_1 = 0$ ,  $Tf_2 = 800$  и  $Ampl = 320$ ) и задавая относительно большие значения *сеточных* чисел Био  $Bi_1$ ,  $Bi_2$ , соответствующие большим значениям коэффициентов теплоотдачи, мы обеспечим примерное равенство температур поверхности и жидкости.

Подготовительные вычисления на рис. 6.8 понятны без комментариев. В конце представленного фрагмента с помощью функции matrix формируется вектор начальных температур T0, задающий равномерное начальное распределение  $100^{\circ}\text{C}$ , а также вектор значений относительного коэффициента теплопроводности  $\Lambda$ .

В данном примере величина  $\Lambda$  принимается постоянной. Если теплопроводность зависит от координат и/или температуры, то понадобится дополнительная процедура или вставка в программу Coef. Лучшим способом осреднения коэффициента теплопроводности будет вычисление среднегармонических значений по формуле (6.4). Мы оставляем эти усовершенствования программы как упражнение для читателей.

$$\begin{array}{llll}
\lambda := 100 & c_p := 400 & \rho := 9000 & a := \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \\
\Delta x := 0.001 & nX := 41 & \Delta \tau := 1 & nTime := 201 \\
Fo := a \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} & Fo = 27.778 & q_v := 0 & Q_v := Fo \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{q_v}{\lambda} \\
Ampl := 0.4 & v := 0.1 & Pulse := \begin{pmatrix} Ampl \\ v \end{pmatrix} & \\
Tf := (0 \quad 800)^T & Bi := (1 \quad 1)^T & & \\
FT(i, j) := 100 & T0 := matrix(nX, 1, FT) & & \\
F\Lambda(i, j) := 1 & \Lambda := matrix(nX, 1, F\Lambda) & & 
\end{array}$$

Рис. 6.8. Пример расчета: исходные данные

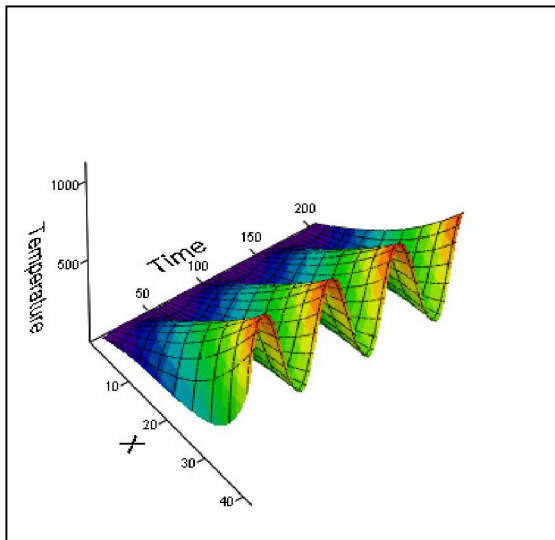
Результаты расчетов показаны на рис. 6.9. Трехмерный график дает полное представление о температурном поле. Координатная плоскость в основании диаграммы образована продольной координатой  $x$  и временной осью. На вертикальной оси отложена температура. Проследивая линии сетки на волнообразной поверхности в каком-либо нормальном к оси  $x$  сечении, мы наблюдаем временную зависимость температуры в фиксированной точке стержня. В сечениях, нормальных к оси времени, получаются распределения температуры вдоль стержня для различных моментов времени. Для построения такой диаграммы в Mathcad следует в окне 3-D Plot Format выбрать закладку Appearance и опцию Wireframe; на закладке Special необходимо отключить опцию Draw Line для z-contour и включить ее для  $x$  и  $y$ -contours.

Итак, на диаграмме рис. 6.9 наблюдаются пульсации температуры стержня, вынуждаемые периодическим изменением температуры горячей жидкости на правом торце стержня. Пульсации затухают по мере приближения к левому торцу, интенсивно охлаждаемому жидкостью с постоянной температурой.

Следующая диаграмма (рис. 6.10) представляет серию температурных распределений вдоль оси  $x$  стержня для нескольких последовательных моментов времени. Можно заметить, что имеется начальная стадия (кривая  $T_{ix,1}$ ), когда внутри стержня еще

сохраняется область с начальным значением температуры, а затем устанавливаются периодические вынужденные колебания в соответствии с внешним тепловым воздействием.

T := TimeHistory (Fo ,  $\Lambda$  , Q<sub>v</sub> , T0 , Tf , Bi , Pulse , nTime)



T

Рис. 6.9. Результаты расчета: температурные волны в трехмерном представлении

$ix := 1, 3.. 41$

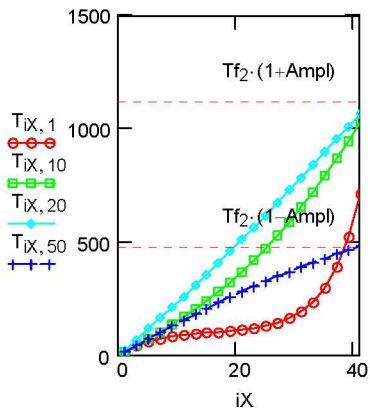
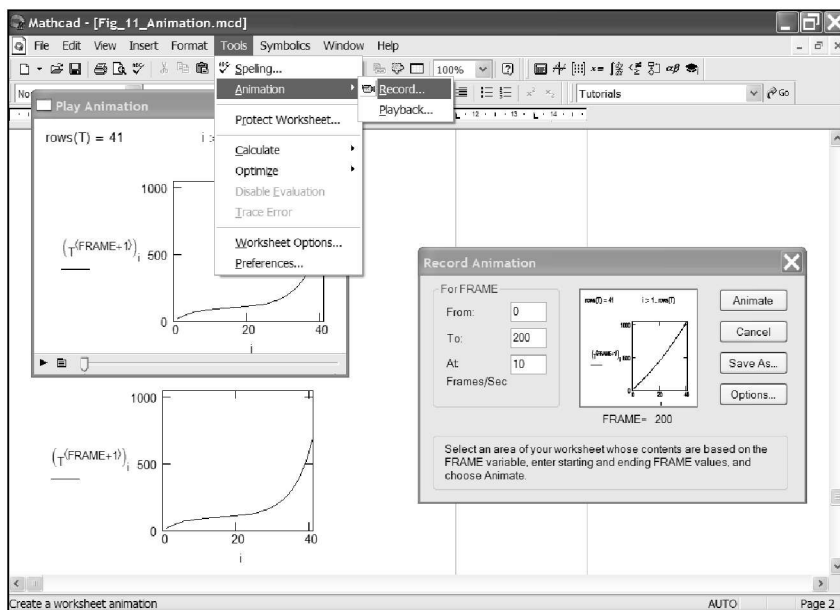


Рис. 6.10. Температурные волны: временные серии распределения температуры по продольной координате

Особенно наглядное представление нестационарного температурного поля получают посредством анимации, как это показано на скриншоте рабочего листа Mathcad (рис. 6.11).



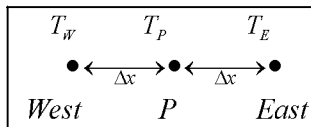
**Рис. 6.11.** Создание анимированного графика распределения температуры по длине стержня

Далее, в параграфе 6.6, можно увидеть живые примеры создания анимаций, обратившись непосредственно к встроенному Mathcad-документу.

### 6.5. Встроенная функция Pdsolve для решения одномерных нестационарных задач

В математическом пакете Mathcad имеется встроенная функция Pdsolve для численного решения одномерных нестационарных задач. Pdsolve базируется на численном *методе линий* (MOL), который применяется для гиперболических и параболических уравнений в частных производных.

Рассмотрим коротко идею численного метода линий (MOL). Возвращаясь к выводу дискретного уравнения (6.3), мы сделаем теперь только половину работы: проведем дискретизацию для пространственной координаты  $x$ , но оставим исходное непрерывное представление для временной переменной  $\tau$  (для упрощения выкладок мы положили постоянными свойства и сделали нулевым внутренний источник). Как обычно, заменим производные по *координате* конечно-разностными представлениями:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_W - 2T_P + T_E}{\Delta x^2},$$

где  $P$ ,  $W$ ,  $E$  – узлы сетки: центральный пункт (*Point*), для которого выводится уравнение, и соседние узлы *West* и *East*, находящиеся слева и справа от  $P$  на небольшом расстоянии, равном шагу сетки  $\Delta x$ .

Производную по *времени* оставим в исходной непрерывной форме. В результате вместо (6.3) получается следующее уравнение:

$$\frac{dT_P}{d\tau} = \frac{a}{\Delta x^2} (T_W - 2T_P + T_E). \quad (6.9)$$

Уравнения вида (6.9) можно записать для всех узлов сетки, с некоторыми модификациями для поверхностных узлов, где следует учесть граничные условия. Тогда вместо уравнения в *частных* производных получается *система обыкновенных* дифференциальных уравнений (по независимой переменной –  $\tau$ , время), порядок которой равен числу узлов сетки. Решение этой редуцированной задачи, т.е. интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, является хорошо изученной проблемой численного анализа. Исторически частичная дискретизация применялась для интегрирования уравнений в частных производных на электронных аналоговых машинах.

Обращение к встроенному интегратору выглядит следующим образом (см. также рис. 6.13):

$$u := \text{pdsolve}\left(u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ x\text{Max} \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ t\text{Max} \end{pmatrix}, [\text{xpts}], [\text{tpts}]\right).$$

Дифференциальное уравнение для неизвестной функции  $u(x,t)$  и краевые условия вводятся в привычной математической нотации между служебным словом Given («дано») и обращением к интегратору pdsolve () («решить уравнение в частных производных»). Подробное описание работы с интегратором Pdsolve дано в гл. 7, а здесь мы ограничимся кратким примером.

Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе – о температурных волнах в стержне, но с некоторыми изменениями в граничных условиях. На левом торце стержня устанавливается тепловая изоляция, и мы предполагаем исследовать, как распространяются температурные пульсации вдоль стержня и как выглядят колебания температуры на левом теплоизолированном конце стержня по сравнению с вынужденными пульсациями на правом обогреваемом торце.

Основные параметры задачи такие же, как на рис. 6.8. Дополнительные подготовительные вычисления показаны на рис. 6.12. Коэффициент теплоотдачи на правом торце обозначен как  $\alpha$ ; осциллирующая температура жидкости –  $Tf_2$ . Начальная температура  $T_0$  по длине стержня постоянна и равна средней температуре жидкости  $Tf_2$ .

$$\begin{aligned} \alpha &:= 100000 \\ T_0 &:= Tf_2 & Tf_2(\tau) &:= Tf_2 \cdot (1 + \text{Ampl} \cdot \sin(v \cdot \tau)) \\ L &:= \Delta x \cdot (nX - 1) & L &= 0.04 \\ \tau\text{Max} &:= \Delta \tau \cdot (n\text{Time} - 1) & \tau\text{Max} &= 200 \end{aligned}$$

**Рис. 6.12. Дополнительные исходные данные для Pdsolve**

Краевая задача вводится в блок Given...Pdsolve и результат численного интегрирования присваивается функции T (рис. 6.13).

Графики отображают:

1. Рассчитанную температуру обогреваемого (правого) конца стержня  $T(L,\tau)$ .



2. Заданную пульсирующую температуру жидкости  $Tf2(\tau)$ .
3. Рассчитанную температуру изолированного (левого) конца  $T(0,\tau)$ .

Температуры  $T(L,\tau)$  и  $Tf2(\tau)$  практически совпадают благодаря большой величине коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Пульсации затухают вдоль стержня. При этом возникает сдвиг фаз при сохраняющейся частоте колебаний.

Given

$$T_{\tau}(x, \tau) = a \cdot T_{xx}(x, \tau) \quad \leftarrow \text{Уравнение в частных производных}$$

$$T(x, 0) = T_0 \quad \leftarrow \text{Начальное условие}$$

$$T_x(0, \tau) = 0 \quad -\lambda \cdot T_x(L, \tau) = \alpha \cdot (T(L, \tau) - Tf2(\tau)) \quad \leftarrow \text{Граничные условия}$$

$$T := \text{Pdsolve} \left( T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{\text{Max}} \end{pmatrix}, nX, nTime \right) \quad T = \text{function}$$

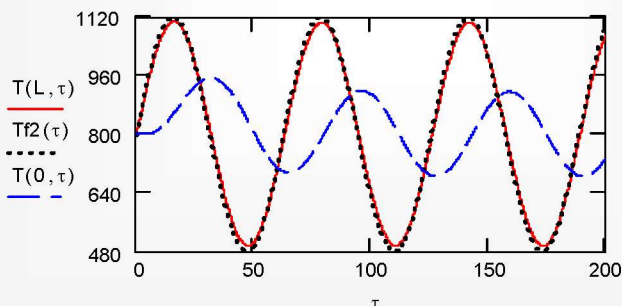


Рис. 6.13. Вычислительный блок Given...Pdsolve

## 6.6. Работа с компьютерными программами

По гиперссылке, представленной в [26] как

..\Mathcad\_HMT\6\_Num\_HeatCond\Rod\_Pulse\Rod\_sinPulse\_TDMA\_Anim.mcd

открывается Mathcad-программа, использующая метод прогонки (см. параграф 6.4).

Полезно:

- подробно ознакомиться с кодом программы;
- модифицировать код в соответствии со своими задачами, например, изменить в программе Coef в блоке Right boundary вид температурных колебаний, заменив синусоиду какой-либо другой функцией;
- провести численный эксперимент, изменяя параметры задачи, например, значения коэффициентов теплоотдачи (параметров Bi);
- освоить создание анимаций.

По гиперссылке из [26]

..\Mathcad\_HMT\6\_Num\_HeatCond\Rod\_Pulse\Rod\_sinPulse\_pdesolve\_Anim.mcd

будет вызвана программа, использующая метод Pdesolve. Граничные условия изменены по сравнению с предыдущим примером: теперь левый торец стержня теплоизолирован, и теплообмен со средой происходит только на правом торце. Тепловой поток попеременно то поступает в стержень, то отводится обратно в жидкость. По такому принципу работают так называемые *регенеративные* теплообменники.

В этом Mathcad-документе можно во всех подробностях проследить за способами визуализации температурного поля и подготовкой анимаций.

В следующем примере, представленном в [26] гиперссылкой

..\Mathcad\_HMT\6\_Num\_HeatCond\Rod\_Pulse\Rod\_squarePulse\_pdesolve\_Anima.mcd

изменена форма вынужденных колебаний на правом торце: теперь это попеременное обтекание горячей и холодной жидкостью со ступенчатым временным профилем температуры.

Численные эксперименты на компьютерных моделях могут быть эффективным средством оптимизации температурных режимов при специальной термической обработке деталей с целью упрочнения поверхности, как показано в программе (гиперссылка в [26]):

..\Mathcad\_HMT\6\_Num\_HeatCond\Rod\_Pulse\case-hardening\_pdesolve.mcd

Такую обработку проводят посредством мощного лазерного импульса, обеспечивающего нагрев тонкого приповерхностного слоя до высокой температуры. Затем происходит быстрое охлаждение

этого слоя благодаря теплоотводу внутрь материала. Мощность импульса (или плотность потока излучения  $q_0$ ) и его длительность ( $\tau_{\text{Pulse}}$ ) должны быть подобраны таким образом, чтобы обеспечить нужный температурный режим закалки в слое заранее заданной (порядка нескольких сотен микрометров) толщины.

Программирование начинается с формирования лазерного импульса, как показано на рис. 6.14.

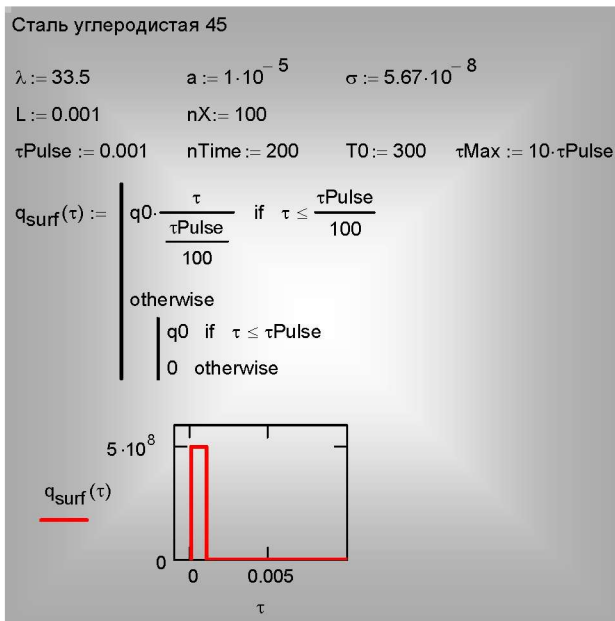


Рис. 6.14. Формирование ступенчатого теплового импульса

При постановке красной задачи теплопроводности (рис. 6.15) на левой граничной поверхности задается условие адиабатической изоляции, а на правой границе, подверженной лазерному воздействию, ставится условие второго рода (условие Неймана), причем тепловой поток определяется лазерным импульсом и тепловым излучением стержня в окружающую среду.

Температурное поле  $T(x, \tau)$  рассчитывается посредством функции  $Pdsolve$ . На графике (рис. 6.15) видно, что температура облучаемой поверхности  $T(L, \tau)$  достигает высокого максимального значения в конце импульса и далее очень быстро убывает во времени, что и обеспечивает закалку.

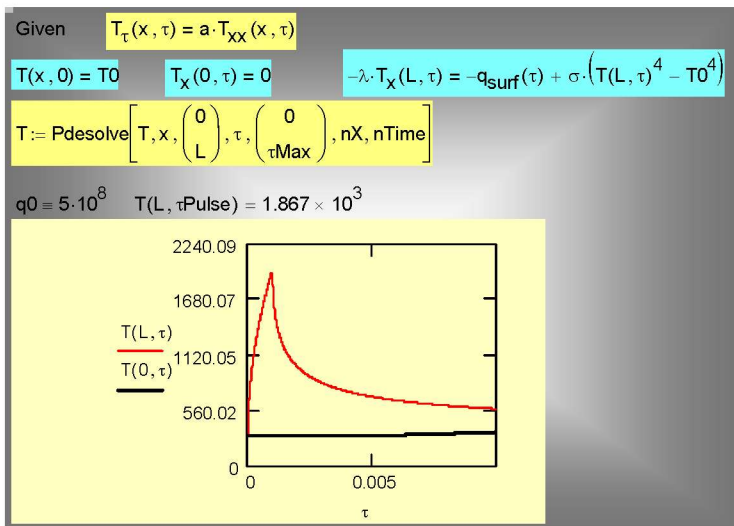


Рис. 6.15. Численное интегрирование задачи об импульсном воздействии

Представление о глубине закаливаемого слоя дает пространственно-временная диаграмма на рис. 6.16. Изменяя при численных экспериментах параметры импульса, можно подобрать необходимые технологические параметры термической обработки.

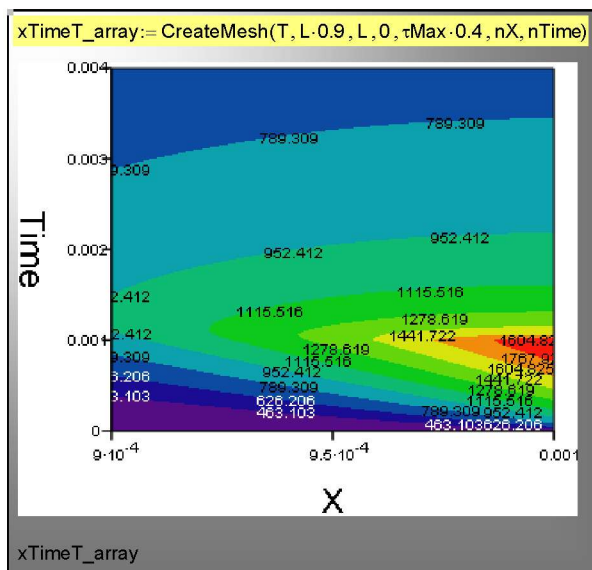


Рис. 6.16. Пространственно-временная диаграмма распределения температуры в стержне при импульсном воздействии

Мы привели несколько примеров решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Численные эксперименты можно продолжить в следующих направлениях:

- исследовать влияние коэффициента теплоотдачи на температуру горячего торца (на ее максимальное и среднее значение);
- исследовать влияние свойств материала на максимальную температуру поверхности и теплоотвод через стержень;
- исследовать глубину проникания температурных волн, взяв длинный стержень и задав адиабатические условия на левом торце;
- исследовать теплопередачу через стенку, если коэффициент теплоотдачи пульсирует во времени (для этого понадобится несколько модифицировать программу Coef, обеспечив вариации числа Био так же, как сейчас это сделано с температурой жидкости);
- исследовать температурные режимы стенок цилиндра двигателя внутреннего сгорания с воздушным охлаждением;
- исследовать температурные режимы стен здания при годовых и сезонных изменениях температуры;
- решить обратную задачу, определяя температуру на поверхности по измеренным значениям в глубине;
- и т.д.

Большинство классических задач теплопроводности, рассматриваемых в учебных курсах тепломассообмена, можно проанализировать в режиме численного эксперимента на разработанной в параграфе 6.4 компьютерной модели TDMA или с применением встроенной функции Pdesolve. Методом *счета на установление* решаются стационарные задачи (например, теплопроводность вдоль ребра).

## 6.7. Численные методы для многомерных задач

Образ платы компьютера как пластины, нагретой в одних местах довольно сильно и холодной в других – хороший логотип для двумерного температурного поля (рис. 6.17). Обеспечение необходимого температурного режима настолько важно для надежного функционирования компьютера, что предусматривает-

ся установка датчиков температуры, показания которых можно контролировать (рис. 6.17). Шум работающих в корпусе системного блока микровентиляторов – постоянное напоминание о проблеме охлаждения компьютера.

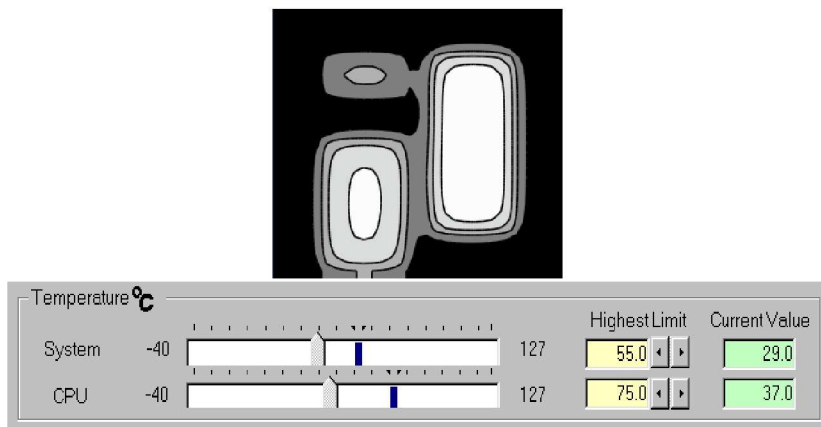


Рис. 6.17. Температурное поле платы компьютера и показания датчика для системного блока (29°C) и процессора (37°C)

Показания датчиков температуры дают важную, но все же очень ограниченную информацию о температурном режиме компьютера, поскольку измерения произведены только в нескольких точках. Далее мы рассчитаем и сделаем видимым *температурное поле* компьютерной платы, т.е. распределение температуры по всей поверхности, включая различные микросхемы и сильно греющийся процессор.

Схематическое модельное представление компьютерной платы как теплового объекта поясняется на рис. 6.18, рис. 6.19.



Рис. 6.18. Схематический образ платы компьютера

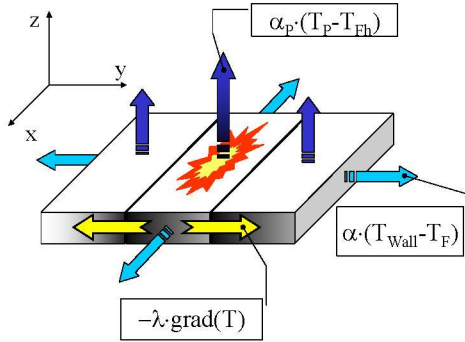


Рис. 6.19. Схема процессов переноса теплоты в плате компьютера

В микросхемах выделяется теплота, которая распространяется вдоль платы посредством теплопроводности. С верхней и нижней поверхностями происходит теплоотдача в окружающую среду (см. рис. 6.19). Следует учитывать также теплоотвод с боковых (торцевых) граней.

При включении питания компьютерная плата будет разогреваться, но затем температура установится на некотором уровне, а внутреннее тепловыделение будет полностью компенсироваться теплоотводом в окружающую среду. Такой режим называется *стационарным*, не меняющимся во времени.

Строго говоря, температурное поле будет *трехмерным*, т.е. температура будет меняться как вдоль платы (вдоль осей  $x$ ,  $y$ , которые мы расположим в плоскости платы), так и по ее толщине (по оси  $z$ ). Однако изменениями по оси  $z$  можно пренебречь, если плата тонкая, ее теплопроводность достаточно велика, а коэффициенты теплоотдачи на верхней и нижней поверхностях относительно малы. Примем эти предположения и будем считать температурное поле *двумерным*, а *теплоотвод с верхней и нижней поверхностями* (т.е. в направлении оси  $z$ ) имитируем внутренним стоком теплоты, т.е. отрицательным источником. Это замечание станет более понятным позже, при записи уравнения баланса (6.16).

В качестве исходной формулировки принимается уравнение теплопроводности (2.14) из гл. 2, в котором следует учесть двухмерность и стационарность задачи,  $T = T(x, y)$ , а также постоянство коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , Вт/(м К):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{q_V}{\lambda}. \quad (6.10)$$

Мы рассчитаем далее температурное поле в плате компьютера посредством численного интегрирования этого уравнения.

***Встроенные функции для решения уравнений в частных производных***

Инженерный математический пакет Mathcad располагает весьма ограниченными средствами для решения эллиптических уравнений в частных производных. Используя встроенные функции multigrid и relax, можно получить решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (6.11)$$

в квадратной области, если на границах задано:

- постоянное нулевое значение искомой величины  $u$  (используется multigrid);
- некоторое распределение вдоль границы (используется relax).

Таким образом, в обоих случаях задача решается при граничных условиях первого рода (задача Дирихле).

Записав обращение к функции multigrid:

$$u := \text{multigrid}(M, \text{ncycle}),$$

получают квадратную матрицу значений искомой функции  $u(x, y)$  в квадратной области. Матрица  $M$  размером  $(n+1) \times (n+1)$  с элементами  $M_{i,j}$ ,  $i := 0..n$ ,  $j := 0..n$ , задает внутренние источники (стоки) в узлах сетки  $(n+1) \times (n+1)$ . Рекомендуемые значения расчетного параметра ncycle есть 1 или 2. Напомним еще раз, что по умолчанию предполагается задание нулевых граничных условий.

Обращение к функции relax выглядит сложнее:

$$u := \text{relax}(A, B, C, D, E, F, U, \text{rjas}). \quad (6.12)$$

Квадратные матрицы  $A, B, C, D, E$  определяют коэффициенты линейной аппроксимации лапласиана (оператора в левой части уравнения Пуассона) в каждой точке расчетной сетки. Мат-



рица  $F$  дает значения функции источника. Матрица  $U$  предписывает граничные значения вдоль четырех сторон, а также задает начальное приближение во внутренних точках. Расчетный параметр  $\tau_{\text{гас}}$  контролирует сходимость итераций; его оптимальное значение из интервала  $0..1$  зависит от индивидуальности задачи.

Целью дальнейшего изложения являются необходимые пояснения того, как формируются матрицы  $A, B, C, D, E$  и как их можно модифицировать в зависимости от постановки задачи. Первым результатом будет существенное расширение возможностей встроеной функции `relax`: будет указан способ модификации матриц  $E$  и  $F$  (см. (6.12)), который позволит учесть теплосъем с поверхностей пластины. Кроме того, будет показано, как построить алгоритм и Mathcad-программу для решения задач с граничными условиями более общего вида, чем только условия Дирихле. Наконец, будет рассмотрен практический пример: решение задачи о температурном поле компьютерной платы.

### *Представление дифференциального уравнения теплопроводности в конечно-разностной форме*

При численном интегрировании уравнения (6.10) задачу сводят к расчету температуры в конечном числе точек – узлов сетки, вокруг которых формируют *контрольные объемы*. Фрагмент сетки и типичный контрольный объем показаны на рис. 6.20. Конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения получают, записывая тепловой баланс для контрольного объема  $\delta \times h \times h$ .

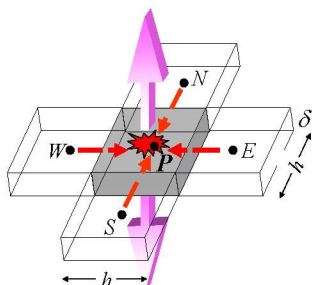


Рис. 6.20. Контрольный объем и потоки теплоты

Внутренняя энергия контрольного объема будет изменяться во времени по следующим причинам:

- происходит поступление теплоты через южную, северную, восточную и западную границы из соседних объемов, температуру в которых мы для определенности считаем более высокой; например, через западную грань:

$$\lambda \frac{T_W - T_P}{h} (\delta \cdot h); \quad (6.13)$$

- имеется теплоотдача в окружающую среду с температурой  $T_{jh}$  через верхнюю и (или) нижнюю поверхности:

$$\alpha_P (T_P - T_{jh}) (h \cdot h); \quad (6.14)$$

- действует внутреннее тепловыделение:

$$q_V (\delta \cdot h \cdot h). \quad (6.15)$$

Суммируя составляющие баланса, получим:

$$\underbrace{\lambda \frac{T_S - T_P}{h} (\delta \cdot h) + \lambda \frac{T_N - T_P}{h} (\delta \cdot h) + \lambda \frac{T_E - T_P}{h} (\delta \cdot h) + \lambda \frac{T_W - T_P}{h} (\delta \cdot h)}_{\text{Теплопровод посредством теплопроводности}} + \underbrace{\left[ q_V (\delta \cdot h \cdot h) - \alpha_P (T_P - T_{jh}) (h \cdot h) \cdot 2 \right]}_{\substack{\text{Внутреннее тепловыделение за вычетом} \\ \text{теплоотдачи с верхней и нижней поверхностей}}} = \quad (6.16)$$

$$= \underbrace{\rho c (\delta \cdot h \cdot h) \left( \frac{T_P - T_P^0}{\Delta \tau} \right)}_{\text{Увеличение внутренней энергии}}$$

где  $T_P^0$  – температура в предыдущий момент времени,  $\Delta \tau$  – временной шаг.

Уравнение баланса (6.16) следует теперь представить в форме линейного алгебраического уравнения относительно неизвестных температур:

$$AT_S + BT_N + CT_E + DT_W + ET_P = S. \quad (6.17)$$

Чтобы обратиться к какой-либо программе-решателю, необходимы выражения для коэффициентов  $A, B, C, D, E, S$ . Мы получим их, сопоставляя форму представления (6.17) и оригинал (6.16). Огра-

начимся случаем *стационарного* состояния ( $T_P = T_P^0$ ) и примем  $\lambda = \text{const}$ . Mathcad выполняет необходимые выкладки, если к (6.16) применить оператор collect. Заметим, что имя balance присвоено левой части (6.16), равной нулю для стационарной задачи.

$$\text{balance} := \frac{\lambda \cdot (T_W - T_P)}{h} \cdot (\delta \cdot h) + \frac{\lambda \cdot (T_E - T_P)}{h} \cdot (\delta \cdot h) + \frac{\lambda \cdot (T_N - T_P)}{h} \cdot (\delta \cdot h) \dots$$

$$+ \frac{\lambda \cdot (T_S - T_P)}{h} \cdot (\delta \cdot h) + q_V \cdot (\delta \cdot h \cdot h) - \alpha_P \cdot (T_P - T_{fh}) \cdot h \cdot h \cdot 2$$

$$\frac{\text{balance}}{\lambda \cdot \delta} \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, } T_P \\ \text{(collect, } T_W, T_E, T_N, T_S) \end{array} \right. \rightarrow$$

$$T_W + T_E + T_N + T_S + \frac{(-4 \cdot \lambda \cdot \delta - 2 \cdot \alpha_P \cdot h^2)}{\lambda \cdot \delta} \cdot T_P + \frac{(q_V \cdot h^2 \cdot \delta + 2 \cdot \alpha_P \cdot h^2 \cdot T_{fh})}{\lambda \cdot \delta}$$

Рис. 6.21. Коэффициенты конечно-разностного уравнения

В результате основное уравнение (6.16) приводится к виду:

$$T_S + T_N + T_E + T_W - (4 + \beta)T_P = S, \quad (6.18)$$

где

$$\beta \equiv \frac{\alpha_P h^2 \cdot 2}{\lambda \delta}; \quad S \equiv -\frac{q_V h^2}{\lambda} - \beta T_{fh}. \quad (6.19)$$

Коэффициенты  $A, B, C, D$  равны единице, а для  $E$  получаем выражение:

$$E = -(4 + \beta). \quad (6.20)$$

Добавочное слагаемое  $\beta$  учитывает теплоотдачу на горизонтальных поверхностях пластины (см. рис. 6.19).

Необязательно коэффициент теплоотдачи  $\alpha_P$  и температура среды  $T_{fh}$  должны быть одинаковы на обеих (верхней и нижней) сторонах пластины или постоянны по поверхности. Необходимые изменения нетрудно ввести в (6.16) и в вычисления на рис. 6.21.

Например, величину  $\alpha_P$  можно рассматривать как среднее значение коэффициента теплоотдачи на верхней (“up”) и нижней (“down”) поверхностях  $(\alpha_{Pup} + \alpha_{Pdown})/2$ , а температуру  $T_{fh}$  – как средневзвешенное значение  $(\alpha_{Pup}T_{fh,up} + \alpha_{Pdown}T_{fh,down}) / (\alpha_{Pup} + \alpha_{Pdown})$ .

Для граничных узлов, расположенных на боковых гранях (рис. 6.19), температуры либо заданы, если ставятся граничные условия первого рода (условия Дирихле), либо для них записываются специальные уравнения, как будет показано ниже (см. уравнение (6.24)). Так или иначе, получается система линейных уравнений вида (6.16) с порядком, равным числу узлов сетки.

Например, если взять по каждой стороне пластины по 33 узла, то всего получится  $33 \cdot 33 = 1089$  узлов сетки. Матрица коэффициентов такой системы будет содержать  $1089 \cdot 1089 = 1185921$  элементов. Это много даже для современных компьютеров. В настоящее время трудности при решении больших систем в значительной степени преодолены, однако численное моделирование многомерных задач тепломассообмена остается искусством и требует применения самых больших вычислительных мощностей.

## Метод Гаусса–Зайделя. Программа Plate

### *Уравнение для внутренних узлов*

Один из простейших алгоритмов решения получающейся системы уравнений основан на итерационной процедуре Гаусса–Зайделя, когда последующие приближения получаются из предыдущих по формуле (6.21), переписанной относительно температуры в рассматриваемом узле  $P$ :

$$T_P = \frac{S - T_S - T_N - T_E - T_W}{E}; \quad E = -(4 + \beta). \quad (6.21)$$

Эта формула годится только для внутренних узлов сетки. Если температура в узлах на границе задана, т.е. поставлены граничные условия первого рода, то больше ничего и не требуется.

### *Уравнение для поверхностных узлов*

Чаще всего на практике ставятся граничные условия третьего рода. При этом задается температура окружающей среды  $T_f$

и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  на поверхности (на тонких боковых гранях  $\delta \times h$  пластины).

Приближенная математическая формулировка условия третьего рода будет следующей:

$$\alpha(T_f - T_{\text{wall}})(\delta \cdot h) \cong \lambda \frac{T_{\text{wall}} - T_{\text{inner}}}{h}(\delta \cdot h). \quad (6.22)$$

Вводя безразмерный коэффициент теплоотдачи (сеточное число Био) как:

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad (6.23)$$

получим удобное для итераций выражение температуры в узлах на (боковой) поверхности  $T_{\text{wall}}$  через температуру окружающей среды  $T_f$  и температуру ближайшего внутреннего узла  $T_{\text{inner}}$ :

$$T_{\text{wall}} = \frac{\text{Bi} \cdot T_f + T_{\text{inner}}}{1 + \text{Bi}}. \quad (6.24)$$

На основе соотношений (6.21) и (6.24) построена Mathcad-программа Plate для расчета температуры в прямоугольной (не обязательно квадратной) области с учетом теплоотдачи на *верхней* и *нижней* поверхностях. На четырех *боковых* гранях ставятся граничные условия третьего рода.

Эта программа позволяет решать широкий круг практически важных задач. В дополнение к примеру с компьютерной платой укажем на расчет пластинчатого оребрения, применяемого с целью интенсификации теплопередачи в теплообменных устройствах, или на расчет пластинчатого радиатора космической энергетической установки.

В следующем пункте дано описание Mathcad-программы, доступной по гиперссылке из [26]:

..\Mathcad\_HMT\6\_Num\_HeatCond\Computer\_Board.MCD,

которая рассчитывает температурное поле платы посредством встроенной функции relax и пользовательской функции Plate.

### ***Тепловая модель платы компьютера***

Вычислительная программа Plate, представленная на рис. 6.22, возвращает

- стационарное температурное поле платы  $T$  как двухмерный массив с индексами  $i=0..m$ ,  $j=0..n$ , т.е. с размерностью  $(m+1) \times (n+1)$ ;

- относительную ошибку  $relErr$  как разность между двумя последними итерациями,

- число итераций  $n\_iter$ .

Точность  $tol$  и максимальное число итераций  $maxiter$  заданы непосредственно в тексте процедуры, поскольку эти параметры редко приходится изменять.

Перечислим входные параметры процедуры `Plate`:

- $E$  – коэффициент в определяющем уравнении (6.21). Задается как матрица той же размерности, что и температура  $T$  в узлах сетки. Вычисляется через значения  $\beta$  – безразмерного коэффициента теплоотдачи на верхней и нижней поверхности платы (см. формулы (6.19) и (6.20) и рисунки: рис. 6.19 и рис. 6.20).

- $S$  – правая часть определяющего уравнения (6.18), матрица такой же размерности, что и  $T$ . Вычисляется по формуле (6.19) через мощность внутренних источников  $q_V$  (т.е. Джоулеву теплоту, выделяющуюся в микросхеме) и теплоотдачу  $\beta$ .

- $IC$  – начальное распределение температуры, матрица такой же размерности, что и  $T$ .

- $Bi$  – число Био, безразмерный коэффициент теплоотдачи на боковых торцах платы (см. формулу (6.23)); матрица размерности четыре, по числу боковых граней платы.

- $Tf$  – температура среды на боковых торцах платы (см. рис. 6.19 и формулу (6.24)); матрица размерности четыре, по числу боковых граней платы.

Структура программы `Plate` следующая. Внешний цикл `for` по переменной `iter` организует итерации. Если максимальная разность в двух последовательных итерациях становится меньше величины  $tol$ , то по команде `break` вычисления в цикле прекращаются и выводятся результаты. Результат предыдущей итерации хранится в массиве  $T0$ .

Внутренний двойной цикл по переменным  $i, j$  использует формулу (6.21) для итераций во *внутренних* точках области. В двух последних циклах производится обход по границам, а для итераций применяется формула (6.24).

```

Plate(E, S, IC, Bi, Tf) ≡ [ (m ← rows(IC) - 1) (n ← cols(IC) - 1)
[(tol ← 0.001) (maxIter ← 100)]
T ← IC
for iter ∈ 1.. maxIter
  for i ∈ 0.. m
    for j ∈ 0.. n
      T0i,j ← Ti,j
  for i ∈ 1.. m - 1
    for j ∈ 1.. n - 1
      Ti,j ←  $\frac{(S_{i,j} - T_{i,j+1} - T_{i+1,j} - T_{i,j-1} - T_{i-1,j})}{E_{i,j}}$ 
  for i ∈ 0.. m
    [ [ Ti,0 ←  $\frac{(T_{i,1} + Bi_0 \cdot Tf_0)}{(1 + Bi_0)}$  ] [ Ti,n ←  $\frac{(T_{i,n-1} + Bi_1 \cdot Tf_1)}{(1 + Bi_1)}$  ] ]
  for j ∈ 0.. n
    [ [ T0,j ←  $\frac{(T_{1,j} + Bi_2 \cdot Tf_2)}{(1 + Bi_2)}$  ] [ Tm,j ←  $\frac{(T_{m-1,j} + Bi_3 \cdot Tf_3)}{(1 + Bi_3)}$  ] ]
  Tm ← max( $\vec{|T|}$ )
  Tm < 0.01 if Tm < 0.01
  [ [ relErr ←  $\frac{\max(\vec{|T - T_0|})}{Tm}$  ] (n_iter ← iter) ]
  break if relErr < tol
(T relErr n_iter)T

```

Рис. 6.22. Функция Plate для численного решения уравнения Пуассона

Поскольку задача будет параллельно решаться с помощью встроенной функции `relax`, обращение к которой записывается как (6.12), напомним, что для равномерной сетки и для постоянного значения теплопроводности коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  имеют единичные значения (см. (6.17) и (6.18)).

Коэффициенты  $E$  вычисляются с учетом теплоотдачи на горизонтальных (верхней и нижней) поверхностях пластины, так же как для программы `Plate`.

Матрицы коэффициентов  $F$  и  $U$  в (6.12) суть то же, что  $S$  и  $IC$  в списке параметров для `Plate`.

После этих предварительных замечаний приведем протокол работы с Mathcad-документом (рис. 6.23). В блоках программы производятся следующие вычисления:

1) задается разбиение квадратной области  $n$ , вводятся значения безразмерного коэффициента теплоотдачи  $\beta$  на поверхности пластины и параметра тепловыделения  $S_0$  (в градусах  $K$ );

2) формируются матрицы коэффициентов уравнения (6.17), задается начальное условие как массив значений температуры  $T_{init}$ , очищается массив  $Source$ , в котором будут записаны значения внутреннего тепловыделения;

3) задается внутреннее тепловыделение в микросхемах – трех подобластях платы;

4) для программы  $Plate$  задаются граничные условия, имитирующие отсутствие теплосъема с тонких боковых граней пластины, т.е. вводятся нулевые безразмерные коэффициенты теплоотдачи вдоль четырех боковых граней и значения температуры среды (последние не обязательно нулевые).

```

(1)  n := 32      β := 0.5      S0 := -50
(2)  i := 0.. n   j := 0.. n
      Ai,j := 1   Bi,j := 1   Ci,j := 1   Di,j := 1   Ei,j := -(4 + β)
      Tiniti,j := 0   Sourcei,j := 0
(3)  i := 18.. 26   j := 6.. n - 6   Sourcei,j := S0
      i := 6.. 14   j := 2..  $\frac{n}{2}$    Sourcei,j :=  $\left(\frac{S_0}{1.2}\right)$ 
      i := 6.. 14   j := 22.. 26   Sourcei,j :=  $\frac{S_0}{2}$ 
(4)  Tf := (0 0 0 0)T      Bi := (0 0 0 0)T

```

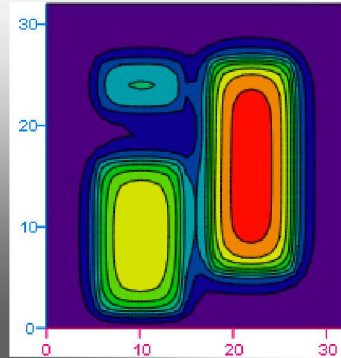
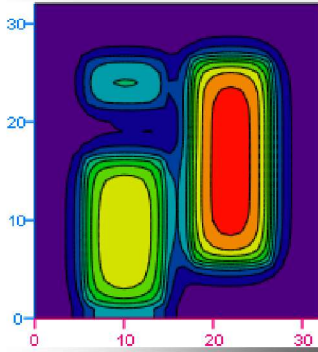
Рис. 6.23. Подготовка исходных данных

Далее производится обращение к пользовательской функции  $Plate$  и к встроенной функции  $relax$ . Результаты решения представлены на рис. 6.24 и рис. 6.25.



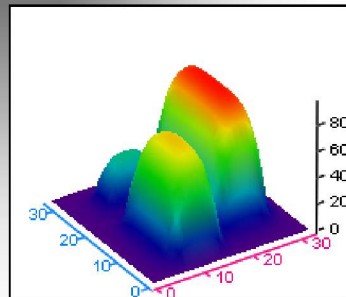
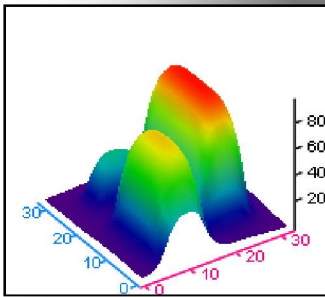
Tplate := Plate (E, Source, Tinit, Bi, Tf)

Trelax := relax(A, B, C, D, E, Source, Tinit, 0.95)



Tplate0

Trelax



Tplate0

Trelax

Рис. 6.24. Результаты численного моделирования температуры платы компьютера (Plate – слева, relax – справа)

i := 10

j := 0..n

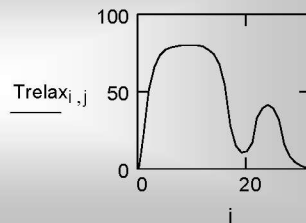
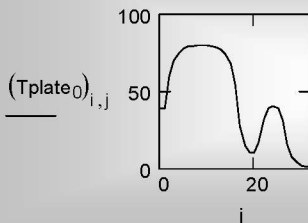


Рис. 6.25. Распределение температуры вдоль линии  $i=10$

Цвет изображения воспроизводит различные значения температуры. Области с высокой температурой – это три микросхемы. Процессор компьютера (самая большая микросхема) нагрет наиболее сильно.

Способ визуализации отражает особенности профессионального – для специалиста в области теплообмена – видения платы компьютера. Мы отслеживаем изменения температуры от точки к точке, внимание концентрируется на областях с *разной температурой* и в особенности там, где температура может превысить допустимое значение.

Как видно из рисунков, решение двумя способами дает в целом близкие результаты. Однако имеются заметные отличия вблизи краев пластины (платы). Это следствие различной постановки граничных условий.

Для встроенной функции `relax` имеется единственная возможность, а именно, задать температуру границы. Какова будет эта температура, заранее не известно. Можно только предполагать, что если тепловыделение не слишком велико и микросхемы расположены на удалении от кромок, то температура по краям платы должна быть близка к температуре окружающей среды. В примере с `relax` температура границ была задана нулевой. Заметим сразу, что высказанные предположения могут не соответствовать действительности, и тогда моделирование методом `relax` приведет к грубым ошибкам.

Для программы `Plate` имеется возможность задавать любые граничные условия. Самым подходящим выглядит предположение о пренебрежимо малом теплоотводе с узких боковых граней платы. Такое условие можно имитировать, задавая нулевые значения коэффициента теплоотдачи, что и сделано в примере. Обратите внимание, температура платы на краях действительно не нулевая. Особенно выделяется область повышенной температуры там, где одна из микросхем расположена близко к границе (рис. 6.24 и рис. 6.25).

Таким образом, решение методом `relax` привело к заметной ошибке из-за неправильной постановки граничного условия, а решение методом `Plate` обеспечило реалистичный результат.

Умение правильно (адекватно реальности) формулировать краевые условия есть основа искусства математического моделирования задач тепломассообмена. Соответственно, хороший инструмент решения этих задач должен предоставлять такую возможность. Встроенной функции `relax` недостает средств постановки граничных условий, позволяющих адекватно представлять взаимодействие объекта с окружающей средой. Программа `Plate` (рис. 6.22) восполняет этот пробел.

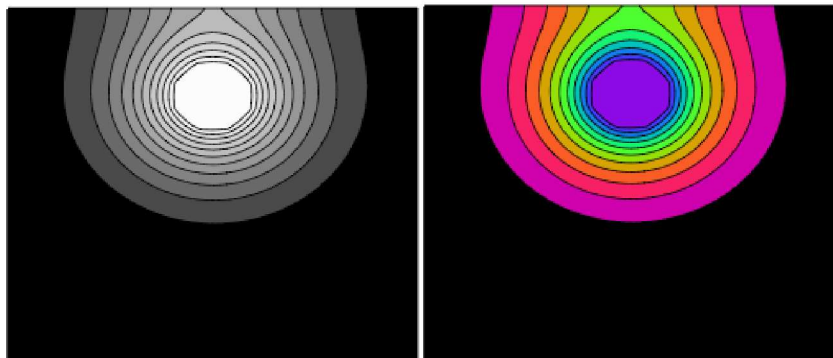
Задачи, возникающих в инженерной практике, могут потребовать более мощных вычислительных программ, чем применявшиеся нами. Рассмотрим в качестве примера компьютерное моделирование с целью управления тепловыми режимами магистральных газопроводов.

Тысячекилометровые нити газопроводов, проложенные на Севере, в полной мере испытывают на себе воздействие проблемы, которая называется *неустойчивостью грунтовых оснований в условиях вечной мерзлоты*. При вспучивании грунта, протаивании или промерзании на отдельных участках возникают недопустимые деформации вплоть до разрыва газопроводов.

Компьютерная модель должна обеспечить расчет полей температур и тепловых потоков в системе газопровод-грунт на участках большой продольной протяженности и для больших промежутков времени, с учетом климатических, сезонных и погодных колебаний внешних условий.

По крайней мере двумя необходимыми свойствами *не обладают* находящиеся в нашем распоряжении `relax` и `Plate`, чтобы решать такие задачи:

- они неспособны рассчитывать нестационарные температурные поля;
- трудно задать необходимую геометрическую конфигурацию – «проложить» газопровод, т.е. сделать в массиве круглое отверстие и задать на получившейся внутренней поверхности нужные граничные условия третьего рода.



T

T

**Рис. 6.26.** Температурное поле в грунте вокруг трубопровода

Мы модифицировали программу Plate следующим образом, чтобы все же провести демонстрационные расчеты такого уровня сложности:

- во-первых, пришлось вернуться к исходному уравнению баланса (6.16) и сохранить в нем нестационарный оператор. В связи с этим изменилось основное расчетное уравнение (6.21);
- во-вторых, потребовалось идентифицировать узлы сетки, а именно, определить, какие из них остаются в расчетной области, а какие попадают в отверстие. Среди попадающих в расчетную область было необходимо отметить те из узлов, которые оказываются на внутренней (круглой) границе области, и применить для расчета температур в этих узлах специальное граничное условие.

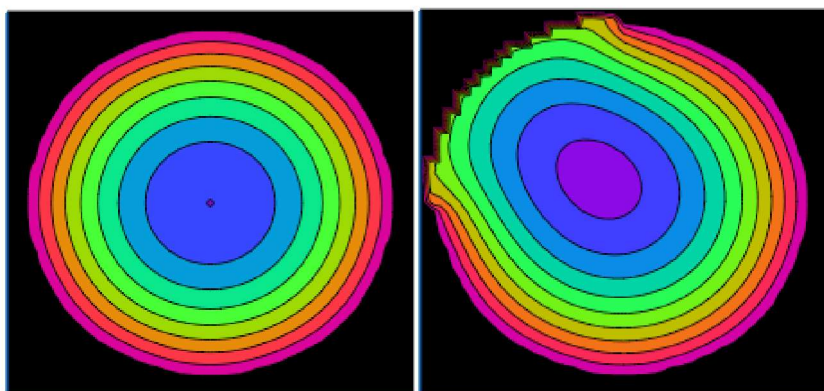
Указанные усовершенствования сделали Mathcad-программу довольно громоздкой, и мы не приводим ее здесь. Демонстрационный пример расчета по этой программе (рис. 6.26) показывает, каким образом зимой над неглубоко заложённой теплотрассой может оказаться оттаявшая земля.

Еще один пример работы модифицированной программы Plate – расчет температурного поля в тепловыделяющем элементе (твэле) ядерного реактора (рис. 6.27). Задача о твэле была решена

ранее в одномерной, осесимметричной постановке. Однако на практике симметрия может быть нарушена, и тогда необходимо рассчитывать двумерное температурное поле. Результаты численного интегрирования представлены на рис. 6.27.

Слева показана штатная ситуация с достаточным и равномерным по окружности охлаждением.

Справа продемонстрирована аварийная ситуация, когда условия охлаждения в левой верхней четверти окружности твэла ухудшились, и изотермы с высокой температурой вплотную приблизились к защитной циркониевой оболочке, допустимая температура которой относительно невелика – около  $400^{\circ}\text{C}$ . При более высокой температуре в контакте с охлаждающей водой быстро развивается разрушительная коррозия.



T

T

**Рис. 6.27. Температурное поле в тепловыделяющем элементе ядерного реактора**

Для расчетов полей в сложных геометрических областях часто применяют метод конечных элементов (МКЭ, или FEM).

Одним из главных отличительных признаков МКЭ является нерегулярная, адаптирующаяся к геометрии объекта и особенностям температурного поля сетка (рис. 6.28).

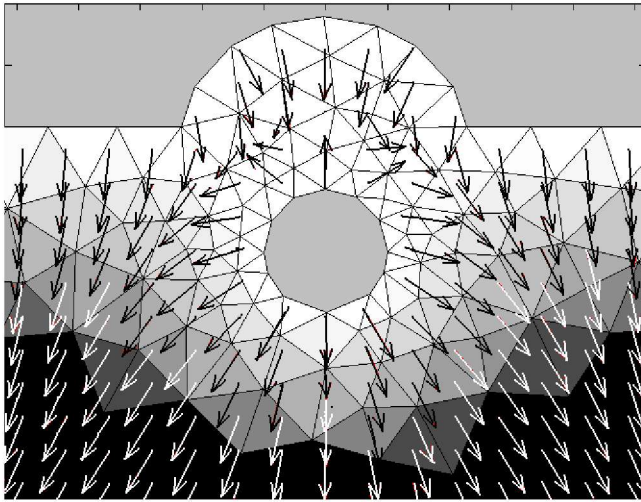


Рис. 6.28. Расчет температурного поля методом конечных элементов

Большие инженерные задачи, такие как полный расчет ядерного энергетического реактора или моделирование аэродинамики автомобиля, требуют применения специальных математических пакетов. На базе МКЭ построен универсальный вычислительный комплекс ANSYS (<http://www.cadfem.ru>, <http://www.ansys.com>), предназначенный для решения задач различной физической природы (прочность, теплофизика, гидрогазодинамика, тепломассообмен, электромагнетизм). Вычислительные пакеты STAR-CD (<http://www.cd.co.uk>), PHOENICS (<http://www.cham.co.uk>) специально ориентированы на компьютерное моделирование в области динамики жидкости и тепломассообмена.

STAR-CD, PHOENICS, ANSYS, FLUENT принадлежат к числу так называемых «тяжелых» пакетов. Они велики по объему, оснащены эффективными численными алгоритмами, удобным интерфейсом, мощными графическими средствами для формирования сложной геометрии объектов и для визуализации результатов. Практически отсутствуют ограничения на сложность задач, за исключением памяти и быстродействия компьютера.

# Глава 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

## 7.1. Введение

Сложная геометрия реальных объектов и возможная нелинейность их математического описания часто делают неэффективными аналитические методы решения актуальных инженерных задач.

Проблема геометрической сложности решается применением математических пакетов трехмерного моделирования. Это специальная инженерная область, первое представление о которой можно получить в гл. 11 «Компьютерное моделирование теплообмена: пакет Matlab» и гл. 6 «Численные методы теплопроводности».

Сложности другого характера, связанные с нелинейностью, нестационарностью, многообразием краевых условий, могут быть проанализированы при численном моделировании *одномерных* нестационарных полей, и мы расширим здесь круг задач предыдущей главы, включив в рассмотрение теплообмен на боковой поверхности, переменность поперечного сечения, продольный конвективный перенос.

Важными приложениями расширенной постановки являются новые технологии, для которых характерны экстремальные параметры тепловых воздействий. В проблеме управляемого термоядерного синтеза плотность теплового потока на тепловоспринимающих твердых поверхностях достигает  $10^8$  Вт/м<sup>2</sup>. В экстремальных температурных условиях работают графитовые электроды плазмотронных установок, применяемых для высокотемпературной обработки различных материалов. Большие потоки и высокие температуры возникают при лазерной или электронно-лучевой обработке деталей с целью упрочнения их поверхности. Похожие процессы имеют место при изготовлении микросхем. Почти всегда мощные воздействия имеют импульсный, периодический характер, и в твердых телах возникают и распространяют-

ся температурные волны. Мы рассмотрим также задачи с распространяющимся фронтом фазового превращения – плавления или затвердевания.

В специальных условиях сами фундаментальные соотношения теории – закон теплопроводности Фурье и дифференциальное уравнение теплопроводности – нуждаются в уточнении. Необходимость учитывать *конечную скорость* распространения температурных возмущений приводит к гиперболическому уравнению теплопроводности (см. п. 7.7).

При разработке новых технологий численный эксперимент на математической модели объекта может быть единственным инструментом исследования, ввиду сложности или даже невозможности поставить натуральный эксперимент. Исследования температурных режимов является актуальной проблемой и во многих отраслях традиционной техники и технологии, в строительной теплофизике, природоведении и т.д.

## 7.2. Физическая модель

Рассмотрим в качестве модели перечисленных выше процессов одномерную нестационарную задачу теплопроводности с внутренними источниками теплоты (рис. 7.1).

Стержень длиной  $L$  подвергается мощным тепловым воздействиям  $q_{wall}$  на его торцах. Внутри действуют распределенные источники мощностью  $q_V$ .

Возможен относительно слабый теплообмен с окружающей средой на боковой поверхности стержня, так что плотность теплового потока  $q_s$  на боковой поверхности отлична от нуля. Перепады температуры в поперечном сечении (по  $y \sim \delta_y$ ) полагаются малыми по сравнению с перепадом по длине (по  $x \sim L$ ), поэтому задача считается одномерной. Если задается интенсивность теплообмена на боковой поверхности, то предполагается выполнение неравенств:

$$\alpha_s \ll \frac{\lambda}{\delta_y}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_y}{\lambda} \ll \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{Bi}_{\delta_y} \equiv \frac{\alpha_s \delta_y}{\lambda} \ll 1,$$

где  $\delta_y$  – характерный поперечный (по координате  $y$ ) размер стержня,  $\alpha_s$  – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности стержня.



Предметом анализа является одномерное нестационарное температурное поле  $t(x, \tau)$  и поле теплового потока  $q(x, \tau)$ .

Дальнейшим обобщением одномерной задачи будет переменность поперечного сечения стержня, как показано далее на рис. 7.2. Мы включим также в рассмотрение задачи с сильно переменными теплофизическими параметрами, и даже скачкообразно изменяющимися на внутренних поверхностях раздела – движущихся фронтах плавления/отвердевания.

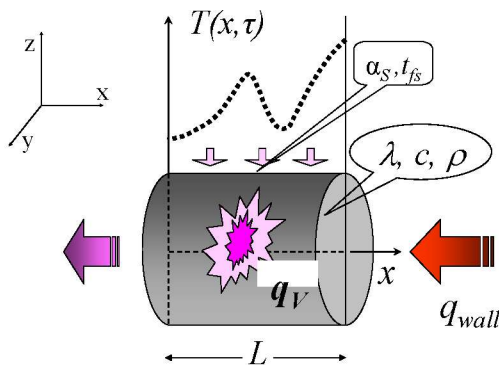


Рис. 7.1. Одномерная нестационарная задача теплопроводности

### 7.3. Математическая формулировка задачи

#### *Нестационарная одномерная задача теплопроводности*

Дифференциальное уравнение теплопроводности (2.14), выведенное в гл. 2, в случае одномерной плоской нестационарной задачи  $t = t(x, \tau)$  записывается следующим образом:

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau}}_{\text{Увеличение энтальпии единичного контрольного объема}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{\text{Подвод теплоты посредством теплопроводности}} + \underbrace{q_V}_{\text{Внутреннее тепловыделение}}. \quad (7.1)$$

Мощность внутренних источников  $q_V$  характеризует скорость *объемного* тепловыделения (при ядерной или химической реакции, при прохождении электрического тока).

Далее мы используем источник теплоты (с обозначением  $q_{V+}$ ) также для имитации *теплоподвода* через поверхность стержня:

$$\underbrace{q_s \cdot (u \, dx)}_{\text{Теплоподвод через боковую поверхность}} = \underbrace{q_{V+} \cdot (f \, dx)}_{\text{Имитация посредством источника}} \Rightarrow q_{V+} = q_s \frac{u}{f}, \quad (7.2)$$

где  $f$  – поперечное сечение стержня,  $u$  – периметр сечения, по которому происходит теплообмен на боковой поверхности,  $q_s$  – плотность теплового потока на боковой поверхности. Геометрические параметры  $f$  и  $u$  считаются постоянными по координате  $x$ , как для стержня постоянного сечения (в следующем параграфе приводится обобщенная формулировка).

Если  $q_s$  определяется уравнением Ньютона-Рихмана, то для  $q_{V+}$  получим:

$$q_{V+} = q_s \frac{u}{f} \Rightarrow q_{V+} = \alpha_s (t_{f,s} - t(x, t)) \frac{u}{f}, \quad (7.3)$$

где  $\alpha_s$  – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности,  $t_{f,s}$  – температура окружающей среды на боковой поверхности.

С учетом дополнительного слагаемого  $q_{V+}$ , дифференциальное уравнение теплопроводности записывается в следующем виде:

$$\rho \, p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + v \, s \frac{u}{f}. \quad (7.4)$$

На левом и правом торцах стержня (рис. 7.1) необходимо задать граничные условия, описывающие тепловое взаимодействие с окружающей средой. Универсальным способом будет применение *граничных условий третьего рода* на левом ( $x = 0$ ) и правом ( $x = L$ ) торцах объекта:

$$\boxed{-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=+0} = \alpha_1 (t_{f1} - t(x=0, \tau))}; \quad (7.5)$$

$$\boxed{-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=L-0} = \alpha_2 (t(x=L, \tau) - t_{f2})},$$

где  $\alpha$  и  $t_f$  – коэффициенты теплоотдачи и температуры окружающей среды на торцах стержня.

В этих соотношениях приравнены значения плотности теплового потока:

- поступающего из окружающей среды и вычисленного по уравнению Ньютона–Рихмана (правые части);
- и отводимого внутрь тела посредством теплопроводности и вычисленного по закону Фурье (левые части).

Подчеркнем, что такое равенство справедливо *при отсутствии* фазовых превращений на поверхности раздела. Если же имеет место плавление или испарение, то *разность* тепловых потоков по обеим сторонам межфазной границы расходуется на фазовое превращение.

Начальное условие задает стартовое тепловое состояние объекта. Чаще всего изменения начинаются из состояния с некоторым равномерным начальным распределением:

$$t(x, \tau = 0) = t_0. \quad (7.6)$$

Дифференциальное уравнение (7.4), граничные условия (7.5) и начальное условие (7.6) составляют математическое описание задачи, схематически представленной на рис. 7.1.

Более строгое обоснование формулировки (7.4 – 7.6) можно получить *методом осреднения*.

### ***Обобщенная одномерная задача теплопроводности***

В предыдущем параграфе рассмотрена формулировка для стержня постоянного сечения. Можно существенно расширить круг задач, решаемых в одномерной постановке, снимая это ограничение. Получающаяся формулировка может быть точной – для задач с цилиндрической или сферической симметрией, или приближенной – в случае более сложной геометрии.

Пусть в некотором объекте существует *преимущественное направление*  $x$ , в котором распространяется тепловой поток (рис. 7.2). Охарактеризуем геометрию объекта двумя функциями продольной координаты  $x$ :

- поперечным сечением  $f(x)$ , через которое проходит тепловой поток, обусловленный теплопроводностью, под действием продольного градиента температуры  $\partial t / \partial x$ ;
- боковой поверхностью  $S(x)$ , через которую происходит теплообмен с окружающей средой.

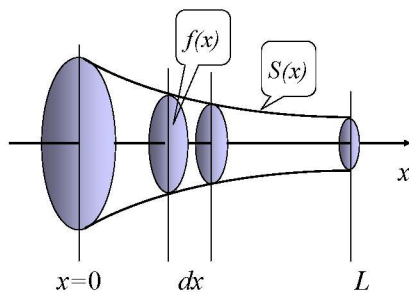


Рис. 7.2. Обобщенная одномерная задача

Предполагается, что поперечные сечения  $f(x)$  примерно соответствуют изотермическим поверхностям.

Для контрольного объема ( $f dx$ ) уравнение баланса энергии запишется следующим образом:

$$\rho_p \left( \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{t}{dx} \right) \right) dx + v \left( \frac{dS(x)}{dx} dx \right) = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{t}{dx} \right) dx + v \left( \frac{dS(x)}{dx} dx \right).$$

Поясним, что производная  $dS/dx$  определяет боковую поверхность в расчете на единицу длины стержня. Для стержня постоянного сечения  $dS/dx = u$ , где  $u$  – периметр поперечного сечения (точнее, та часть периметра, на которой имеет место теплообмен).

После простых преобразований получим:

$$\rho_p \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{t}{dx} \right) = - \left( \lambda \frac{d}{dx} \right) + \left( \lambda \frac{d}{dx} \right) \left[ \frac{1}{d} \frac{d}{dx} \right] + v \frac{dS(x)}{dx} \frac{1}{f(x)}. \quad (7.7)$$

Если  $q_s = 0$ , то при  $f = \text{const}$ ,  $f \sim x$ ,  $f \sim x^2$  получают одномерное уравнение теплопроводности соответственно для плоской, цилиндрической и сферической задач.

Уравнение (7.7) расширяет круг практически важных проблем теплопереноса, решаемых в одномерной постановке. Например, при расчете оребрения становится возможной оптимизация распределения  $f(x)$  с целью конструирования теплоотводящей поверхности с минимальной массой (или с максимальным теплоотводом при фиксированной массе). Следует только иметь в виду, что исходная формулировка (7.7) приближенна и необходим контроль допустимости такого приближения для конкретных конфигураций.

### Задача одномерного конвективного переноса

Пусть в канале переменного сечения  $f(x)$  (рис. 7.2) движется жидкость с массовым расходом  $G$ , кг/с. Конвективный перенос энтальпии в осевом направлении составит величину  $Gh$ , Вт, где  $h$ , Дж/кг – удельная энтальпия. Уравнения баланса массы и энтальпии с учетом конвективного переноса запишутся следующим образом:

$$\rho \frac{dh}{\tau} = - \left( -\lambda \frac{d^2 h}{dx^2} + h \right) v + s \frac{d}{d} \rho$$

или

$$\rho \frac{dh}{\tau} - \frac{h \rho}{\tau} = - \left( \lambda \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{h}{v} \frac{d}{d} \rho$$

Прямыми скобками снизу отмечены взаимно сокращающиеся члены, с учетом уравнения неразрывности.

Учитывая соотношения,

$$\frac{h}{\tau} = \left( \frac{h}{\tau} \Big|_p \right) + \left( \frac{h}{\tau} \Big|_t \right) \cong p \frac{dh}{\tau},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_p \right) \frac{\partial t}{\partial x} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_t \right) \frac{\partial p}{\partial x} \cong p \frac{\partial t}{\partial x},$$

справедливые для идеальных газов или несжимаемых сред (жидкостей, твердых тел), когда изменением энтальпии в зависимости от давления можно пренебречь, (а также для теплообменников, в которых скорость потока и перепады давления обычно относительно невелики), получим дифференциальное уравнение в явной форме относительно температуры:

$$\rho_p \frac{(\quad)}{\tau} = - \left( \lambda \frac{\quad}{\quad} \right) + \left( \lambda \frac{\quad}{\quad} \right) \left[ \frac{1}{d} \right] - \frac{p}{\quad} + \nu \quad s \frac{ds}{dx} \frac{1}{f}. \quad (7.8)$$

При нулевом расходе  $G$ , уравнение (7.8) переходит в уравнение теплопроводности (7.7).

Другой предельный случай уравнения (7.8) получается, если задача стационарная, внутренние источники отсутствуют и продольная теплопроводность пренебрежимо мала:

$$\boxed{Gc_p \frac{\partial t}{\partial x} = q_s u}. \quad (7.9)$$

Это уравнение теплового баланса для теплоносителя, протекающего в канале постоянного сечения.

Полное одномерное уравнение (7.8) является удобным инструментом для приближенного модельного представления нестационарных тепловых режимов в энергетических и теплотехнологических установках.

### **Фазовые превращения**

Если распределение температуры включает точку фазового превращения, то *внутри* объекта возникает граница, разделяющая области (фазы) с существенно различными свойствами:

В таком температурном режиме работают, например, тепловые аккумуляторы для систем с возобновляемыми источниками энергии. Благодаря плавлению первоначально твердого материала, большие количества тепловой энергии запасаются в форме *скрытой теплоты фазового превращения*, а затем отдаются при обратном фазовом переходе – затвердевании. Другим примером, связанным со строительством домов и прокладкой трубопроводов в зоне вечной мерзлоты, является оттаивание и обратное промер-

зание грунта. Задача о плавлении рассматривается при моделировании гипотетической тяжелой аварии на АЭС с расплавлением активной зоны.

На *межфазных границах* происходят резкие (скачкообразные) изменения теплофизических свойств, поэтому обычно записывают дифференциальное уравнение теплопроводности (7.7) для каждой фазы, а на *движущейся границе* раздела задают специальные условия сопряжения.

Возможен и другой подход к численному решению задач с фазовыми превращениями, основанный на том, что в дифференциальном уравнении (7.7) физические параметры (плотность, удельная теплоемкость, теплопроводность) *могут быть переменными величинами*, зависящими от температуры (а также от координат и времени).

Некоторые численные методы интегрирования способны обрабатывать даже скачкообразные изменения параметров, но для сходимости решений лучше применить непрерывные, хотя и быстро меняющиеся аппроксимации.

Как это сделать для энтальпии и теплоемкости *парафина* в окрестности точки плавления, показано на фрагментах Mathcad программы (рис. 7.4, рис. 7.5). Исходными данными служат значения теплоемкости для твердого и жидкого парафина  $c_{PS}$ ,  $c_{PL}$ , теплота плавления  $\Delta h_{SL}$  и температура плавления  $T_{melt}$ .

Запишем выражение для энтальпии в форме интеграла:

$$h(\ ) = \int_0^t p(\ ) d ; \quad = \text{const.}$$

Чтобы применить это соотношение для интервала температур, включающего фазовое превращение, следует учесть, что

- теплоемкость вещества в твердой и жидкой фазах при температуре фазового превращения неодинакова (соответственно 1800 и 2400 Дж/(кгК) в примере с парафином), поэтому в подинтегральном выражении нужно применить функцию Хевисайда (единичного скачка,  $\Phi$  в обозначениях Mathcad, см. рис. 7.3);

- энтальпия претерпевает скачок, равный скрытой теплоте фазового превращения ( $\Delta h_{SL} = 175000$  Дж/кг для парафина), поэтому теплоемкость должна включать дельта-функцию Дирака ( $\Delta$  в обозначениях Mathcad, рис. 7.3).

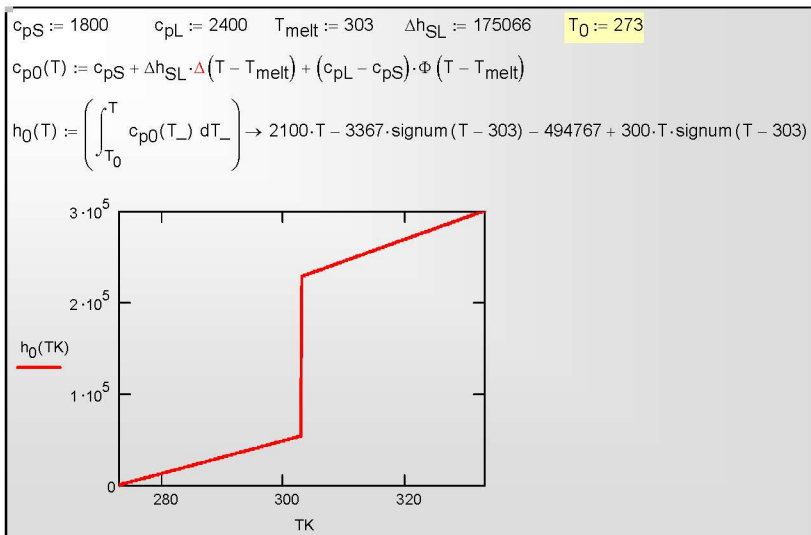


Рис. 7.3. Скачок энthalпии на границе раздела

Избавиться от разрыва непрерывности можно, заменив в выражении для теплоемкости дельта-функцию ее приближенным представлением посредством функции нормального распределения  $\text{dnorm}$  (рис. 7.4). Размытость фронта задается параметром  $\delta T$  (средним квадратическим отклонением) функции распределения.

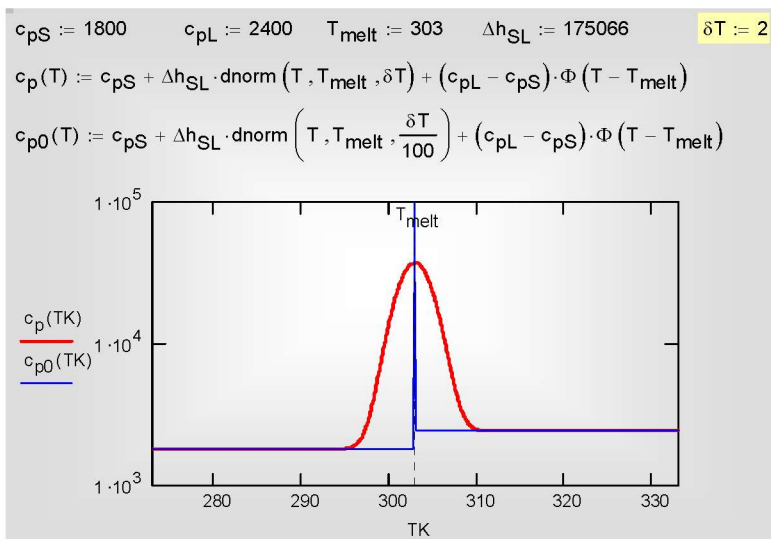


Рис. 7.4. Представление теплоемкости для размытого фронта плавления



Энтальпия вычисляется как интеграл от теплоемкости (рис. 7.5). Видно, что интегральные представления для размытого фронта и «истинного» скачкообразного фронта согласуются между собой. В пределе  $\delta T \rightarrow 0$  они совпадают друг с другом.

Уравнение для теплоемкости размытого фронта (см. рис. 7.4) применяется при расчете коэффициентов в дифференциальном уравнении теплопроводности (7.7). Аналогичные приемы применяются для описания теплопроводности и плотности, при этом сглаживание скачков достигается посредством функции ошибок erf. Следует отметить, что изменения плотности при фазовых переходах жидкость-твердое тело обычно относительно невелики, так что можно пренебречь возможными макроскопическими перемещениями частей тела.

Размывание фронта является приближенным приемом для представления скачкообразных изменений в случае чистых веществ, например, при плавлении льда и образовании воды. Для смесей (сплавов), таких как парафин, плавление действительно происходит в некотором интервале температур.

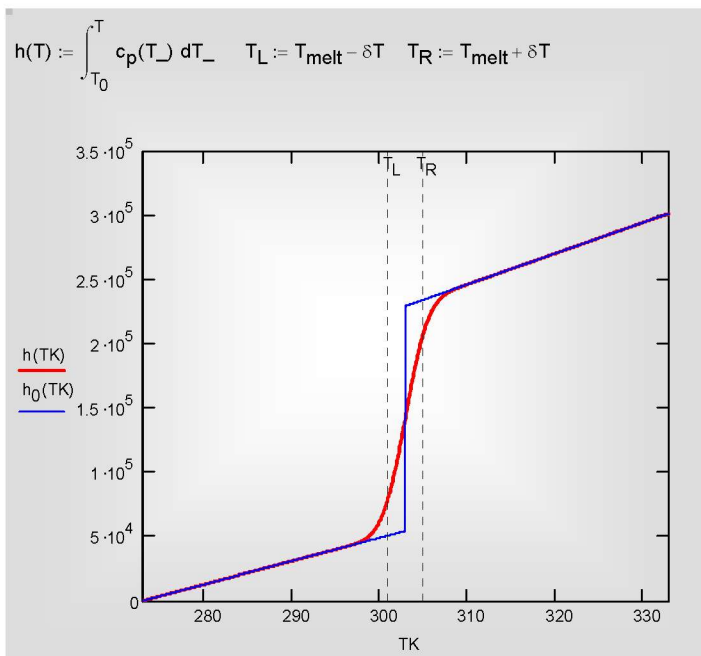


Рис. 7.5. Представление энтальпии для размытого фронта плавления

Итак, мы обобщили исходную формулировку одномерного уравнения теплопроводности (сравните уравнения (7.1) и (7.8)), включив теплообмен на боковой поверхности, переменность поперечного сечения, продольный конвективный перенос, а также возможные скачкообразные изменения физических параметров (как при плавлении или отвердевании).

#### 7.4. Применение функции Pdsolve для решения одномерных нестационарных задач

В математических пакетах (Mathcad, Maple, Matlab) для численного решения одномерных нестационарных задач имеются встроенные функции, например, pdsolve в пакете Mathcad. Это освобождает пользователя от трудоемкой работы с дискретными (конечно-разностными) представлениями математического описания. Внимание сосредоточивается на физической и математической постановке задачи, т.е. формулировке дифференциального уравнения, начальных и граничных условий, адекватных реальной инженерной проблеме. Функция Pdsolve будет основным инструментом исследования в данном подразделе.

Обращение к встроенному интегратору выглядит следующим образом:

$$u := \text{pdsolve} \left( u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ x_{\text{Max}} \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ t_{\text{Max}} \end{pmatrix}, [\text{xpts}], [\text{tpts}] \right).$$

Дифференциальное уравнение для  $u(x,t)$  и краевые условия вводятся в привычной математической нотации между служебным словом Given («дано») и обращением к интегратору pdsolve () («решить уравнение в частных производных») (см. пример на рис. 7.9).

При записи уравнения и краевых условий для указания частной производной используется буквенный подстрочный индекс. Например,  $u_{xx}(x,t)$  есть вторая частная производная от  $u$  по  $x$ . Буквенный (литеральный) индекс создают нажатием клавиши «десятичная точка».

Кроме имени искомой функции  $u$ , в перечне аргументов функции pdsolve указывают:

- 2-элементный вектор-столбец  $(0, x_{\text{Max}})^T$ , содержащий граничные значения координаты  $x$ ;

- 2-элементный вектор-столбец  $(0, tMax)^T$ , содержащий граничные значения времени  $t$ ;
- `xpts` необязательный параметр, задающий число точек пространственной дискретизации;
- `tpts` необязательный параметр, задающий число точек временной дискретизации.

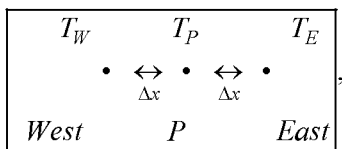
Результат вычисления в `pdesolve()` присваивается функции с заданным пользователем именем, как в примере на рис. 7.9.

Если `pdesolve` применяется к системе уравнений, то `u` как формальный аргумент должен быть вектором-столбцом с именами искомых функций в качестве компонентов. Обращение к интегратору выглядит в этом случае следующим образом:

$$\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \text{pdesolve} \left( \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ xMax \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ tMax \end{pmatrix}, [xpts], [tpts] \right).$$

Дополнительные сведения могут быть получены в `Mathcad Help`, в том числе, о применении в *командной строке* (не в вычислительном блоке `Given`) решателя `numol` для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

`Pdesolve` применяется для гиперболических и параболических уравнений в частных производных и базируется на численном *методе линий* (MOL). Производные по *координате* заменяют конечно-разностными представлениями:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_W - 2T_P + T_E}{\Delta x^2},$$

где  $P, W, E$  – узлы сетки: центральный пункт (*Point*), для которого строится аппроксимация уравнения, и соседние узлы *West* и *East*, находящиеся слева и справа от  $P$  на небольшом расстоянии, равном шагу сетки  $\Delta x$ .

Производную по *времени* оставляют в исходной непрерывной форме. В результате такой «полудискретизации» получается следующее *обыкновенное* дифференциальное уравнение (относительно независимой переменной время) для узла сетки  $P$ :

$$\frac{d P}{d t} = \frac{1}{\Delta^2} (W_2 P - E). \quad (7.10)$$

Уравнения вида (7.10) можно записать для всех узлов сетки, с некоторыми модификациями для поверхностных узлов, где следует учесть граничные условия. Таким образом, вместо уравнения в *частных* производных получается *система обыкновенных* дифференциальных уравнений, порядок которой равен числу узлов сетки. Решение этой редуцированной задачи, т.е. интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, является хорошо изученной проблемой численного анализа.

Функция Pdsolve пакета Mathcad применяется для численного анализа широкого круга модельных задач, описываемых обобщенным уравнением (7.7).

## 7.5. Исследование затухания температурных волн

### *Описание проблемы. Цель исследования*

Пусть температура жидкости, обтекающей один из торцов латунного стержня (рис. 7.1), изменяется во времени по синусоидальному закону. Интенсивность теплообмена на этой поверхности считается большой, благодаря высокой скорости теплоносителя.

Другой торец стержня адиабатически изолирован, так же как и боковая поверхность стержня.

Требуется:

- рассчитать и визуализировать пространственно-временное температурное поле в стержне;
- сопоставить амплитуду, частоту и фазу колебаний на обоих торцах стержня;
- варьировать в численных экспериментах частоту колебаний температуры. Описать характер изменения температурного поля в стержне при увеличении частоты;
- найти на основании численных экспериментов зависимость глубины проникания колебаний от периода (частоты).

Компьютерная модель предоставляет возможность поэкспериментировать с постановкой краевых условий. Пусть, например, необходимо отказаться от условия адиабатичности торца стержня и заменить его на условие изотермичности. Полезно представить себе, каким образом можно добиться этого на реальной установке и как отразить это изменение в математической модели. После проведения численных экспериментов с модифицированной моделью можно зафиксировать изменения в характере получающегося нового температурного поля и проследить связь между измененной постановкой и результатом.

### *Актуальность проблемы*

С температурными колебаниями часто имеют дело в природе и в технике. Например, в строительстве, сельском хозяйстве, коммунальном хозяйстве важно знать, на какую глубину проникают в грунт суточные, сезонные или даже климатические температурные колебания. Это важная проблема для различных трубопроводов, в том числе магистральных нефте- и газопроводов.

Температурные пульсации имеют место в стенках цилиндров двигателей внутреннего сгорания, что следует учитывать при прочностных расчетах.

Мощные импульсные воздействия характерны для многих новых технологий, в том числе, для термоядерной энергетики, для лазерной поверхностной термической обработки и т.п.

Температурные колебания используются для измерения теплофизических параметров, таких как температуропроводность.

При периодических изменениях температуры жидкости (теплоносителя) тепловой поток попеременно то поступает в обтекаемое горячей жидкостью тело, то отводится от него в сменяющий поток холодной жидкости. По этому принципу работают так называемые *регенеративные* теплообменники, и математическая модель может быть применена для оптимизации режимов такого теплообменника.

Задачи о прогреве и остывании в больших пространственных и временных масштабах решаются при анализе космологических проблем (см., например, задачу Томсона (лорда Кельвина) об остывании Земли).

### *Модельные представления. Математическое описание*

Как следует из общего описания задачи, внутренние источники теплоты отсутствуют,  $q_V = 0$ , так же как отсутствует и добавление  $q_{V+}$ , имитирующее теплообмен на боковой поверхности,  $q_{V+} = 0$ .

Примем (необязательное) предположение о несущественном влиянии температурной зависимости физических параметров на характеристики колебаний и будем считать физические параметры  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  стержня постоянными.

В рамках указанной постановки задачи представим дифференциальное уравнение теплопроводности (7.4) в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (7.11)$$

где  $a = \lambda / (\rho c_p)$  – коэффициент температуропроводности.

Опишем условия взаимодействия с окружающей средой на торцах стержня и сформулируем граничные условия.

Один из торцов стержня, например левый ( $x = 0$ ), адиабатически изолирован. Это означает, что задан тепловой поток, равный нулю, т.е. поставлено граничное условие второго рода (условие Неймана):

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (7.12)$$

На правом торце ( $x = L$ ) происходит конвективный теплообмен с жидкостью, поэтому следует поставить граничное условие третьего рода (условие Роббина), причем температура жидкости  $t_{f2}$  должна быть задана как некоторая функция времени, с целью осуществить периодическое тепловое воздействие на стержень:

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=L-0} = \alpha_2 (t(x=L, \tau) - t_{f2}(\tau)). \quad (7.13)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  должен быть достаточно большим:

$$Bi_L = \frac{\alpha_2 L}{\lambda} \gg 1,$$

чтобы температура  $t(x=L, \tau)$  торца стержня следовала за временными изменениями температуры жидкости  $t_{f2}$ .

Начальное распределение задано в простейшей форме – как постоянная по длине стержня величина.

$$t(x, \tau = 0) = t_0. \quad (7.14)$$

## Программирование

### *Ввод исходных данных*

Исходные данные вводятся посредством объекта управления Text box, Web Control (рис. 7.6, рис. 7.7). Контроль размерности величин возлагается на пользователя. Следует вводить величины в системе СИ, без десятичных приставок типа «мега», «милли», при необходимости используя степени десяти.

*Геометрические параметры объекта:*

Длина стержня L    L :=  m

*Теплофизические свойства:*

$\lambda :=$    $\frac{W}{m \cdot K}$      $\rho :=$    $\frac{kg}{m^3}$      $c_p :=$    $\frac{J}{kg \cdot K}$

$a := \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$      $\frac{m^2}{s}$     a = 2.778 × 10<sup>-5</sup>

*Параметры теплового воздействия:*

Средняя температура жидкости, K    T<sub>f\_mean</sub> :=

Амплитуда колебаний, K    Amplitude :=

Период колебаний, секунд    Period :=

Коэффициент теплоотдачи  $\frac{Вт}{m^2 K}$      $\alpha :=$

Рис. 7.6. Ввод исходных данных

**Начальные условия:**

Начальная температура стержня, К

$T_{init} :=$	700
---------------	-----

**Параметры счета:**

Время наблюдения, число периодов

$NofPeriods :=$	3
-----------------	---

Число точек дискретизации на один период

$nTime\_per\_Period :=$	41
-------------------------	----

Число точек дискретизации по длине стержня

$nX :=$	41
---------	----

$$t_{Max} := NofPeriods \cdot Period$$

$$t_{Max} = 180$$

$$\Delta t := \frac{Period}{nTime\_per\_Period - 1}$$

$$\Delta t = 1.5$$

$$nTime := (nTime\_per\_Period - 1) \cdot NofPeriods + 1$$

$$nTime = 121$$

Рис. 7.7. Начальные условия и параметры счета

**Описание внешних тепловых воздействий**

Пользовательская функция (рис. 7.8) для температуры жидкости, обтекающей правый торец стержня, содержит три числовых параметра: среднее значение, амплитуду и период колебаний. Наибольший интерес представляет влияние частоты (или периода, *Period*) колебаний на распространение температурных волн в твердых телах.

Предполагается, что уровень температуры высокий, т.е. в реальном прообразе модели применяется высокотемпературный теплоноситель, возможно жидкий металл (например, натрий) или расплавленная соль. Такие теплоносители обеспечивают высокий уровень интенсивности теплоотдачи.



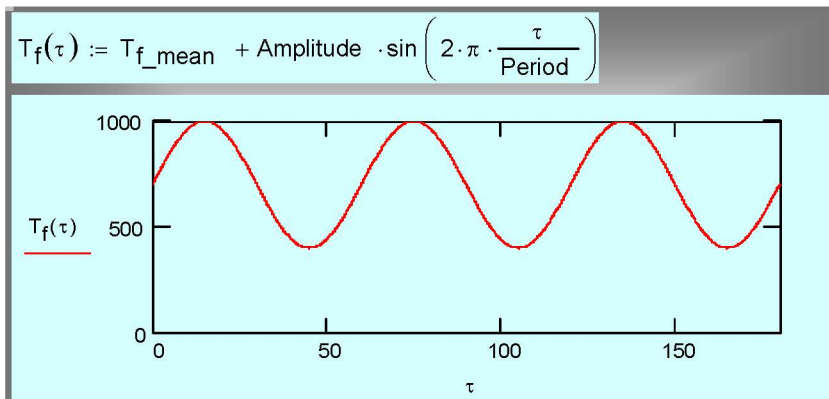


Рис. 7.8. Температура жидкости как функция времени

*Постановка и численное интегрирование краевой задачи теплопроводности*

Краевая задача (7.11)–(7.14) вводится в блок Given...Pdsolve. Это центральная часть компьютерной модели. В формулировках дифференциального уравнения и краевых условий концентрированно выражено физическое содержание анализируемого процесса.

Результат численного решения посредством встроенного интегратора Pdsolve выводится как функции  $T(x, \tau)$  (см. рис. 7.9).

Given

$T_\tau(x, \tau) = a \cdot T_{xx}(x, \tau)$  ← Дифференциальное уравнение теплопроводности

$T(x, 0) = T_{init}$  ← Начальное условие

$T_x(0, \tau) = 0$  ← Граничное условие при  $x=0$

$-\lambda \cdot T_x(L, \tau) = \alpha \cdot (T(L, \tau) - T_f(\tau))$  ← Граничное условие при  $x=L$

$T := \text{Pdsolve}\left(T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{Max} \end{pmatrix}, nX, nTime\right)$  ← Численное интегрирование

Рис. 7.9. Постановка и численное интегрирование краевой задачи

### Визуализация решения

Целью исследования является распространение температурных пульсаций вдоль стержня, поэтому важно зафиксировать, как выглядят колебания температуры на левом теплоизолированном конце стержня по сравнению с вынужденными пульсациями на правом обогреваемом торце. Графики на рис. 7.10 отображают:

- Рассчитанную температуру обогреваемого (правого) торца стержня  $T(L, \tau)$ ;
- Заданную пульсирующую температуру жидкости  $T_f(\tau)$ ;
- Рассчитанную температуру изолированного (левого) торца  $T(0, \tau)$ .

В рассматриваемом примере температуры  $T(L, \tau)$  и  $T_f(\tau)$  практически совпадают благодаря большой величине коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Пульсации затухают вдоль стержня. При этом возникает сдвиг фаз при сохраняющейся частоте колебаний.

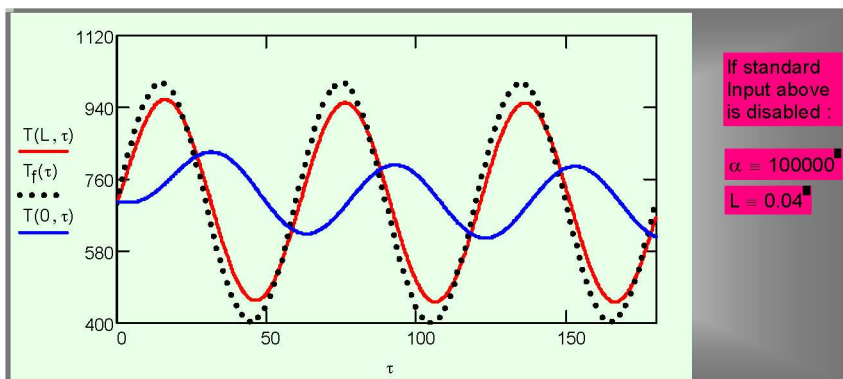


Рис. 7.10. Изменение температуры торцевых поверхностей стержня и температуры жидкости во времени

Полное пространственно-временное представление процесса дается трехмерным графиком на рис. 7.11, созданным встроенной функцией CreateMesh. Эта функция генерирует сетку в основании трехмерного графика и для каждого узла этой сетки определяет значения координат  $(x, \text{Time})$  и функции  $T$ . Получается три матрицы, из которых как из элементов составляется результирующий массив  $x\text{Time}T\_array$ .

По вертикальной оси откладывается температура, а в горизонтальной плоскости – координата вдоль стержня  $x$  и время Time.

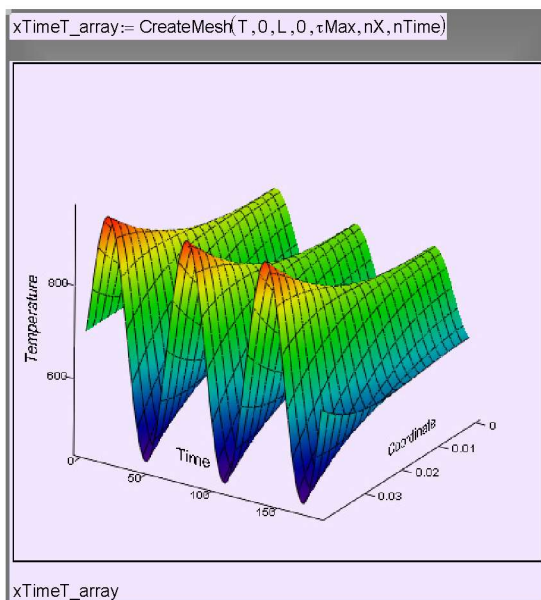


Рис. 7.11. Пространственно-временная диаграмма пульсаций температуры

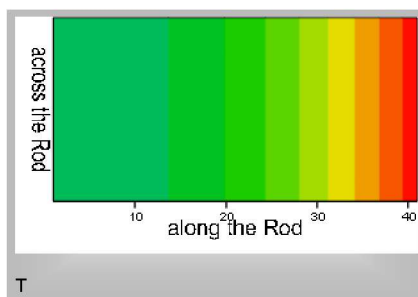


Рис. 7.12. Пространственное распределение температуры для некоторого момента времени

Другой способ визуализации непосредственно связывает материальный объект и температурное поле. На рисунке 7.12 мы смотрим на стержень сбоку и фиксируем области с разной темпе-

ратурой посредством цвета. Примерно такую картинку можно увидеть, нанеся на стержень термочувствительную краску (вещество с жидкокристаллической структурой). Поскольку поле одномерное, мы наблюдаем изменения вдоль стержня (по горизонтали), но в поперечном сечении температура не меняется: изотермы нормальны к оси стержня.

Наблюдаемая картина (рис. 7.12) – это мгновенный снимок температурного поля. Цельная динамическая, временная история температурного поля получается с помощью анимации – последовательной демонстрации картинок для достаточно близких последовательных моментов времени.

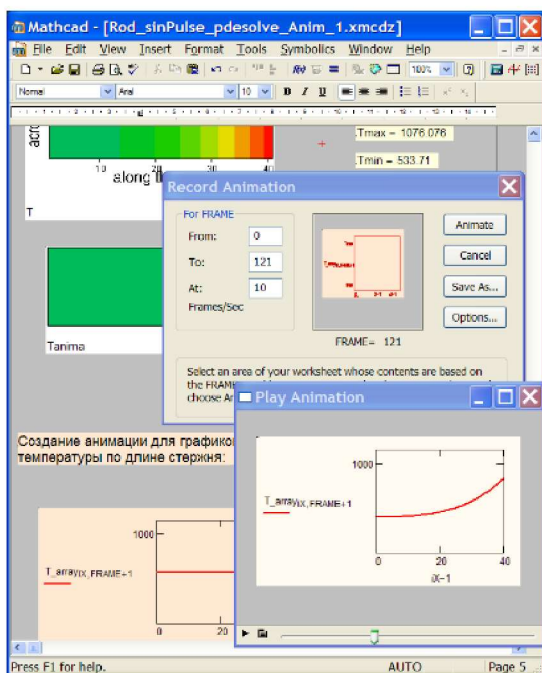


Рис. 7.13. Анимация графиков

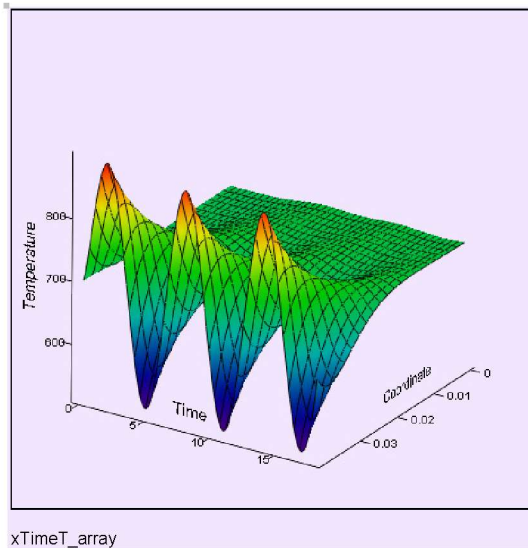
При выполнении работы или учебного проекта следует построить анимацию для конкретных полученных результатов. Техника построения анимации отображена на рис. 7.13 для случая, когда демонстрируется график распределения температуры по длине стержня для последовательных моментов времени.

### ***Вариации параметров***

Численный эксперимент предполагает проведение расчетов при различных значениях определяющих параметров, сопоставление результатов посредством рассмотренной выше техники визуализации и формулировку конструктивных выводов.

Проследим за влиянием частоты (периода) колебаний. Температурное поле для десятикратно уменьшенного периода (десятикратно увеличенной частоты) (рис. 7.14) значительно отличается от исходного варианта (рис. 7.11).

На основе детальных численных экспериментов необходимо выявить влияние частоты на распространение температурных волн в твердых телах.



**Рис. 7.14. Температурные волны при десятикратно уменьшенном периоде колебаний**

Для этого прежде всего вводят *количественную меру* затухания по глубине как отношение амплитуды колебаний на глубине  $H$  к амплитуде на поверхности и задают степень ослабления – обычно в « $e$ » раз, где « $e$ » – основание натурального логарифма:

$$\frac{\vartheta_H}{\vartheta_0} = \frac{1}{e}; \quad e = 2,73.$$

Далее строят график относительной амплитуды по длине стержня. Ясно, что пересечение этого графика с горизонтальной прямой на уровне  $1/e$  определит область вблизи правого торца, которую мы называем глубиной проникновения температурных возмущений (или толщиной температурного пограничного слоя, если эта величина существенно меньше полной длины стержня).

Эти операции можно полностью автоматизировать, но в численном эксперименте полезно оставить место и для ручной работы. Операции, которые нужно выполнить, чтобы провести серию численных экспериментов с различными значениями периода колебаний и зафиксировать полученные значения глубины, иллюстрируются экранной копией рабочего листа Mathcad (рис. 7.15).

Массив Period-Depth заполняется вручную. Значения глубины проникновения снимаются с графика в режиме “Trace”: координаты точки, заданные курсором, выводятся в специальном окне.

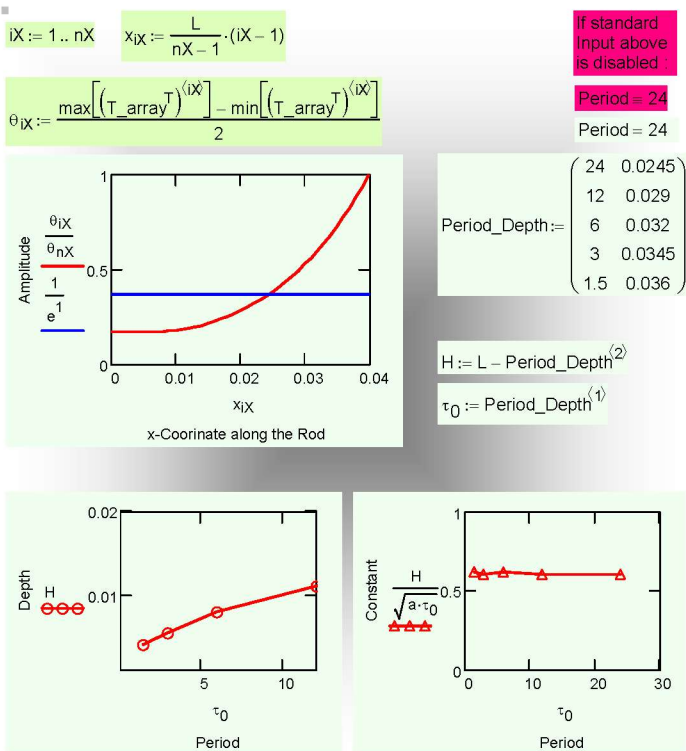


Рис. 7.15. Построение зависимости глубины проникновения температурных волн от периода колебаний

Работа завершается построением графика зависимости глубины от периода и построением аппроксимирующей зависимости. Ее вид можно найти из соображений размерности, принимая, что глубина  $H$ , м, определяется коэффициентом теплопроводности  $a$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ , и периодом  $\tau_0$ , с ( $\tau_0$  – другое обозначение для *Period*):

$$H = \text{const} \sqrt{a\tau_0}.$$

Значение константы должно быть определено из численных экспериментов.

Влияние других параметров, задаваемых при постановке задачи (см. рис. 7.6, рис. 7.7), может быть темой специальных исследований. Ограничимся здесь только демонстрацией десятикратного уменьшения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  на обогреваемом правом торце (рис. 7.16, сравнить с рис. 7.10).

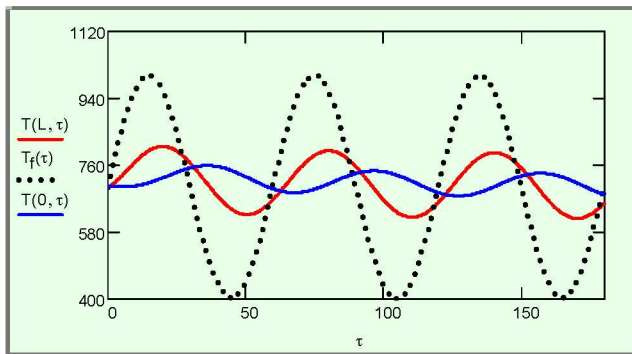


Рис. 7.16. Температурные волны в стержне при десятикратно уменьшенном коэффициенте теплоотдачи на обогреваемом торце

## 7.6. Задача о перемещающемся фронте плавления

Парафиновый стержень длиной  $L$  с изолированной боковой поверхностью (или тонкая парафиновая пластина толщиной  $L$ ) с начальной температурой  $T_{init}$  обогревается с правой стороны теплоносителем с температурой  $T_f$ . Левая сторона теплоизолирована. В интервале температур  $T_{init} \div T_f$  находится температура плавления парафина  $T_{melt}$ . Ясно, что сначала парафин будет в твердом состоянии, но в конце концов расплавится, если прогреть

будет продолжаться достаточно долго. Задачей численного моделирования является расчет нестационарного одномерного температурного поля  $T(x, \tau)$  с идентификацией перемещающегося фронта плавления (рис. 7.17).

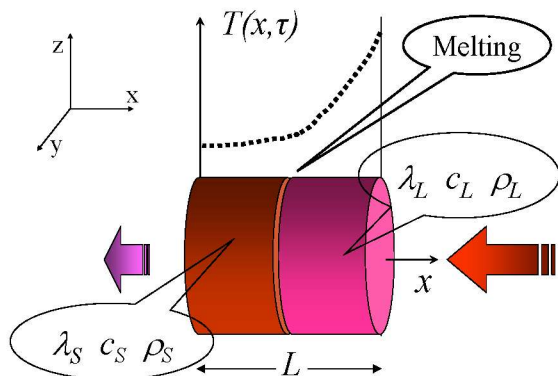


Рис. 7.17. Фронт плавления

Это модельная задача для теплового аккумулятора из пластин толщиной  $2L$ , обтекаемых с двух сторон теплоносителем (плоскость  $x = 0$  является плоскостью симметрии). Конструктивные решения для такого рода аккумуляторов с расплавами могут быть различными, например, сотовые структуры с маленькими ячейками, заполненными парафином, или гранулы парафина в каком-либо наполнителе и т.п. Существуют также вещества с фазовым переходом типа «твердое тело–твердое тело», а не «твердое тело–жидкость», как для парафина.

Пусть продолжительность стадии аккумуляции тепла составляет  $\tau_{\max}$ . Требуется определить значение  $L$ , для которого парафин полностью расплавится по всей толщине стенки, что соответствует достижению максимальной тепловой емкости аккумулятора данной массы.

Этапы моделирования представлены на рис. 7.18 – рис. 7.23. Мы ограничимся краткими комментариями, поскольку ход работы понятен из приведенных подробных распечаток Mathcad программы.



Полутолщина парафиновой пластины L, м	L := 0.04				
Температура плавления парафина, К	T <sub>melt</sub> := 303				
Начальная температура, К	T <sub>init</sub> := 263				
Температура теплоносителя на правой поверхности x=L, К	T <sub>f</sub> := 333				
Коэффициент теплоотдачи, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$	$\alpha := 100$				
Левая поверхность x=0 адиабатически изолирована (плоскость симметрии)					
<b>Теплофизические свойства парафина:</b>					
S - solid, L - liquid					
$\lambda := 0.185$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$\rho := 770$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_{pS} := 1800$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$
$a_S := \frac{\lambda}{\rho \cdot c_{pS}}$	$a_S = 1.335 \times 10^{-7}$	$c_{pL} := 2400$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$		
Толщина фронта плавления, К	$\delta T := 1$				
Теплота плавления, Дж/кг	$\Delta h_{SL} := 181000$				

Рис. 7.18. Программа Melting («Плавление»): ввод данных

Диапазон температур выбран достаточно широким (рис. 7.18), чтобы наглядно показать отдельные стадии работы аккумулятора. Вообще говоря, этот интервал может определяться, например, самыми низкими ночными и самыми высокими дневными температурами, если речь идет о тепловом аккумуляторе в жилом доме или офисе.

Описанные выше процедуры сглаживания (см. Фазовые превращения) реализованы здесь более тщательно: функция Хевисайда аппроксимирована гладкой функцией ошибок, улучшено разрешение благодаря отсчету температуры от точки плавления (рис. 7.19).

Теплоемкость, Дж/(кгК), и температуропроводность, м<sup>2</sup>/с, в интервале температур, включающем фазовый переход, :

$$\theta = T - T_{\text{melt}}$$

$$c_p(\theta) := c_{pS} + \Delta h_{SL} \cdot \text{dnorm}(\theta, 0, \delta T) + (c_{pL} - c_{pS}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2} \cdot \delta T}\right)\right)$$

$$a(\theta) := \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p(\theta)}$$

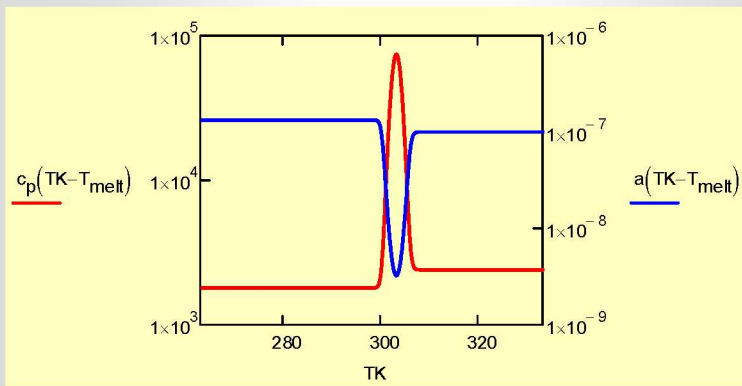


Рис. 7.19. Программа Melting: аппроксимация скачков

Дифференциальное уравнение теплопроводности записано для избыточной температуры  $\theta(x, \tau)$ , отсчитываемой от точки плавления (рис. 7.20). Численное интегрирование осуществляется методом Pdsolve.

```

Параметры счета:

Время наблюдения                               τMax := 40000

Число точек дискретизации по длине
стержня и на временном интервале:              nX := 100
                                                nTime := 1000

Отсчет температуры от точки плавления:

θinit := Tinit - Tmelt   θmelt := 0   θf := Tf - Tmelt

Постановка и решение краевой задачи теплопроводности

Задача с фронтом фазового превращения:

Given

θτ(x, τ) = a(θ(x, τ)) · θxx(x, τ)           << Дифференциальное уравнение

θ(x, 0) = θinit                               << Начальное условие

θx(0, τ) = 0                                   << Граничное условие при x=0

-λ · θx(L, τ) = α · (θ(L, τ) - θf)           << Граничное условие при x=L

θ := Pdsolve [ θ, x, ( 0 ), ( 0 ), τ, ( 0 ), nX, nTime ] << Численное интегрирование
               ( L ), ( τMax )

Возврат к исходной шкале температуры

T(x, τ) := θ(x, τ) + Tmelt

```

**Рис. 7.20.** Программа Melting: интегрирование методом Pdsolve

Чтобы наглядно показать специфику процесса с фазовым превращением, решена также задача без плавления, с постоянными свойствами, соответствующими твердой фазе парафина (рис. 7.21).

```

Однофазная задача сравнения:

Given

Tτ(x, τ) = aS · Txx(x, τ)                   << Дифференциальное уравнение

T(x, 0) = Tinit                               << Начальное условие

Tx(0, τ) = 0                                   << Граничное условие при x=0

-λ · Tx(L, τ) = α · (T(L, τ) - Tf)           << Граничное условие при x=L

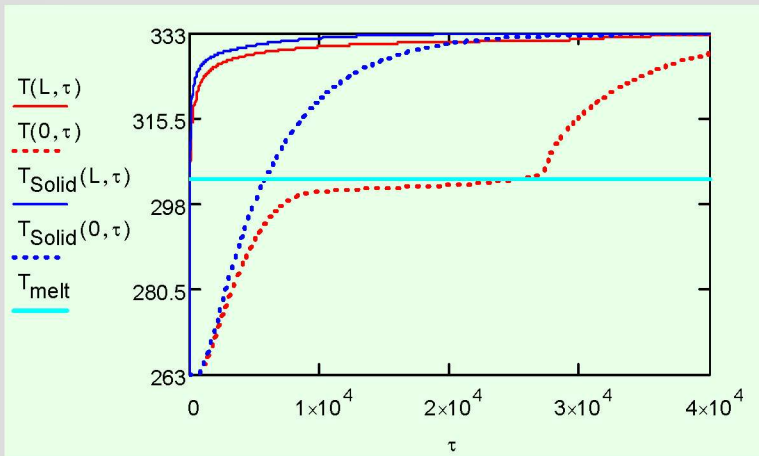
TSolid := Pdsolve [ T, x, ( 0 ), ( 0 ), τ, ( 0 ), nX, nTime ] << Численное интегрирование
                  ( L ), ( τMax )

```

**Рис. 7.21.** Программа Melting : интегрирование однофазной задачи

Сопоставление температурных кривых для задач с плавлением ( $T$ ) и без него ( $T_{\text{Solid}}$ ) дано на рис. 7.22.

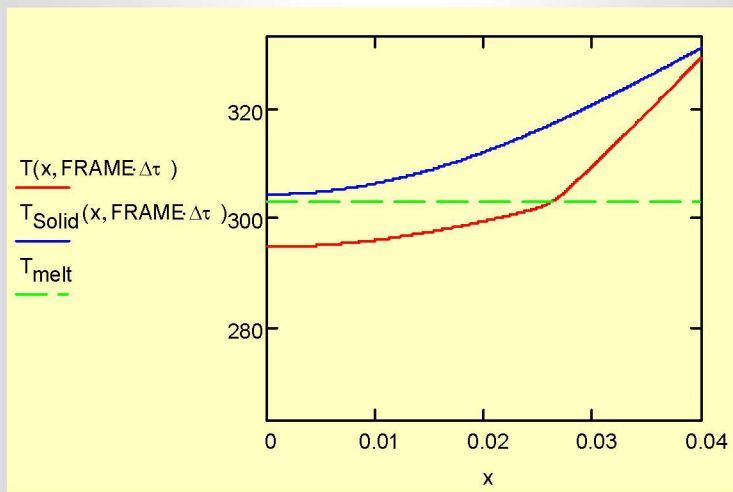
Временное изменение температуры на поверхности  $x=L$  и в центре  $x=0$  для задачи с плавлением и однофазной задачи:



Анимация

FRAME := 60

$\Delta\tau := 100$

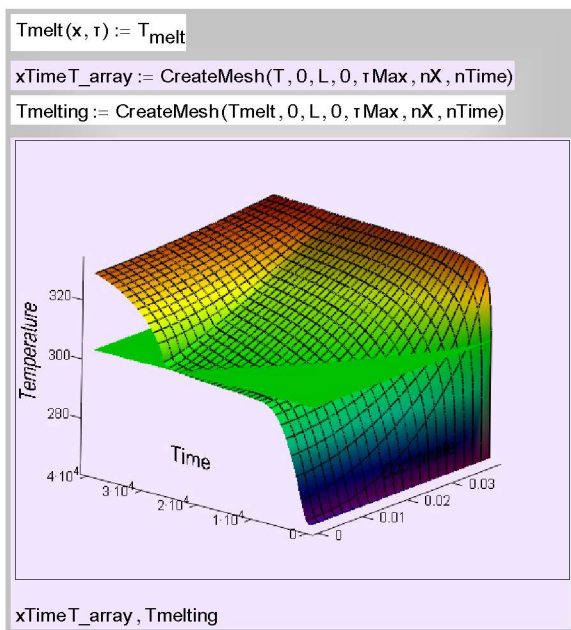


**Рис. 7.22. Программа Melting: сопоставление временных и пространственных изменений температуры для задач с плавлением и без него**

Полезно самостоятельно проанализировать заметные отличия и сформулировать ответы, например, на следующие естественно возникающие вопросы.

- Почему сильно увеличивается общее время прогрева, если имеет место плавление?
- С чем связан перелом кривых на временном и пространственном графиках рис. 7.22 (теплопроводность  $\lambda$  в обеих фазах парафина практически одинакова)?
- Начальные и конечные температур  $s$  обеих сравниваемых систем одинаковы ( $T_{\text{init}}$  и  $T_f$ ). Почему, однако, система с плавлением считается более эффективным тепловым аккумулятором?

Пространственно-временная диаграмма для системы с плавлением представлена на рис. 7.23



**Рис. 7.23. Программа Melting: пространственно-временная диаграмма распространения фронта плавления (горизонтальная плоскость – температура плавления)**

При вариациях параметров счета, например, при попытке увеличить  $nX$  и  $nTime$ , может сильно увеличиться время счета или даже произойти аварийное прекращение работы программы. Сле-

дует признать, что задача с резкими изменениями коэффициентов дифференциального уравнения (в нашем случае  $a(T)$ ) оказывается сложной для интегратора Pdesolve.

### Решение методом прогонки (TDMA)

Проводим вычисления на разработанной в гл. 6 модели с применением метода прогонки. Потребовалась некоторая модификация программы, поскольку сеточное число  $Fo$  стало теперь одномерным массивом, а не скаляром – ввиду зависимости свойств от температуры (рис. 7.24). Сопоставительные вычисления для систем с плавлением и без фазового перехода представлены на трехмерных диаграммах (рис. 7.24).

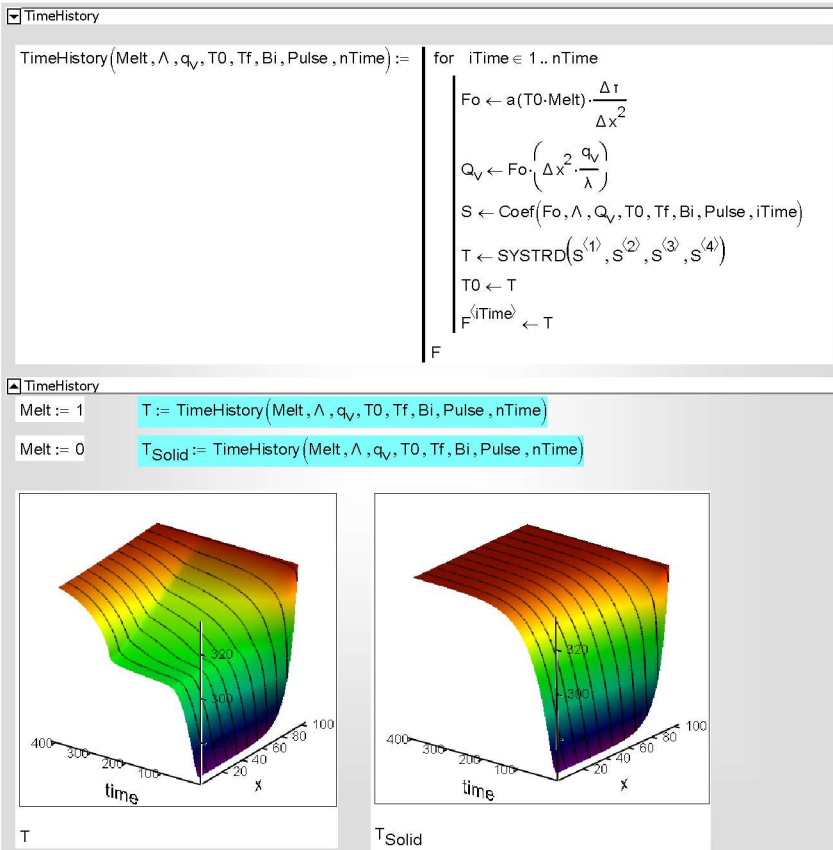


Рис. 7.24. Программа Melting: интегрирование методом TDMA (методом прогонки)

Сравнение двух методов – встроенного Pdesolve и специально разработанной программы TDMA – оказалось далеко не в пользу «фирменного» Pdesolve. Скорость и устойчивость счета по программе TDMA существенно выше, и при необходимости можно значительно увеличить пространственное и временное разрешение.

Объяснение большей эффективности метода прогонки (TDMA) заключено в том, что TDMA является *прямым* (не итерационным) алгоритмом решения систем конечно-разностных уравнений. Следует, однако, признать, что «сервис» при работе с Pdesolve, обеспечивающий работу с уравнениями и краевыми условиями в обычной математической нотации, несколько уравновешивает недостатки эффективности.

### 7.7. Гиперболическое уравнение теплопроводности

В технологиях, связанных с мощными импульсными тепловыми воздействиями, формируются столь быстро меняющиеся температурные поля, что возникает вопрос о применимости закона теплопроводности и дифференциального уравнения теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} T \quad (7.15)$$

Действительно, классические формулировки (7.15) дают бесконечную скорость распространения температурных возмущений. Например, скачкообразное повышение температуры на поверхности полугограниченного массива сразу же будет замечено на большой глубине: возмущение может быть малым, но не равным в точности нулю, как должно было бы быть при физически корректном распространении с конечной скоростью.

Простейшая модификация закона Фурье для сверхбыстрых процессов основана на идее *запаздывания* теплового потока:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} T \quad (7.16)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки (пространственная координата),  $\tau_r$  – время тепловой релаксации. Это соотношение утверждает, что тепловой поток не может возникнуть сразу же, одновременно с

возникновением некоторого градиента температуры, а только с некоторым запаздыванием  $\tau_r$ .

Разложение левой части (7.16) в ряд по  $\tau_r$  и линеаризация, предполагающая малые значения  $\tau_r$ , дает:

$$\tau + \tau_r \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \tau = -\lambda \operatorname{grad} \tau. \quad (7.17)$$

Подстановка в уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_p} \operatorname{div} \tau \quad (7.18)$$

приводит к гиперболическому дифференциальному уравнению теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_p} \operatorname{div} \left( -\lambda \operatorname{grad} \tau + \tau_r \frac{\partial \tau}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &+ \nabla^2 \frac{\tau_r}{\rho_p \tau} (\operatorname{div} \tau - \nabla^2 \frac{\tau_r}{\rho_p \tau} \tau); \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\boxed{\frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau_r \frac{\nabla^2 \tau}{\tau}}$$

вместо классического уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t.$$

Можно показать, что решение гиперболического уравнения (7.18) представимо в виде суммы двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях с конечной скоростью  $C$ :

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \varphi(x - C \tau) + \psi(x + C \tau); \\ C &= \sqrt{\frac{a}{\tau_r}} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Скорость температурных волн  $C$  по порядку равна скорости распространения звука, что позволяет оценить время релаксации. Для металлов  $C \approx 1000$  м/с,  $a \approx 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, откуда  $\tau_r \approx 10^{-11}$  с. Это весьма малая величина по сравнению с характерным тепловым временем для крупномасштабных элементов энергетического оборудования. Поэтому классическое уравнение теплопроводности применимо для большинства практически важных задач.



Полезно, тем не менее, оценить более наглядно соответствующую границу. Пусть  $L$  – характерный размер объекта, например, толщина металлической стенки, в которой распространяются температурные возмущения. Принимая  $L$  в качестве линейного масштаба, запишем уравнение теплопроводности в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta}{Fo} \tau_R &\approx \frac{2\Theta}{Fo^2} \nabla^2 \Theta; \\ Fo \equiv \frac{\tau}{2}; \quad \tau_R &\equiv -; \quad \Theta \equiv \frac{t - t_{ref}}{t_0 - t_{ref}}; \quad R \equiv \frac{\tau_r}{2}; \\ &\Theta + R \frac{\tau_r}{Fo}; \\ &\equiv \frac{\lambda(t_0 - t_{ref})}{L^2}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Макроскопический масштаб времени  $\tau_L$  определяется соотношением:

$$Fo \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_L = \frac{L^2}{a}. \quad (7.22)$$

Относительное (безразмерное) время релаксации составит:

$$\tau_R \equiv \frac{\tau_r}{\tau_L} = \frac{\tau_r}{(L^2/a)} = \frac{a\tau_r}{L^2}. \quad (7.23)$$

При  $\tau_R \ll 1$  мы возвращаемся к классической формулировке. Если считать условной границей проявления волновых свойств  $\tau_R \approx 1$ , то граничная толщина  $L$  объекта составит примерно  $10^{-8}$ – $10^{-7}$  м. Это область нанотехнологий.

Для макроскопических объектов запаздывание будет существенным при мощных импульсных, разрывных воздействиях на границах, в начальные моменты развития температурных полей (примером такого рода проблем является рассеяние и отвод теплоты от мощного твердотельного лазера). По-видимому, обсуждаемый эффект существен для задач теплопроводности при криогенных температурах, вблизи абсолютного нуля.

Согласно некоторым экспериментальным данным, гиперболическое уравнение с временем запаздывания порядка секунды

описывает – при нормальных условиях – теплопроводность композитных материалов в условиях периодических тепловых воздействий, если дискретные включения и непрерывная среда обладают сильно различающимися теплофизическими свойствами.

Далее с помощью компьютерной модели исследуются две характерные гиперболические задачи. Во-первых, сопоставляются процессы выравнивания температуры в тонкой пластине, рассчитанные по уравнению Фурье и по гиперболическому уравнению теплопроводности. Во-вторых, рассматривается распространение температурной волны, вызванной импульсным тепловым воздействием на поверхности.

### ***Выравнивание температуры***

Пусть в начальный момент времени задано синусоидальное распределение по толщине пластины (или по длине стержня с изолированной боковой поверхностью) с максимумом посередине. Одного этого *начального условия* недостаточно для *гиперболического* уравнения *второго* порядка по переменной время. Необходимо второе условие, и мы будем считать, что начальное состояние выдерживалось некоторое время, так что и начальная *скорость изменения* температуры по времени нулевая.

Температуры на поверхностях поддерживаются на постоянном нулевом уровне.

Требуется рассчитать – по гиперболической модели (7.21) – процесс выравнивания температурного поля.

Математическое описание этой одномерной нестационарной задачи представляют следующие уравнения:

Гиперболическое дифференциальное уравнение теплопроводности (7.21), преобразованное в систему двух уравнений первого порядка по времени введением новой зависимой переменной  $W$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = W \\ \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_R} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_R} W \end{cases} \quad (7.24)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} T(x, \tau = 0) = \sin(\pi x) \\ W(x, \tau = 0) = 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} T(x = 0, \tau) = 0 \\ T(x = 1, \tau) = 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Чтобы сделать запись уравнений в вычислительных программах более компактной и наглядной, мы вернулись здесь к обычным обозначениям времени и координат, температуры и теплового потока, помня, что эти величины сделаны безразмерными отнесением к соответствующим масштабам.

Задача решается численным методом Pdsolve в Mathcad.

По результатам интегрирования, получив распределение температуры  $T(x, \tau)$ , мы хотели бы также найти поле теплового потока. В частности, определить тепловой поток на поверхности пластины  $q_0(\tau)$ , отдаваемый в окружающую среду. Это не просто сделать, поскольку классическая формулировка закона Фурье (7.15) неприменима, и вместо нее следует воспользоваться соотношением (7.17), являющимся дифференциальным уравнением (!).

Ограничимся вычислением потока на поверхности:

$$q(x = 0, \tau) + \tau_R \frac{\partial}{\partial \tau} q(x = 0, \tau) = - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0, \tau}. \quad (7.27)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (7.27) численно интегрируется методом Odesolve в Mathcad (рис. 7.27). Правая часть полагается здесь уже определенной в результате решения системы (7.24) для температурного поля.

Решение иллюстрируется рисунками рис. 7.25 – рис. 7.27. Относительная величина времени релаксации  $\tau_R$  (см. (7.23)) принята равной 0,5. Это большое время задержки, и соответствующий эффект должен быть заметен.

Hyperbolic heat conduction equation (dimensionless form)

$$T_\tau(x, \tau) + \tau_R \cdot T_{\tau\tau}(x, \tau) = T_{xx}(x, \tau) \quad \tau = \frac{a \cdot \tau_f}{L^2} \quad x = \frac{x}{L} \quad \tau_R = \frac{a \cdot \tau_f}{L^2}$$

(must be converted to system of equations in first tau-derivatives)

$$L := 1 \quad \tau_{\text{Max}} := 4$$

$$nX := 200 \quad n\text{Tau} := 10000$$

$$\tau_R := 0.5$$

Given  $W_\tau(x, \tau) = \frac{1}{\tau_R} \cdot (T_{xx}(x, \tau) - W(x, \tau)) \quad T_\tau(x, \tau) = W(x, \tau)$

$$T(x, 0) = \sin(\pi \cdot x) \quad W(x, 0) = 0 \quad T(0, \tau) = 0 \quad T(L, \tau) = 0$$

$$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} := \text{Pdsolve} \left[ \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{\text{Max}} \end{pmatrix}, nX, n\text{Tau} \right] \quad \text{grad}T_x(x, \tau) := \frac{d}{dx} T(x, \tau)$$

Рис. 7.25. Численное решение гиперболического уравнения теплопроводности

Parabolic heat conduction equation (dimensionless form)

Given  $T_\tau(x, \tau) = T_{xx}(x, \tau)$

$$T(x, 0) = \sin(\pi \cdot x) \quad T(0, \tau) = 0 \quad T(L, \tau) = 0$$

$$T_F := \text{Pdsolve} \left[ T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{\text{Max}} \end{pmatrix}, nX, n\text{Tau} \right]$$

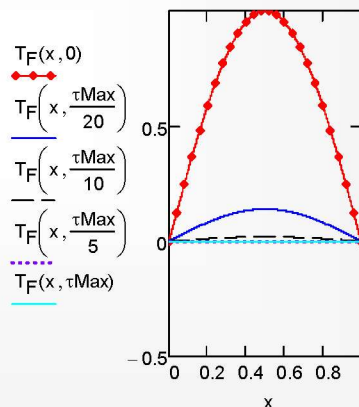
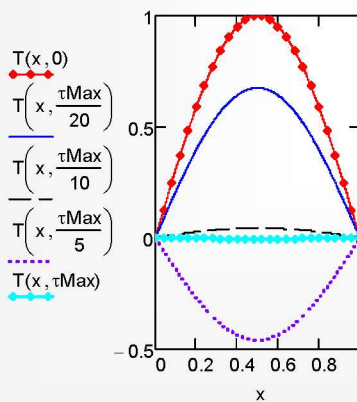


Рис. 7.26. Распределения температуры по толщине для различных моментов времени: параболическая (справа) и гиперболическая (слева) задачи

Результаты сопоставлены с решением классической параболической задачи (рис. 7.26). Выявляются следующие различия:

1. Гиперболическая модель:

- относительно медленное выравнивание температуры;
- затухание сопровождается колебаниями.

2. Параболическая модель:

- относительно быстрое выравнивание температуры;
- аperiодическое затухание.

Эти эффекты отчетливо представлены также на верхнем графике рис. 7.27.

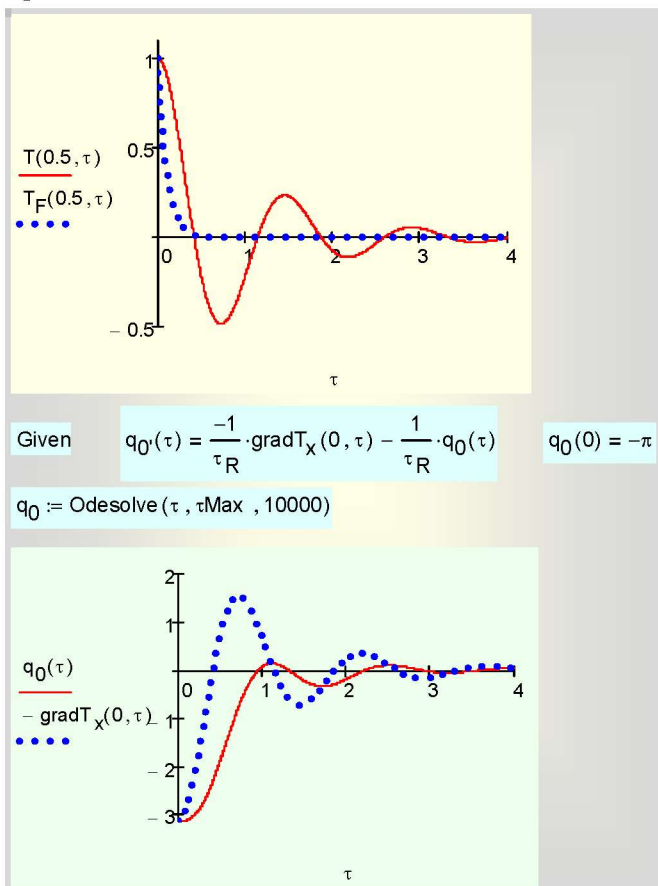
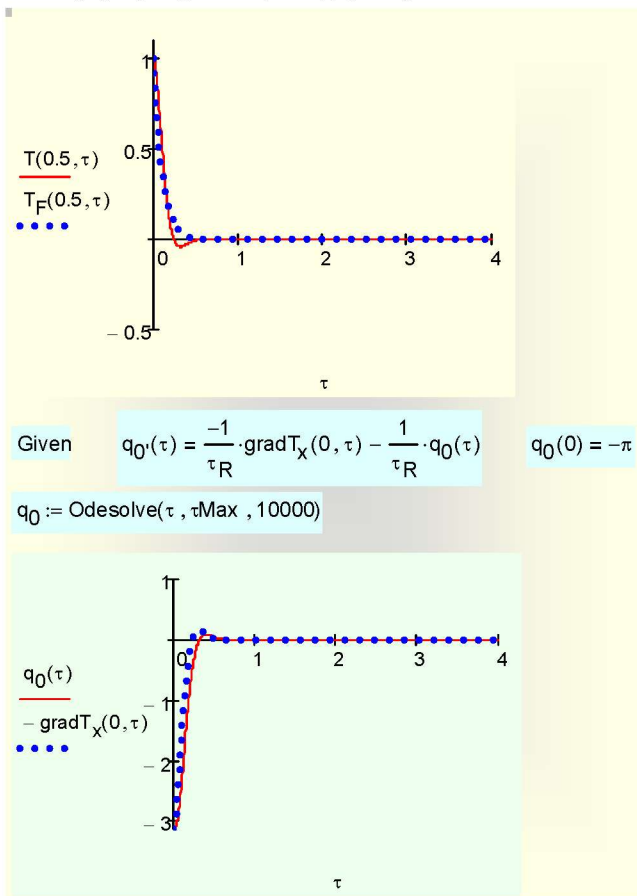


Рис. 7.27. Температура в центре пластины для параболической (пунктир) и гиперболической (сплошная линия) задач.

Тепловой поток и градиент температуры на поверхности (нижний график) для гиперболической задачи ( $\tau_R = 0,5$ )

По-видимому, наиболее неожиданный результат состоит в периодическом снижении температуры ниже равновесного нулевого уровня, чего не наблюдается в чисто диффузионной параболической задаче. Пояснением к этому эффекту служит нижний график (рис. 7.27), где сопоставлены тепловой поток и градиент температуры на поверхности. Эти величины оказываются в противофазе: на нестационарной стадии возможна ситуация, когда градиент температуры нулевой, а тепловой поток – максимален. Это парадокс гиперболической задачи, следствие запаздывания, принятого в формулировке (7.16), (7.17).



**Рис. 7.28.** Температура в центре пластины для параболической (пунктир) и гиперболической (сплошная линия) задач (верхний график). Тепловой поток и градиент температуры на поверхности для гиперболической задачи (нижний график);  $\tau_R = 0,05$

Снижение температуры ниже равновесного значения связано с запаздыванием теплового потока по отношению к градиенту температуры: градиент температуры уже изменил знак (падение температуры происходит теперь внутрь пластины), но тепловой поток запаздывает – он все еще направлен наружу, что и объясняет снижение температуры ниже нулевого равновесного значения (закон сохранения энергии, конечно, остается справедливым).

После нескольких колебаний установится нулевая равновесная температура. Отмеченные особенности имеют место в области микромасштабов, где регистрируются заметные тепловые флюктуации.

Практическое нивелирование различий между параболической и гиперболической моделью при *десятикратном уменьшении* времени релаксации демонстрируется на рис. 7.28.

### *Распространение импульсных воздействий*

В начальный момент времени стержень с изолированной боковой поверхностью находится в тепловом равновесии: его температура, как и скорость изменения температуры по времени, полагается нулевой.

Правый торец ( $x = L$ ) теплоизолирован, т.е. тепловой поток поддерживается на постоянном нулевом уровне. Поэтому как для параболической, так и для гиперболической задачи градиент температуры следует положить равным нулю.

Левый торец ( $x = 0$ ) подвергается импульсному воздействию. Тепловой поток на поверхности меняется во времени по нормальному закону распределения (рис. 7.29).

Длительность импульса принята примерно равной десятой доли от времени наблюдения  $t_{\text{Max}}$ , причем последнее достаточно велико, чтобы после импульсного воздействия вновь установилось тепловое равновесие.

### Non-Fourier heat conduction

Dimensionless:  $x = \frac{x}{L}$   $\tau = \frac{a \cdot \tau}{L^2}$   $\tau_R = \frac{a \cdot \tau_R}{L^2}$   $T = \frac{\theta}{\theta_{ref}}$   $q = \frac{q}{\frac{\lambda}{L} \cdot \theta_{ref}}$

$L := 1$   $\tau_{Max} := 2$   $q_{max} := 1$

Relaxation time, variable parameter

$\tau_R := .1$

Pulse at  $x=0$  (time interval, center, normal distribution)

$\tau_{pulse} := \frac{\tau_{Max}}{20}$   $\mu := 4 \cdot \tau_{pulse}$   $q_0(\tau) := q_{max} \cdot (\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \tau_{pulse}) \cdot \text{dnorm}(\tau, \mu, \tau_{pulse})$

$Q(\tau) := \int_0^\tau q_0(v) dv$   $Q_{inf} := q_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \tau_{pulse}$   $Q_{inf} = 0.251$

$dq_{d\tau}(\tau) := \frac{d}{d\tau} q_0(\tau)$

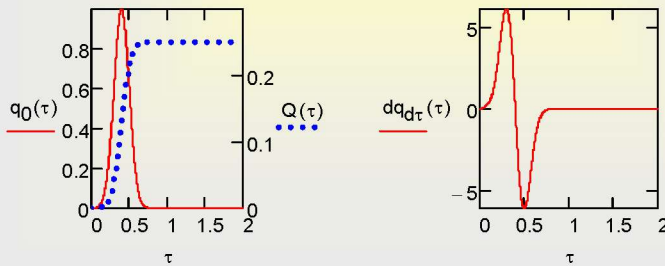


Рис. 7.29. Формирование теплового импульса на поверхности

Мы будем варьировать время релаксации  $\tau_R$  и сопоставлять эволюцию температурного поля, рассчитанную по гиперболическому и классическому (параболическому) уравнениям теплопроводности.

Математическое описание и операции численного интегрирования представлены на рис. 7.30.



Hyperbolic heat conduction equation (dimensionless form), converted to system of equations in first tau-derivatives

$nX := 100$        $nTau := 1000$

Given       $W_\tau(x, \tau) = \frac{1}{\tau_R} \cdot (T_{xx}(x, \tau) - W(x, \tau))$        $T_\tau(x, \tau) = W(x, \tau)$

$T(x, 0) = 0$        $W(x, 0) = 0$        $-T_x(0, \tau) = q_0(\tau) + \tau_R \cdot \left(\frac{d}{d\tau} q_0(\tau)\right)$        $T_x(L, \tau) = 0$

$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} := \text{Pdesolve} \left[ \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{Max} \end{pmatrix}, nX, nTau \right]$

$k := 0..1000$        $T0_k := T\left(0, \frac{\tau_{Max}}{nTau} \cdot k\right)$        $Tmax := \max(T0)$        $Tmin := \min(T0)$

Parabolic heat conduction equation (dimensionless form)

Given       $T_\tau(x, \tau) = T_{xx}(x, \tau)$

$T(x, 0) = 0$        $-T_x(0, \tau) = \frac{q_0(\tau)}{10^6} \cdot (10^6 - T(0, \tau))$        $T_x(L, \tau) = 0$

$T_F := \text{Pdesolve} \left[ T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{Max} \end{pmatrix}, nX, nTau \right]$

**Рис. 7.30. Численное решение гиперболического и параболического уравнений теплопроводности**

Результаты для относительно малого времени релаксации  $\tau_R = 0.1$  показаны на рис. 7.31 – рис. 7.32. Сопоставлены распределения температуры по длине стержня для различных моментов времени (рис. 7.31), а также временные распределения для нескольких точек по длине стержня (рис. 7.32). Видно, что обе модели теплопроводности *при малых временах релаксации* дают близкие результаты, т.е. обеспечивается правильный асимптотический переход к классической задаче. Однако и при столь малом времени релаксации отчетливо виден волновой характер решения гиперболической задачи. Эффект запаздывания, конечной скорости распространения температурных возмущений, особенно заметен на последнем графике рис. 7.32, где показано временное изменение температуры правого (изолированного) торца стержня.

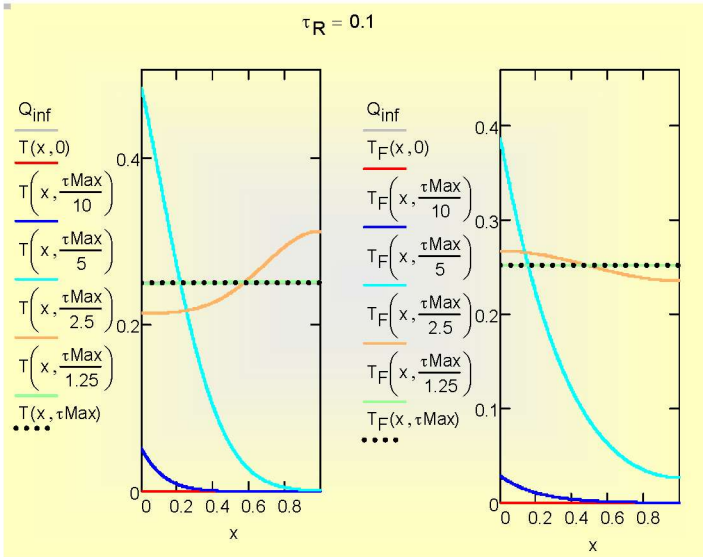


Рис. 7.31. Распределения температуры по толщине для различных моментов времени: параболическая (справа) и гиперболическая (слева) задачи

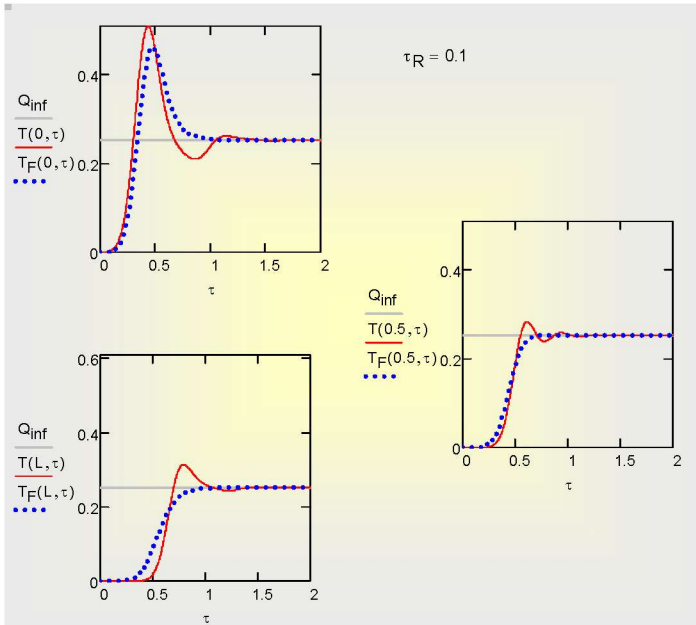
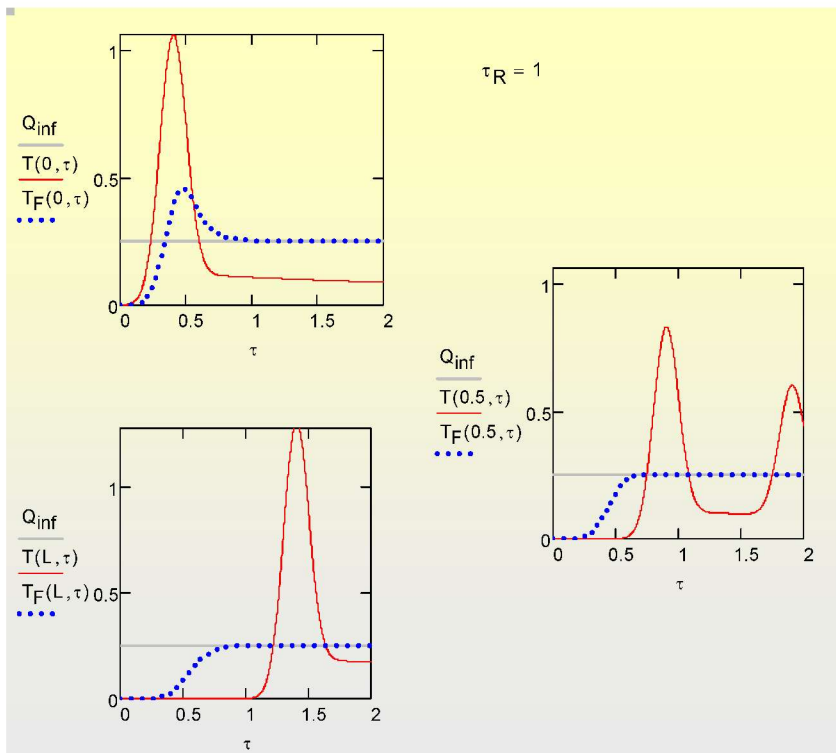


Рис. 7.32. Температура на поверхности  $x=0$ , в центре и на поверхности  $x=L$  пластины для параболической (пунктир) и гиперболической (сплошная линия) задач ( $\tau_R = 0,1$ )

В качестве ориентира, для  $\tau_R = 1$  на рис. 7.33 показано изменение температуры во времени на облучаемой поверхности, в центре и на изолированной поверхности. Условие  $\tau_R = 1$  означает: при *одинаковых по порядку* времени релаксации и времени наблюдения теплового процесса. Различия оказываются радикальными. Всплеск температуры на поверхности в два раза превышает предсказываемое классической теорией значение. Очевиден волновой характер распространения температурных возмущений. Правый торец долгое время ничего «не знает» о произошедшем на левом торце, вследствие конечной скорости распространения температурной волны (см. нижний график на рис. 7.33).



**Рис. 7.33.** Температура на поверхности  $x=0$ , в центре и на поверхности  $x=L$  пластины для параболической (пунктир) и гиперболической (сплошная линия) задач ( $\tau_R = 1$ )

Наиболее наглядное представление о решениях гиперболического уравнения теплопроводности дают анимации температурных полей. Два коротких видеоролика позволяют сопоставить (для больших и малых значений времени релаксации  $\tau_R$ ) временную развертку распределений температуры по длине (таких, как на рис. 7.31):

## 7.8. Трудности в применении Pdsolve

Как правило, численные методы решения тестируют, сопоставляя результаты с точными аналитическими решениями. Проведем такое сопоставление для задачи о прогреве полуограниченного массива (рис. 7.34 – рис. 7.37).

Granite :  $\lambda := 2$   $c_p := 800$   $\rho := 2500$   $a := \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$   $a = 1 \times 10^{-6}$

$L := 1$   $T_{inf} := 0$   $T_0 := 100$

$\tau_{Max} := \frac{1^2}{16 \cdot a}$   $\tau_{Max} = 6.25 \times 10^4$   $\frac{L}{2\sqrt{a \cdot \tau_{Max}}} = 2$

$nX := 1000$   $nTau := 1000$

---

Given  $T_\tau(x, \tau) = a \cdot T_{xx}(x, \tau)$   $T(x, 0) = T_{inf}$   $T(0, \tau) = T_0$   $T_x(L, \tau) = 0$

$T := \text{Pdsolve}\left[T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{Max} \end{pmatrix}, nX, nTau\right]$   $\text{grad}T(x, \tau) := \frac{d}{dx}T(x, \tau)$

Температурное поле полуограниченного массива (аналитическое решение)

$\Theta(\eta) := 1 - \text{erf}(\eta)$

$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \equiv \frac{t(x, \tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \equiv \Theta(\eta)$

$\eta \equiv \frac{x}{\delta(\tau)} \equiv \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$

$T_{\text{exact}}(x, \tau) := (T_0 - T_{inf}) \cdot \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right) + T_{inf}$

$\text{grad}T_{\text{exact}}(x, \tau) := \frac{d}{dx}T_{\text{exact}}(x, \tau)$

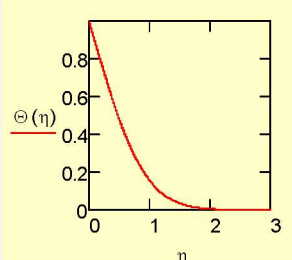


Рис. 7.34. Точное ( $T_{\text{exact}}$ ) и численное ( $T$ ) решения задачи о полуограниченном массиве

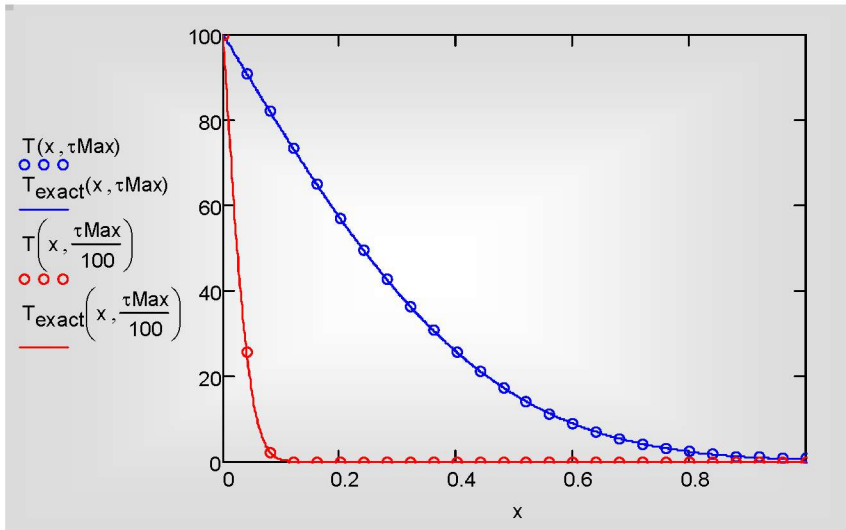


Рис. 7.35. Сопоставление точного ( $T_{\text{exact}}$ , сплошные линии) и численного ( $T$ , окружности) решения

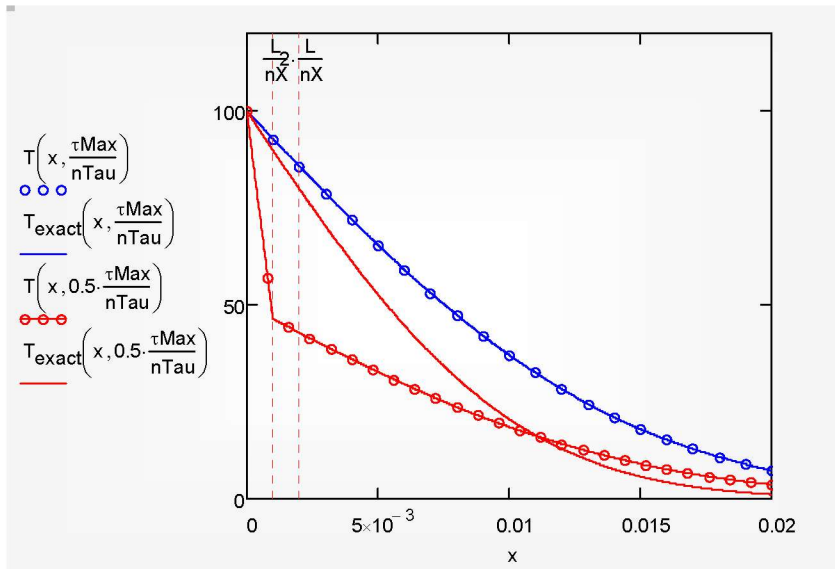


Рис. 7.36. Сопоставление точного ( $T_{\text{exact}}$ , сплошные линии) и численного ( $T$ , окружности) решения для малых значений времени

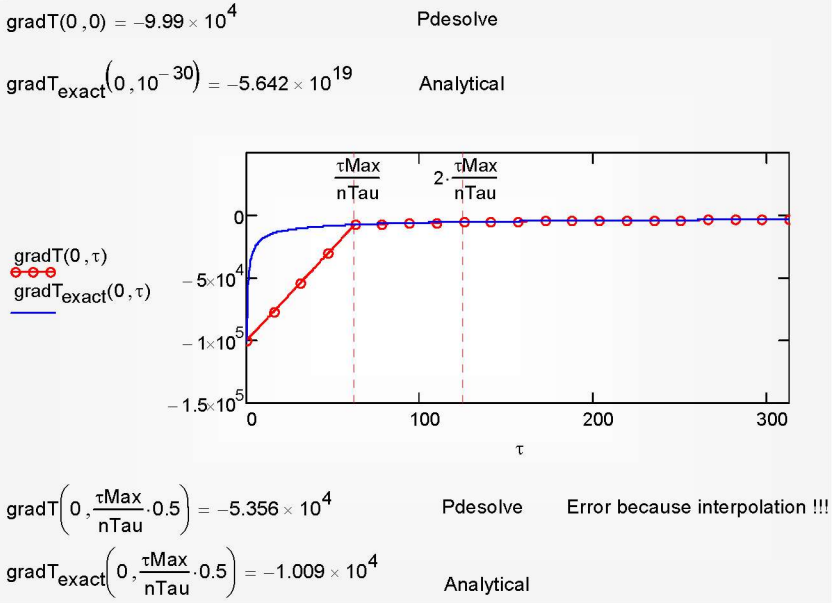


Рис. 7.37. Ошибки при вычислении градиента температуры

Решается задача о прогреве гранитного массива на глубину одного метра (рис. 7.34). Численное решение получают методом Pdesolve, аналитическое – методом автомодельных переменных (см. гл.5 «Нестационарная теплопроводность: аналитические решения»). Как видно на рис. 7.35, где показано распределение температуры по глубине массива для двух моментов времени, получается очень хорошее согласование решений.

Однако если построить такие распределения для самых первых моментов времени с начала прогрева, то численное решение дает неудовлетворительные результаты (рис. 7.36). Неприятности начинаются, когда момент времени находится внутри первого временного шага, задаваемого параметром nTau при обращении к Pdesolve:

$$0 < \tau < \frac{\tau_{\text{Max}}}{n\text{Tau}}.$$

Для этих же начальных моментов неправильно вычисляется градиент температуры (и, следовательно, тепловой поток) на поверхности (рис. 7.37).

Причина описанных неприятностей состоит в принятом в Mathcad способе внешнего (т.е. для пользователя) представления функции – решения Pdesolve (в нашем примере, функции  $T(x, \tau)$ ). В действительности численное решение выводится только в *дискретных точках*, задаваемых параметрами (nX, nTau), а представление функции в промежутках получается посредством *интерполяции*. Подробности этой процедуры в документации Mathcad не приводятся, но наш пример показывает, что принятый метод интерполяции плохо работает на начальном шаге по времени. Это недостаток Mathcad, который должен быть устранен его разработчиками, недостаток, аналогичный тому, который имеет место для встроенной функции Odesolve.

Итак, формально  $T(x, \tau)$  является функцией, которую можно вычислять, дифференцировать и т.п. Однако, как мы видели, этого нельзя делать для *начальных моментов времени*, меньших шага, задаваемого параметром nTau, поскольку интерполяция на концах отрезка интегрирования, принятая в Mathcad, неудовлетворительная.

Решение проблемы состоит в увеличении параметров (nX, nTau), чтобы уменьшить шаг интерполяции и подойти ближе к граничным точкам, либо в разработке собственной специальной процедуры интерполяции вблизи граничных точек.

Большое количество задач теплопроводности можно проанализировать в режиме численного эксперимента с обобщенной одномерной моделью (7.7). Шаблоном для вычислительных программ будет служить представленная выше компьютерная реализация (рис. 7.6 – рис. 7.12, а также примеры, на которые даны ссылки).

Стационарные задачи решаются методом *счета на установление*. Упомянутые в самом начале (см. Введение) трудности при описании *реальных* объектов (сильная температурная зависимость коэффициентов, сложность граничных условий и т.п.) относительно легко разрешаются, если задача остается в рамках обобщенной одномерной модели (7.7).

Применение математических пакетов, таких как Mathcad, создает новую ситуацию в инженерном деле. Обратимся для примера к фрагменту программы на рис. 7.9, где численно интегрируется краевая задача для уравнения в частных производных (это компьютерная модель импульсных тепловых воздействий). Подчеркнем, что дифференциальное уравнение и краевые условия записаны в обычной математической нотации, а обращение к встроенному интегратору Pdsolve занимает всего одну строчку.

В действительности за обращением к интегратору стоит сложная вычислительная программа (см. пояснения к формуле (7.10)), но это остается *скрытым* от пользователя. По существу, численный метод переводится в категорию рутинных автоматизированных операций, благодаря чему внимание исследователя может быть полностью сосредоточено на главной творческой задаче – разработке адекватной математической модели.

Мы привели здесь краткое описание тенденции в развитии компьютерного моделирования. Она отчетливо видна для относительно простых задач, подобных рассмотренной выше, и в меньшей степени заметна для более сложных, таких как трехмерное нестационарное моделирование конвективного теплообмена в областях сложной геометрии.

По-видимому, полная автоматизация и стандартизация построения моделей теплообмена еще далеко впереди. В настоящее время многие исследователи и расчетчики предпочитают разрабатывать собственные программы и сохранять полный контроль над выбором численных алгоритмов и кодом вычислительных процедур, не без основания полагая, что это обеспечит надежность получаемых результатов (и/или избавит от проблем лицензионной чистоты).



## Раздел 3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

### Глава 8. ЗАКОНЫ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Тепловое излучение – это электромагнитное излучение, определяемое температурой излучателей. Видимый свет (длина волны 0,4 – 0,8 мкм, от фиолетового до красного цвета) является тепловым излучением поверхности Солнца с температурой примерно 6000 К. На Землю попадает около одной миллиардной доли солнечного излучения, но и эта малая доля в тысячи раз превосходит современную энерговооруженность человечества. Проблема состоит в том, что мы еще не умеем эффективно превращать и использовать этот неиссекаемый поток энергии.

При меньших температурах, в интервале 273 К – 4000 К, тепловое излучение занимает интервал более длинных волн, примерно от 0,8 мкм до 1000 мкм. Это диапазон инфракрасного излучения, от красной границы видимого света до дальнего миллиметровой области. Можно сказать, что тепловое излучение включает видимое и инфракрасное излучение. Это верно для тех температур, с которыми имеют дело в технике. Мы ощущаем тепло от инфракрасного излучения, когда греемся у костра, будучи отделены от него слоем холодного воздуха. Или, напротив, чувствуем зимний холод, когда находимся вблизи даже хорошо уплотненного окна в теплой комнате.

Большинство технических твердых материалов непрозрачно для инфракрасного излучения. Поглощение и излучение происходит *на поверхности* тел и определяется температурой поверхности и ее состоянием (шероховатостью, степенью окисленности и т.п.). Твердые (плотные) тела имеют *непрерывный* спектр.

Излучение газов (разреженных сред) существенно отличается от излучения твердых тел. Одноатомные и двухатомные газы (такие как азот, кислород) практически прозрачны для инфракрасного излучения и не излучают в этой области спектра. Трехатомные газы (особенно важны водяной пар и углекислый газ, содержащиеся в атмосфере и продуктах сгорания) сильно поглощают и излучают, но только на определенных длинах волн, соответствующих вращательным уровням энергетических состояний трехатомных молекул. Их

спектр имеет полосовой характер. Другая важная особенность – объемный характер излучения: малый объем газа или газ при очень малом давлении содержит малое число излучающих (поглощающих) молекул и поэтому слабо излучает и практически прозрачен. Наоборот, большие объемы при большом давлении сильно излучают и поглощают (в своих полосах спектра).

Далее в этом разделе рассмотрены характеристики излучения твердых тел.

## 8.1. Количественные характеристики излучения

Плотностью потока излучения  $E$ , Вт/м<sup>2</sup> называют поток энергии (Дж/с = Вт), излучаемый с единицы поверхности (м<sup>2</sup>) по всем направлениям внутри контрольной полусферы (см. рис. 8.1) на всех длинах волн:

$$E \equiv \frac{dQ}{dF}, \text{ Вт/м}^2. \quad (8.1)$$

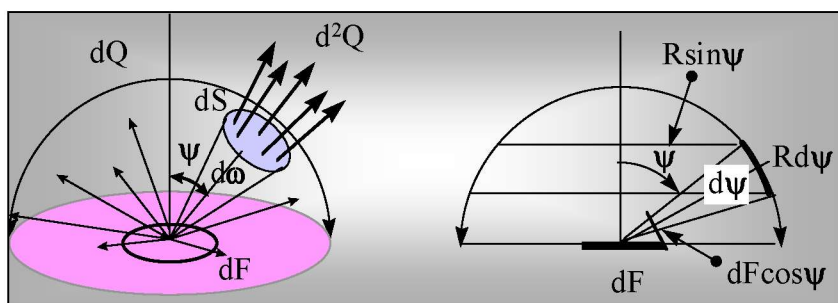


Рис. 8.1. К определению понятий плотности потока и энергетической яркости излучения.

Если выделить с помощью подходящего фильтра некоторый малый интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , измерить в указанном диапазоне плотность потока излучения  $dE$ , Вт/м<sup>2</sup> и отнести этот поток к интервалу  $d\lambda$ , то получится *спектральная плотность* потока излучения:

$$E_\lambda \equiv \frac{dE}{d\lambda}, \quad (8.2)$$

показывающая, как сильно излучает тело на той или иной волне. Зависимость спектральной плотности от длины волны определяет спектр излучения. Пример спектра приведен далее на рис. 8.4.

Плотность и спектральная плотность потока излучения связаны очевидным интегральным соотношением:

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda. \quad (8.3)$$

Энергетическую яркость  $I$  определяют как

$$I \equiv \frac{d^2 Q}{d\omega dF \cos \psi}, \frac{\text{Вт}}{\text{ср м}^2}, \quad (8.4)$$

где  $d^2 Q$ , Вт – поток энергии, излучаемой площадкой  $dF$ ,  $\text{м}^2$ , внутри телесного угла  $d\omega$ , стерadian, в направлении, составляющем угол  $\psi$  с нормалью (см. рис. 8.1).

Энергетическая яркость показывает, как сильно излучает тело в заданном направлении. Это важная характеристика, поскольку при расчете теплообмена излучением приходится рассчитывать потоки от данной поверхности на другие тела, произвольно расположенные в пространстве.

Большинство технических материалов, с шероховатой, окисленной, «матовой» поверхностью, являются так называемым *диффузными* излучателями: их энергетическая яркость не зависит от направления (угла  $\psi$ ). Для таких излучателей, как показано ниже, плотность потока излучения  $E$  (по всем направлениям внутри полусферы) связана с энергетической яркостью  $I$  простым соотношением:

$$I = \frac{E}{\pi}. \quad (8.5)$$

Следовательно, излучение в заданном направлении можно подсчитать как

$$d^2 \frac{E}{\pi} d\omega d \cos \psi. \quad (8.6)$$

Последнее соотношение называют *законом Ламберта* для диффузных излучателей. Доказательство этой формулы простое и следует из определения величин:

$$E = \frac{1}{dF} \int_{\text{по верхней полусфере}} d^2 Q = L \int_{\text{по верхней полусфере}} d\omega \cos \psi.$$

Интегрирование производится по всем направлениям внутрь контрольной полусферы радиуса  $R$ . Яркость  $I$  выносится за знак интеграла как постоянная для диффузных поверхностей величина. Элементарный телесный угол заменяется, согласно определению, полоской на полусфере, отнесенной к квадрату радиуса (см. рис. 8.1):

$$d\omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{(2\pi R \sin \psi)(R d\psi)}{R^2},$$

так что интеграл по полусфере сводится к вычислению табличного интеграла:

$$\int_{\psi=0}^{\psi=2} 2\pi \sin \psi \cos \psi d\psi = \pi,$$

откуда следует:  $E = I\pi$ .

Полезно пояснить само происхождение термина «яркость». Оно обязано световой аналогии и нашему зрительному восприятию. Если рассматривать святающуюся поверхность под разными углами, то *видимой* величиной поверхности будет  $dF \cdot \cos(\psi)$ . И если плотность потока излучения, отнесенная к этой *видимой* поверхности, будет одинаковой независимо от угла зрения, то предмет будет казаться одинаково ярким со всех направлений. Следовательно, это – диффузный излучатель.

*Диффузным излучателем* является абсолютно черное тело – базовая модель в теории теплового излучения (п. 8.3).

## 8.2. Классификация потоков излучения

Различают собственное ( $E_{\text{соб}}$ ), падающее ( $E_{\text{пад}}$ ), отраженное ( $E_{\text{отр}}$ ), поглощенное ( $E_{\text{погл}}$ ), эффективное ( $E_{\text{эф}}$ ) и результирующее ( $E_{\text{рез}}$ ) излучение. Смысл такой классификации в основном понятен из названий и схемы на рис. 8.2. Перечисленные величины могут быть интегральными или спектральными плотностями потоков излучения. При необходимости различать их, мы будем использовать индекс « $\lambda$ », как в (8.2), (8.3).

Собственное излучение  $E_{\text{соб}}$  определяется температурой  $T$  самой поверхности; если эта температура определена, величина  $E_{\text{соб}}$  фиксирована и не зависит от величин всех других видов лучистых потоков на рис. 8.2.

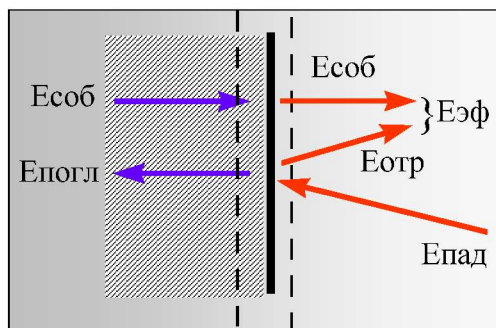


Рис. 8.2. Классификация потоков излучения

Падающий на непрозрачную поверхность поток  $E_{\text{пад}}$  частично отражается и частично поглощается:

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{отр}} + E_{\text{погл}}, \quad (8.7)$$

Соответствующие отношения потоков

$$1 = \underbrace{\left( \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} \right)}_R + \underbrace{\left( \frac{E_{\text{погл}}}{E_{\text{пад}}} \right)}_A \equiv R + A \quad (8.8)$$

определяют понятия радиационных свойств поверхности:  $R$  – коэффициента отражения и  $A$  – коэффициента поглощения ( $R, A \leq 1$ ). Сектральные характеристики обозначаются соответственно как  $R_\lambda$  и  $A_\lambda$ .

Эффективное излучение  $E_{\text{эф}}$  – это полная плотность потока излучения от поверхности тела, складывающаяся из собственного и отраженного излучения:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{соб}} + R \cdot E_{\text{пад}}. \quad (8.9)$$

Результирующее излучение  $E_{\text{рез}}$  определяют, записывая баланс потоков для двух контрольных поверхностей, бесконечно близких к реальной поверхности тела (рис. 8.2):

с наружной стороны:

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}, \quad (8.10)$$

с внутренней стороны:

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{соб}} - E_{\text{погл}} = E_{\text{соб}} - A \cdot E_{\text{пад}}. \quad (8.11)$$

Результирующий поток считается положительным, если он направлен от поверхности наружу.

Все предыдущие соотношения справедливы также для спектральных величин. Например, последняя формула может быть записана в виде:

$$E_{рез\lambda} = E_{соб\lambda} - E_{погл\lambda} = E_{соб\lambda} - A_{\lambda} \cdot E_{пад\lambda}, \quad (8.12)$$

где  $A_{\lambda}$  – спектральный коэффициент поглощения,  $E_{соб\lambda}$  – спектральная плотность собственного потока излучения, и т.д.

### 8.3. Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа

Тела, для которых коэффициент поглощения равен единице,  $A = 1$ , т.е. тела, полностью поглощающие падающее излучение, называются (*абсолютно*) *черными телами*. Это базовое определение теории теплового излучения. Не следует слишком доверять аналогии со зрительным восприятием – например, ярко светящаяся поверхность Солнца есть черная поверхность, потому что она полностью поглощает падающее излучение.

Собственное излучение *черного* тела определяется исключительно его температурой. Собственное излучение *реального* тела рассматривают по отношению к излучению черного тела при той же температуре

$$\varepsilon_{\lambda} \equiv \frac{e_{соб\lambda}}{e_{0\lambda}}; \quad \varepsilon_{\lambda} \equiv \frac{e_{соб\lambda}(\lambda)}{e_{0\lambda}(\lambda)} \quad (8.13)$$

и называют это отношение *степенью черноты*  $\varepsilon$  реального излучателя. Степень черноты – это радиационное свойство тела, вообще говоря, зависящее от температуры, материала и состояния поверхности (шероховатости, окисленности). Ясно, что степень черноты черного тела равна единице.

Заметим, что введенные выше величины – коэффициент поглощения (8.8) и степень черноты (8.13) – существенно различны по определению. Степень черноты – это свойство самого излучателя, независимое от того, подвержен ли объект воздействию потоков излучения от других тел или нет. Напротив, коэффициент поглощения предполагает наличие падающего потока

излучения от других излучателей. Строго говоря, само определение понятия  $A$  не исключает возможной зависимости интегрального коэффициента поглощения от спектрального состава *падающего* излучения.

Связь между независимо определенными выше величинами степени черноты и коэффициента поглощения устанавливается *законом Кирхгофа*.

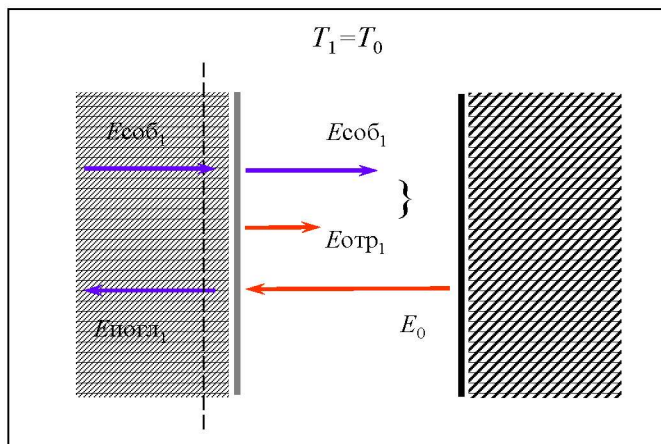


Рис. 8.3. К формулировке закона Кирхгофа

Рассмотрим состояние теплового равновесия двух бесконечных плоскопараллельных пластин с *одинаковой* температурой (рис. 8.3). В такой системе все излучение одной пластины попадает на другую, а результирующий поток равен нулю.

Пусть одна из пластин – абсолютно черная. Условимся все величины, относящиеся к черному телу, снабжать индексом «0». Заметим, что для черной поверхности эффективное излучение равно собственному  $E_0$  (черные тела все поглощают и ничего не отражают).

Другая поверхность, с индексом «1» – реальная, с коэффициентом поглощения, меньшим единицы.

Запишем условие детального – для монохроматических потоков – радиационного равновесия как соотношение (8.12) для пластины 1, учитывая, что *падающее* на пластину 1 излучение –

это *собственное* излучение  $E_{0\lambda}$  черной пластины и что результирующее излучение равно нулю в равновесной системе:

$$\text{рез}_{\lambda} = (\text{соб}_{\lambda})_1 - (\lambda)_1 \text{соб}_{\lambda})_0 = 0 \quad (8.14)$$

Отсюда непосредственно следует формулировка *закона Кирхгофа*:

$$\text{соб}_{\lambda})_1 = (\lambda)_1 \cdot \epsilon_{\lambda} \quad (\text{idem}). \quad (8.15)$$

Сопоставляя с определением степени черноты (8.13), представляют результат в виде:

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{\text{соб}_{\lambda})_1}{(\lambda)_1} \quad (\text{idem}) \quad (8.16)$$

Закон Кирхгофа утверждает, что черные тела не только абсолютные поглотители излучения (по определению), но и абсолютные излучатели. Действительно, коэффициент поглощения в уравнении (8.8) не может быть больше единицы. Его максимальное значение – единица – имеет место как раз для черных тел. Черные тела – максимальные излучатели при заданной температуре.

Баланс потоков излучения (8.14) и закон Кирхгофа (8.15) в интегральной форме (т.е. для потоков излучения, просуммированных по всему спектру) записываются в аналогичной формулировке:

$$\begin{aligned} \text{рез} &= \text{соб}_1 - \epsilon_1 \cdot \text{соб}_0 = 0 \quad \Rightarrow \\ \text{соб}_1 &= \epsilon_1 \cdot \text{соб}_0 \quad \Rightarrow \\ \epsilon_1 &= \frac{\text{соб}_1}{\text{соб}_0} \quad (\text{idem}) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Однако теперь необходимо дополнительное явно сформулированное ограничение: в условиях теплового равновесия с черным телом, поскольку  $A_1$  – это коэффициент поглощения *черного* падающего излучения (см. примечания к формуле (8.13)).

Чтобы исключить возможную зависимость интегрального коэффициента поглощения от спектрального состава *падающего* излучения, вводят *модель серого тела* с постоянным (не зависящим от длины волны излучения) коэффициентом поглощения. В этом случае значения спектрального и интегрального коэффициентов поглощения одинаковы:

$$\epsilon_{\lambda} = \lambda \epsilon \quad (\text{idem}) \quad (8.18)$$



Для большинства технических материалов с шероховатыми и окисленными поверхностями эта модель является хорошим приближением.

Радиационные свойства существенно зависят от температуры. Это величины, значения которых следует выбирать из справочных таблиц, полученных на основе обобщения опытных данных для различных материалов, состояния поверхности и температуры.

#### 8.4. Законы излучения абсолютно черного тела

**Закон Планка.** Классическая физика объясняет возникновение теплового излучения тем, что при *тепловом движении* заряженные частицы вещества движутся с *ускорением* и, следовательно, излучают. Таким образом, внутренняя энергия превращается в энергию электромагнитного излучения. Моделью классической физики был заряженный осциллятор (например, колеблющийся электрон) с энергией, равной энергии теплового движения ( $kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура), теряющий за единицу времени вследствие излучения энергию и поглощающий такую же энергию излучения, чтобы остаться в условиях равновесия.

Однако соответствующая количественная теория потерпела принципиальную неудачу, приведя к так называемой «ультрафиолетовой катастрофе»: излучение бесконечно возрастало на коротких волнах и общее количество излучаемой энергии обращалось в бесконечность.

Правильная теория теплового излучения основана на квантовомеханических представлениях, введенных Планком, согласно которым осциллятор (электрон, молекула) может иметь только *дискретные* уровни энергии, отстоящие друг от друга на величину, равную произведению постоянной Планка на собственную частоту осциллятора:

$$\hbar\omega_0.$$

Вероятность нахождения на каком-либо дискретном уровне  $n$  пропорциональна множителю

$$\exp(-\hbar\omega_0/kT).$$

Осредненная с этими вероятностями энергия есть

$$\frac{\hbar}{\hbar / \dots - 1}$$

По сравнению с классическим выражением, т.е.  $kT$ , имеется принципиальное различие: на больших частотах (коротких волнах) энергия резко уменьшается из-за большого экспоненциального множителя в знаменателе. И только для малых частот (длинных волн) классическое и квантовое представление совпадают. Заметим, что круговая частота и длина волны связаны уравнением:

$$\omega = 2\pi c / \lambda,$$

где  $c$  – скорость света.

Закон Планка устанавливает зависимость спектральной плотности потока излучения черного тела от длины волны и абсолютной температуры:

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(C_2 / \lambda T) - 1}, \quad (8.19)$$

где  $C_1 = 3,7412 \cdot 10^{-16}$  Вт·м<sup>2</sup> и  $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$  м·К – абсолютные константы, составленные из скорости света, постоянных Больцмана и Планка. Графическое представление закона Планка дано на рис. 8.4.

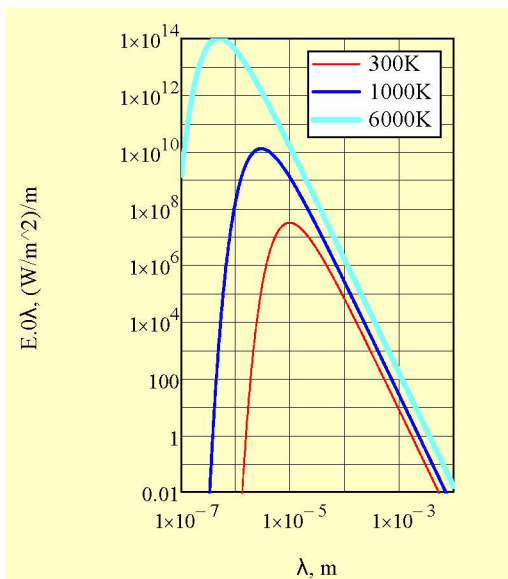


Рис. 8.4. Спектральная плотность потока излучения абсолютно черного тела при различных температурах

Как видно из графиков на рис. 8.4, с увеличением температуры растет уровень излучения на всех длинах волн и происходит сдвиг максимума излучения в сторону коротких волн. Положение максимумов излучения можно определить обычным способом, дифференцируя выражение закона Планка (8.19) по длине волн и приравнивая производную нулю. В результате получают **закон смещения Вина**:

$$\lambda_{\text{макс}} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}, \text{ м.} \quad (8.20)$$

Используя световую аналогию, можно сказать, что зависящее от температуры положение максимума спектральной плотности на шкале длин волн определяет цвет излучения тел. Красные звезды на небе холоднее Солнца – температура их фотосферы примерно 4000 К. Голубые горячие звезды имеют температуру фотосферы до 30000 К.

Закон Планка (8.19) позволяет рассчитать собственное излучение тел при разных температурах и на разных длинах волн. Проиллюстрируем приложения закона Планка при проектировании установок солнечной энергетики. Самые распространенные приемники солнечного излучения – это просто ящики с черным дном, закрытые стеклом. Высокотемпературное (6000К) солнечное излучение имеет максимум в коротковолновой световой области (0,4 – 0,8 мкм), и прозрачное в этой области стекло свободно пропускает излучение внутрь приемника. Обратное излучение – низкотемпературное (например, при 350 К) длинноволновое с максимумом на длине волны излучения примерно 10 мкм. Для такого обратного инфракрасного излучения стекло непрозрачно. Солнечное излучение оказывается в ловушке, и температура в приемнике повышается. Посредством подбора материалов и покрытий с целью максимально использовать различие в длинах волн поступающего и уходящего излучения стремятся повысить эффективность таких устройств.

Рассмотренное явление называется «парниковым эффектом». В глобальном масштабе, парниковый эффект может влиять на изменение климата Земли. Роль «стекла» играют при этом многоатомные газы – углекислый газ, водяной пар и в одном из драматических сценариев – метан.

### Закон Стефана-Больцмана

Если проинтегрировать выражение закона Планка (8.19) по всем длинам волн, то получится величина плотности потока излучения черного тела как функция температуры:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4, \text{ Вт/м}^2, \quad (8.21)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Это главное следствие закона Планка, известное как *закон Стефана-Больцмана*: излучение черного тела увеличивается пропорционально четвертой степени абсолютной температуры.

### 8.5. Излучение и поглощение нечерных тел

В соответствии с определением степени черноты (8.13), излучение реальных тел рассчитывается по следующим формулам:

– для спектральной плотности потока излучения:

$$E_{\text{соб}\lambda}(\lambda, T) = \varepsilon_{\lambda} \cdot E_{0\lambda}(\lambda, T). \quad (8.22)$$

– для интегральной плотности потока излучения:

$$E_{\text{соб}}(T) = \varepsilon \cdot E_0(T) = \varepsilon \cdot \sigma T^4. \quad (8.23)$$

Напомним важные соотношения между радиационными характеристиками, следующие из закона Кирхгофа:

– для произвольных твердых тел:

$$\varepsilon_{\lambda} = A_{\lambda} \leq 1 \quad (\lambda = \text{idem}, \quad T = \text{idem}); \quad (8.24)$$

– для серых тел:

$$\varepsilon_{\lambda} = A_{\lambda} = \varepsilon = A \leq 1; \quad (T = \text{idem}). \quad (8.25)$$

Спектральные величины степени черноты и коэффициента поглощения равны, независимо от того, каковы спектры излучения и поглощения – черные, серые или полосовые.

Интегральные характеристики, строго говоря, равны только для модели серых тел, т.е. для случая, когда спектральные значения степени черноты и коэффициента поглощения *не зависят* от длины волны. Пусть, например, некоторое *не серое* тело излучает и поглощает только вблизи длины волны 10 мкм, а падающее

излучение имеет длину волны вблизи 1 мкм. Тогда рассматриваемое тело вообще ничего не будет поглощать: излучение на длине волны 1 мкм будет полностью отражаться. Такова ситуация, например, со снегом. В справочнике можно найти значение степени черноты снега, равное примерно 0,8. Но если воспользоваться этим значением как коэффициентом поглощения для *солнечного* излучения, то будет сделана грубая ошибка. В действительности коротковолновое тепловое излучение Солнца (свет) практически не поглощается снежным покровом. Поэтому чистый снег весной в деревне долго не тает, по сравнению с загрязненным городским снегом. Вообще на Земле довольно холодно потому, что большие пространства заняты хорошо отражающим солнечное излучение снежным покровом. Упомянутая выше возможная ошибка связана с тем, что в справочнике дано среднее значение (0,8) степени черноты (или коэффициента поглощения) для длинноволнового инфракрасного (низкотемпературного) диапазона, в котором даже чистый снег действительно хорошо поглощает тепловое излучение (скажем, излучение низких теплых дождевых облаков).

В инженерных расчетах теплообменных устройств ради упрощения практически всегда считают тела серыми. В целом это оправданное приближение, поскольку рассматривается не слишком широкий диапазон температур (500 – 1500 К) и технические поверхности – почти всегда шероховатые и окисленные. Тем не менее, следует помнить об обсуждавшихся ограничениях, чтобы избежать грубых ошибок в специальных ситуациях, таких, например, как расчет космических радиаторов охлаждения с применением специальных покрытий из оксида титана или оксида магния, обеспечивающих оптимальное распределение спектральной степени черноты  $\epsilon_\lambda(\lambda)$  по длине волны излучения.

## Глава 9. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

### 9.1. Диатермичная среда

Имеется много практически важных задач, когда участвующие в радиационном теплообмене тела разделены прозрачной, не излучающей и не поглощающей (диатермичной) средой. Очевидный пример – вакуумные высокотемпературные технологии, такие как вакуумное литье в металлургии, нанесение покрытий или пленок термическим распылением в электронных технологиях и т.п. Для космических энергетических установок излучение является единственным способом отвода тепла к холодному источнику.

Одноатомные и двухатомные газы практически прозрачны для теплового излучения. Поэтому сухой воздух, состоящий в основном из двухатомных азота и кислорода, является диатермичной средой.

Сильное поглощение и излучение наблюдается в трехатомных газах, таких как водяной пар и углекислый газ. Поэтому продукты сгорания, содержащие указанные газы в большой концентрации, не являются диатермичной средой. Расчет радиационного теплообмена в таких средах рассматривается в следующей главе.

Вообще говоря, излучением и поглощением в газовых объемах, разделяющих поверхности теплообмена, можно пренебречь в случае предельно малых значений оптической толщины.

### 9.2. Понятие углового коэффициента излучения

Рассмотрим теплообмен между двумя черными изотермическими поверхностями, произвольно расположенными в пространстве (рис. 9.1). Основная идея состоит в том, чтобы рассчитать поток излучения с первого тела на второе  $Q_{1 \rightarrow 2}$ , затем – со второго на первое  $Q_{2 \rightarrow 1}$  и, наконец, взять разность между этими величинами, с тем чтобы определить результирующий поток излучения.

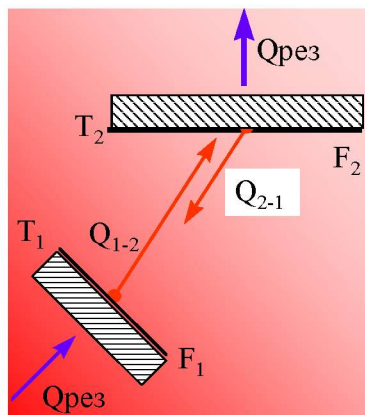


Рис. 9.1. Теплообмен излучением между черными поверхностями, произвольно расположенными в пространстве

Поскольку температура постоянна вдоль поверхности, постоянна и плотность потока собственного излучения  $E_0$ . Следовательно, полное излучение тела 1 по всем направлениям в пространстве определяется как:

$$Q_1 = E_{0,1}F_1, \text{ Вт.} \quad (9.1)$$

Только некоторая часть этого излучения попадет на тело 2, и чтобы учесть это обстоятельство, мы вводим важное понятие *углового коэффициента излучения* первого тела на второе:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_1}. \quad (9.2)$$

Следовательно:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = E_{0,1}F_1\varphi_{12}.$$

Аналогично для второго тела:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = E_{0,2}F_2\varphi_{21}.$$

Таким образом, результирующий поток излучения есть:

$$Q_{\text{рез}} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = E_{0,1}F_1\varphi_{12} - E_{0,2}F_2\varphi_{21}. \quad (9.3)$$

Если температуры обоих тел одинаковы, то есть тела находятся в *термодинамическом равновесии*, то результирующий

поток должен быть равен нулю. Поскольку при одинаковых температурах плотности потоков собственного излучения черных тел одинаковы, то из последней формулы следует соотношение между угловыми коэффициентами:

$$F_1\varphi_{12} = F_2\varphi_{21}, \quad (9.4)$$

которое называется *свойством взаимности* угловых коэффициентов.

Интуитивно понятно, что значения угловых коэффициентов определяются геометрическими характеристиками системы тел, такими как форма, соотношения между размерами тел и расстояниями между ними. Напомним, однако, что мы начали с предположения об абсолютной черноте и изотермичности тел, участвующих в теплообмене излучением.

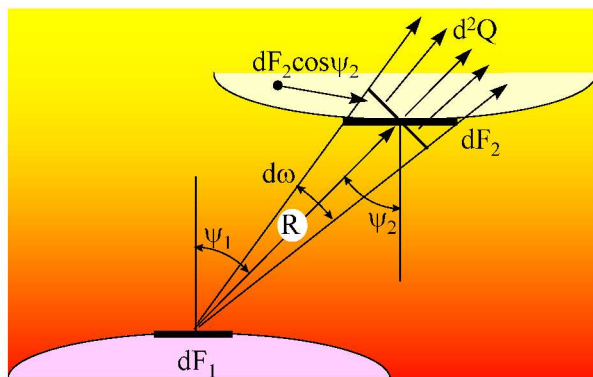


Рис. 9.2. Определение углового коэффициента излучения.

Рассмотрим, как можно применить понятие углового коэффициента для более общего случая и сформулируем важные при практическом использовании ограничения.

Пусть поверхности 1 и 2, участвующие в теплообмене излучением, являются серыми и диффузными излучателями и отражателями (рис. 9.2). В этом случае поток излучения от одной поверхности к другой есть эффективный поток, составленный из собственного и отраженного излучения.

Воспользовавшись законом Ламберта для диффузных излучателей, вычислим поток эффективного излучения, попадающего с элементарной площадки 1 на элементарную площадку 2:



$$d^2 Q_{dF_1 \rightarrow dF_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} d\omega dF_1 \cos(\psi_1).$$

Здесь  $d\omega$  телесный угол, под которым видна площадка  $dF_2$  с площадки  $dF_1$ :

$$d\omega = \frac{dF_2 \cos(\psi_2)}{r^2}.$$

Следовательно

$$d^2 Q_{dF_1 \rightarrow dF_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2 dF_1.$$

Просуммируем сначала излучение площадки  $dF_1$  на *всю поверхность*  $F_2$ :

$$dQ_{dF_1 \rightarrow F_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2$$

и далее излучение *всех* элементарных площадок  $dF_1$  на поверхность  $F_2$ :

$$Q_{F_1 \rightarrow F_2} = \int_{F_1} \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2.$$

Излучение поверхности  $F_1$  по *всем направлениям* составит:

$$Q_{F_1} = \int_{F_1} E_{\text{эф},1} dF_1.$$

Наконец, выпишем выражение для углового коэффициента, пользуясь определением понятия этой величины:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{Q_{F_1 \rightarrow F_2}}{Q_{F_1}} = \frac{\int_{F_1} \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2}{\int_{F_1} E_{\text{эф},1} dF_1}.$$

Мы видим, что в общем случае угловой коэффициент зависит от геометрических характеристик системы и распределения эффективного излучения вдоль поверхности.

При проведении инженерных расчетов реальную конфигурацию представляют в виде системы поверхностей, для которых плотность эффективного излучения можно считать постоянной (с нужной точностью). При этом величина  $E_{\text{эф},1}$  выносится из под знаков интегрирования и сокращается, так что угловой коэффициент оказывается теперь функцией только от геометрии системы:

$$\varphi_{12} = \frac{\int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{\pi r^2} dF_2}{F_1}. \quad (9.5)$$

Определим теперь угловой коэффициент излучения поверхности 2 на поверхность 1. Ясно, что все выкладки проводятся аналогично, и в конечной формуле (9.5) следует просто изменить порядок следования индексов:

$$\varphi_{21} = \frac{\int_{F_2} dF_2 \int_{F_1} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{\pi r^2} dF_1}{F_2}. \quad (9.6)$$

Обратите внимание, что в правых частях выражений (9.5) и (9.6) вычисляется один и тот же интеграл (результат интегрирования не зависит порядка интегрирования). Поэтому

$$F_1 \varphi_{12} = F_2 \varphi_{21}. \quad (9.7)$$

Мы вновь вывели свойство взаимности угловых коэффициентов, полученное ранее при анализе состояния равновесия черных излучателей.

Итак, для диффузных поверхностей и при равномерном распределении плотности эффективного излучения вдоль поверхности *угловой коэффициент излучения зависит исключительно от геометрии системы* и будет одинаковым для геометрически подобных конфигураций. Это важное свойство угловых коэффициентов позволяет существенно упростить проведение инженерных расчетов теплообмена излучением.

Принятые ограничения строго выполняются для черных изотермических поверхностей. Действительно, черные тела являются диффузными излучателями, с другой стороны, эффективное излучение черных тел – это собственное излучение, зависящее только от температуры, которая принимается постоянной вдоль соответствующей (изотермической) поверхности.

Реальные поверхности теплообменных устройств с хорошим приближением можно считать серыми диффузными излучателями и отражателями. Эффективное излучение серых поверхностей складывается из собственного и отраженного излучения. Если поверхности изотермичны, то по крайней мере собственное излучение будет постоянным вдоль поверхности. Универсальным способом проверки достоверности результатов будет разбиение системы на более мелкие составляющие поверхности (точно так же как при численном интегрировании уменьшают шаг интегрирования, скажем вдвое, и сравнивают результаты для оценки ошибки интегрирования).

### 9.3. Расчет угловых коэффициентов

В предыдущем пункте мы ввели понятие углового коэффициента излучения (9.2), установили *свойство взаимности* (9.7) и вывели формулу (9.5), позволяющую рассчитать угловой коэффициент по заданным геометрическим характеристикам системы. Как было показано на простом примере (см. формулу (9.3)), все что необходимо для расчета теплообмена излучением в прозрачной среде – это определить значения угловых коэффициентов.

Далее вы увидите, что это не слишком сложная проблема и что вряд ли на практике встретится ситуация, когда понадобится прямой метод (9.5) с многократным интегрированием.

В большинстве случаев системы, которые приходится рассчитывать – замкнутые или их можно искусственно замкнуть поверхностью с подходящими свойствами.

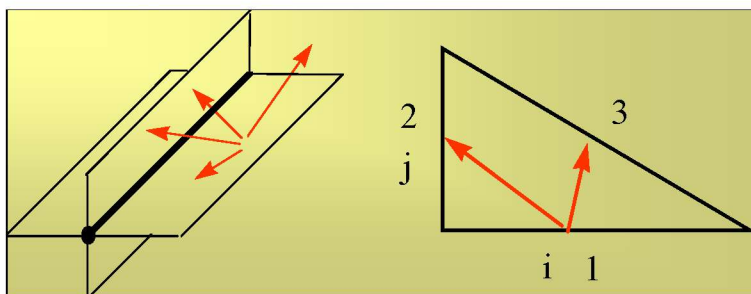


Рис. 9.3. Задача о космическом радиаторе

Пусть, например, проектируется «космический холодильник» (рис. 9.3): требуется охладить жидкость, протекающую в трубе, посредством отвода теплоты излучением в пространство. Для увеличения поверхности теплосъема устанавливают длинные продольные ребра, которые излучают не только в космос, но и друг на друга. Поскольку ребра длинные, можно считать задачу «двухмерной», как показано в правой части рисунка. Заданы размеры катетов  $h_1$  и  $h_2$ . Космическое пространство имитируется гипотенузой 3 как абсолютно черной поверхностью при температуре абсолютного нуля, так что поверхность 3 все поглощает и ничего не излучает. Теперь можно рассмотреть задачу об угловых коэффициентах в замкнутой системе.

Для таких систем очевидным является *свойство замкнутости* угловых коэффициентов:

$$\sum_{j=1}^N \varphi_{ij} = 1, \quad (9.8)$$

где  $N$  – число поверхностей,  $i, j = 1..N$ . Соотношение (9.8) можно записать для каждой поверхности системы. Например, для поверхности  $i=1$ :

$$\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1.$$

Это означает, что сумма долей излучения 1-го тела на себя и на другие поверхности, образующие замкнутую систему, равна единице. Для невогнутых (плоских или выпуклых) поверхностей угловые коэффициенты «самооблучения» равны нулю. Например,  $\varphi_{11} = 0$ .

Удобно представить угловые коэффициенты в виде матрицы  $N \times N$ . Для нашего примера:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы находят, воспользовавшись свойствами замкнутости, взаимности, «невогнутости» и простейшими геометрическими соотношениями.

Благодаря «невогнутости», все элементы на диагонали равны нулю:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{22} = 0; \quad \varphi_{33} = 0.$$

Имеется три отношения взаимности:

$$h_2\varphi_{21} = h_1\varphi_{12}; \quad h_3\varphi_{31} = h_1\varphi_{13}; \quad h_3\varphi_{32} = h_2\varphi_{23}, \quad (9.9)$$

и три уравнения свойства замкнутости:

$$\varphi_{12} + \varphi_{13} = 1; \quad \varphi_{21} + \varphi_{23} = 1; \quad \varphi_{31} + \varphi_{32} = 1. \quad (9.10)$$

В последних трех уравнениях нулевые диагональные коэффициенты опущены.

Единственный безразмерный геометрический параметр, который полностью определяет геометрию системы, это отношение заданных катетов:  $\beta \equiv h_2 / h_1$ .

Тогда для отношения гипотенузы 3 к катету 1 и к катету 2 имеем:

$$h_3 / h_1 = \sqrt{1 + \beta^2}, \quad h_3 / h_2 = \sqrt{1 + \beta^2} / \beta.$$

Итак, для шести неизвестных угловых коэффициентов получены шесть линейных уравнений (9.9), (9.10), содержащих заданный геометрический параметр  $\beta$ . Результат решения линейной системы будет следующим:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2}(1 + \beta - \sqrt{1 + \beta^2}). \quad (9.11)$$

График этой зависимости представлен на рис. 9.4.

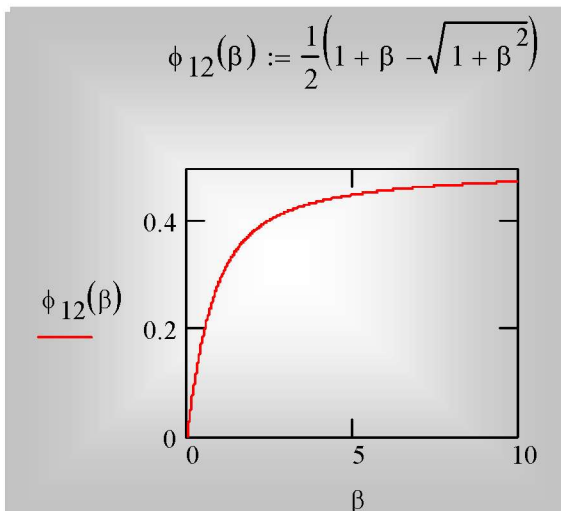


Рис. 9.4. Угловой коэффициент в системе двух взаимно перпендикулярных полос

Остальные коэффициенты проще непосредственно вычислить из уравнений (9.9), (9.10). Как пример, приведем матрицу угловых коэффициентов для равнобедренного прямоугольного треугольника с  $\beta = 1$ :

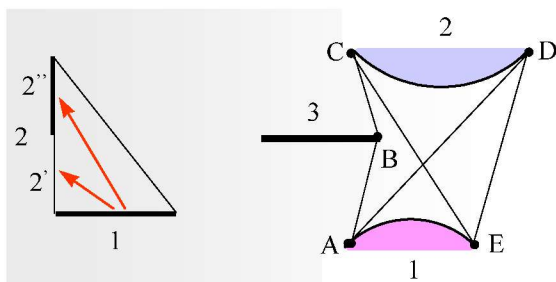
$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0,707 & 0,293 \\ 0,707 & 0 & 0,293 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, применение свойств взаимности и замкнутости позволило найти матрицу угловых коэффициентов для простой геометрической системы. В справочной литературе имеется обширная коллекция такого типа формул для разнообразных конфигураций (в том числе трехмерных).

Еще одно очевидное свойство угловых коэффициентов, *свойство распределительности*, может существенно помочь при вычислениях. Оно следует непосредственно из определения понятия углового коэффициента. Пусть вы решили разбить поверхность 2 на две подповерхности  $2'$  и  $2''$ , например, чтобы учесть изменение температуры вдоль ребра 2 (рис. 9.5) Тогда

$$\Phi_{12} = \Phi_{12'} + \Phi_{12''}, \quad (9.12)$$

так как излучение тела 1, попадающее на тело 2, состоит из двух частей – излучения, попадающего на  $2'$  и излучения, попадающего на  $2''$ , а эти части и есть, согласно определению, угловые коэффициенты в правой части (9.12). Формула для расчета соприкасающихся сторон 1 и 2 или 1 и  $2'$  известна (см. (9.11)). Следовательно, из соотношения (9.12) можно вычислить угловой коэффициент разнесенных полос 1 и  $2'$ .



**Рис. 9.5.** Расчет угловых коэффициентов на основе свойства распределительности (слева) и методом натянутых нитей

Расчет угловых коэффициентов в двухмерных системах (для цилиндрических поверхностей различной формы) можно проводить универсальным *методом натянутых нитей* (рис. 9.5):

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2} \frac{(AD+EC) - (ABC+ED)}{AE}, \quad (9.13)$$

где в числителе правой части фигурируют:

- сумма длин пересекающихся нитей AD и EC;
  - сумма длин непересекающихся нитей ABC и EC,
- а в знаменателе – протяженность поверхности 1, т.е. AE.

Нити «прикрепляются» к граничным точкам поверхностей, т.е. точкам A, E и C, D.

Этот метод позволяет учесть влияние третьей поверхности, частично затеняющей поверхность 2 от излучения поверхности 1. Если сдвинуть поверхность 3 вправо до соприкосновения с нитью ED, то сумма непересекающихся сравняется с суммой пересекающихся нитей, и угловой коэффициент обратится в ноль, как и следовало ожидать.

Итак, используя свойства взаимности (9.7), замкнутости (9.8), распределительности (9.12), метод натянутых нитей (9.13), а также большую справочную коллекцию формул и графиков, практически всегда без сложных вычислений можно определить необходимый набор (матрицу) угловых коэффициентов.

#### 9.4. Теплообмен излучением в замкнутой системе

Замкнутая система  $N$  серых изотермических поверхностей с заданными температурами  $T_i$  схематически представлена на рис. 9.6.

Поверхности идентифицируются индексами  $i$  или  $j$ ,  $i, j = 1.. N$ , при описании их попарного радиационного взаимодействия. Поверхности разделены прозрачной (не излучающей и не поглощающей) средой. Требуется найти значения плотностей результирующего потока излучения  $E_{рез, i}$ .

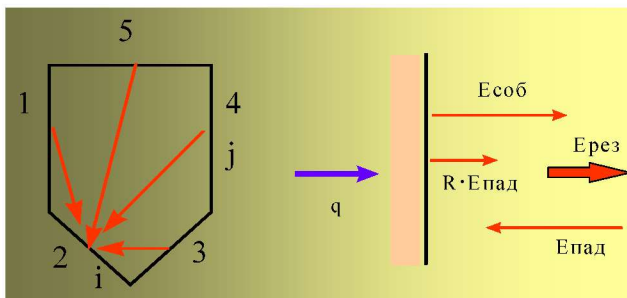


Рис. 9.6. Теплообмен излучением в замкнутой системе

Предполагаются известными значения степени черноты  $\epsilon_i$  поверхностей, которые считаются серыми диффузными излучателями. Задана геометрия системы, значения площадей поверхностей  $F_i$ , их форма, размеры и взаимное расположение, так что угловые коэффициенты  $\varphi_{ij}$  могут быть предварительно рассчитаны.

Расчет базируется на двух очевидных соотношениях, следующих из определения понятий эффективного, собственного, падающего и результирующего потоков:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + R E_{\text{пад}}, \quad R = 1 - A; \quad (9.14)$$

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}. \quad (9.15)$$

Эти соотношения могут быть записаны для каждой  $i$ -поверхности системы.

В качестве *неизвестных* величин выступают потоки *эффективного* излучения. Проблема состоит в том, что падающее на данную поверхность излучение создается *всеми* телами системы, поэтому необходимо выразить поток падающего излучения через эффективные излучения *всех* поверхностей.

Начнем с взаимодействия фиксированной  $i$ -поверхности с какой-либо  $j$ -поверхностью. Все излучение  $j$ -поверхности есть:

$$E_{\text{эф}j} F_j, \text{ Вт.}$$

На  $i$ -поверхность попадает часть этого излучения, определяемая угловым коэффициентом  $j$ -поверхности на  $i$ -поверхность:

$$E_{\text{эф}j} F_j \varphi_{ji}, \text{ Вт.}$$



Плотность потока падающего излучения от одной  $j$ -поверхности составит:

$$\frac{E\text{Эф}_j F_j \varphi_{ji}}{F_i}, \text{ Вт/м}^2,$$

или, с учетом свойства взаимности ( $F_j \varphi_{ji} = F_i \varphi_{ij}$ ),

$$E\text{Эф}_j \varphi_{ij}.$$

Теперь необходимо просуммировать плотности падающего излучения от всех  $j$ -поверхностей ( $j=1 \dots N$ ), то есть:

$$E_{\text{пад}_i} = \sum_j E\text{Эф}_j \cdot \varphi_{ij}.$$

Следовательно, для каждой  $i$ -поверхности в соответствии с формулой (9.14) можно записать следующее уравнение:

$$E\text{Эф}_i = E_{\text{соб}_i} + R_i E_{\text{пад}_i} = E_{\text{соб}_i} + R_i \sum_j E\text{Эф}_j \cdot \varphi_{ij}, \quad (9.16)$$

согласно которому эффективное излучение  $i$ -поверхности складывается из собственного и отраженного излучения этой поверхности, причем последнее есть  $R_i$  – доля от падающего излучения, обусловленного эффективным излучением всех  $j$ -поверхностей. Уравнение (9.16) содержит известную величину собственного излучения, определяемую по закону Стефана-Больцмана:

$$E_{\text{соб}_i} = \varepsilon_i \sigma T_i^4.$$

Неизвестными величинами в (9.16) являются  $E\text{Эф}_i$ . Ясно, что получилась система *линейных* уравнений относительно эффективных потоков излучения, решение которой, с принципиальной точки зрения, получить несложно.

После того как величины  $E\text{Эф}_i$  определены для всех поверхностей, рассчитывают плотности результирующего поток излучения, которые определяются в соответствии с формулой (9.15) как разности эффективного и падающего излучения:

$$E_{\text{рез}_i} = E\text{Эф}_i - \sum_j E\text{Эф}_j \varphi_{ij}. \quad (9.17)$$

Задача решена.

Полезно представить систему линейных уравнений (9.16) в стандартном виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\text{Эф} = \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица  $N \times N$  коэффициентов системы уравнений,  $\mathbf{B}$  – вектор–столбец правых частей,  $\mathbf{E}\mathbf{z}\mathbf{f}$  – вектор–столбец иско-  
мых величин. После такого преобразования можно просто обра-  
титься к стандартной компьютерной программе решения системы  
линейных уравнений.

Используем для отдельно стоящей величины  $Ez\mathbf{f}_i$  в урав-  
нениях (9.16) и (9.17) тождество:

$$Ez\mathbf{f}_i \equiv \sum_j Ez\mathbf{f}_j \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ если } i = j; \quad \delta_{ij} = 0 \text{ если } i \neq j.$$

Под знаком суммы в действительности остается только  
одно ненулевое слагаемое с  $j=i$ , но такая подстановка позволит  
нам привести подобные члены, содержащие эффективные потоки  
в левой и правой частях уравнений:

$$\sum_j (\delta_{ij} - R_i \varphi_{ij}) Ez\mathbf{f}_j = E\text{cob}_i, \quad (9.18)$$

$$E\text{рез}_i = \sum_j (\delta_{ij} - \varphi_{ij}) Ez\mathbf{f}_j. \quad (9.19)$$

Нетрудно увидеть в операторах суммирования правило  
умножения матрицы на вектор: элементы строки  $i$  умножаются на  
элементы вектора и складываются. Поэтому оба этих уравнения  
представляются в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Ez}\mathbf{f} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{Eрез} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Ez}\mathbf{f}. \quad (9.20)$$

Элементы матриц и вектора правой части рассчитываются  
по формулам:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - R_i \varphi_{ij}; \quad b_i = E\text{cob}_i = \varepsilon_i \sigma T^4, \quad D_{ij} = \delta_{ij} - \varphi_{ij}. \quad (9.21)$$

Коэффициент отражения для серых тел вычисляется как  
 $R_i = 1 - \varepsilon_i$ . Теперь задача подготовлена к решению на компьютере.

**Задача со смешанными условиями на поверхностях**  
Пусть на некоторых поверхностях системы заданы значения тем-  
пературы, и требуется найти значения плотности результирующе-  
го потока на этих поверхностях.

На других поверхностях заданы значения плотностей результирующего потока излучения, и требуется найти их температуры. Частным случаем является адиабатически изолированная поверхность (теплоизолированная стенка), для которой результирующий поток равен нулю. Например, это огнеупорная обмуровка парогенератора.

Из уравнений вида (9.16) или (9.17) необходимо скомбинировать систему из  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными по следующему правилу: для поверхностей с заданной температурой следует включить уравнение (9.16), а для поверхностей с заданными плотностями результирующего потока – уравнение (9.17). В первом случае уравнение содержит известную величину собственного излучения, а во втором – заданную величину плотности результирующего потока.

Элементы матрицы и вектора правой части уравнения для эффективных потоков

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\varepsilon\phi = \mathbf{B}$$

теперь определяются по формулам:

а) задана температура поверхности

$$A_{ij} = \delta_{ij} - R_i \phi_{ij}; \quad b_i = E_{\text{соб}i} = \varepsilon_i \sigma T^4, \quad (9.22)$$

б) задан результирующий поток

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \phi_{ij}; \quad b_i = E_{\text{рез}i}.$$

После того как величины  $E\varepsilon\phi_i$  определены для всех поверхностей, необходимо: вычислить по уравнению (9.17) значения  $E_{\text{рез}i}$  для тех поверхностей, где были заданы температуры; вычислить по уравнению (9.16) значения  $E_{\text{соб}i}$  для тех поверхностей, где были заданы результирующие потоки излучения, после чего рассчитать температуры этих поверхностей:

$$T_i = \left( \frac{E_{\text{соб}i}}{\varepsilon_i \sigma} \right)^{1/4}.$$

**Теплопроводность и конвекция в прозрачной среде.** В заключение сделаем важное замечание, касающееся постановки задачи. Мы пренебрегли другими способами теплопереноса между поверхностями, такими как теплопроводность и конвекция в (прозрачной) газовой среде, заполняющей объем системы. Эти эффекты учитываются при расчете реальных установок следующим образом.

Пусть заданы температуры поверхностей, а газовая среда между ними отсутствует (система находится в вакууме). Решив задачу так, как это описано выше, мы получим значения *радиационных* результирующих потоков для каждой поверхности. Пусть теперь система заполнена *прозрачным* (не излучающим и не поглощающим) газом. Это никак не скажется на значениях *радиационных* потоков  $E$ , поскольку они определяются только температурами поверхностей. Что же изменится?

Если горячая поверхность соприкасается с относительно холодным газом, то от стенки к газу возникнет тепловой поток за счет конвекции. Теперь *через стенку извне* потребуется подводить больше тепла, а именно *суммарную* величину радиационного результирующего потока  $E_{рез}$  и конвективного потока. Говорят, что процессы радиационного и конвективного теплообмена в прозрачных газах развиваются параллельно, независимо один от другого. Мы подробнее обсудим этот вопрос позже на числовых примерах.

## 9.5. Аналитические решения для простых систем

**Теплообмен излучением между телом и оболочкой.** Рассмотрим применение полученных уравнений для расчета простейшей замкнутой системы из двух поверхностей – внутреннего тела 1 и окружающей его оболочки 2 (рис. 9.7а). Предполагаем, что поверхность внутреннего тела – невогнутая. Для обеих поверхностей считаются известными их площади, температуры, степени черноты. Требуется определить результирующий поток излучения.

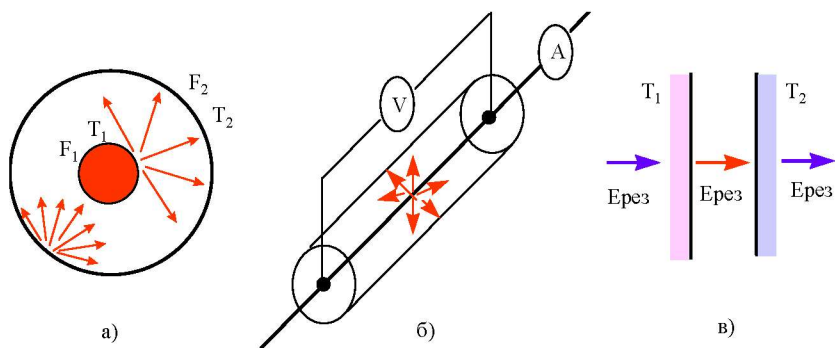


Рис. 9.7. Теплообмен излучением между телом и оболочкой

Угловые коэффициенты излучения в этой системе находятся просто. Выпишем свойства замкнутости и взаимности:

$$\begin{aligned}\Phi_{11} + \Phi_{12} &= 1; & \Phi_{21} + \Phi_{22} &= 1; \\ F_1\Phi_{12} &= F_2\Phi_{21}.\end{aligned}$$

Поскольку внутренняя поверхность 1 невогнутая ( $\Phi_{11} = 0$ ), получаем:

$$\Phi_{12} = 1; \quad \Phi_{21} = F_1 / F_2; \quad \Phi_{22} = 1 - \Phi_{21} = 1 - F_1 / F_2. \quad (9.23)$$

Это означает, что все излучение внутренней поверхности 1 попадает на оболочку 2. Только часть излучения оболочки 2, равная отношению внутренней поверхности к внешней, попадает на внутреннюю поверхность; другая часть переизлучается на оболочку.

Для круглых цилиндров  $F = 2\pi RL$ ,  $L \gg R$  и  $\Phi_{21} = R_1/R_2$ .

Для сфер  $F = 4\pi R^2$  и  $\Phi_{21} = R^2_1/R^2_2$ .

Сформируем матрицу системы уравнений (9.20) для эффективных потоков излучения, используя соотношения (9.21). Для этого последовательно определим следующие матрицы.

Матрица угловых коэффициентов есть:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Phi_{21} & 1 - \Phi_{21} \end{bmatrix}.$$

Матрица, которая получается умножением первой строки на коэффициент отражения  $R_1$ , второй строки – на  $R_2$  (и так далее для систем из большего количества поверхностей):

$$\Phi_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdot R_1 \\ \Phi_{21}R_2 & (1 - \Phi_{21})R_2 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица (матричное представление символа Кронекера  $\delta$ ):

$$1\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица системы линейных уравнений для определения потоков эффективного излучения:

$$\mathbf{A} = 1\delta - \Phi_R = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\Phi_{21}R_2 & 1 - R_2(1 - \Phi_{21}) \end{bmatrix}.$$

Вектор–столбец правой части системы уравнений, составленный из плотностей собственного излучения поверхностей, и вектор–столбец искоемых величин плотностей эффективного излучения:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1 E_{01} \\ A_2 E_{02} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}\varepsilon\Phi = \begin{bmatrix} E\varepsilon\Phi_1 \\ E\varepsilon\Phi_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений в матричной форме есть:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\varepsilon\Phi = \mathbf{B}.$$

Получить решение линейной системы из двух уравнений в общем виде несложно, на даже для такой простой задачи выкладки будут довольно длинными. Поэтому следует воспользоваться системой символьных вычислений в пакете Mathcad или Maple. Результат будет следующим:

$$\mathbf{E}\varepsilon\Phi = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \varepsilon_2 E_{02} + \varepsilon_1 E_{01} - R_2 \varepsilon_1 E_{01} + R_2 \varphi_{21} \varepsilon_1 E_{01}}{R_2 \varphi_{21} R_1 - 1 + R_2 - R_2 \varphi_{21}} \\ - \frac{R_2 \varphi_{21} \varepsilon_1 E_{01} + \varepsilon_2 E_{0,2}}{R_2 \varphi_{21} R_1 - 1 + R_2 - R_2 \varphi_{21}} \end{bmatrix}.$$

Коэффициент отражения серых тел вычисляется как  $R_i = 1 - \varepsilon_i$ .

Далее необходимо воспользоваться уравнением (9.19) для вычисления плотностей потоков результирующего излучения. В матричной форме это соотношение выглядит следующим образом:

$$E_{рез} = (1\delta - \Phi) \cdot \mathbf{E}\varepsilon\Phi.$$

Выполнив необходимые символьные вычисления (в Mathcad или Maple), получают формулу для плотности результирующего потока на внутренней поверхности:

$$E_{рез_1} = \frac{E_{01} - E_{02}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \varphi_{21}}, \text{ Вт/м}^2, \quad (9.24)$$

где  $\varphi_{21} = E_1 / E_2$ ,  $E_{01} = \sigma T_1^4$ ,  $E_{02} = \sigma T_2^4$ .

Плотность результирующего потока на поверхности оболочки рассчитывается из баланса:

$$Q_{рез} = E_{рез_1} F_1 = -E_{рез_2} F_2, \text{ Вт}.$$

Формула (9.24) широко используется в практических расчетах, и мы опишем эти применения далее.

Рассмотрим два предельных случая при изменении соотношения размеров внутренней и внешней поверхности  $F_1/F_2$ .

1. Пусть размеры внутреннего тела 1 существенно меньше размеров оболочки (рис. 9.7б, проволока на оси цилиндра большого диаметра). Тогда:

$$\frac{F_1}{F_2} \rightarrow 0; \quad \varphi_{21} \rightarrow 0$$

и расчетная формула (9.24) переписывается следующим образом:

$$E_{рез1} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4), \text{ Вт/м}^2. \quad (9.25)$$

Замечательным свойством этого решения является независимость результирующего потока излучения от степени черноты и размеров оболочки (просто они должны быть велики по сравнению с размерами внутреннего тела). Ситуация выглядит так, как будто большая оболочка ведет себя как черное тело, поглощая все излучение внутренней поверхности.

2. Пусть размеры внутреннего тела 1 приближаются к размерам оболочки 2 и между ними остается только тонкий зазор. Тогда:

$$\frac{F_1}{F_2} \rightarrow 1; \quad \varphi_{21} \rightarrow 1$$

и расчетная формула (9.24) переписывается следующим образом:

$$E_{рез1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \text{ Вт/м}^2. \quad (9.26)$$

Поскольку величины поверхностей теперь практически одинаковы, значения плотности результирующего потока также будут одинаковыми (но с разным знаком). Эта ситуация идентична теплообмену излучением между бесконечными плоскими пластинами (рис. 9.7 в). Фактически важно только то, что зазор между поверхностями очень мал по сравнению с другими размерами системы.

**Калориметрический метод экспериментального определения степени черноты.** На рисунке 9.7 б проиллюстрирована идея экспериментального определения степени черноты проволоки (внутреннее тело), натянутой по оси вакуумированного цилиндра большого диаметра (оболочка). Производя точные измерения силы тока и напряжения электрически обогреваемой проволоки, определяют Джоулево тепло (Вт), передаваемое посредством излучения от нити к термостатированной при температуре  $T_2$  оболочке и, зная поверхность нити, находят плотность результирующего потока Ерез<sub>1</sub>. Температуру нити  $T_1$  измеряют, например, используя температурную зависимость электрического сопротивления проволоки (т.е. методом термометра сопротивления). Наконец, по формуле (9.25) вычисляют искомое значение степени черноты. Применение формулы (9.25) оправдано, поскольку поверхность тонкой проволоки существенно меньше поверхности цилиндрической оболочки.

**Защита от излучения с помощью экранов.** Часто бывает необходимо уменьшить результирующий поток излучения между телами, например, чтобы снизить тепловые потери из высокотемпературной установки, оградить датчик температуры в газовом объеме от нагрева излучением высокотемпературных стенок, защитить человека от воздействия высокотемпературного излучения и т.п. В таких случаях устанавливают непрозрачные для теплового излучения экраны. Воспользуемся схемой на рис. 9.8 а для вывода расчетного соотношения при установке одного плоского экрана. Требуется определить результирующий поток излучения.

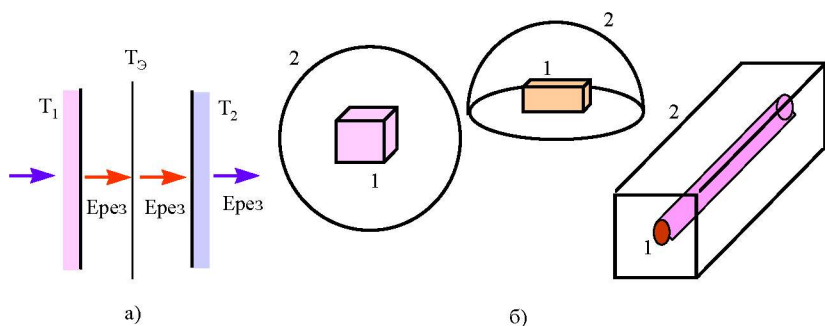


Рис. 9.8. Теплообмен излучением в системах различной конфигурации



Основной идеей вывода является равенство результирующих потоков по обеим сторонам экрана, так как в противном случае его температура изменялась бы во времени – увеличивалась, если подводится тепла больше, чем отводится, или уменьшалась в противоположной ситуации. Для каждого из промежутков «1–Э» и «Э–2» можно воспользоваться формулой (9.26):

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_Э^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_Э} - 1} \equiv \frac{\sigma(T_1^4 - T_Э^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{1Э}}};$$

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_Э^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_Э} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \equiv \frac{\sigma(T_Э^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{Э2}}}.$$

Значки тождества показывают, что мы просто ввели обозначения для длинных выражений в знаменателе, используя так называемые приведенные степени черноты. Переноса в левые части знаменатели правых частей и складывая оба уравнения, мы исключаем неизвестную температуру экрана и получаем для плотности результирующего потока формулу:

$$E_{рез}^{экр} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{1Э}} + \frac{1}{\varepsilon_{Э2}}}. \quad (9.27)$$

В исходной ситуации без экрана результирующий поток был:

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{12}}}.$$

Сравнивая два последних выражения, мы видим, что добавление экрана приводит к появлению в знаменателе дополнительных слагаемых, то есть к уменьшению результирующего потока.

Чтобы вывести запоминающееся правило, предположим, что степени черноты всех поверхностей одинаковы. Тогда все

приведенные степени черноты также одинаковы, и при установке одного экрана мы получаем двукратное уменьшение результирующего потока:

$$\frac{E_{рез}^{Экр}}{E_{рез}} = \frac{1}{2},$$

а при установке  $N$  экранов:

$$\frac{E_{рез}^{Экр}}{E_{рез}} = \frac{1}{N+1}. \quad (9.28)$$

Еще более эффективную защиту можно обеспечить, применяя экраны с низким коэффициентом поглощения (степени черноты), например, алюминиевые ( $\varepsilon \approx 0,2$ ).

**Применение формулы (9.24) для тел различной формы**  
Выше, при введении понятия углового коэффициента излучения, было показано, что необходимо соблюдать условие постоянства плотности потока эффективного излучения вдоль поверхности. Поэтому формула (9.24) строго справедлива, например, для коаксиальных изотермических цилиндров или концентрических сфер. Однако в приближенных расчетах ее широко используют для самых разнообразных конфигураций (рис. 9.8 б). Следует только помнить, что при выводе мы считали внутреннюю поверхность невогнутой (плоской или выпуклой).

## 9.6. Примеры, приложения

Выше мы рассмотрели теплообмен излучением вне связи с другими процессами переноса теплоты в разделяющей поверхности среде – теплопроводностью и конвекцией. Мы выделяли из реального окружения (реального технического устройства) некоторый замкнутый объем, ограниченный поверхностями с различными заданными температурами, и рассчитывали потоки излучения между этими поверхностями. Возникает два вопроса:

а) как связаны различные процессы переноса (радиация, теплопроводность, конвекция);

б) как «подключена» рассматриваемая область к реальному окружению.

При решении первого вопроса важно принятое нами предположение о прозрачности среды, заполняющей выделенный объем. Газ в этом объеме *не поглощает* излучения стенок и сам ничего *не излучает*. *Потоки излучения Ерез* при этом совершенно не зависят от температуры газа, а определяются только *температурами стенок*. Однако, если температуры газа и стенки неодинаковы, неизбежно возникнет тепловой поток за счет теплопроводности и (или) конвекции.

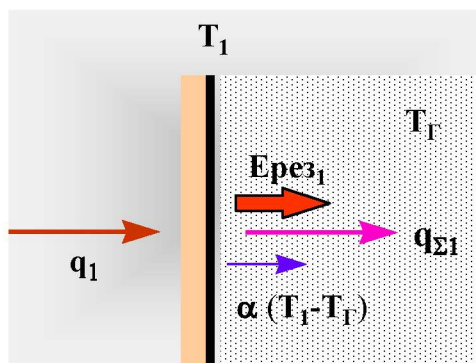


Рис. 9.9. Радиационные и конвективные потоки тепла

Из схемы на рис. 9.9 ясно, что суммарный поток теплоты от стенки составит:

$$q_{\Sigma 1} = E_{\text{рез}1} + \alpha_1 (T_1 - T_{\Gamma}), \quad (9.29)$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности 1 к газу в рассматриваемом объеме. Обратите внимание, в каком порядке записаны температуры в выражении для температурного напора: положительным считается поток от стенки.

Теперь мы переходим ко второму вопросу, а именно, как «подключена» рассматриваемая область к окружению. По существу, это проблема постановки граничных условий. Задание температур поверхностей – это естественная и наиболее удобная

форма граничных условий для задач теплообмена излучением. Но при реальной постановке инженерной задачи эти температуры могут быть неизвестными!

В стационарных условиях поток, определенный формулой (9.29), должен подводиться ( $q_1$ ) каким-то образом в систему (рис. 9.9):

$$q_1 = q_{\Sigma 1}; \quad q_1 = E_{рез1} + \alpha_1(T_1 - T_r). \quad (9.30)$$

Левая часть записана для воображаемой контрольной поверхности, расположенной слева, а правая часть – справа от реальной поверхности тела 1. Это и есть формулировка граничного условия для потоков теплоты.

Рассмотрим возможные частные случаи.

1. Задана температура поверхности. Тогда соотношение (9.30) используется просто для расчета потока  $q_1$ , который каким-либо образом должен подводиться извне, чтобы поддерживать температуру стенки на заданном уровне.

2. Задан тепловой поток  $q_1$ , подводимый извне. Тогда уравнение (9.30) нужно включить в систему уравнений для расчета лучистых потоков. В результате решения будет найдена температура стенки  $T_1$ .

3. Заданы температура  $T_{нар}$  внешнего теплоносителя и коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{нар}$  с внешней стороны, так что  $q_1 = \alpha_{нар}(T_{нар} - T_1)$ . Тогда уравнение (9.30) переписывается в виде:

$$\alpha_{нар}(T_{нар} - T_1) = E_{рез1} + \alpha_1(T_1 - T_r)$$

и включается в систему уравнений для расчета лучистых потоков. В результате решения будет найдена температура стенки  $T_1$ .

### ***Задача о радиационных заморозках***

Рассмотрим далее в качестве примера задачу из области природных явлений, задачу о так называемых радиационных заморозках. Почему весной или осенью при *положительной* температуре воздуха в ночное время случаются заморозки на почве, земля и растения покрываются инеем? Оказывается, это связано с теплообменом излучением между поверхностью земли и «небом» (рис. 9.10).

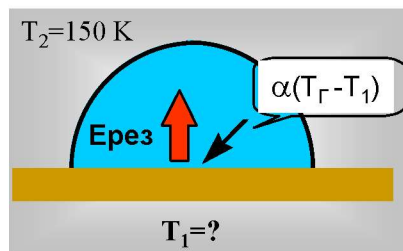


Рис. 9.10. Задача о радиационных заморозках

Будем считать теплоподвод к поверхностному слою от более глубоких слоев почвы пренебрежимо малым. Тогда величина  $q_1$  принимается равной нулю (рис. 9.10) и граничное условие (9.30) запишется следующим образом:

$$0 = E_{\text{рез1}} + \alpha_1(T_1 - T_\Gamma) . \quad (9.31)$$

Здесь  $\alpha_1 \approx 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$  – коэффициент теплоотдачи от воздуха к поверхности,  $T_1, \text{К}$  – искомая температура поверхности почвы,  $T_\Gamma = 10^\circ\text{C} = 283 \text{ К}$  – температура воздуха.

В нашей модели небо – это сфера большого радиуса над участком земли, поэтому для расчета теплообмена излучением годится формула (9.25):

$$E_{\text{рез1}} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) , \quad (9.32)$$

где  $T_2$  – эффективная (радиационная) температура неба. Если бы атмосфера была абсолютно прозрачной, то эта температура в ночное время была бы близка к абсолютному нулю. Реальной оценкой для ясного ночного неба является  $T_2=150 \text{ К}$ , а для облачного неба  $T_2=250 \text{ К}$ . Коэффициент поглощения поверхности почвы близок к единице.

Итак, два соотношения (9.31), (9.32) составляют нелинейную систему уравнений для результирующей плотности потока излучения на поверхности почвы и для температуры почвы. Поскольку сейчас для нас важна наглядность, а не эффективность вычислений, приведем графическое решение этой системы (рис. 9.11).

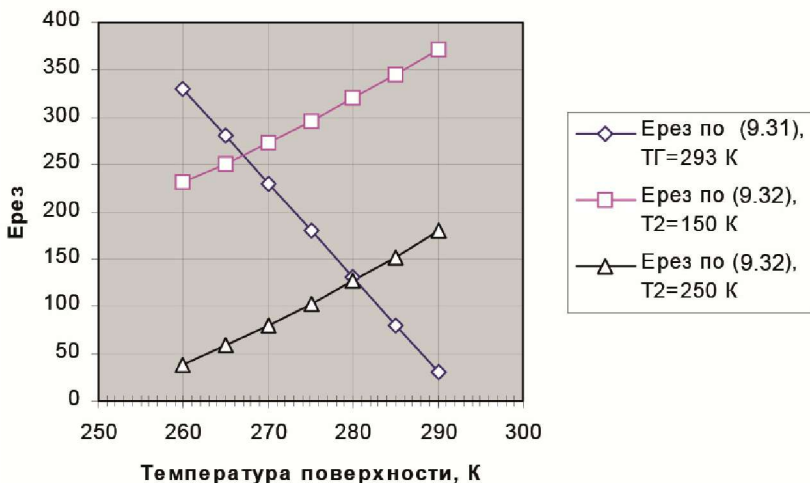


Рис. 9.11. Температура поверхности почвы при различных значениях радиационной температуры неба

Используя неизвестную температуру  $T_1$  как параметр, вычислим и нанесем на график значения результирующего потока излучения по формулам (9.31) и (9.32). Решение находится в пересечении этих линий.

Как видно из графиков, при ясном небе с радиационной температурой 150 К можно прогнозировать заморозки на почве. Температура понизится примерно до  $-6\text{ }^\circ\text{C}$ . При облачном небе с радиационной температурой 250 К температура поверхности будет примерно  $+7\text{ }^\circ\text{C}$ . Напомним, что температура воздуха в обоих случаях  $+10\text{ }^\circ\text{C}$ .

### ***Задача о высокотемпературном газовом теплообменнике***

В теплообменнике типа «труба в трубе» (рис. 9.12) внутренняя труба 1 есть высокотемпературный нагреватель, обеспечивающий тепловую нагрузку  $q_1$ , Вт/м<sup>2</sup>. В кольцевом зазоре протекает нагреваемый газ при температуре  $T_\Gamma = 400\text{ К}$ . Внешняя поверхность теплоизолирована.

Требуется определить температуры поверхности нагревателя  $T_1$  и теплоизолированной поверхности  $T_2$  при различных значениях тепловой нагрузки  $q_1$ . Коэффициенты теплоотдачи следует рас-

считать по подходящей формуле конвективного теплообмена, но в числовом примере мы просто приняли ориентировочные значения  $\alpha_1 = \alpha_2 = 50 \text{ Вт/ (м}^2\text{К)}$ . Степени черноты поверхностей  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ .

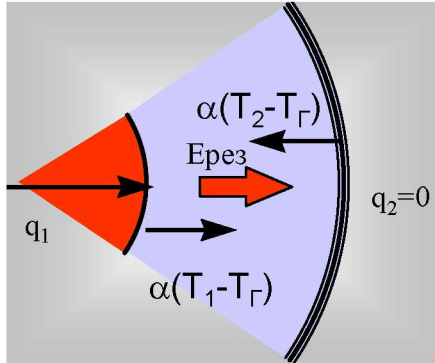


Рис. 9.12. Задача о нагреве газа в кольцевом канале

Для составления системы уравнений понадобится формула (9.24) и два граничных условия вида (9.30):

$$E_{\text{рез1}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\varphi_{21}};$$

$$q_1 = E_{\text{рез1}} + \alpha_1(T_1 - T_{\Gamma});$$

$$0 = E_{\text{рез2}} + \alpha_2(T_2 - T_{\Gamma});$$

$$E_{\text{рез1}} 2\pi R_1 = -E_{\text{рез2}} 2\pi R_2.$$

Результаты численного решения этой нелинейной системы показаны на рис. 9.13 в форме зависимости температур обеих поверхностей от плотности теплового потока на поверхности нагревателя.

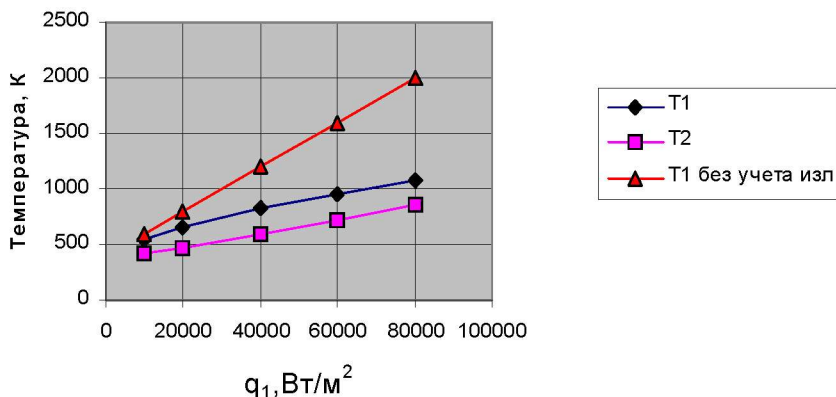


Рис. 9.13. Радиационно-конвективный теплообмен при течении газа в кольцевом канале

Во-первых, обратите внимание на то, какую большую ошибку при расчете температуры нагревателя мы сделали бы, не учитывая радиационный теплообмен (сравните верхнюю и среднюю линии). На основе такого ошибочного расчета проектировщик был бы вынужден ограничить плотность теплового потока величиной примерно 30000 Вт/м<sup>2</sup>, опасаясь пережога нагревателя. В действительности же, как показывают результаты правильного, с учетом радиации, расчета (см. среднюю кривую), нагреватель сможет работать при вдвое большей плотности теплового потока.

Во-вторых, следует внимательно разобраться в причинах улучшения суммарного радиационно-конвективного теплообмена. Излучение нагревателя повышает температуру внешней поверхности (нижняя кривая), и эта поверхность отдает теплоту газу посредством конвекции. Газ по-прежнему не участвует непосредственно в радиационном теплообмене, будучи прозрачным для теплового излучения.

### *Задача об экранированных поверхностях нагрева*

Обычно в камерах сгорания энергетических установок излучение воспринимается рядами труб, расположенными вблизи огнеупорных теплоизолированных стенок. Такие ряды называются экранами (они экранируют стенки камеры сгорания). Внутри



труб протекает рабочее тело (теплоноситель), к которому передается в конечном счете результирующий поток излучения от раскаленных газов в камере сгорания (рис. 9.14).

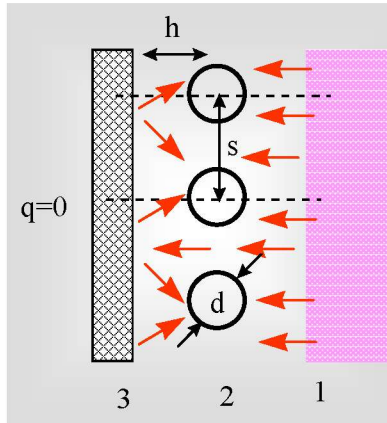


Рис. 9.14. Задача об экранных поверхностях нагрева

Использованы следующие обозначения:

1 – черная поверхность с заданной температурой  $T_1$ , имитирующая излучение топки;

2 – ряд труб с диаметром  $d$  и относительным шагом  $S=s/d$ , и с заданной температурой  $T_2$ ;

3 – адиабатическая стенка.

Если трубы расположены не слишком тесно и не слишком близко к стенке (практически при  $h > 1.5d$ ,  $s > 1.5d$ ), то излучение поверхности 1 частично попадает на стенку 3 и переизлучается на ряд труб 2, обеспечивая равномерный обогрев по периметру труб.

Целью расчета является определение результирующего потока излучения на поверхности ряда труб 2. Это хороший пример задачи со смешанными граничными условиями.

Найдем прежде всего угловые коэффициенты для рассматриваемой замкнутой системы из трех поверхностей. Эти коэффициенты образуют матрицу  $3 \times 3$ :

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}.$$

Далее потребуется формула для углового коэффициента излучения плоскости на параллельный ряд труб (этот результат нетрудно получить методом натянутых нитей):

$$\varphi_{12} = 1 + \frac{\arctan(\sqrt{S^2 - 1}) - \sqrt{S^2 - 1}}{S}. \quad (9.33)$$

Остальные коэффициенты находят следующим образом. Так как поверхности 1 и 3 – плоские (невогнутые), то они не излучают на самих себя:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{33} = 0.$$

Отношение суммарной поверхности труб к экранированной плоской поверхности есть  $F_2/F_1 = \pi d/s = \pi/S$ .

Угловой коэффициент трубного ряда 2 на плоскости 1 рассчитывают, используя свойство взаимности:

$$\varphi_{21} = \varphi_{12} \frac{F_1}{F_2} = \varphi_{12} \frac{S}{\pi}.$$

Из симметрии системы следует, что  $\varphi_{23} = \varphi_{21}$ .

Теперь можно применить свойство замкнутости, чтобы рассчитать угловой коэффициент ряда труб на самого себя:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23} &= 1 \\ \varphi_{22} = 1 - 2\varphi_{21} &= 1 - 2\varphi_{12} \frac{S}{\pi}. \end{aligned}$$

Излучение плоскости 1 на плоскость 3 рассчитывается из свойства замкнутости, записанного для поверхности 1:

$$\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1; \quad \varphi_{13} = 1 - \varphi_{12}.$$

Аналогично, для плоскости 3 имеем благодаря симметрии системы:

$$\varphi_{31} = \varphi_{13} = 1 - \varphi_{12}; \quad \varphi_{32} = \varphi_{12}.$$

Приведем полученные результаты в форме матрицы:

$$\varphi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & 1 - \varphi_{12} \\ \frac{S}{\pi} \varphi_{12} & 1 - 2\frac{S}{\pi} \varphi_{12} & \frac{S}{\pi} \varphi_{12} \\ 1 - \varphi_{12} & \varphi_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем далее систему уравнений для потоков эффективного излучения. На поверхностях 1 и 2 заданы значения температуры. Для черной поверхности 1 эффективное излучение равно собственному излучению:

$$E\varepsilon\phi_1 = E_{0,1}.$$

Для ряда труб:

$$E\varepsilon\phi_2 = \varepsilon_2 E_{0,2} + (1 - \varepsilon_2) \sum_{j=1}^3 E\varepsilon\phi_j \varphi_{2j}.$$

На поверхности 3 задано значение плотности результирующего потока, равное нулю:

$$0 = E\varepsilon\phi_3 - \sum_{j=1}^3 E\varepsilon\phi_j \varphi_{3j}.$$

Три последних соотношения составляют систему линейных уравнений относительно неизвестных значений плотностей эффективных потоков. Решая эту систему методом исключения Гаусса, мы получим аналитические выражения для эффективных потоков, после чего воспользуемся формулой для вычисления искомой плотности результирующего потока на поверхности трубного ряда 2:

$$E_{рез2} = E\varepsilon\phi_2 - \sum_{j=1}^3 E\varepsilon\phi_j \varphi_{2j}.$$

Результат будет следующим:

$$E_{рез2} = E\varepsilon\phi_2 - \sum_{j=1}^3 E\varepsilon\phi_j \varphi_{2j} = -\frac{S}{\pi} \frac{(E_{0,1} - E_{0,2})}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (9.34)$$

Эти вычисления проведены с помощью символьного процессора в пакетах Mathcad или Maple.

При практических расчетах предпочитают заменять подсистему 3–2 эквивалентной плоской поверхностью с той же температурой, что и температура трубного ряда, но с некоторой другой, эффективной степенью черноты. Соотношение площадей истинной поверхности труб и эквивалентной плоскости, как видно из рис. 9.14, есть:

$$\frac{F_2}{F_{eq}} \equiv \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_2}{F_3} = \frac{\pi d}{s} = \frac{\pi}{S}.$$

Площадь эквивалентной поверхности – это просто площадь адиабатической стенки, перед которой установлен экран. Поэтому плотность результирующего излучения на эквивалентной плоскости определится из соотношения:

$$E_{рез_2} F_2 = E_{рез_{eq}} F_{eq}$$

или

$$E_{рез_{eq}} = E_{рез_2} \frac{F_2}{F_{eq}} = E_{рез_2} \frac{\pi}{S}. \quad (9.35)$$

Тогда формулу (9.34) можно переписать для эквивалентной системы «1-Экв» следующим образом:

$$E_{рез_{eq}} = - \frac{(E_{0,1} - E_{0,2})}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (9.36)$$

Теперь мы сопоставим формулу (9.36) с обычной формулой (9.26), которую используют для расчета теплообмена между плоскостями (напомним, что в нашем примере  $\varepsilon_1=1$ ):

$$E_{рез_{eq}} = -\varepsilon_{eq}(E_{0,1} - E_{0,2}).$$

Следовательно, эффективная степень черноты эквивалентной плоскости есть:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}, \quad (9.37)$$

где  $\varphi_{12}$  вычисляется по формуле (9.33).

Итак, окончательные рекомендации для расчета экранов будут следующими. Следует заменить трубный экран плоской поверхностью с такой же температурой, как и на поверхности

труб, но с эффективной степенью черноты, рассчитанной по формуле (9.37). После того как рассчитана плотность результирующего потока для эквивалентной плоскости, можно найти истинную плотность теплового потока на стенках труб по формуле (9.35).

Следует подчеркнуть, что основным результатом анализа является соотношение (9.37) для эффективной степени черноты экранированной поверхности. При расчете более сложных конфигураций, чем рассмотренная в примере, экранированные участки заменяются эквивалентной поверхностью с эффективной степенью черноты (9.37) и с той же температурой, что и на поверхности труб.

### *Задача об орбитальной платформе*

Отвод теплоты с целью поддержания необходимого температурного режима *космического аппарата* осуществляется посредством инфракрасного излучения, поскольку другие механизмы переноса – теплопроводность и конвекция – не функционируют в вакууме. Подлежащая сбросу теплота выделяется системой жизнеобеспечения, электронной аппаратурой, энергетической установкой. Аппарат может нагреваться, поглощая солнечную радиацию. При орбитальном полете в общем балансе могут быть существенны также потоки собственного и отраженного излучения планеты.

Для сброса теплоты в космос применяются *радиаторы* – пластинчатые конструкции, с поверхности которых происходит излучение в пространство. Вдоль пластинчатых элементов радиатора теплота транспортируется теплопроводностью.

Приведем в качестве примера данные для американской космической системы Apollo. Внутреннее тепловыделение аппарата оценивалось в 2500 Вт, причем из них 900 Вт было необходимо отводить из кабины экипажа при температуре примерно 280 К, а остальные 1600 Вт – от аппаратуры при температуре 322 К. Исследовалась работа радиаторов на земной орбите, в открытом космосе, на лунной орбите и на лунной поверхности. Выяснилось, например, что на лунной поверхности необходимы дополнительные экраны или требуется специальный выбор места посадки вне экстремальных по радиационным условиям областей.

Элементарную оценку необходимой поверхности радиатора  $Area$  получают, приравнявая внутреннее тепловыделение собственному излучению радиатора:

$$Area = \frac{\overbrace{W}^{\text{Тепловыделение, Вт}}}{\underbrace{\varepsilon \sigma T_{\text{radiator}}^4}_{\text{Плотность собственного излучения радиатора}}}$$

Расчет дает явно заниженные значения поверхности  $Area$ , и целью рассматриваемого далее учебного проекта является разработка более полной модели (рис. 9.15), учитывающей:

- внутреннее тепловыделение;
- поглощение солнечного излучения;
- собственное излучение в космос;
- распространение теплоты по элементам конструкции радиатора посредством теплопроводности;
- нестационарность теплового режима.

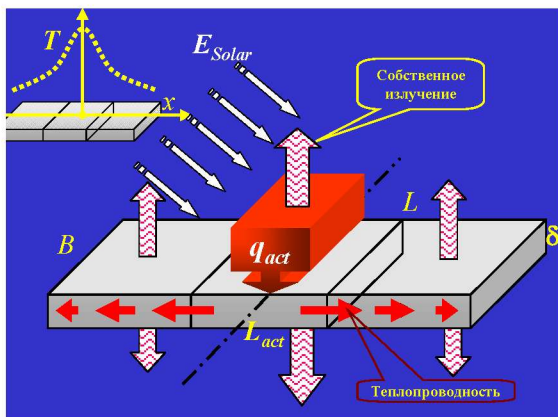


Рис. 9.15. Тепловая схема орбитальной платформы

Геометрия платформы принята предельно простой – это пластина ( $L \cdot B$ ) с активной центральной частью  $L_{act}$  и боковыми панелями-радиаторами. Предполагается, что в центральной (активной) части платформы имеется тепловыделение, обусловленное функционированием энергетической установки, электронной аппаратуры, системы жизнеобеспечения. Теплота передается вдоль пластины

посредством теплопроводности и поступает в пассивную часть, выполняющую функцию дополнительного излучателя – радиатора.

Плотность потока солнечного излучения на орбите Земли  $E_{\text{Solar}}$  (так называемая солнечная постоянная) составляет  $1370 \text{ Вт/м}^2$ . Ориентация платформы задается углом  $\psi$  между ее нормалью и направлением на Солнце. При  $\psi = 0$  вклад солнечного излучения в тепловой баланс платформы будет максимальным, а при  $\psi = \pi/2$  – нулевым.

Плотность собственного излучения платформы определяется как функция локальной температуры:

$$q_{s\_emission} = -\epsilon\sigma T(x, \tau)^4, \quad (9.38)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$  – постоянная Стефана–Больцмана. Обратным тепловым излучением космоса пренебрегают, поскольку его температура близка к абсолютному нулю.

Принципиальное значение имеют радиационные свойства поверхности. Специальное покрытие из оксида титана или оксида магния обеспечивает следующее распределение спектральной степени черноты  $\epsilon_\lambda(\lambda)$  по длине волны излучения (для умеренных значений температуры):

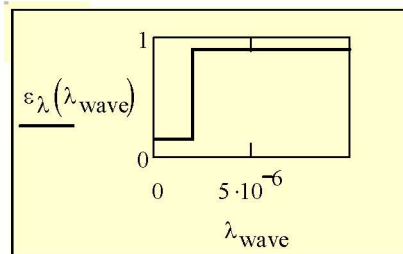


Рис. 9.16. Спектральная степень черноты платформы

Для операций с высокотемпературным коротковолновым солнечным излучением следует использовать значение коэффициента поглощения:

$$A = \epsilon_\lambda \Big|_{\lambda < 2 \text{ мкм}} = 0,15,$$

а для низкотемпературного длинноволнового (инфракрасного) излучения платформы – степень черноты:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\lambda} \Big|_{\lambda > 2\text{MKM}} = 0,9.$$

Благодаря этим замечательным свойствам покрытия удастся значительно снизить температуру радиационных поверхностей.

Если внешние радиационные условия и внутреннее тепловыделение фиксированы, то устанавливается тепловое равновесие: поглощенное солнечное излучение и внутреннее тепловыделение будут уравниваться собственным излучением платформы в космос. Равновесная температура переменна вдоль платформы, поскольку теплота преимущественно выделяется в центральной (активной) части платформы и распространяется теплопроводностью вдоль радиатора.

Если ориентация платформы или режимы работы оборудования изменяются, то возникают нестационарные (переходные) тепловые процессы, исследование которых, как показывает ссылка на проект Apollo, так же актуально, как и расчет стационарного режима.

Таким образом, предметом анализа является пространственно-временное распределение температуры  $T(x, \tau)$  орбитальной платформы.

Здесь мы приведем только ядро вычислительной программы (рис. 9.17).

### Pdsolve Method

Given Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$T_{\tau}(x, \tau) = a \cdot T_{xx}(x, \tau) + \left( \frac{-q_{s\_emission}(T(x, \tau))}{\lambda} \cdot uDf \cdot a + \frac{q_{s\_absorb}}{\lambda} \cdot \frac{uDf}{2} \cdot a + \frac{q_{s\_act}(x)}{\lambda} \cdot \frac{uDf}{2} \cdot a \right)$$

$T(x, 0) = T_{init}$  << Начальное условие

$T_x(0, \tau) = 0$   $T_x\left(\frac{L}{2}, \tau\right) = 0$  << Граничное условие при  $x=0$  и при  $x=L/2$

$T := \text{Pdsolve}\left(T_x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 2 \end{pmatrix}, \tau, \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{Max} \end{pmatrix}, nX, nTime\right)$  << Численное интегрирование

Polynomial !!!

Рис. 9.17. Расчет температурного поля платформы

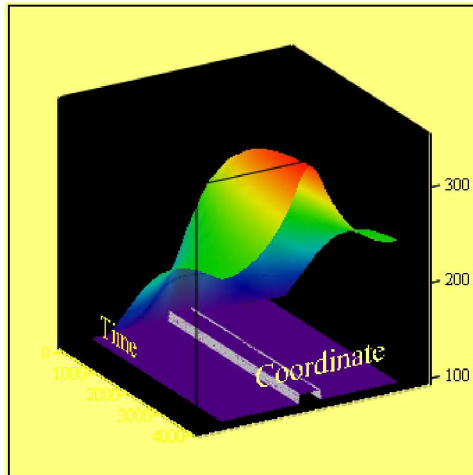
Дифференциальное уравнение теплопроводности включает источниковый член, содержащий излучение платформы в кос-



мос, поглощение солнечного излучения и тепловыделение в активной зоне. Нестационарное температурное поле платформы рассчитывается методом Pdesolve.

Полное пространственно-временное представление процесса установления температурного режима дается трехмерным графиком на рис. 9.18. По вертикальной оси откладывается температура, а в горизонтальной плоскости – координата Coordinate вдоль пластины (вдоль платформы) и время Time. В основании графика показано стилизованное изображение платформы.

```
xTimePlate_array= CreateMesh(Plate,  $\frac{-L}{2}$ ,  $\frac{L}{2}$ , 0,  $\tau_{Max}$ , nX, nTime)
```



$\psi = 1$   
 $I_{act} = 0.1$   
 $L = 0.8$

```
xTimeT_arrayxTimePlate_array
```

**Рис. 9.18. Пространственно-временная диаграмма изменения температуры платформы**

## Глава 10. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В СИСТЕМЕ С ИЗЛУЧАЮЩИМ И ПОГЛОЩАЮЩИМ ГАЗОМ

Тепловое излучение газов (разреженных сред) имеет две основные особенности по сравнению с твердыми телами, а именно, селективность и объемность.

Одноатомные и двухатомные газы (такие как азот, кислород) практически прозрачны для инфракрасного излучения и не излучают в этой области спектра. Трехатомные газы (особенно важны водяной пар и углекислый газ, содержащиеся в *продуктах сгорания*) сильно поглощают и излучают, но *только на определенных длинах волн* (селективность). Их спектр имеет *полосовой характер*, в то время как твердые (плотные) тела имеют *непрерывный* спектр.

Другая важная особенность – *объемный характер* излучения: малый объем газа или газ при очень малом давлении содержит малое число излучающих (поглощающих) молекул и поэтому слабо излучает и практически прозрачен. Наоборот, большие объемы при большом давлении сильно излучают и поглощают (в своих полосах спектра).

Приложения рассматриваемой теории весьма многообразны. Прежде всего, это камеры сгорания и высокотемпературные теплообменники тепловых электрических станций, газотурбинные и ракетные установки и двигатели, различные высокотемпературные теплотехнологии, в том числе плазменные. Все большее интерес вызывают проблемы взаимодействия теплового излучения с атмосферой Земли и других планет земной группы (Венеры, Марса) в связи с прогнозированием изменения климата.

### 10.1. Расчет излучения и поглощения газов

Количественной характеристикой потока излучения в газовом объеме является *спектральная интенсивность излучения*:

$$I_{\lambda} \equiv \frac{d^2 Q_{\lambda}}{dF_n d\omega}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ м ср}). \quad (10.1)$$

Согласно этому определению, спектральная интенсивность есть поток излучения в единичном интервале длин волн, отнесенный к единице контрольной площадки, нормальной к направлению излучения, и единице телесного угла, внутри которого распространяется излучение (рис. 10.1).

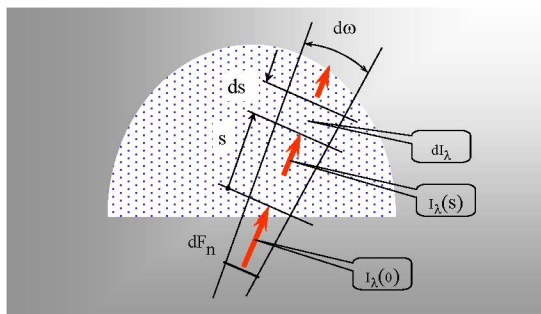


Рис. 10.1. Изменение спектральной интенсивности при поглощении

Проследим за тем, как изменяется величина интенсивности излучения вдоль длины пути луча вследствие поглощения фотонов на молекулах газа. Пусть  $s$  – расстояние, отсчитываемое от сечения, в котором задано начальное значение потока. Выделим элементарный контрольный объем толщиной  $ds$  и выпишем выражение для поглощенного в этом объеме излучения:

$$\frac{dI_{\lambda}}{I_{\lambda}(s)} = -\kappa_{\lambda} ds. \quad (10.2)$$

Это соотношение можно пояснить, используя метафору «стрельбы» наугад: чем больше число мишеней (молекул), тем больше попаданий (актов поглощения фотонов). Вероятность попадания пропорциональна толщине  $ds$ , так как чем толще поглощающий слой, тем больше молекул встретится на пути фотона.

Коэффициент  $\kappa_{\lambda}$ ,  $1/m$ , называют коэффициентом ослабления луча. Его величина зависит от рода газа, длины волны (в окнах прозрачности  $\kappa_{\lambda} = 0$ ), температуры. Так как с ростом давления  $p$  газа пропорционально увеличивается концентрация мишеней–молекул, принято представлять  $\kappa_{\lambda}$  как произведение:

$$\kappa_{\lambda} = k_{\lambda} \cdot p.$$

В случае смеси газов, используется парциальное давление поглощающего газа. Напомним, что трехатомные газы, такие как водяной пара и углекислый газ, излучают и поглощают, в то время как двухатомный азот прозрачен для инфракрасного излучения.

Интегрирование соотношения (10.2) дает экспоненциальный закон ослабления интенсивности по ходу луча за счет поглощения (закон Бугера):

$$I_{\lambda}(s) = I_{\lambda}(0) \exp(-k_{\lambda} ps). \quad (10.3)$$

Величину  $1/k_{\lambda}$ , имеющую размерность длины, интерпретируют как длину свободного пробега фотона. Если толщина слоя  $s$  существенно меньше  $1/k_{\lambda}$  (оптически тонкий слой газа), то излучение практически не поглощается (см. формулу (10.3)). В продуктах сгорания длина свободного пробега по порядку составляет  $10^{-1}$  м.

Используя формулу (10.3), можно вычислить коэффициенты поглощения и пропускания слоя газа конечной толщины:

$$A_{\lambda\Gamma} \equiv \frac{I_{\lambda}(0) - I_{\lambda}(s)}{I_{\lambda}(0)} = 1 - \exp(-k_{\lambda} ps); \quad (10.4)$$

$$D_{\lambda\Gamma} \equiv 1 - A_{\lambda\Gamma} = \exp(-k_{\lambda} ps). \quad (10.5)$$

### *Закон Кирхгофа для излучения и поглощения в газе*

Далее мы хотели бы связать характеристики поглощения и излучения газа, подобно тому как это было сделано для коэффициента поглощения и степени черноты твердых тел при формулировке закона Кирхгофа. Рассмотрим радиационный контакт газа и поверхности черного тела, взятых при одной и той же температуре и находящихся в термодинамическом равновесии (рис. 10.2).

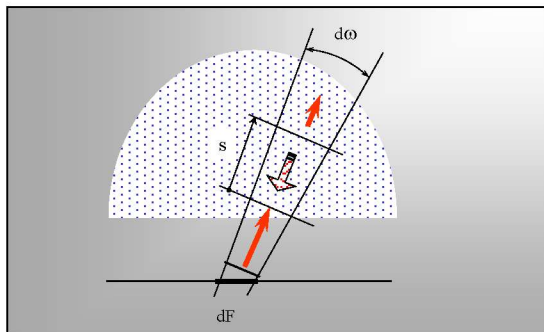


Рис. 10.2. Радиационное равновесие газового объема и черной поверхности

Поскольку никакого результирующего обмена энергией быть не должно, *газ испускает в направлении черной поверхности столько же энергии, сколько им поглощено*. Мы можем рассматривать это утверждение как принцип детального равновесия и записать для любого объема газа протяженностью  $s$  внутри произвольным образом ориентированного телесного угла  $d\omega$  следующее уравнение баланса:

$$\underbrace{A_{\lambda\Gamma} I_{0\lambda}(T, \lambda)}_{\text{Поглощенное излучение черного тела}} = \underbrace{\varepsilon_{\lambda\Gamma} I_{0\lambda}(T, \lambda)}_{\text{Собственное излучение газа}}, \quad (10.6)$$

где в качестве падающего излучения  $I_{\lambda}(0)$  (рис. 10.1) следует понимать теперь интенсивность излучения  $I_{0\lambda}(T, \lambda)$  черной площадки  $dF$ . Излучение газа (в правой части уравнения (10.6)) мы определяем, вводя понятие степени черноты газового объема  $\varepsilon_{\lambda\Gamma}$  как доли от излучения черного тела  $I_{0\lambda}(T, \lambda)$  на той же волне и при той же температуре.

С привлечением (10.4), получим из (10.6) окончательный результат:

$$\varepsilon_{\lambda\Gamma} = A_{\lambda\Gamma} = 1 - \exp(-k_{\lambda} ps). \quad (10.7)$$

Основной задачей в дальнейшем будет расчет радиационного теплообмена между газовым объемом и ограничивающими его твердыми поверхностями. При расчете поглощения в газовом объеме по формуле (10.7) в качестве характерного размера  $s$  используется *средняя длина пути луча*, вводимая в следующем параграфе.

Спектральную плотность потока *полусферического* излучения газа на поверхности газового объема рассчитывают как:

$$\begin{aligned} E_{\lambda\Gamma}(T_{\Gamma}, \lambda) &= \varepsilon_{\lambda\Gamma} E_{0\lambda}(T_{\Gamma}, \lambda); \\ \varepsilon_{\lambda\Gamma} &= 1 - \exp(-k_{\lambda} ps), \end{aligned} \quad (10.8)$$

где  $E_{0\lambda}(T, \lambda)$ , Вт/(м<sup>2</sup>м) – спектральная плотность потока излучения черного тела, определяемая законом Планка.

### *Средняя длина пути луча*

В практических расчетах требуется знать степень черноты некоторого объема газа, ограниченного, например, стенками камеры сгорания. Длина пути луча будет различной по разным

направлениям, поэтому необходима операция осреднения. Примем в качестве основных геометрических параметров излучающего газового облака его объем  $V$  и поверхность  $F$ . Тогда характерный линейный размер определится из соображений размерности как отношение величины объема к площади ограничивающей поверхности:

$$s = C \frac{V}{F}. \quad (10.9)$$

Недостающее значение безразмерного коэффициента  $C$  определяется так, чтобы это выражение было справедливым для простейшего трехмерного объекта – сферы.

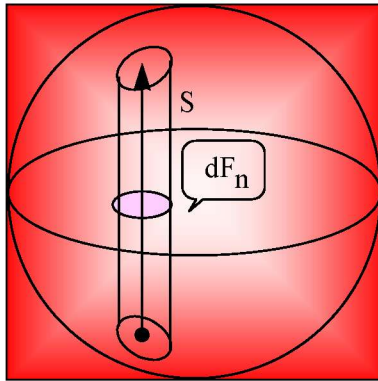


Рис. 10.3. Вычисление средней длины пути луча

Найдем среднюю длину пути луча для сферы. Прямой способ состоит в следующем: необходимо взять малую площадку на поверхности сферы и усреднить расстояние до границы, двигаясь в разных направлениях. Однако проще поступить по другому. Рассмотрим параллельный пучок лучей, исходящих с элементов нижней полусферы и достигающих соответствующих элементов верхней полусферы (рис. 10.3), и усредним соответствующие значения  $s$ :

$$\bar{s} = \frac{\int s dF_n}{\int dF_n} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\pi R^2} = C \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi R^2}. \quad (10.10)$$

Ясно, что благодаря полной симметрии результат осреднения для другого направления параллельного пучка будет таким же. Чтобы согласовать определение с прямым вычислением, необходимо положить  $C = 4$ . Поправочный коэффициент 0,9 улучшает в среднем согласование с точными расчетами для различных форм, поэтому окончательная рекомендация такова:

$$\bar{s} = 3,6 \frac{V}{F}. \quad (10.11)$$

В дальнейшем мы будем всегда под  $s$  понимать среднюю длину пути луча, определяемую формулой (10.11).

### *Модель серого газа*

Все приведенные выше соотношения относились к монохроматическому излучению, то есть излучению на данной длине волны. Это естественный подход к анализу излучения и поглощения в газах, поскольку спектр газа *полосовой*, а не непрерывный, как у твердых тел. Однако для практических расчетов требуется более простое описание. Чаще всего применяется *модель серого газа*, в рамках которой оперируют с суммарным излучением газа  $E_{\Gamma}$ , Вт/м<sup>2</sup>, как с излучением серого тела:

$$E_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma} E_0 = \varepsilon_{\Gamma} \sigma T_{\Gamma}^4. \quad (10.12)$$

Интегральная степень черноты  $\varepsilon_{\Gamma}$  зависит от температуры, концентрации поглощающих газов (таких как трехатомные водяной пар и углекислый газ), размеров газового объема. Проанализируем характер этих зависимостей.

Начнем с анализа излучения одного из компонентов *продуктов сгорания* – углекислого газа при температуре 1400К. Основные три полосы излучения–поглощения для углекислого газа расположены в следующих интервалах длин волн (рис. 10.4) инфракрасного диапазона:

- 1) 2,56–2,88 мкм;
- 2) 4,15–4,76 мкм;
- 3) 9–20 мкм.

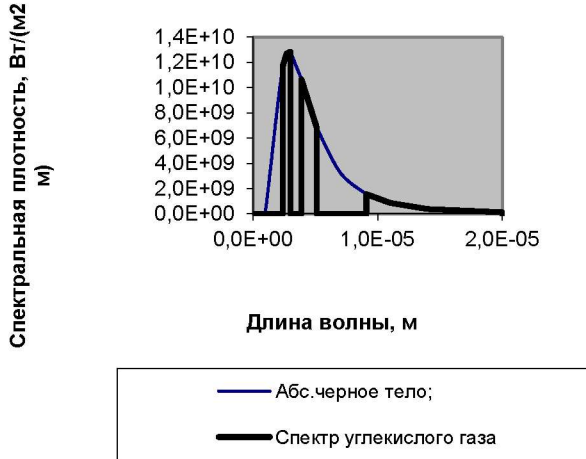


Рис. 10.4. Спектры излучения черного тела и бесконечно толстого слоя углекислого газа при  $T=1400\text{K}$

Плотность потока излучения рассчитывают отдельно для каждой полосы спектра, интегрируя (10.8) в указанных интервалах длин волн и принимая коэффициент  $k_\lambda$  примерно постоянной величиной внутри каждого интервала ( $k_\lambda = k_{\lambda i}$ ):

$$\Delta E_{1\Gamma} = (1 - e^{-k_{\lambda 1} p s}) \cdot \left( \int_{2,56 \cdot 10^{-6}}^{2,88 \cdot 10^{-6}} E_{0\lambda} d\lambda \right), \text{ Вт/м}^2; \quad (10.13)$$

$$\Delta E_{2\Gamma} = (1 - e^{-k_{\lambda 2} p s}) \cdot \left( \int_{4,15 \cdot 10^{-6}}^{4,76 \cdot 10^{-6}} E_{0\lambda} d\lambda \right), \text{ Вт/м}^2; \quad (10.14)$$

$$\Delta E_{3\Gamma} = (1 - e^{-k_{\lambda 3} p s}) \cdot \left( \int_{9 \cdot 10^{-6}}^{20 \cdot 10^{-6}} E_{0\lambda} d\lambda \right), \text{ Вт/м}^2, \quad (10.15)$$

где первые множители в слагаемых правой части есть спектральные значения степени черноты газа:

$$(1 - e^{-k_{\lambda i} p s}) = \varepsilon_{\lambda i}.$$

Интегралы в правых частях показывают, сколько энергии излучает черное тело в каждой полосе. Экспоненциальные множители учитывают зависимость от длины пути луча и изменяются в пределах от 0 до 1. Если  $s$  велико, то газ в своих полосах излучает как черное тело (рис. 10.4).



При заданном  $s$  может получиться так, что, скажем, во второй полосе из-за большой величины коэффициента ослабления  $k_{\lambda 2}$  газ излучает уже как черное тело – его *спектральная* степень черноты достигает единицы, а в других полосах значения спектральной степени черноты еще далеки от этого максимального значения (рис. 10.5).

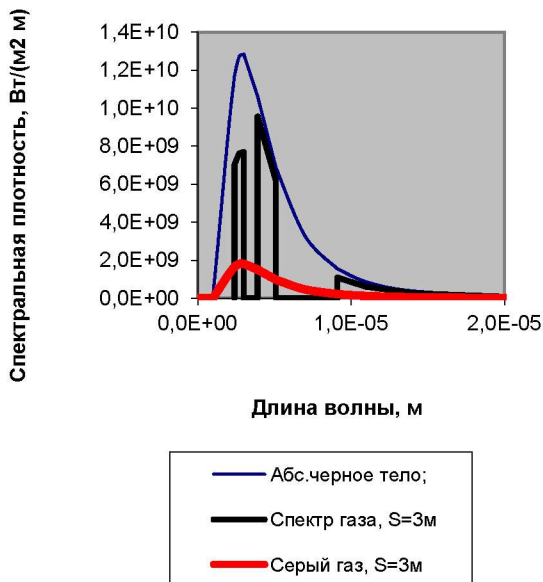


Рис. 10.5. Излучение слоя газа конечной толщины в полосах спектра и по модели серого газа

Рассчитаем теперь интегральную степень черноты, для чего необходимо просуммировать излучение газа во всех полосах и разделить результат на интегральное излучение черного тела при той же температуре:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Gamma} &\equiv \frac{\Delta E_{1\Gamma} + \Delta E_{2\Gamma} + \Delta E_{3\Gamma}}{\sigma T^4} = \\ &= (1 - e^{-k_{\lambda 1} ps}) \cdot \left( \frac{18799}{217819} \right) + (1 - e^{-k_{\lambda 2} ps}) \cdot \left( \frac{14452}{217819} \right) + \\ &\quad + (1 - e^{-k_{\lambda 3} ps}) \cdot \left( \frac{9340}{217819} \right) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Числовые (дробные) множители показывают доли излучения черного тела в пределах полос спектра газа. Эти множители зависят от температуры, поскольку полосы остаются практически фиксированными, а планковская кривая излучения черного тела смещается – сдвигается в сторону коротких волн при увеличении температуры.

При  $s \rightarrow \infty$ , то есть для больших объемов газа (оптически толстых слоев газа), все сомножители в (10.16) вида

$$(1 - e^{-k_{\lambda} \cdot ps}),$$

т.е. спектральные значения степени черноты, обращаются в единицу, поэтому:

$$\varepsilon_{\Gamma_{\infty}} = \frac{18799 + 14452 + 9340}{217819} \approx 0,2. \quad (10.17)$$

Это максимально возможное значение для углекислого газа при заданной температуре (1400К). Оно существенно меньше единицы, так как газ излучает только в отдельных полосах спектра.

Излучение газа как серого тела представлено на рис. 10.5 в виде нижней непрерывной кривой: площадь под этой кривой такая же, как площадь в полосах излучения газа.

Формула (10.16) объясняет влияние основных факторов на степень черноты газа. Влияние температуры проявляется главным образом через  $\varepsilon_{\Gamma_{\infty}}$ . При повышении температуры спектр черного тела смещается в сторону коротких волн, а полосы излучения газа остаются примерно на прежнем месте. Поэтому доля излучения углекислого газа от излучения черного тела изменяется: она достигает максимума при такой температуре (примерно 1000К), когда полосы газа расположены вблизи максимума излучения черного тела.

Объемный характер излучения газа проявляется в экспоненциальных сомножителях (10.16), то есть в выражениях для *спектральной* степени черноты. Чем больше размеры объема (то есть чем больше длина пути луча) и чем больше парциальное давление поглощающего газа, тем больше степень черноты газа, пока не достигается предельное значение  $\varepsilon_{\Gamma_{\infty}}$ .

Формула (10.16) дает хорошую основу для расчета степени черноты газа. Однако при этом необходима подробная информация о спектральных характеристиках излучения газа, таких как коэффициенты ослабления луча в различных полосах спектра,

ширина полос в зависимости от температуры. В общем, следует признать, что такая методика пока недостаточно приспособлена для оперативных инженерных расчетов.

Существует упрощенная модель, представляющая излучение реального газа как *взвешенную* сумму излучений смешанных серых газов с различными коэффициентами поглощения («the mixed grey-gas model»). Например, в трехкомпонентном представлении с индексами 0,1,2:

$$\varepsilon_{\Gamma}(ps, T_{\Gamma}) = \sum_{n=0}^2 \underbrace{(b_{1,n} + b_{2,n} T_{\Gamma})}_{\substack{\text{Весовые коэффициенты} \\ \text{как функции температуры}}} \cdot \underbrace{(1 - e^{-k_{\Gamma,n}(ps)})}_{\substack{\text{Степени черноты} \\ \text{модельных газов как} \\ \text{функции длины пути луча}};$$

$$\sum_{n=0}^2 (b_{1,n} + b_{2,n} T_{\Gamma}) = 1; \quad (10.18)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.437 \\ 0.390 \\ 0.173 \end{pmatrix}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0.0713 \\ -0.0052 \\ -0.0661 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}; \quad k_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.88 \\ 68.8 \end{pmatrix};$$

$$p = p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{CO}_2}; \quad p_{\text{H}_2\text{O}} / p_{\text{CO}_2} = 1 \div 2.$$

Вторая строка в этой записи означает, что сумма весов должна быть равна единице.

Числовые значения коэффициентов в (10.18) подбираются таким образом, чтобы наилучшим образом описать экспериментальные данные по излучению продуктов сгорания, содержащих водяной пар и углекислый газ как основные излучающие (трехатомные) компоненты газовой смеси. Давление  $p$  в (10.18) определяется как сумма парциальных давлений излучающих компонентов; указанный интервал отношений парциальных давлений водяного пара и углекислого газа соответствует сжиганию различных углеводородных топлив, от жидких ( $p_{\text{H}_2\text{O}} / p_{\text{CO}_2} \approx 1$ ) до природного газа ( $p_{\text{H}_2\text{O}} / p_{\text{CO}_2} \approx 2$ ). Наличие двухатомного азота (прозрачного и неизлучающего газа) учитывается в модели смеси серых газов (10.18) составляющей с индексом «0»:  $k_{\Gamma,0} = 0$ .

Результаты расчетов степени черноты газообразных продуктов сгорания по модели (10.18) представлены на рис. 10.6, рис. 10.7. Графики показывают, как растет степень черноты газового объема по мере увеличения приведенной длины пути луча,

стремясь к предельному значению, остающемуся однако существенно меньшим единицы. Такое правильное асимптотическое поведение обеспечивается наличием неизлучающего «0»-компонента в модельной смеси серых газов ( $k_{\Gamma,0} = 0$ ). Зависимость от температуры оказывается убывающей, по обсуждавшимся уже выше причинам. Имеется формальный верхний предел применимости аппроксимаций (10.18) по температуре – это 2617 К. Ясно, что существует и физический предел: горячая – при температуре 6000 К – плазма на поверхности Солнца излучает сплошным спектром как абсолютно черное тело.

Three-term (two grey plus one clear) gas model:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0.437 \\ 0.390 \\ 0.173 \end{pmatrix} \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0.0713 \\ -0.0052 \\ -0.0661 \end{pmatrix} \cdot 0.001 \quad k_{\Gamma} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.88 \\ 68.8 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^2 b_{1n} = 1 \quad \sum_{n=0}^2 b_{2n} = 0$$

$$\varepsilon_{\Gamma}(ps, T_{\Gamma}) := (b_1 + b_2 \cdot T_{\Gamma}) \cdot (E - \exp(-k_{\Gamma} \cdot ps))$$

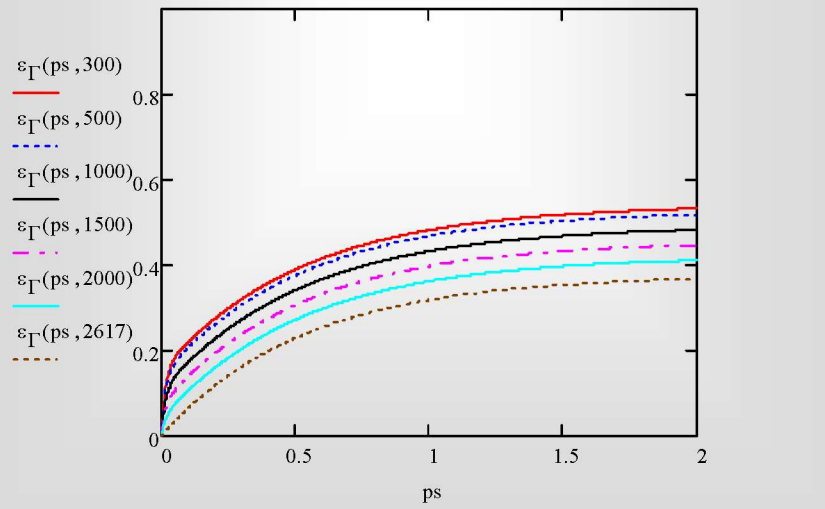
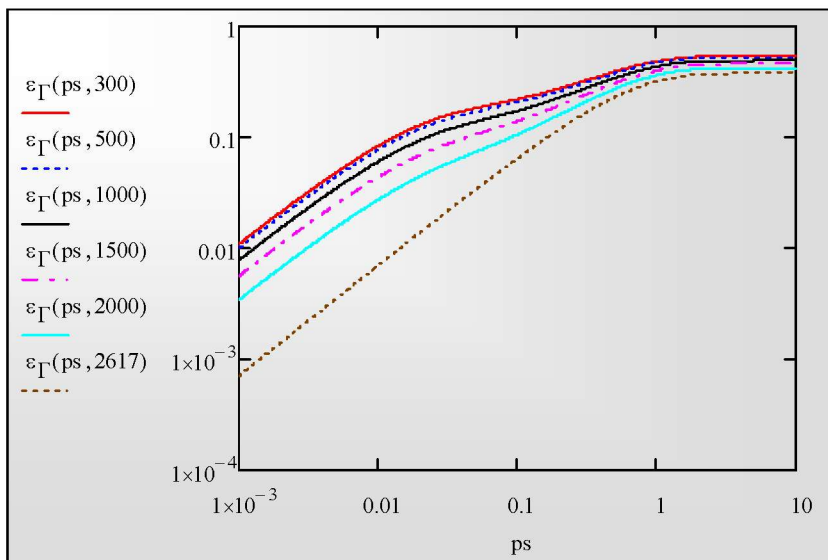


Рис. 10.6. Степень черноты газообразных продуктов сгорания в зависимости от приведенной длины пути луча  $ps$  при различных температурах



**Рис. 10.7.** Степень черноты газообразных продуктов сгорания в зависимости от приведенной длины пути луча  $ps$  при различных температурах (логарифмическая шкала)

При анализе теплообмена излучением в камерах сгорания (см. следующий параграф) необходимо рассчитывать ослабление излучения от стенок при прохождении через объем газа. Коэффициенты поглощения и пропускания в рамках модели серого газа определяются как:

$$A_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma}; \quad D_{\Gamma} = 1 - A_{\Gamma} = 1 - \varepsilon_{\Gamma}. \quad (10.19)$$

Здесь возникает проблема выбора определяющей температуры. Ясно, что при расчете *собственного излучения* газа:

$$E_{\Gamma}(T_{\Gamma}) = \varepsilon_{\Gamma}(ps, T_{\Gamma}) \cdot E_0(T_{\Gamma}) = \varepsilon_{\Gamma}(ps, T_{\Gamma}) \cdot \sigma T_{\Gamma}^4$$

степень черноты  $\varepsilon_{\Gamma}(ps, T_{\Gamma})$  должна быть определена посредством (10.18) по температуре газа  $T_{\Gamma}$ .

Однако при расчете *поглощения* в газовом объеме следует учитывать, что *падающее* излучение генерируется стенками, находящимися при другой температуре  $T_C \neq T_{\Gamma}$ , а также включает

отраженное излучение самого газового объема. Поэтому спектральный состав *падающего* излучения и, следовательно, коэффициент поглощения реального (несерого) газа зависит, вообще говоря, от обеих температур  $T_{\Gamma}$  и  $T_C$ .

В предельном случае *черных* стенок отраженное излучение нулевое, поэтому:

$$A_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma}(ps, T_C); \quad D_{\Gamma} = 1 - A_{\Gamma} = 1 - \varepsilon_{\Gamma}(ps, T_C), \quad (10.20)$$

где величина  $\varepsilon_{\Gamma}$  должна быть рассчитана посредством (10.18) по температуре стенки  $T_C$ . Можно принять этот результат как разумную рекомендацию для большинства практически важных случаев.

В рамках модели серого газа радикально решить подобные проблемы нельзя. Лучшим выходом было бы рассчитывать явления излучения и поглощения отдельно в полосах излучения-поглощения и в окнах прозрачности и затем суммировать результирующие потоки. Однако, по-видимому, должно пройти время, прежде чем исследователи подготовят для практических инженеров достаточно простые и надежные методики расчета спектральных характеристик газов и их смесей.

## 10.2. Радиационно-конвективный теплообмен в камере сгорания

Продукты сгорания органического топлива, например, природного газа, содержат в значительной концентрации углекислый газ и водяной пар. Излучение и поглощение в такой среде – это существенные эффекты, которые необходимо учесть при расчете теплообмена в камерах сгорания, таких как топки парогенераторов электростанций, котлы-утилизаторы для использования теплоты уходящих газов различных теплотехнологических установок и т.п. Уровень температуры газа в объеме определяется балансом между теплотой сгорания топлива и теплоотводом к тепловоспринимающим поверхностям, таким как экраны труб, внутри которых протекает рабочее тело.

В зависимости от уровня температуры газа изменяется соотношение между переносом теплоты излучением и конвекцией. При

высоких температурах основную роль играет перенос теплоты излучением (между поверхностями, между поверхностями и высокотемпературным газом), а при умеренных температурах будет существенным и вклад конвективного теплообмена между газообразными продуктами сгорания и стенками камеры сгорания.

*Расчет радиационного теплообмена при заданных температурах поверхностей и газа*

Рассмотрим замкнутую систему  $N$  изотермических поверхностей, ограничивающих объем, заполненный излучающим и поглощающим газом (рис. 10.8). Температуры поверхностей  $T_i$  и газа  $T_g$  считаются заданными величинами. Предполагается, что газ в камере сгорания хорошо перемешан и его температура  $T_g$  примерно постоянна по объему. Требуется рассчитать *радиационный* теплообмен в такой системе, то есть найти плотности результирующих потоков излучения  $E_{рез_i}$  на каждой поверхности  $F_i$ .

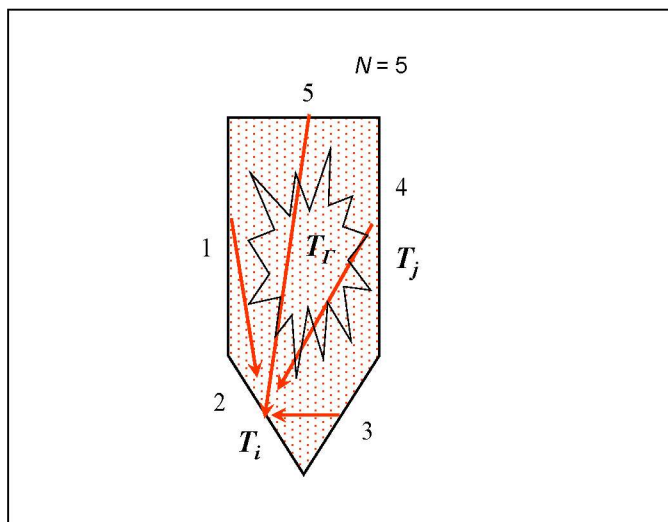


Рис. 10.8. Радиационный теплообмен в камере сгорания

В целом последующие вычисления аналогичны тем, что были выполнены в главе 9 для диатермичной среды, но будут отличаться от них в двух отношениях.

Необходимо учесть теперь два новых фактора:

- излучение газа на ограничивающие поверхности;
- частичное поглощение в газовом объеме радиационных потоков, отправляющихся с одной поверхности на другую.

В основе расчета лежат очевидные соотношения для твердых поверхностей, следующие из определений понятий эффективного, собственного и падающего лучистых потоков:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + R \cdot E_{\text{пад}}; \quad (10.21)$$

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}. \quad (10.22)$$

Рассмотрим радиационное взаимодействия фиксированной  $i$ -поверхности с какой-либо  $j$ -поверхностью. Все излучение  $j$ -поверхности есть:

$$E_{\text{эф}} F_j, \text{ Вт.}$$

На  $i$ -поверхность отправляется часть этого излучения, определяемая угловым коэффициентом  $j$ -поверхности на  $i$ -поверхность:

$$E_{\text{эф}} F_j \varphi_{ji}, \text{ Вт,} \quad (10.23)$$

но доходит только:

$$(E_{\text{эф}} F_j \varphi_{ji}) D_{\Gamma j}, \text{ Вт,} \quad (10.24)$$

где  $D_{\Gamma j}$  – коэффициент пропускания газа:  $D_{\Gamma j} = 1 - A_{\Gamma j}$ , рассчитываемый по (10.20) при температуре стенки  $T_j$ . Здесь мы учли эффект частичного поглощения в газовой среде радиационного потока от стенок.

Плотность потока падающего излучения от одной  $j$ -поверхности составит:

$$\frac{E_{\text{эф}} F_j \varphi_{ji}}{F_i} D_{\Gamma j}, \text{ Вт/м}^2, \quad (10.25)$$

или, с учетом свойства взаимности ( $F_j \varphi_{ji} = F_i \varphi_{ij}$ ):

$$(E_{\text{эф}} \varphi_{ij}) D_{\Gamma j}. \quad (10.26)$$



Теперь необходимо просуммировать плотности падающего излучения от всех  $j$ -поверхностей ( $j = 1 \dots N$ ) и добавить излучение газового объема  $E_{\Gamma}$ :

$$E_{\text{пад}_i} = E_{\Gamma} + \sum_j E_{\text{Эф}} \phi_j \cdot \varphi_{ij} \cdot D_{\Gamma j}, \quad (10.27)$$

где

$$E_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma} \sigma T_{\Gamma}^4.$$

Следовательно, для каждой  $i$ -поверхности в соответствии с формулой (10.21) можно записать уравнение:

$$E_{\text{Эф}}_i = E_{\text{соб}}_i + R_i E_{\text{пад}_i} = E_{\text{соб}}_i + R_i (E_{\Gamma} + \sum_j E_{\text{Эф}} \phi_j \cdot \varphi_{ij} D_{\Gamma j}), \quad (10.28)$$

согласно которому эффективное излучение  $i$ -поверхности складывается из собственного и отраженного излучения этой поверхности, причем последнее есть  $R_i$  – доля от падающего излучения, обусловленного:

- излучением газа;
- эффективным излучением всех  $j$ -поверхностей, ослабленным поглощением в газовой среде.

Мы получили систему линейных уравнений относительно эффективных потоков излучения  $E_{\text{Эф}}$ , которую можно решить, например, методом исключения Гаусса.

После того как величины  $E_{\text{Эф}}$  определены для всех поверхностей, рассчитывают плотности результирующего потока излучения, которые определяются в соответствии с формулой (10.22) как разности эффективного и падающего излучения:

$$E_{\text{рез}_i} = E_{\text{Эф}}_i - E_{\text{пад}_i} = E_{\text{Эф}}_i - (E_{\Gamma} + \sum_j E_{\text{Эф}} \phi_j \cdot \varphi_{ij} D_{\Gamma j}). \quad (10.29)$$

В принципе, задача решена, однако полезно представить систему уравнений (10.28) и соотношение для расчета результирующих потоков (10.29) в матричной форме, удобной для вычислений на компьютере.

Используя для отдельно стоящей величины  $E_{\text{Эф}}_i$  в уравнениях (10.28) и (10.29) тождество:

$$E\text{Эф}_i \equiv \sum_j E\text{Эф}_j \delta_{ij}, \quad (10.30)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, и приводя подобные члены, получим:

$$\sum_j E\text{Эф}_j \cdot (\delta_{ij} - R_i \varphi_{ij} D_{\Gamma j}) = E\text{соб}_i + R_i E_{\Gamma} \quad (10.31)$$

$$E\text{рез}_i = \sum_j E\text{Эф}_j (\delta_{ij} - \varphi_{ij} D_{\Gamma j}) - E_{\Gamma}. \quad (10.32)$$

Эквивалентная матричная запись выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\text{Эф} = \mathbf{B}, \quad (10.33)$$

$$\mathbf{E}\text{рез} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\text{Эф} - E_{\Gamma}. \quad (10.34)$$

Элементы матриц и вектора правой части рассчитываются по формулам:

$$a_{ij} = \delta_{ij} - R_i \varphi_{ij} D_{\Gamma j}; \quad b_i = E\text{соб}_i + R_i E_{\Gamma}; \quad (10.35)$$

$$d_{ij} = \delta_{ij} - \varphi_{ij} D_{\Gamma j}; \quad (10.36)$$

$$E\text{соб}_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4; \quad E_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma} \sigma T_{\Gamma}^4. \quad (10.37)$$

Коэффициент отражения для серых поверхностей вычисляется как:

$$R_i = 1 - \varepsilon_i. \quad (10.38)$$

Степень черноты газа  $\varepsilon_{\Gamma}$  рассчитывают в соответствии с рекомендациями предыдущего подраздела по формуле (10.18).

Мы закончили формулировку задачи для расчета результирующих потоков излучения *при заданных температурах поверхностей*. Преимущества такой постановки состоят в том, что, во-первых, радиационные потоки рассчитываются *независимо* от того, имеют место дополнительные конвективные потоки или нет, и, во-вторых, вычислительные процедуры оказываются простыми и быстрыми благодаря линейности задачи.

После того как результирующие потоки излучения  $E\text{рез}_i$  определены из (10.33), (10.34), можно рассчитать значения сум-

марных плотностей тепловых потоков на границах, с учетом дополнительной, *конвективной* составляющей теплообмена между газом и ограничивающими поверхностями (рис. 10.9):

$$q_i = E_{рез_i} + \alpha_i(T_i - T_\Gamma), \quad (10.39)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициенты теплоотдачи на внутренних поверхностях системы, определяемые по известным соотношениям конвективного теплообмена. Температуры поверхностей  $T_i$  и газа  $T_\Gamma$  в принятой здесь формулировке задачи считаются заданными величинами.

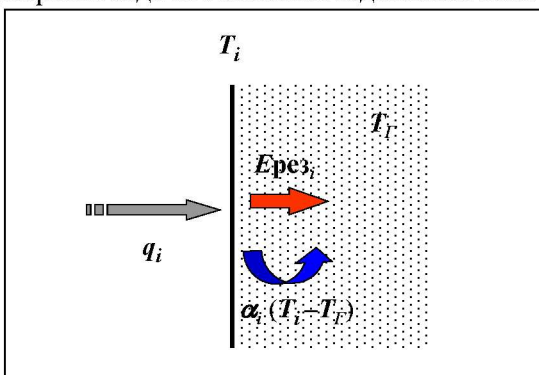


Рис. 10.9. Тепловые потоки на стенке

### *Расчет радиационно-конвективного теплообмена*

Теперь мы переходим к более реалистичной постановке, когда температуры поверхностей могут быть заранее неизвестны и требуются некоторые дополнительные условия для их определения (рис. 10.10). Температуру газа будем по-прежнему полагать заданной (в заключение мы покажем, как рассчитать расход топлива, необходимый для поддержания этой температуры).

Плотность теплового потока  $q_i$ , подводимого извне в систему, определяется уравнением:

$$q_i = E_{рез_i} + \alpha_i(T_i - T_\Gamma), \quad (10.40)$$

согласно которому теплота, подводимая извне (левая часть) отводится от  $i$ -поверхности посредством излучения (первое слагаемое справа) и конвекцией (второе слагаемое). За положительное направление потоков в (10.40) выбрано направление «внутри камеры сгорания». Например, если в результате расчета получилось

$E_{рез_i} > 0$ , то результирующий поток излучения направлен от рассматриваемой поверхности внутрь камеры сгорания. Знак указывает направление потока, которое может быть различным в зависимости от соотношения температур газа и стенок.

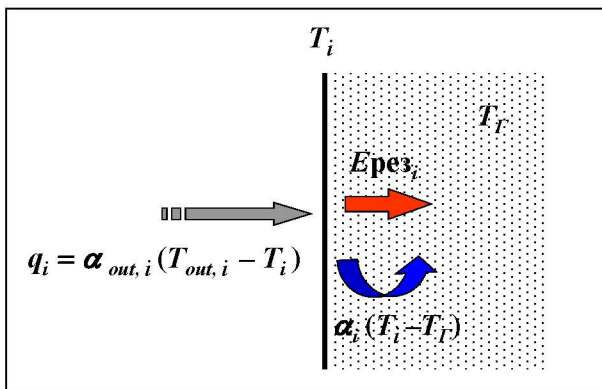
Чаще всего на практике бывает задана (средняя) температура  $T_{out,i}$  внешнего теплоносителя и коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{out,i}$  с внешней стороны  $i$ -поверхности, так что:

$$q_i = \alpha_{out,i} (T_{out,i} - T_i) .$$

Тогда уравнение (10.40) переписывается в виде:

$$q_i = \alpha_{out,i} (T_{out,i} - T_i) = E_{рез_i} + \alpha_i (T_i - T_{\Gamma}) . \quad (10.41)$$

где, например,  $T_{out}$  – температура кипения воды в трубах экранной поверхности парогенератора,  $\alpha_{out}$  – коэффициент теплоотдачи при кипении в трубах, или, соответственно, средняя температура перегретого пара в пароперегревателе и коэффициент теплоотдачи при течении перегретого пара в трубе.



**Рис. 10.10. Граничное условие в случае неизвестной температуры стенки**

Итак, в новой постановке, в уравнениях вида (10.40), (10.41) до решения задачи неизвестны ни температуры стенок  $T_i$ , ни плотности результирующего потока излучения  $E_{рез_i}$ . Можно сказать, что уравнения вида (10.40), (10.41) добавляются теперь к системе (10.33), (10.34) как граничные условия на тех  $i$ -поверхностях, для которых не заданы в явном виде температуры  $T_i$ .

### 10.3. Компьютерная модель камеры сгорания

#### *Алгоритм решения задач*

Система уравнений ((10.31) или (10.33)) для эффективных потоков излучения содержит значения температур поверхностей, которые сами могут быть неизвестными.

Решение этой проблемы *в принципе* уже найдено: следует записать дополнительные уравнения – граничные условия вида (10.41) для тех  $i$ -поверхностей, на которых температуры не заданы в явной форме. Это создает вычислительные трудности двойного характера. Во-первых, число уравнений возрастает, во-вторых – расширенная система уравнений становится нелинейной.

Действительно, в систему уравнений (10.31) искомые значения температуры входят в четвертой степени, а в граничные условия (10.41) – в первой. Нелинейность системы требует применения эффективных вычислительных алгоритмов и разработки соответствующей компьютерной модели.

Алгоритм решения задачи может быть примерно таким. Пусть для какой-либо  $i$ -поверхности температура неизвестна. Можно задать некоторое *пробное* значение температуры, решить систему (10.31) для эффективных потоков  $E_{\text{эф}}$  быстрым методом Гаусса, найти  $E_{\text{рез}}$  и подставить в граничное условие (10.41). Вряд ли удастся угадать правильное значение температуры стенки с первого раза, поэтому в граничном условии возникнет *невязка*, которую при дальнейших попытках следует уменьшить до нуля (с нужной точностью).

Существуют эффективные стандартные программы (программы оптимизации для одной и многих переменных), которые осуществляют поиск не случайным подбором, а разумно, двигаясь в сторону наискорейшего уменьшения невязки. Такие программы имеются в системах инженерных вычислений, например, в пакете Mathcad.

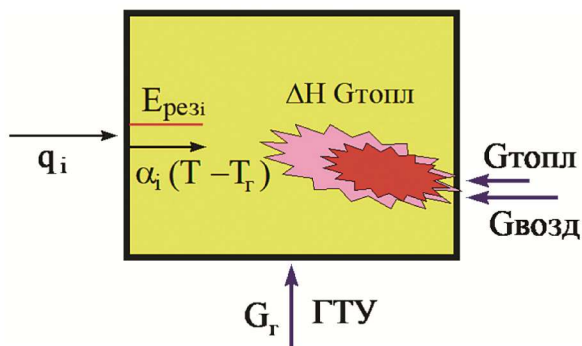
В результате решения задачи становятся известными температуры и тех поверхностей, на которых были заданы граничные условия вида (10.40) или (10.41). Следовательно, можно вычислить конвективные потоки тепла на каждой из поверхностей:

$$\alpha_i(T_i - T_r)$$

и, если необходимо, полные потоки тепла  $q_i$ , включая радиационную и конвективную составляющие, по формуле (10.40).

### **Определение расхода топлива**

В качестве факультативного дополнения, в заключение кратко рассмотрим вопрос о расходе топлива в камере сгорания (рис. 10.11) котла-утилизатора, использующего низкопотенциальное тепло уходящих газов, которое часто просто сбрасывается в окружающую среду. Например, газовая турбина применяется как привод для компрессора, перекачивающего газ по магистральному газопроводу, а выхлоп газа с температурой примерно пятьсот градусов можно направить в котел-утилизатор (рис. 10.11) для организации теплоснабжения и дополнительной выработки электроэнергии. Чтобы поднять уровень температур, целесообразно дополнительное сжигание газа в котле-утилизаторе.



**Рис. 10.11. Радиационно-конвективный теплообмен в камере сгорания**

Расчет проведем на основе теплового баланса, согласно которому суммарный (радиационно-конвективный) *теплоотвод* к стенкам равен изменению энтальпии потоков, поступающих в камеру сгорания при температурах, обозначения которых снабжены штрихом, и далее при сгорании хорошо перемешанных при температуре  $T_r$ :

$$Q_{\text{пов}} = G_{\text{топли}} \left( c_{p\_топли} T'_{\text{топли}} + \Delta H \right) + G_{\text{возд}} c_{p\_возд} T'_{\text{возд}} + G_{\Gamma} c_{p\Gamma} T'_{\Gamma} - \left( G_{\text{топли}} + G_{\text{возд}} + G_{\Gamma} \right) c_{p\Gamma} T_{\Gamma}, \quad (10.42)$$

откуда следует:

$$G_{\text{топли}} = \frac{Q_{\text{пов}} - G_{\text{возд}} c_{p\_возд} T'_{\text{возд}} - G_{\Gamma} c_{p\Gamma} T'_{\Gamma} + (G_{\text{возд}} + G_{\Gamma}) c_{p\Gamma} T_{\Gamma}}{\left( c_{p\_топли} T'_{\text{топли}} + \Delta H \right) - c_{p\Gamma} T_{\Gamma}}. \quad (10.43)$$

Обратите внимание, энтальпия топлива на входе содержит теплоту сгорания  $\Delta H$ , Дж/(кг топлива). В формуле фигурируют также расходы и удельные теплоемкости выхлопа газовой турбины  $G_{\Gamma}$ , газового топлива  $G_{\text{топли}}$  и воздуха  $G_{\text{возд}}$  как окислителя (рис. 10.11).

Теплоотвод от газа к стенкам  $Q_{\text{пов}}$  рассчитывается как сумма тепловых потоков на поверхностях с обратным знаком (так как по принятому ранее соглашению положительное направление тепловых потоков – внутрь камеры сгорания):

$$Q_{\text{пов}} = -\sum_N q_i F_i, \text{ Вт}, \quad (10.44)$$

где  $F_i, \text{ м}^2$  – площади поверхностей, ограничивающих камеру сгорания.

Итак, чтобы поддерживать температуру в камере сгорания на заданном уровне  $T_{\Gamma}$  в условиях, когда теплота от газа отдается тепловоспринимающим поверхностям, необходимо обеспечить определенный расход топлива, величина которого рассчитывается по уравнению баланса (10.43).

### Компьютерная модель

Завершая математическую формулировку задачи о камере сгорания, перечислим еще раз использованные идеи и методы:

- учитывалось излучение горячих газов на стенки камеры сгорания и ослабление потоков излучения от одной стенки к другой за счет поглощения в газовом объеме;

- при записи граничных условий было принято во внимание, что тепловые потоки, отводимые к тепловоспринимающим поверхностям, обусловлены не только излучением, но и конвекцией от горячих газов к стенкам;

- неизвестные температуры поверхностей были найдены с применением алгоритма оптимизации;

- с помощью уравнения теплового баланса был определен расход сжигаемого топлива, необходимый для поддержания заданной температуры газа в камере сгорания.

С учетом перечисленных эффектов, формулировка задачи оказывается сложной и безусловно требующей применения компьютерных вычислений.

Имеется широкий круг практически важных вопросов, которые можно проанализировать, экспериментируя с компьютерной моделью, например:

- Как изменяется температура газа в камере сгорания в зависимости от расхода топлива?

- Каковы тепловые потоки, воспринимаемые трубным экраном и трубами пароперегревателя, в зависимости от температуры в камере сгорания?

- Как влияет соотношение расходов газа из ГТУ, топлива и окислителя на тепловую производительность?

- Каково соотношение между радиационными и конвективными потоками теплоты в зависимости от температуры?

Общее представление о компьютерной модели радиационно-конвективного теплообмена, разработанной в программной среде Visual Basic, можно получить из приведенных ниже экранных копий (рис. 10.12 – рис. 10.15).

Программа взаимодействует с базой данных, в которой хранятся уже исследованные задачи и которую можно редактировать и пополнять. Ввод данных осуществляется с помощью графического интерфейса, привычного для пользователей Windows. Результаты расчетов представляются в наглядной графической форме.



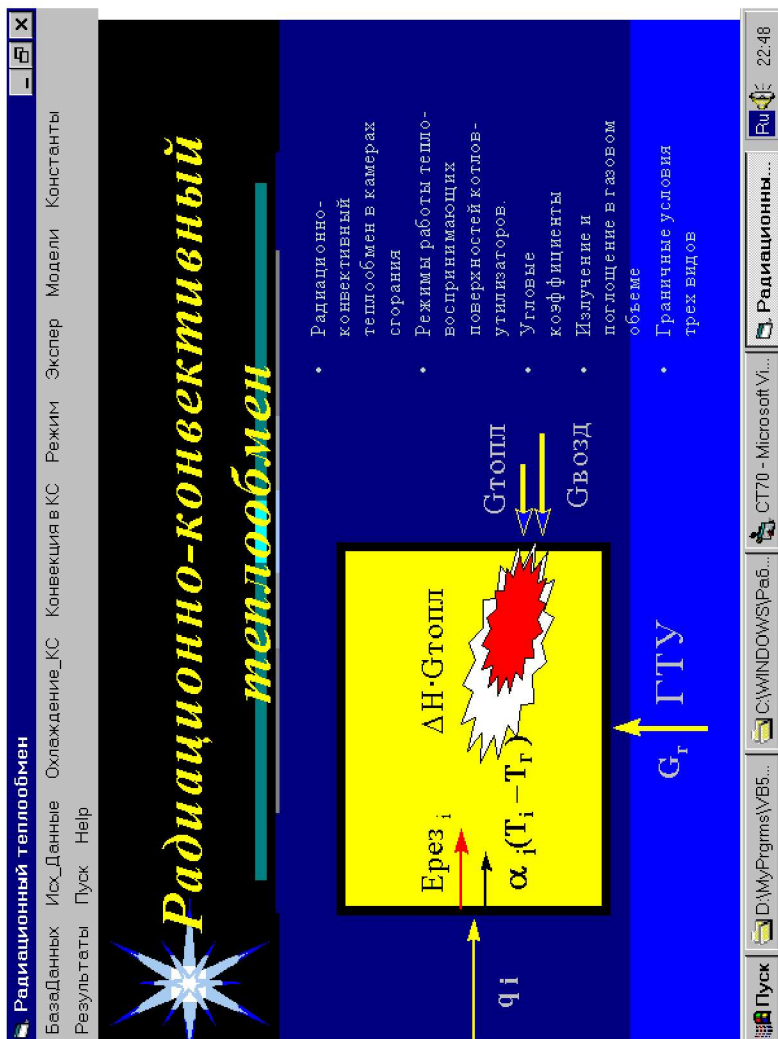


Рис. 10.12. Главное меню программы

Радиационный теплообмен

БазыДанных Исх\_Данные Охлаждение\_КС Конвекция в КС Режим Экспер Модели Константы

Результаты Пуск Help

**Поверхности замкнутой системы**

i	$\Gamma_{pVc0}$ 1/2/3	T, K	eps	qFlux, Вт/м <sup>2</sup>	AlfaHeat Вт/м <sup>2</sup> K	AlfaCool, Вт/м <sup>2</sup> K	TCool, K	F, м <sup>2</sup>
1	1	498	1	-54681,00	25	0	0	30
2	3	602.014	1	-86863,00	125	1670	550	25
3	2	929.9402	1	0,00	25	0	0	115

Edit Cell

Cell Content

Accept

OK

Пуск D:\PROJECT... C:\WINDOW... CT70 - Micros... Радиацион... Безимени... 22:55

Рис. 10.13. Задание условий на поверхностях камеры сгорания

Радиационный теплообмен

БазаДанных Исх\_Данные Охлаждение\_КС Конвекция в КС Режим Экспер Модели Константы  
 Результаты Пуск Help

**КТО к пучку пароперегревателя**

Т<sub>газ</sub>, К

Диаметр труб, м

Сечение канала, м<sup>2</sup>

Шаг труб относительный

Скорость в узком сеч., м/с

КТО к пучку пароперегрев (прив.), W/m<sup>2</sup> K

Титульная панель Windows XP: Пуск, D:\PROJE..., C:\WINDOWS..., СТ70 - М..., Радиаци..., Безимен..., КТО к п..., Ru..., 22:57

Рис. 10.14. Расчет теплоотдачи к пучку труб пароперегревателя

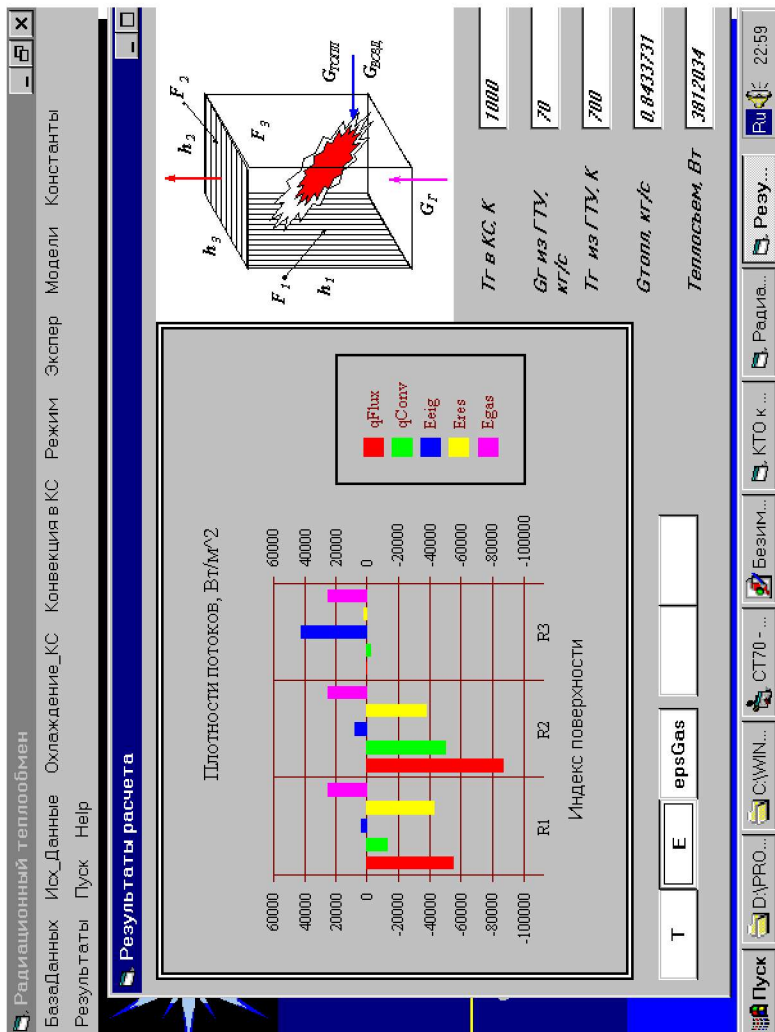


Рис. 10.15. Результаты расчета радиационных и конвективных тепловых потоков на поверхностях камеры сгорания

## Раздел 4. ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ: ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### Глава 11. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

#### 11.1. Методы подобия и размерностей

##### *Подобие*

Как видно из предыдущих разделов, в курсе тепломассообмена систематически применяется безразмерная (обобщенная, нормализованная) форма представления определяющих уравнений и расчетных рекомендаций.

Подробный пример нормализации исходного математического описания приведен в главе 5 («Нестационарная теплопроводность – Пластина – Математическое описание в безразмерной форме»). Напомним, что, применяя заданные в условиях однозначности *масштабы* длины и избыточной температуры, мы привели к безразмерному виду *дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия* для задачи об охлаждении пластины. В результате было получено следующее обобщенное (безразмерное) представление для одномерного нестационарного температурного поля пластины:

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta(X, Fo; Bi); \\ 1 \geq \Theta > 0; \quad 0 \leq X \leq 1; \quad Fo \geq 0; \\ 0 < Bi < \infty; \\ \Theta &\equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0} \equiv \frac{t(x, \tau) - t_f}{t_0 - t_f};\end{aligned}\tag{11.1}$$
$$X \equiv \frac{x}{\delta}; \quad Fo \equiv \frac{a\tau}{\delta^2} \equiv \frac{\tau}{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)}; \quad Bi \equiv \frac{\alpha\delta}{\lambda} \equiv \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}$$

Конкретный вид функциональной зависимости  $\Theta(X, Fo; Bi)$  может быть найден различными способами. В гл. 5 задача решена классическим *аналитическим* методом Фурье. В гл. 6 рассмотрены применения *численных* методов.

Возможно, мы захотим также провести *прямые измерения* температуры. На практике, однако, эксперименты с *натурным объектом* бывают затруднительны или даже невозможны: достаточно представить себе в качестве объекта исследования массивный раскаленный слиток в металлургическом производстве. Поэтому опыты приходится проводить на *лабораторных моделях*, и в этом случае безразмерное представление (11.1) помогает правильно спланировать эксперимент – поставить его в условиях, *подобных* тем, что имеют место в действительности.

В частности, *условие подобия* для теплоотдачи на поверхности тела задается одинаковостью безразмерного параметра – числа Био – для модели и природы:

$$Bi_{\text{model}} = Bi_{\text{nature}} \Rightarrow \alpha_{\text{model}} = \alpha_{\text{nature}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{model}}}{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{nature}}}.$$

Как видно, это условие диктует соотношение между коэффициентами теплоотдачи для природы и модели.

Непосредственным результатом эксперимента будут размерные значения температуры (в градусах Цельсия °С, Кельвина К, или в другой температурной шкале) в точках с различными значениями координаты (измеренными в м, мм, см, футах и т.д.), в различные моменты времени (сек, мин и т.п.).

Далее необходимо привести опытные данные к *безразмерному виду* (см. (11.1)). Время следует отнести к «внутреннему» масштабу времени ( $\delta^2/a$ ), координату – к линейному масштабу (полутолщине пластины  $\delta$ ), избыточную по отношению к окружающей среде температуру – к начальной избыточной температуре  $\theta_0$ .

После такой обработки первичных данных получится массив безразмерных величин  $\Theta_i, X_i, Fo_i, Bi_i$ , где  $i$ -номер экспериментальной точки. Итоговая таблица уже *не зависит* от того, какой системой единиц пользовался экспериментатор.

На завершающем этапе табличные данные аппроксимируют подходящими формулами и обязательно указывают исследованную область определения функции. Например, результат может выглядеть следующим образом:

$$\Theta(X, Fo; Bi) \cong 1.27 \cdot \cos(1.57X) \cdot \exp(-2.46 \cdot Fo);$$
$$0 \leq X \leq 1;$$
$$Fo > 0.3;$$
$$Bi > 10.$$

Нетрудно увидеть в этой «эмпирической» формуле полученное ранее аналитическим методом решение для асимптотики больших чисел Фурье и Био (см. (5.48, 5.49) в главе 5).

Итак, исследование включает следующие этапы:

- составление математического описания объекта, обычно в форме дифференциальных уравнений с краевыми условиями;
- приведение математического описания к безразмерному виду;
- нахождение решения аналитическим, численным или экспериментальным методом (в последнем случае осуществляется также планирование эксперимента и приведение опытных данных к безразмерному виду);
- указание – в безразмерной форме – границ исследованной области переменных и параметров.

Если речь идет об эксперименте, последние два этапа называют *обобщением* опытных данных, имея в виду, что результаты частного эксперимента распространяются на целый круг *подобных* (подчиняющихся условиям подобия) явлений.

Обсуждавшиеся выше методические вопросы исследования теплообмена относятся к специальной дисциплине – *теории подобия и размерностей*. Понятие «подобие» применительно к физическим процессам является обобщением интуитивно ясного *геометрического* подобия. Аналогично измерениям (расстояний, размеров объектов) на карте местности (т.е. на уменьшенной копии Земной поверхности), можно провести измерения полей физических величин (например, температуры) на уменьшенной, лабораторной копии реального процесса или устройства. В обоих случаях потребуется пересчет в соответствии с масштабом. При-

чем пересчитывать необходимо не только размеры и координаты, но и время, а также физические поля температуры, скорости, концентрации, плотности теплового потока, и т.д.

Общие правила и масштабы для такого пересчета содержатся в обобщенной (безразмерной) записи искомой функциональной зависимости, такой как  $\Theta = \Theta(X, Fo; Bi)$  в нашем примере (11.1). Очевидно, безразмерная температура  $\Theta$  будет одинаковой (для модели и натуры) в *сходственных* точках ( $X = idem$ ), в *сходственные* моменты времени ( $Fo = idem$ ) и при одинаковых значениях безразмерного параметра  $Bi$  ( $Bi = idem$ ):

$$\begin{aligned}
 X = idem &\Rightarrow x_{model} = x_{nature} \frac{\delta_{model}}{\delta_{nature}}; \\
 Fo = idem &\Rightarrow \tau_{model} = \tau_{nature} \frac{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)_{model}}{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)_{nature}}; \\
 Bi = idem &\Rightarrow \alpha_{model} = \alpha_{nature} \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{model}}{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{nature}}; \\
 &\Downarrow \\
 \Theta = idem &\Rightarrow \vartheta_{model} = \vartheta_{nature} \frac{\vartheta_{0\ model}}{\vartheta_{0\ nature}}.
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

В целом, избежать возможных ошибок или нечетких толкований подобия можно, приняв следующее условие: подобными являются процессы, для которых *идентична безразмерная формулировка*, включающая:

- определяющие дифференциальные уравнения в безразмерном виде;
- краевые условия в безразмерной форме;
- значения безразмерных независимых переменных и безразмерных параметров.



### Анализ размерностей

Оперативный способ получения безразмерных (обобщенных) формулировок предоставляет *анализ размерностей*. Продемонстрируем соответствующую технику на примере теплоотдачи при вынужденной конвекции.

Пусть при предварительном анализе для среднего коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  сформулирован следующий список определяющих величин:

$$\alpha = \alpha(w, l, \rho, c_p, \lambda, \mu), \quad (11.3)$$

включающий скорость набегающего потока  $w$ , протяженность тела по ходу потока  $l$ , плотность  $\rho$ , теплоемкость  $c_p$ , теплопроводность  $\lambda$  и динамическую вязкость теплоносителя  $\mu$ . Лучший способ составить такой список – это выписать систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена с соответствующими краевыми условиями, однако указанный перечень можно получить и из общих формулировок физических законов (например, коэффициент теплопроводности  $\lambda$  фигурирует в законе теплопроводности Фурье) или даже на основе физической интуиции.

Список (11.3) содержит всего  $n + 1 = 7$  размерных величин:  $n = 6$  определяющих параметров и одну определяемую величину ( $\alpha$ ).

Анализ размерностей позволяет представить это соотношение в обобщенном, безразмерном виде, существенно сократив при этом число параметров (до  $n + 1 = 3$ ):

$$\text{St} = \text{St}(\text{Re}, \text{Pr});$$
$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} \equiv \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}}; \quad \text{Re} \equiv \frac{w l}{\nu}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu \equiv \frac{\mu}{\rho}. \quad (11.4)$$

Покажем, как приходят к сокращенной формулировке (11.4), применяя основные положения теории размерностей.

Первичными (основными) называют единицы измерения, представляющие собой некоторые хранимые эталоны. В СИ это килограмм (кг), метр (м), секунда (с), градус (К). Масса, длина, время, температура измеряются непосредственным сравнением этих величин с эталонами или их дубликатами. Число основных единиц измерения обозначим через  $k_0$ .

Вторичными (производными) называют единицы измерения, получаемые из первичных на основе физических законов. Например,  $1 \text{ Н} = (1 \text{ кг}) \cdot (1 \text{ м/с}^2)$ , т.к. «сила = масса · ускорение».

Формулой размерности называют степенной одночлен, выражающий производные единицы через основные. Например, размерность силы:

$$[F] = \text{кг}^{N_m} \text{м}^{N_l} \text{с}^{N_t}; \quad N_m = 1, \quad N_l = 1, \quad N_t = -2.$$

В списке (11.3) из  $n$  определяющих параметров могут быть выделены  $k$  величин с *независимыми размерностями*. По определению, система таких  $k$  величин обладает следующими свойствами:

- ни одна из  $k$  величин не может быть получена в виде степенного одночлена из размерностей других  $(k - 1)$  величин этой группы;
- напротив, размерности всех остальных  $(n + 1 - k)$  величин выражаются через  $k$  независимых размерностей;
- всегда  $k \leq k_0$ , где  $k_0$  – число основных единиц измерения.

Выбранные таким образом  $k$  величин принимают в качестве основных единиц измерения некоторой новой, специальной системы единиц, удобной для данной конкретной задачи. В этой новой системе  $k$  величин примут численные значения, равные единице, поскольку они сами являются эталонами. Остальные  $(n + 1 - k)$  величин образуют безразмерные комплексы, в соответствии с формулами размерности. Следовательно, функциональная связь между  $(n + 1)$  размерными величинами будет представлена соотношением между  $(n + 1 - k)$  безразмерными комплексами ( $\pi$  - теорема).

Запишем алгоритм практической работы методом анализа размерностей:

1. Составить физически обоснованный список определяющих параметров, такой как (11.3).
2. Выбрать систему из  $k_0$  основных единиц измерения (например, СИ,  $k_0 = 4$ ).
3. Выбрать любой из  $n$  определяющих параметров как первую из величин с независимыми размерностями.
4. Повторять, пока не будут рассмотрены все  $n$  определяющих параметров и не выделены  $k$  величин с независимыми размерностями, следующие действия:
  - попытаться выразить размерность следующего определяющего параметра через уже отобранные величины с независимыми размерностями;

- если это удастся сделать, запомнить полученное выражение;
- иначе отнести параметр к списку величин с независимыми размерностями.

5. Выразить размерность искомой величины ( $\alpha$  в нашем примере) через  $k$  независимых размерностей.

6. Перейти к новой системе измерения, основными единицами которой служат  $k$  величин с независимыми размерностями.

7. Проверить число полученных комплексов. Оно должно быть равно  $(n + 1 - k)$ .

Проделаем эти операции с (11.3):

1.  $\alpha = \alpha(w, l, \rho, c_p, \lambda, \mu); \quad n = 6.$

2. СИ: кг, м, с, К;  $k_0 = 4.$

3.  $l, \rho$  – первая величина с независимой размерностью.  $k = 1$

4.  $\rho, \text{кг/м}^3$ ;  $[\rho]$  не может быть выражена через  $[l]$ ,  $k = 2$   
т.е.  $(l, \rho)$  – величины с независимыми размерностями;

$w, \text{м/с}$ ;  $[w]$  не может быть выражена через  $[l], [\rho]$ ,  $k = 3$   
т.е.  $(l, \rho, w)$  – величины с независимыми размерностями;

$c_p, \text{Дж/(кг К)} \equiv (\text{м}^2/\text{с}^2)/\text{К}$ ;  $[c_p]$  не может быть выражена через размерности  $[l], [\rho], [w]$ ,  $k = 4$

т.е.  $(l, \rho, w, c_p)$  – величины с независимыми размерностями;

$\lambda, \text{Дж/(с м К)}$ ;  $k = 4$

Формула размерности:  $[\lambda] = [c_p][\rho][w][l]$ ;

$\mu, (\text{кг/м}^3)(\text{м}^2/\text{с})$ ;  $k = 4$

Формула размерности:  $[\mu] = [\rho][w][l]$ .

$\alpha, \text{Дж/(с м}^2 \text{ К)}$ ;

5. Формула размерности:  $[\alpha] = [c_p][\rho][w]$ .

$$\frac{\alpha}{\rho c_p w} = f\left(1, 1, 1, 1, \frac{\lambda}{\rho c_p w l}, \frac{\mu}{\rho w l}\right);$$

6.  $St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} \equiv \frac{Nu}{Re Pr}; \quad Re \equiv \frac{w l}{\nu}; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}; \quad (11.5)$

↓

$$St = St(Re, Pr);$$

$$Nu = Nu(Re, Pr).$$

7.  $(n + 1 - k) = 6 + 1 - 4 = 3.$

Работа методом анализа размерностей завершена. Действительно, удалось сократить список определяющих параметров с исходного значения  $n = 6$  до 2, т.е. на число  $k = 4$  величин с независимыми размерностями. В нашем примере  $k = k_0$ , где  $k_0 = 4$  – число основных единиц измерения (вообще говоря,  $k \leq k_0$ ).

Это замечательный результат, позволяющий существенно упростить поиск конкретного вида функциональной зависимости. Метод размерностей, как и метод оценки порядка величин, эффективно применяется при предварительном анализе сложных проблем теплообмена.

## 11.2. Теплопроводность твэла

Стержень *тепловыделяющего элемента ядерного реактора* (твэла) собирается из *таблеток* оксида урана. Ядерное топливо заключено в защитную оболочку из циркониевого сплава – материала, слабо поглощающего тепловые нейтроны. Между топливным стержнем и оболочкой имеется зазор – тонкая газовая прослойка, заполненная химически нейтральным и высокотеплопроводным гелием (рис. 11.1).

Мощность внутренних источников теплоты в твэлах достигает  $10^9$  Вт/м<sup>3</sup>, а теплонапряженность охлаждаемой поверхности, т.е. плотность теплового потока на поверхности оболочки –  $1.5 \cdot 10^6$  Вт/м<sup>2</sup>.

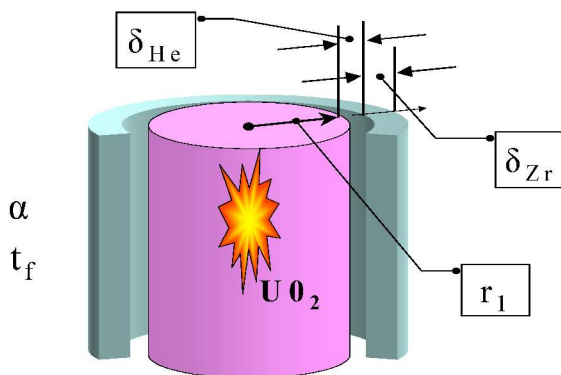


Рис. 11.1. Схематическое изображение твэла

Необходимо обеспечить эффективное охлаждение, чтобы уровень температур был приемлемым для имеющихся материалов.

В наиболее распространенных гражданских реакторах типа ВВЭР охлаждение осуществляется водой под давлением 15 МПа. Температура насыщения при этом давлении 342°C, а температура теплоносителя (воды) – примерно 300°C, т.е. твэлы охлаждаются некипящей, недогретой до температуры насыщения водой. Коэффициент теплоотдачи составляет примерно 30000 Вт/(м<sup>2</sup>·°C).

Для оксида урана, относящегося к типу *керамического* ядерного топлива, температура может быть очень высокой, поскольку температура плавления UO<sub>2</sub> составляет 2800°C. Однако допустимая температура циркониевых оболочек гораздо ниже – около 400°C. Если этот предел превышен, то резко ухудшаются механические свойства оболочки, а при еще более высоких температурах в контакте с водой быстро развивается разрушительная коррозия.

При проектировании твэла необходимо проверить, не превышают ли температуры ядерного топлива и защитной оболочки допустимых значений. Расчет проводится при заданной мощности внутренних источников  $q_V$  и заданных условиях охлаждения: температуре воды  $t_f$  и коэффициенте теплоотдачи  $\alpha$ .

В конструкции твэла можно выделить две области:

- цилиндрический стержень с внутренними источниками;
- зазор и оболочку без внутренних источников.

Для второй области расчетные соотношения получены в гл. 4

Новой задачей является расчет температурного поля в твердом теле с внутренними источниками теплоты.

### *Цилиндр с внутренними источниками*

Начнем вычисления с уравнения сохранения (4.18) (гл.4) для одномерных стационарных задач, которое мы перепишем здесь с учетом геометрии конкретной задачи (рис. 11.1):

$$q(r) \cdot F(r) = q_v \int_0^r F(r) \cdot dr .$$

Правая часть этого выражения есть внутреннее тепловыделение в сплошном цилиндре с текущим радиусом  $r$ ,  $0 \leq r \leq r_1$ . Левая часть – тепловой поток через поверхность  $F(r)$ .

Подстановка

$$F(r) = 2\pi r$$

приводит к уравнению:

$$q(r) \cdot 2\pi \cdot r \equiv q_L(r) = q_V \cdot \pi r^2 \quad (11.6)$$

согласно которому линейная плотность теплового потока увеличивается по радиусу твэла благодаря действию внутренних источников теплоты.

С учетом выражения для плотности теплового потока,

$$q(r) = -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r},$$

из уравнения сохранения (11.6) получается следующее дифференциальное уравнение для температурного поля:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} 2\pi r = q_V \frac{2\pi r^2}{2}. \quad (11.7)$$

Переменные в этом уравнении разделяются. Проведем интегрирование на полном интервале:

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) dt}{t_1 - t_0} = \frac{q_V r_1^2}{4(t_0 - t_1)}.$$

Вводя величину среднеинтегрального коэффициента теплопроводности, можно записать расчетное соотношение для перепада температуры внутри твэла в следующей компактной форме:

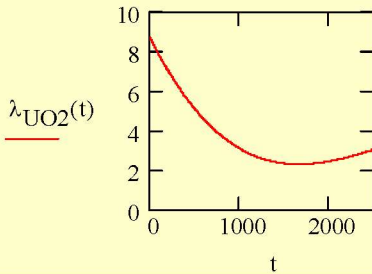
$$\Delta t = \frac{q_V r_1^2}{4\lambda_m}, \quad \lambda_m = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) dt}{t_1 - t_0}. \quad (11.8)$$

Заметим, что формула (11.8) дает *точное* решение дифференциального уравнения (11.7) в квадратурах. Числовые погрешности могут возникнуть при приближенном вычислении интеграла.

Если  $\lambda = \text{const}$ , то из (11.8) следует *квадратичный* закон изменения температуры по радиусу (чтобы увидеть это, зафиксируйте в  $\Delta t \equiv t_0 - t_1$  величину  $t_0$  и рассматривайте  $t_1$  как функцию от радиуса  $r_1$ ).

В действительности теплопроводность оксида урана сильно зависит от температуры (рис. 11.2) и эту зависимость необходимо учитывать при практических расчетах.

$$\lambda_{\text{UO}_2}(t) := 8.706 + (-9.11 \cdot 10^{-3}) \cdot t + 3.992 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + (-5.004 \times 10^{-10}) \cdot t^3$$



**Рис. 11.2. Теплопроводность оксида урана (Вт/м °С) в зависимости от температуры (°С)**

Прямые вычисления по формулам (11.8) можно выполнить, если заданы температуры на оси и на поверхности,  $t_0$  и  $t_1$ . Сначала рассчитывается среднеинтегральный коэффициент теплопроводности  $\lambda_m$ , а затем мощность тепловыделения  $q_v$ , обеспечивающая принятый в начале расчета перепад температур.

Однако естественная постановка задачи другая. Задается мощность тепловыделения  $q_v$  и температура поверхности топливного стержня  $t_1$ . Требуется найти температуру в центре  $t_0$  (это максимальное значение температуры в твэле).

Для таких вычислений потребовалось разработать небольшую Mathcad–программу (рис. 11.3):

- сначала заданы числовые значения двух основных, неизменяемых в данном расчете параметров: мощности источника и радиуса топливной таблетки;
- далее записана функция, определяющая среднеинтегральное значение  $\lambda_m$ , и выражение eq, которое должно обращаться в ноль согласно основной расчетной формуле (11.8);
- в качестве входного параметра указана температура поверхности стержня  $t_1$ ;
- последняя строка содержит начальное приближение для искомой величины  $t_0$  (принимается  $t_0 = t_1$ ), обращение к встроенной функции root для решения нелинейного уравнения eq и числовое значение результата.

$$\begin{array}{l}
 q_v := 10 \cdot 10^8 \quad r_1 := 0.0038 \\
 \lambda_{m\text{UO}_2}(t_1, t_2) := \begin{cases} \lambda_{\text{UO}_2}(t_1) & \text{if } |t_1 - t_2| < 0.001 \\ \left( \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\text{UO}_2}(t) dt \right) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{eq}(t_0, t_1) := (t_0 - t_1) - \frac{q_v \cdot r_1^2}{4 \cdot \lambda_{m\text{UO}_2}(t_1, t_0)} \\
 t_1 := 942.413 \\
 t_0 := t_1 \quad t_0 := \text{root}(\text{eq}(t_0, t_1), t_0) \quad t_0 = 2359.2
 \end{array}$$

Рис. 11.3. Расчет максимальной температуры твэла

Итак, чтобы воспользоваться точным решением (11.8) задачи о твэле, потребовались компьютерные вычисления. Заметим, что это самый простой способ решения, если необходимо правильно учесть влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности ядерного топлива.

### Расчет теплопередачи через зазор и оболочку

Теплота, выделяющаяся в активном стержне, далее передается через газовый зазор и циркониевую оболочку к охлаждающей воде. Поскольку в этой области внутренних источников нет, величина линейного потока  $q_L$  сохраняется постоянной. Из (11.6) следует:

$$q_L = q_L(r_1) = q_v \cdot \pi \cdot r_1^2.$$

Воспользуемся известными расчетными формулами для цилиндрической стенки без тепловыделения, см. (4.27).

Учтем, что теплопроводность гелия в газовой прослойке существенно зависит от температуры (рис. 11.4), в то время теплопроводность циркониевого сплава можно считать постоянной:

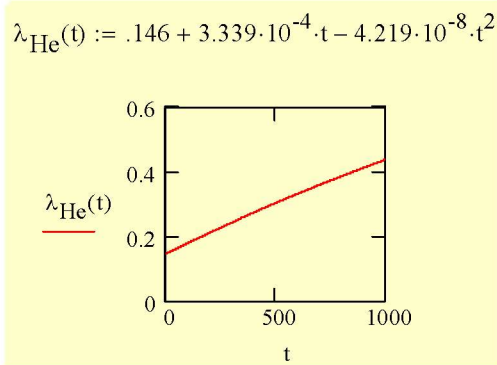
$$q_L = \frac{t_1 - t_2}{R_{L,\text{He}}}; \quad R_{L,\text{He}} = \frac{1}{2\pi \cdot (\lambda_m)_{\text{He}}} \ln \frac{r_2}{r_1};$$



$$q_L = \frac{t_2 - t_3}{R_{L,Zr}}; \quad R_{L,Zr} = \frac{1}{2\pi \cdot \lambda_{Zr}} \ln \frac{r_3}{r_2},$$

где

$$r_2 = r_1 + \delta_{\text{He}}; \quad r_3 = r_2 + \delta_{Zr}.$$



**Рис. 11.4.** Теплопроводность газообразного гелия (Вт/м °С) в зависимости от температуры (°С)

Теплоотдачу на поверхности оболочки опишем уравнением Ньютона-Рихмана:

$$q(r_3) = \alpha \cdot (t_3 - t_f),$$

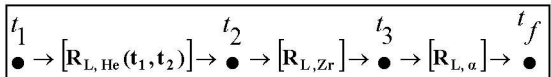
преобразованным для линейной плотности теплового потока:

$$q_L = \frac{t_3 - t_f}{R_{L,\alpha}}; \quad R_{L,\alpha} = \frac{1}{2\pi r_3 \cdot \alpha}.$$

Величина  $R_{L,\alpha}$  называется линейным сопротивлением теплоотдачи.

Линейные термические сопротивления гелиевого зазора, оболочки и теплоотдачи на наружной поверхности образуют последовательную цепь сопротивлений, через которые проходит одинаковый (линейный) тепловой поток  $q_L$ :

$$q_L = \frac{t_1 - t_f}{R_{L,\text{He}} + R_{L,Zr} + R_{L,\alpha}}, \quad (11.9)$$



Очевидна аналогия с последовательной электрической цепью.

Вычисления будут элементарными, если сопротивления *независимы от температуры*. Однако во многих задачах теплопередачи это не так. Сейчас мы имеем дело с самым простым примером *нелинейного* сопротивления, вследствие сильной температурной зависимости коэффициента теплопроводности гелия в зазоре. Более сложными являются задачи с зависящими от температуры сопротивлениями теплоотдачи (как при кипении или конденсации, при свободной конвекции или радиационном теплообмене).

Поскольку проблема является достаточно общей, покажем, как организовать расчеты теплопередачи в таких случаях:

- следует задать температурные зависимости материалов в виде функций, к которым могут обратиться другие блоки программы (рис. 11.5);
- следует записать термические сопротивления с учетом температурной зависимости (рис. 11.6);
- следует сформировать для последовательной цепи систему уравнений, таких как (11.9), содержащих неизвестные температуры ( $t_1, t_2, t_3$ ), и обратиться к решателю системы нелинейных уравнений (блок **Given** («дано») – **Find** («найти»)) в Mathcad-программе на рис. 11.7).

$$\lambda_{\text{UO}_2}(t) := 8.706 + (-9.11 \cdot 10^{-3}) \cdot t + 3.992 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + (-5.004 \times 10^{-10}) \cdot t^3$$

$$\lambda_{\text{He}}(t) := .146 + 3.339 \cdot 10^{-4} \cdot t - 4.219 \cdot 10^{-8} \cdot t^2$$

$$\lambda_{\text{mUO}_2}(t_1, t_2) := \begin{cases} \lambda_{\text{UO}_2}(t_1) & \text{if } |t_1 - t_2| < 0.001 \\ \left( \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\text{UO}_2}(t) dt \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\lambda_{\text{mHe}}(t_1, t_2) := \begin{cases} \lambda_{\text{He}}(t_1) & \text{if } |t_1 - t_2| < 0.001 \\ \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \left( \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\text{He}}(t) dt \right) \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 11.5. Температурная зависимость теплопроводности «ядерных» материалов – оксида урана и гелия

$$\begin{aligned}
q_v &:= 10 \cdot 10^8 & r_1 &:= 0.0038 \\
\delta_{Zr} &:= 0.00065 & \delta_{He} &:= 0.0001 \\
r_2 &:= r_1 + \delta_{He} & r_3 &:= r_2 + \delta_{Zr} & \lambda_{Zr} &:= 20 \\
t_f &:= 300 & \alpha &:= 30000 \\
R_{L\_alpha} &:= \frac{1}{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_3} & R_{L\_Zr} &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{Zr}} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \\
R_{L\_He}(t_1, t_2) &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{mHe}(t_1, t_2)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

Рис. 11.6. Термические сопротивления

$$\begin{aligned}
q_L &:= q_v \cdot \pi \cdot r_1^2 & q_L &= 4.536 \times 10^4 \\
t_1 &:= 400 & t_2 &:= 400 & t_3 &:= 400 \\
\text{Given} \\
q_L &= \frac{t_1 - t_f}{R_{L\_He}(t_1, t_2) + R_{L\_Zr} + R_{L\_alpha}} & q_L &= \frac{t_2 - t_3}{R_{L\_Zr}} & q_L &= \frac{t_3 - t_f}{R_{L\_alpha}} \\
\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(t_1, t_2, t_3) \\
t_1 &= 942.412 & t_2 &= 408.542 & t_3 &= 352.894
\end{aligned}$$

Рис. 11.7. Теплопередача от поверхности топливного стержня к теплоносителю

В результате расчета теплопередачи (рис. 11.7) определяются:

- температура  $t_3$  внешней поверхности циркониевой оболочки, контактирующей с водой;
- температура  $t_2$  внутренней поверхности оболочки;
- температура  $t_1$  поверхности топливного стержня из оксида урана.

### *Распределение температуры в твэле*

Теперь, располагая значением  $t_1$ , рассчитывают максимальную температуру топлива  $t_0$  (рис. 11.8). Распределение температуры  $t_{\text{fuel}}(r)$  внутри тепловыделяющего стержня строят с помощью функции eq1 с учетом сильной температурной зависимости теплопроводности оксида урана. Далее формируется функция для распределения температуры  $t_{\text{out}}(r)$  во внешней области, т.е. в газовом зазоре, циркониевой оболочке и охлаждающей жидкости.

$$\begin{aligned}
 & t_0 := 1000 \\
 & \text{eq}(t_0, t_1) := (t_0 - t_1) - \frac{q_v \cdot r_1^2}{4 \cdot \lambda \cdot m_{\text{UO}_2}(t_1, t_0)} \quad t_0 := \text{root}(\text{eq}(t_0, t_1), t_0) \\
 & t_0 = 2359.2 \\
 & \text{-----} \\
 & \text{eq1}(t, r) := (t_0 - t) - \frac{q_v \cdot r^2}{4 \cdot \lambda \cdot m_{\text{UO}_2}(t, t_0)} \quad t_{\text{fuel}}(r) := \text{root}(\text{eq1}(t, r), t, t_1, t_0) \\
 & t_{\text{out}}(r) := \begin{cases} t_2 + \frac{(t_3 - t_2) \cdot \ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} & \text{if } r_2 < r \leq r_3 \\ t_1 + \frac{(t_2 - t_1) \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} & \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ t_f & \text{if } r > r_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 11.8. Функции для расчета температуры твэла

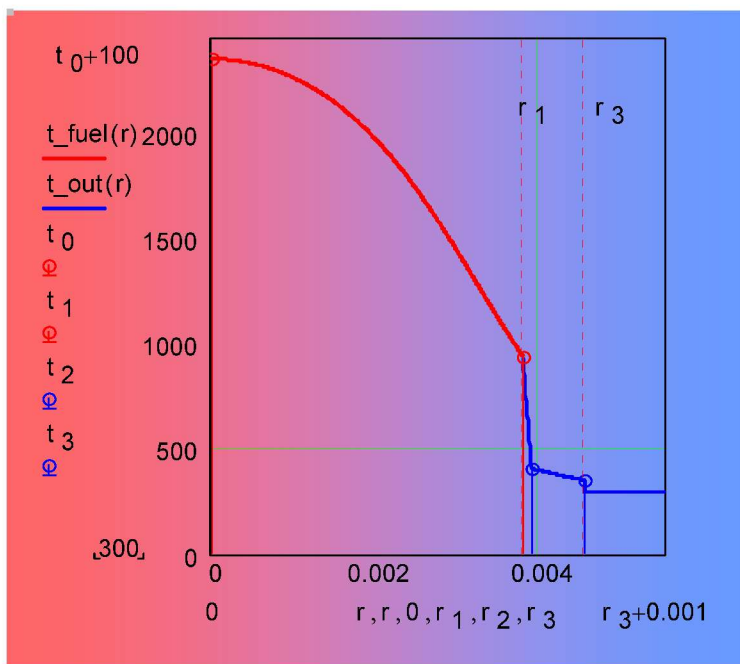


Рис. 11.9. Температурное поле в твэле ядерного реактора

Результаты расчета распределения температуры в твэле представлены на рис. 11.9 как распределение температуры по радиусу. Основное внимание при оценке результатов должно быть уделено двум значениям:

- максимальной температуре ядерного топлива  $t_0$ . Максимальное предельное значение можно оценить как температуру плавления оксида урана, примерно  $2800^{\circ}\text{C}$ ;
- температуре поверхности защитной оболочки  $t_3$ , где происходит контакт с водой. Допустимая температура оболочек из циркониевых сплавов – около  $400^{\circ}\text{C}$ . При превышении этого значения резко ухудшаются механические свойства оболочки, а при еще более высокой температуре в контакте с водой быстро развивается разрушительная коррозия.

Таким образом, рассмотренный температурный режим близок к предельному по теплонапряженности. Можно провести оптимизационные вариантные расчеты в Mathcad-программе.

Вывод всех соотношений в этом разделе основан на предположении об одномерности температурного поля. Чтобы такая модель была верна, геометрия твэла, структура материалов и условия охлаждения на поверхности должны быть осесимметричными. Возможные осложнения обсуждаются ниже в рамках двумерной модели твэла.

### 11.3. Компьютерное моделирование теплообмена: пакет Matlab

Математическое описание тепломассообмена включает систему *дифференциальных уравнений* в частных производных, описывающих нестационарные трехмерные поля скорости, температуры, концентрации, и *краевые условия*, задающие взаимодействие объекта с окружающей средой. В общем случае, это сложная для решения задача, если иметь ввиду сложную геометрию реальных инженерных объектов, нелинейность уравнений, разнообразие и неустойчивость гидродинамических полей и т.п.

Универсальным средством решения таких задач становится все в большей мере численное моделирование на компьютерах. Во-первых, численное моделирование *востребовано* в связи с усложнением энергетических технологий. Во-вторых, численное моделирование становится *доступным* благодаря появлению и совершенствованию инженерных математических пакетов, одним из которых является Matlab. Воспользоваться пакетом Matlab – это, возможно, самый короткий путь от теоретического введения в предмет (каким являются гл. 1–4) к решению реальных сложных задач тепломассообмена.

Запустив Matlab и набрав в командном окне «pde tool» (что означает инструмент для решения уравнений в *частных* производных), пользователь получает доступ к графическому пользовательскому интерфейсу (GUI). В разделе меню Draw *рисуют* исследуемый объект (возможно, составной и достаточно сложный). В разделе PDE выбирают тип и указывают коэффициенты *дифференциального уравнения*. В разделе Boundary задают *граничные условия* на различных сегментах границы. В разделе меню Solve

запускают *решатель* (интегратор), после чего в разделе Plot указывают, как *визуализировать* результаты. Далее эти этапы описаны подробнее на примере задачи о *температурном поле твэла*.

Matlab занимает особое место среди вычислительных инструментов инженера. Как и другие современные языки программирования высокого уровня, Matlab позволяет разрабатывать хорошо структурированные программы, снабженные графическим интерфейсом пользователя (GUI) и системой визуализации результатов. Имеются эффективные средства отладки и совершенствования программ.

В дополнение к этим универсальным свойствам, Matlab как “*matrix laboratory*” («матричная лаборатория») обеспечивает эффективную работу с векторными и матричными моделями, поскольку использует массив (array) реальных и комплексных чисел как базовый элемент данных. Численные алгоритмы Matlab имеют репутацию эталонов эффективности.

В пакет Matlab включены вычислительные инструменты (toolboxes), расширяющие круг приложений для специальных инженерных областей. Особый интерес для курса тепломассообмена представляет PDEToolbox, т.е. специальный инструмент для интегрирования уравнений (систем уравнений) в частных производных (PartialDifferentialEquations). Используя совместно графический интерфейс PDEToolbox и средства программирования Matlab, мы разработаем далее простую специализированную систему для исследования температурного поля твэла («Fuel\_El\_UO2\_He\_Zr»).

#### 11.4. Математическая формулировка

Основным объектом в PDEToolbox является уравнение эллиптического типа, представленное в двух эквивалентных формах (принятой в Matlab или в нашем теоретическом введении):

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (c \nabla u) + au &= f; \\ -\operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + au &= f \end{aligned} \tag{11.10}$$

Уравнение записано для *двухмерной* области  $\Omega$ . Коэффициенты  $c, a, f$  могут быть функциями координат и зависимой переменной  $u$ . В последнем случае уравнение будет нелинейным.

Можно решать также параболическое уравнение:

$$\begin{aligned} d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + a u &= f; \\ d \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + a u &= f \end{aligned} \quad (11.11)$$

с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от времени  $t$  (но не от искомой переменной  $u$ ).

Применительно к задачам теплообмена:

- зависимую переменную  $u$  идентифицируют с температурой;
- коэффициент  $c$  – с теплопроводностью тела;
- коэффициент  $f$  – с объемной мощностью внутренних источников теплоты;
- произведение  $a u$  может представлять отвод теплоты в окружающую среду с нулевой температурой или специальный вид внутреннего источника (стока) теплоты;
- коэффициент  $d$  для нестационарной задачи есть объемная теплоемкость  $\rho c$ .

Полезно сопоставить уравнение (11.11), записанное в стиле пакета Matlab, с уравнением теплопроводности (2.14), введенным в гл. 2:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) + q_v.$$

Круг приложений может быть расширен в случае системы с двумя искомыми переменными  $(u_1, u_2)$ . Например, если  $(u_1, u_2)$  – составляющие вектора скорости, то уравнения описывают двумерные течения в пористой среде.

Если  $u_1(x, y)$  – это температура, а  $u_2(x, y)$  – скорость установившегося течения в канале, то получается модель теплообмена в длинных каналах.



На границах  $d\Omega$  области ставятся граничные условия:  
*условие Дирихле:*

$$h u = r \quad (11.12)$$

(например, задается распределение температуры вдоль границы)  
или *обобщенное условие Нейманна:*

$$\mathbf{n} \cdot (c \operatorname{grad} u) + q u = g, \quad (11.13)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности тела.

Условие (11.13) в случае  $g = 0$  и  $q \neq 0$  описывает теплоотдачу с окружающей средой при нулевой температуре (условие 3-го рода,  $q$  – коэффициент теплоотдачи; мы придерживаемся здесь формальных обозначений Matlab). Если  $q = 0$ ,  $g \neq 0$ , то задается плотность теплового потока на поверхности (условие 2-го рода).

В общем случае соответствующим подбором коэффициентов ( $q$ ,  $g$ ) как функций координат и температуры на поверхности могут быть описаны разнообразные сложные условия теплового взаимодействия с окружающей средой.

### 11.5. Задача о температурном поле твэла

При аксиальной симметрии твэла и при отсутствии заметных продольных изменений температурное поле будет одномерным, изменяющимся только по радиальной координате. В учебном курсе рассматривается решение одномерной стационарной задачи с переменными коэффициентами в пакете Mathcad.

Нарушения аксиальной симметрии в результате технологических погрешностей, неоднородности условий охлаждения и т.п. делает задачу двухмерной. Далее представлено решение этой задачи в пакете Matlab PDEToolbox. Рассмотрены искажения температурного поля твэла вследствие эллипсоидальности оболочки, т.е. неравномерности толщины гелиевого зазора. Моделируется также влияние неоднородности охлаждения из-за ухудшения теплоотвода на одном из сегментов внешней поверхности твэла.

## 11.6. Создание модели в графическом интерфейсе пользователя

В командном окне Matlab запускают инструмент PDEToolbox посредством команды:

```
>>pdetool.
```

Ниже на рис. 11.10–11.26 представлена последовательность работы Matlab.

В пункте меню **Options, Application** устанавливаются область инженерных наук, в нашем случае, **HeatTransfer** (теплообмен).

В пункте меню **Options, Axis limits ...** устанавливаются размеры двумерной рабочей области, в которой будут производиться геометрические построения: для оси  $x$  –  $[-0,005 \ 0,005]$  и для оси  $y$  –  $[-0,005 \ 0,005]$ .

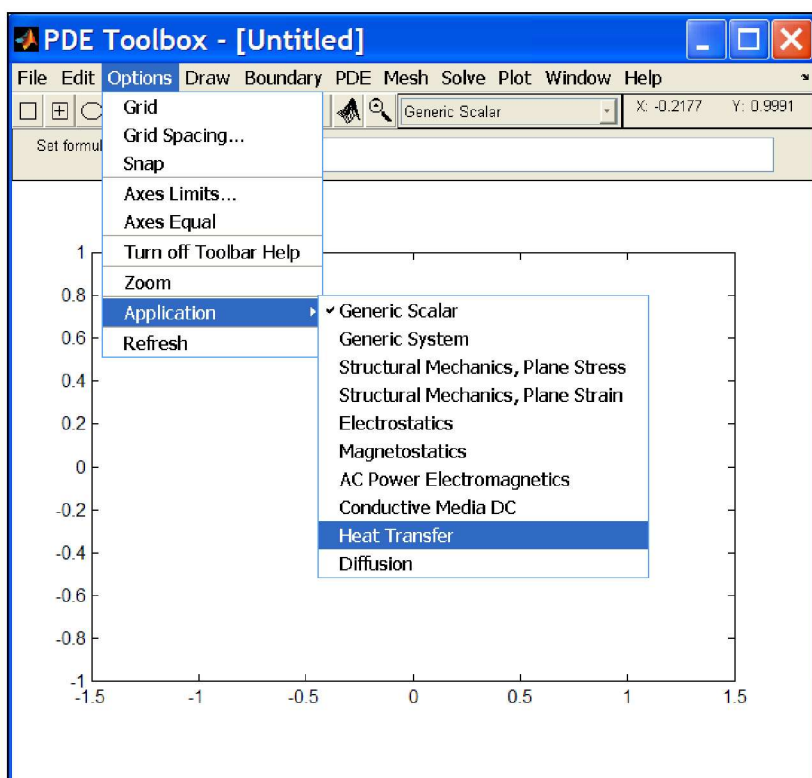
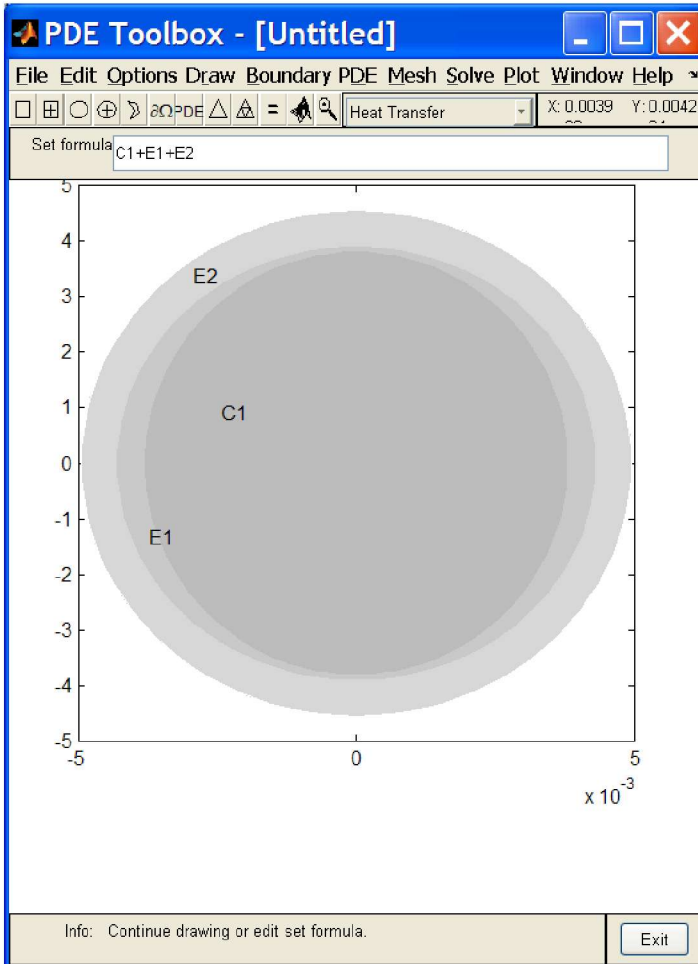


Рис. 11.10. Входной интерфейс

### *Построение объекта*

В меню **Draw** (чертить) строят геометрический объект, в нашем случае, круглый стержень из диоксида урана с несколько деформированной, эллипсоидальной циркониевой оболочкой. Выбирают Draw, Ellipse/circle (centered) и правой (!) кнопкой мыши строят круг радиусом 0,0038 мм с центром в начале координат. Эта область автоматически затемняется и снабжается меткой C1 (Circle1).



**Рис. 11.11. Построение объекта**

Далее выбирают **Draw, Ellipse/circle (centered)** и левой (!) кнопкой мыши строят эллипс с полуосями (0,0038+0,0005) мм и (0,0038+0,0001) мм с центром в начале координат (метка E1). Повторяют эту операцию для эллипса с полуосями (0,0038+0,0005+0,00065) мм и (0,0038+0,0001+0,00065) мм (метка E2), где 0,00065 мм – толщина циркониевой оболочки.

При манипуляциях с мышью трудно достичь нужной точности позиционирования объектов. Однако двойной щелчок на объекте открывает диалоговый бокс, где можно установить точные координаты и размеры.

В окне Setformula автоматически генерируется формула алгебры множеств  $S1+E1+E2$ , согласно которой по умолчанию образуется составной объект как сумма (объединение) трех геометрических примитивов (элементарных объектов, таких как прямоугольники, окружности, эллипсы, многоугольники. Можно редактировать эту формулу, применяя операции суммы (объединения), пересечения (умножения) и разности (вычитания) множеств. Например, операция вычитания применяется для образования отверстия или полости в твердом объекте.

Напомним, что сумма, или объединение, дает тело, каждая точка которого принадлежит хотя бы одному из примитивов. Пересечение (умножение) образует объект, точки которого принадлежат одновременно обоим примитивам. При вычитании  $A-B$  остаются те точки  $A$ , которые не принадлежат одновременно  $B$ .

Графические построения на основе комбинирования простых геометрических тел (примитивов) обозначаются аббревиатурой CGS (ConstructiveSolidGeometry, конструктивная блочная геометрия).

Объединение элементарных объектов не уничтожает внутренних границ, как это хорошо видно при переходе в режимы Boundary, Boundarymode (границы) и PDE, PDEmode (установка коэффициентов дифференциальных уравнений в различных подобластях). Предполагается в частности, что физические параметры могут быть различными в подобластях, разделенных внутренними границами. На самих внутренних границах считаются выполненными условия непрерывности величин  $u$  и потоков.

Если же подобласти однородны, то внутренние границы могут быть удалены в режиме Boundarymode.

### *Постановка граничных условий*

Используя меню программы PDEToolbox, переходят в режим **Boundary**, **Boundarymode**.

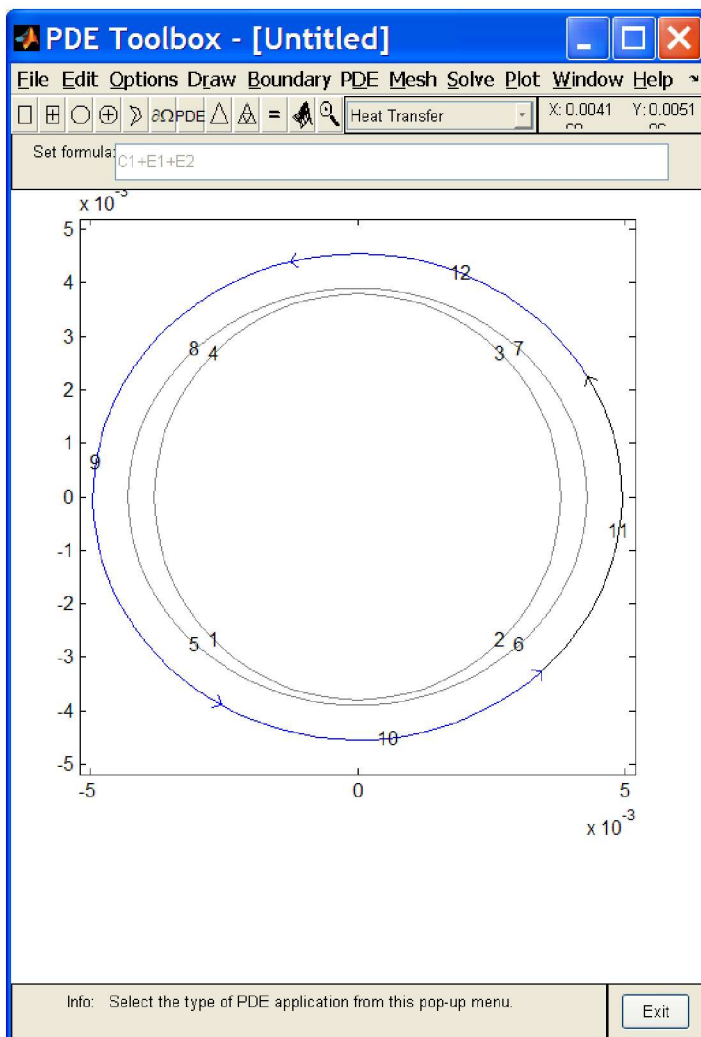


Рис. 11.12. Задание граничных условий

Внешние границы высвечиваются синим цветом. Показываются номера сегментов границы, если в меню Boundary отмечен пункт ShowEdgeLabels. Чтобы специфицировать условия, например, на сегменте 11, отмечают его двойным щелчком и переходят в меню к пункту SpecifyBoundaryConditions... .

В открывшемся диалоговом окне выбирают тип граничного условия (в рассматриваемой задаче – обобщенное условие Нейманна (Neumann)) и задают коэффициенты  $g$  (Heatflux, плотность теплового потока) и  $q$  (Heattransfercoefficient), коэффициент теплоотдачи.

При указанных числовых значениях мы специфицировали граничное условие 3-го рода, приняв, что температура объекта  $T$  отсчитывается от температуры окружающей среды. Коэффициент теплопроводности тела (обозначение  $k$  в уравнении Boundaryconditionequation) будет определен далее при спецификации коэффициентов дифференциального уравнения.

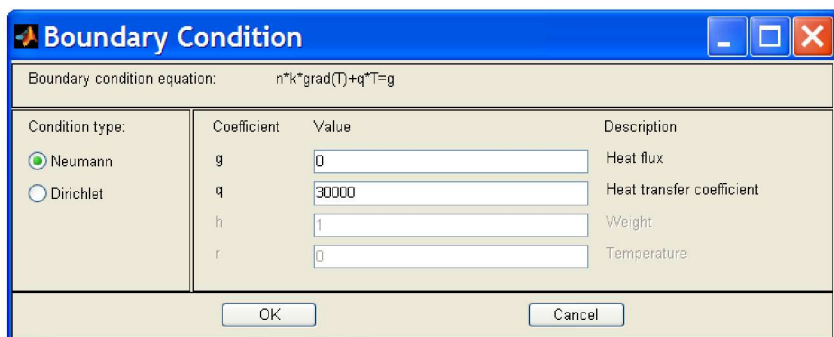


Рис. 11.13. Выбор типа граничных условий

Указанные операции повторяют для остальных сегментов границы с окружающей средой. Если эти условия одинаковы, то отмечают все границы при нажатой клавише Shift и выполняют операцию для всех границ сразу.

Можно вызывать нужный сегмент границы двойным щелчком, например, чтобы проконтролировать правильность ввода.

## Спецификация коэффициентов дифференциального уравнения

Переходят в режим **PDE**, **PDEMode**, отметив также пункт Show Subdomain Labels (показать метки подобластей).

Щелчком мыши на номере выделяют необходимую подобласть, в примере это область 2, соответствующая гелиевому зазору между таблеткой ядерного горючего 3 и циркониевой оболочкой 1.

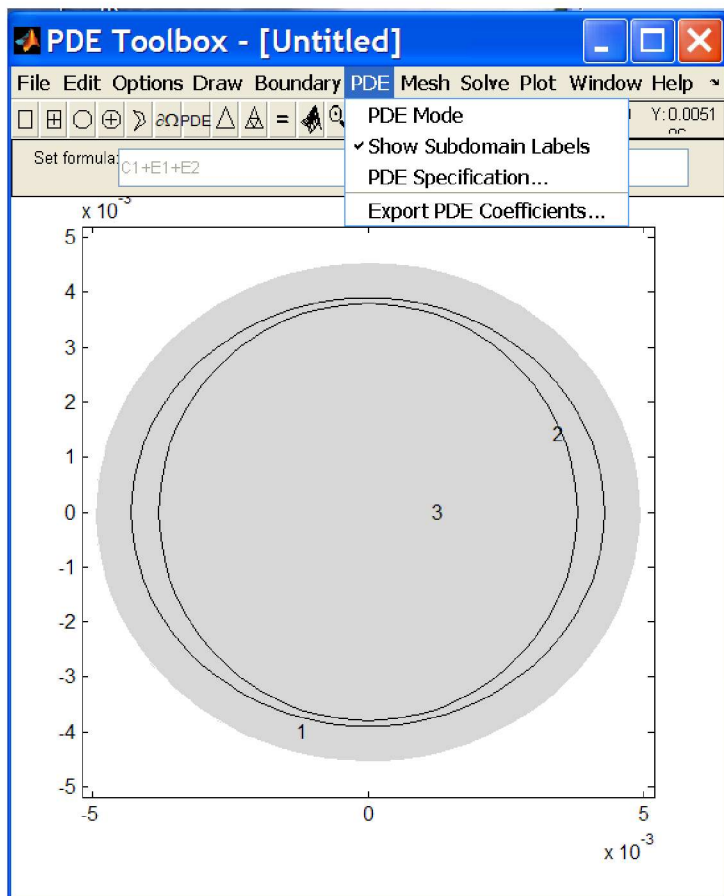


Рис. 11.14. Задание коэффициентов дифференциального уравнения

Двойной щелчок по номеру подобласти вызывает диалоговое окно для ввода коэффициентов дифференциального уравнения.

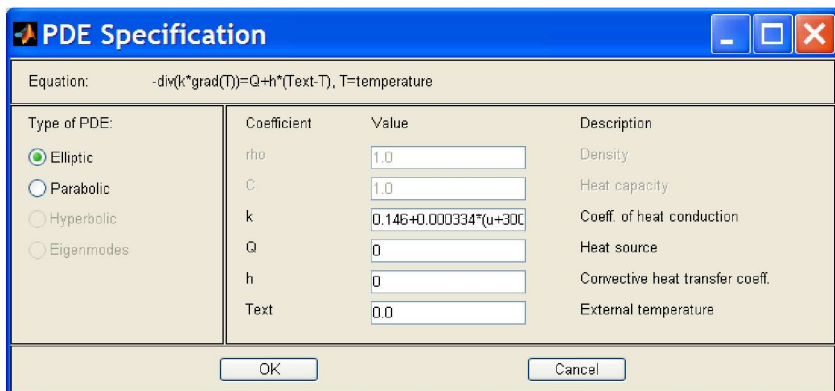


Рис. 11.15. Выбор типа дифференциального уравнения

Рассматривается стационарная эллиптическая задача, и мы отмечаем нужный пункт в левой части диалогового окна (Elliptic отмечено по умолчанию). Дифференциальное уравнение теплопроводности показано в верхнем окне. Смысл коэффициентов поясняется в правом окне.

Мы исключаем в правой части конвективный оператор  $h*(Text - T)$  и устанавливаем  $h, Text = 0$ . (Вообще говоря, этот оператор может быть полезен для постановки другой задачи – с тонким диском, отдающим теплоту в окружающую среду с верхней и нижней плоской круглой поверхности, но не для рассматриваемой сейчас задачи с длинным тепловыделяющим стержнем).

Принципиальный для реальных приложений вопрос о возможной сильной зависимости свойств тела от температуры решается следующим образом. В окне ввода коэффициента теплопроводности  $k$  видна *формула*, задающая температурную зависимость. В режиме работы с графическим интерфейсом пользователя (GUI программы `pdetool`), как это происходит сейчас, формула вводится вручную по правилам записи выражений, принятым в Matlab. Обозначение зависимой переменной “ $u$ ” принято по умолчанию в пакете `PDEToolbox`, и мы должны использовать его вместо мнемонического  $T$  для прикладной области «теплообмен» (см. Options, Application, Heattransfer). Слагаемое «300» означает точку отсчета температуры, т.е. температуру окружающей среды.

Мощность внутренних источников в гелиевом зазоре нулевая, поэтому  $Q = 0$ .



Для центральной области с внутренним тепловыделением указывается значение мощности внутренних источников теплоты, Вт/м<sup>3</sup>.

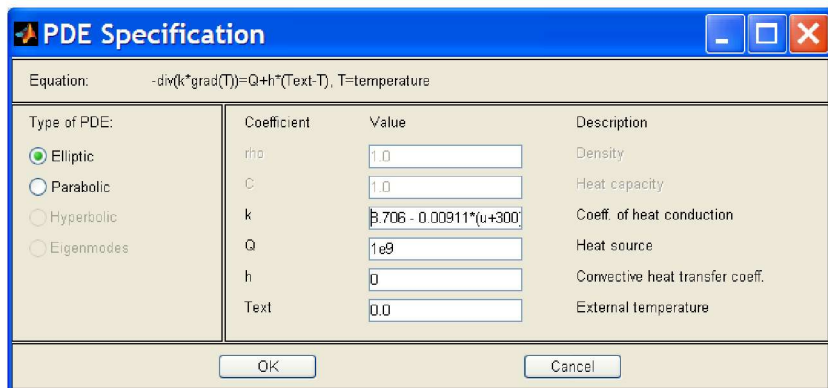


Рис.11.16. Задание мощности внутреннего источника

Поскольку задача с переменными, зависящими от температуры, свойствами становится нелинейной, необходимо указать это в разделе Solve, Parameters..., Usenonlinear solver (применить нелинейный решатель), иначе при запуске решения будет выдано сообщение об ошибке.

### Генерация сетки

В пакете PDEToolbox применяется численный метод конечных элементов (FEM, finite-element method), который предусматривает разбиение расчетной области на треугольники конечных (хотя и малых) размеров. Искомое поле температуры представляется значениями в вершинах треугольников. Триангуляция расчетной области является эффективным способом учесть особенности сложной геометрии реальных объектов. Дифференциальное уравнение в частных производных используется для того, чтобы тем или иным способом вывести и записать систему *алгебраических* уравнений для узлов сетки (вершин треугольников). Решение такой системы, в реальных задачах с очень большим числом неизвестных, является центральной проблемой численного анализа. Соответствующий блок вычислительной программы (solver, решатель) требует значительных вычислительных мощностей и времени выполнения. Для показанной первичной, достаточно грубой сетки (InitializeMesh) число узлов (число неизвестных) составляет 561, а после улучшения (RefineMesh) – еще на порядок больше.

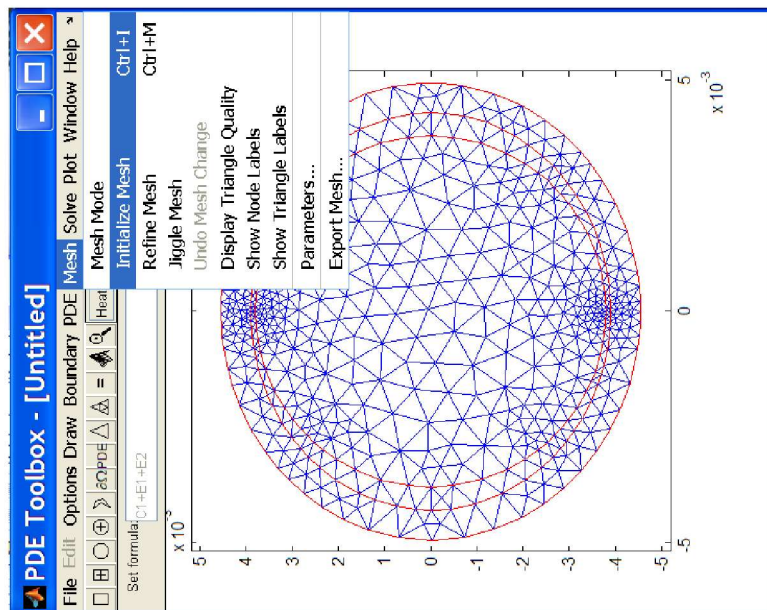
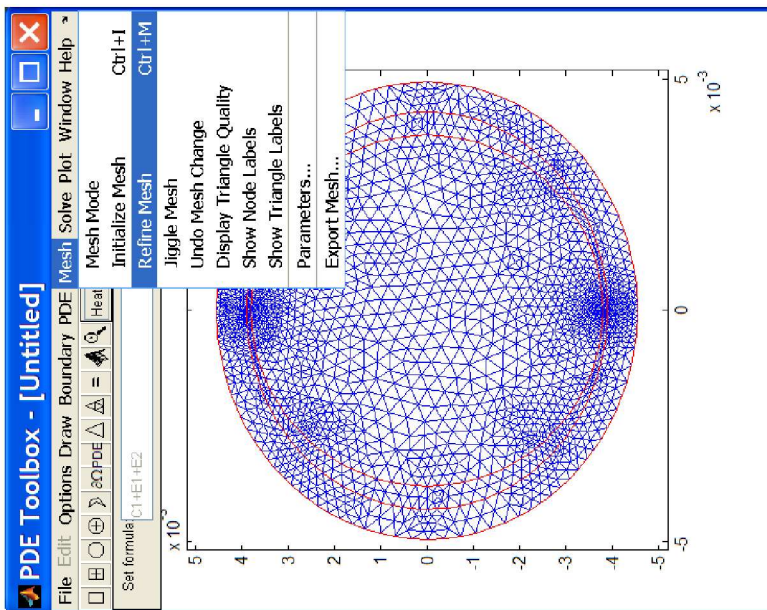


Рис. 11.17. Создание сетки

## Решение

В режиме **Solve, SolveParameters** (решение, параметры решения) следует отметить **Use nonlinear solver** (использовать нелинейный решатель) и указать начальное приближение для температуры, поскольку процедура решения для нелинейных задач носит итерационный характер.

Дополнительно можно включить режим автоматического улучшения решения (**Adaptive mode**).

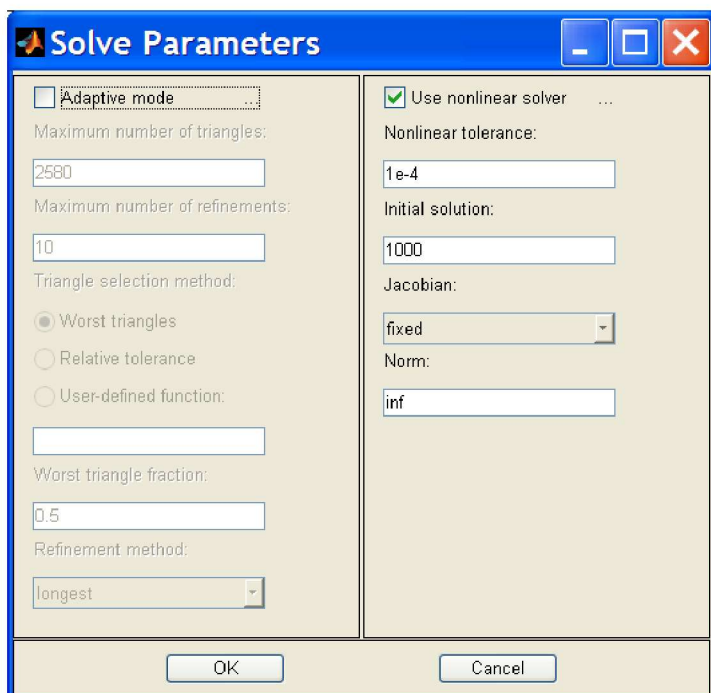


Рис. 11.18. Задание опций решения

Запуск решения осуществляется выбором **Solve, SolvePDE** или нажатием кнопки « $\Rightarrow$ » на панели инструментов.

## Визуализация решения

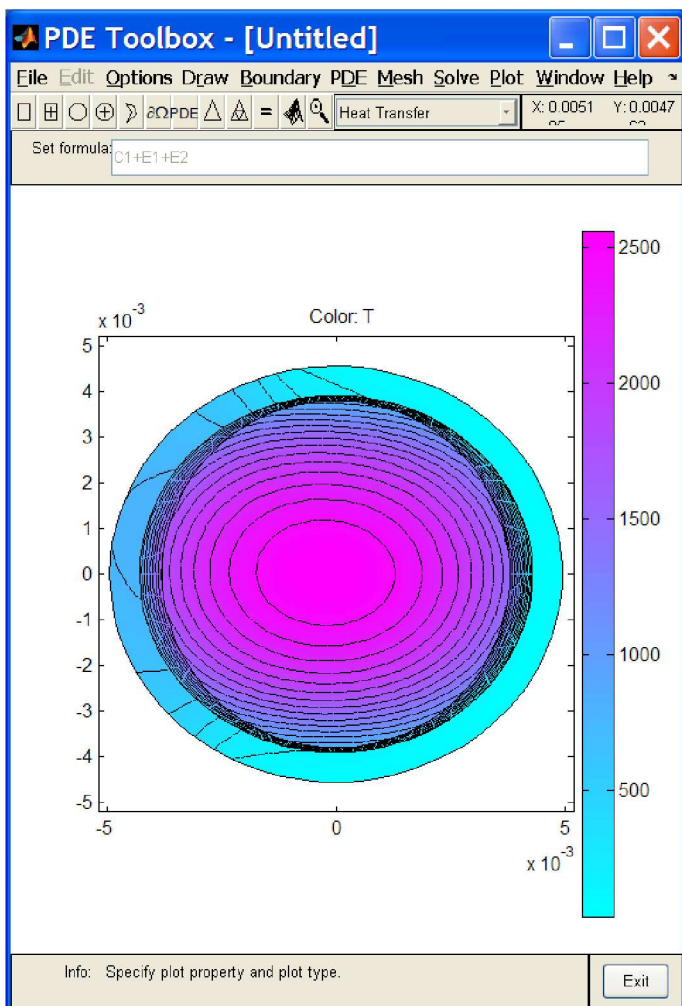


Рис. 11.19. Визуализация результатов решения

Температурное поле твэла как результат численного решения представлено цветом (Color, цветовая шкала представлена справа) и изотермами (Contour). Отчетливо видна асимметрия распределения температуры, вызванная неравномерностью зазора и ухудшенными условиями теплоотдачи на левом верхнем сегменте внешней поверхности.

В режиме **Plot, Parameters** предоставляются дополнительные способы визуализации результатов. Векторное поле плотности теплового потока (heatflux) будет построено, если выбрать **Arrows** (стрелки). Пространственный график распределения температуры получается при включении позиции **Height (3-Dplot), temperature**.

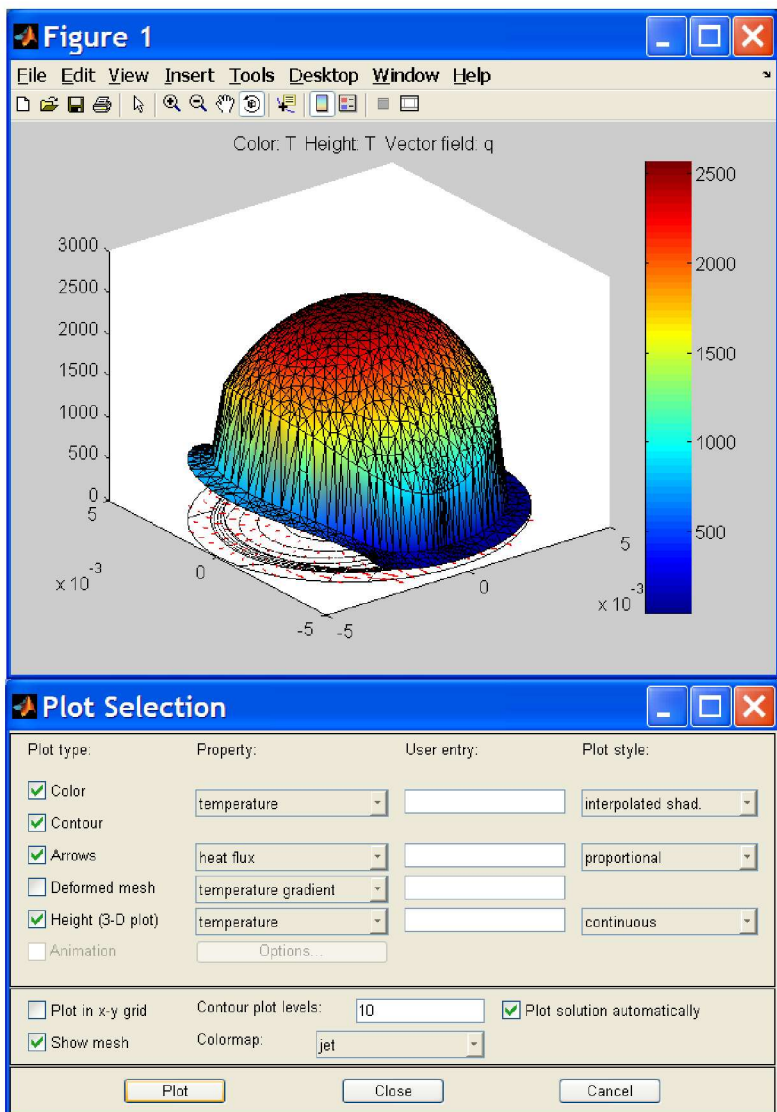


Рис. 11.20. Построение пространственных полей температуры

Отчетливо видны сильные перекосы температурного поля, способные вызвать значительные и неравномерно распределенные температурные напряжения в твэле. Температура циркониевой оболочки (синий и голубой ободки на рисунке) в рассматриваемом экстремальном режиме функционирования твэла явно превосходит допустимый предел (примерно 400°C). Экспериментирование с различными режимами, в том числе аварийными, составляет основную задачу численного моделирования инженерных объектов.

Имеются дополнительные возможности улучшения графики, открывающиеся при работе с меню. Можно добавить комментарии, изменить палитру и т.п.

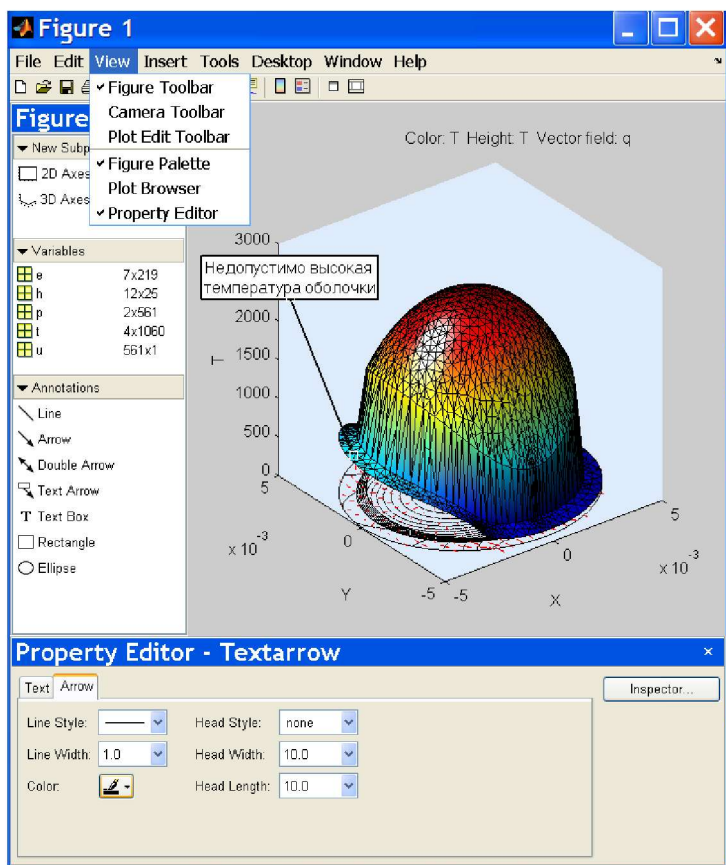


Рис. 11.21. Анализ температурного поля

## 11.7. Экспорт решения и постпроцессорная обработка

### *Экспорт решения в среду Matlab*

Результаты численного моделирования сохраняются в режиме **Solve > ExportSolution**

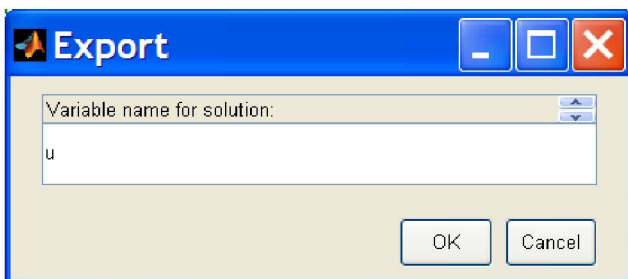


Рис. 11.22. Сохранение результатов решения

Кроме того, необходимо экспортировать данные о расчетной сетке: **Mesh, ExportMesh**.

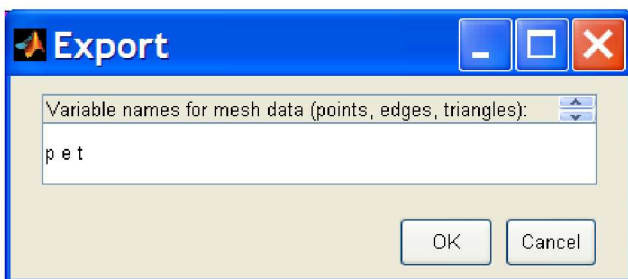


Рис. 11.23. Сохранение данных расчетной области

В результате становятся доступными данные о температуре (матрица  $u$ ), координатах  $x, y$  точек (матрица  $p$ ), сторонах (матрица  $e$ ) и треугольниках (матрица  $t$ ). Они могут быть сохранены в файлах, таких как `dltHe_max.mat`, `dltHe_min.mat` и использованы для дальнейшей, так называемой, постпроцессорной обработки результатов.

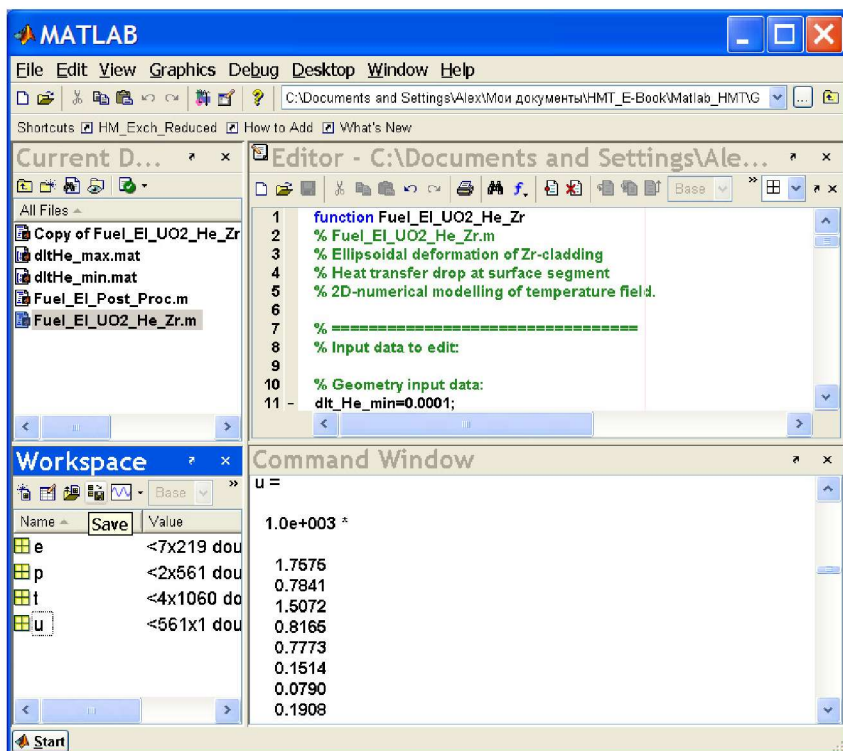


Рис. 11.24. Обеспечение постпроцессорной обработки результатов

### *Постпроцессорная обработка. Распределение температуры по окружности топливного стержня*

Небольшая Matlab программа сопоставляет распределение температуры по окружности топливной таблетки при работе твэла с нормальным гелиевым зазором и увеличенным зазором при эллипсоидальной деформации оболочки. Это пример пользовательского расширения ограниченных возможностей визуализации результатов, предусмотренных непосредственно в PDEToolbox.



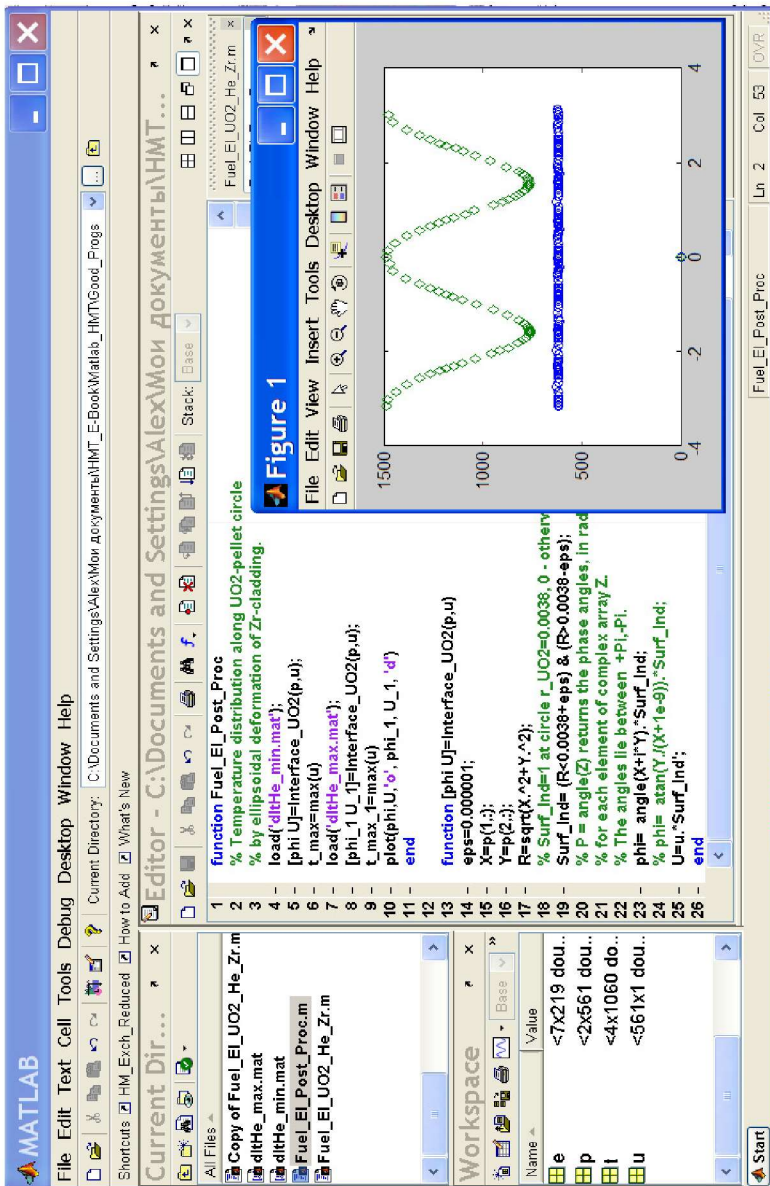


Рис. 11.25. Расчет распределения температуры по периметру

### *Matlab – функция Fuel\_El\_UO2\_He\_Zr*

При разработке модели в режиме графического пользовательского интерфейса, как описано выше, автоматически создается функция Matlab с именем (по умолчанию) `functionpdemodel`, являющаяся протоколом действия пользователя. Вызов этой функции в среде Matlab воспроизводит все необходимые установки и запускает решение задачи.

Однако если производится численное моделирование объекта с изменяющимися размерами, свойствами, условиями на границах, то стандартная процедура становится слишком громоздкой и трудоемкой.

Средствами языка программирования Matlab можно так *модифицировать автоматически созданную функцию*, чтобы варьируемые параметры задавались в специальном блоке программы (или даже в универсальном графическом интерфейсе пакета Matlab).

В приводимом далее тексте функции `Fuel_El_UO2_He_Zr` первый блок программы:

```
% Geometryinputdata
```

содержит геометрические параметры твэла: минимальную и максимальную толщину гелиевого зазора, толщину циркониевой оболочки, радиус топливной таблетки. Этим параметрам присваиваются значения, которые используются затем при построении расчетной области функциями `pdecirc`, `pdeellip`. Таким образом, вместо того чтобы вручную перерисовывать сложный объект, можно изменить размеры в тексте программы, и новый вариант будет построен автоматически.

Аналогично вводятся параметры теплоотдачи, температуры окружающей среды, мощности внутренних источников. Коэффициенты теплопроводности диоксида урана и гелия существенно зависят от температуры и для их расчета вводятся соответствующие аппроксимации.

Параметризация задачи существенно упрощает работу с моделью, поскольку редактирование значений легко осуществляется в окне редактора Matlab.

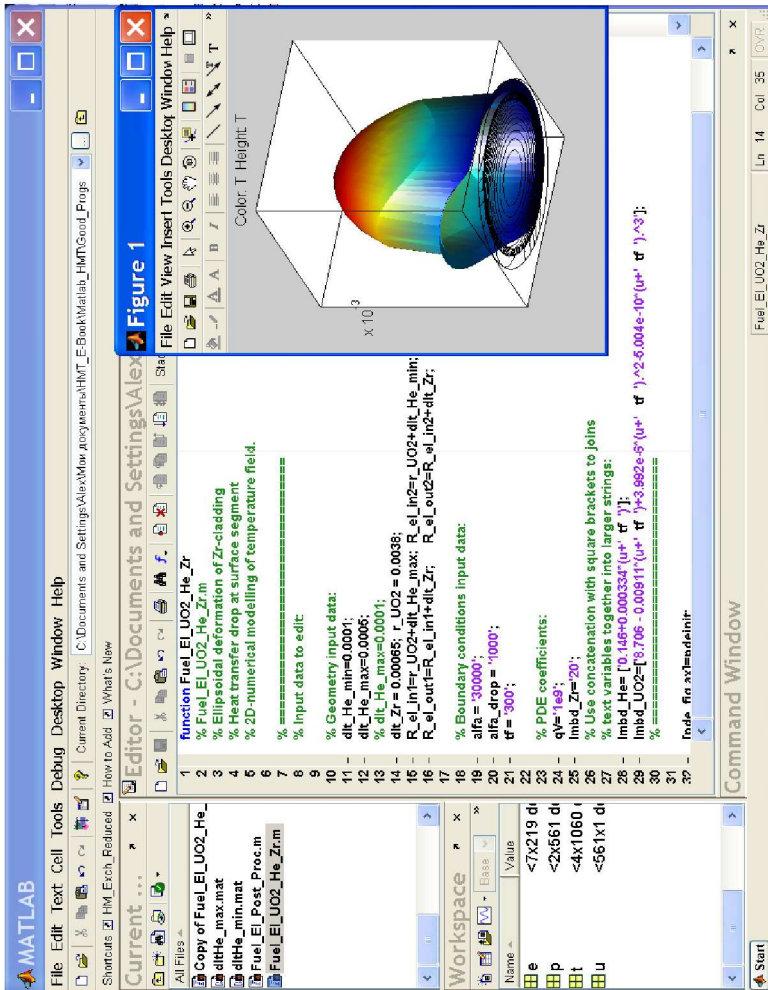


Рис.11.26. Обеспечение вариантных расчетов

```

function Fuel_El_UO2_He_Zr
% Fuel_El_UO2_He_Zr.m
% Ellipsoidal deformation of Zr-cladding
% Heat transfer drop at surface segment
% 2D-numerical modelling of temperature field.

% =====
% Input data to edit:

% Geometry input data:
dlt_He_min=0.0001;
dlt_He_max=0.0005;
% dlt_He_max=0.0001;
dlt_Zr = 0.00065; r_UO2 = 0.0038;
R_el_in1=r_UO2+dlt_He_max;
R_el_in2=r_UO2+dlt_He_min;
R_el_out1=R_el_in1+dlt_Zr;   R_el_out2=R_el_in2+dlt_Zr;

% Boundary conditions input data:
alfa = '30000';
alfa_drop = '1000';
tf = '300';

% PDE coefficients:
qV='1e9';
lmbd_Zr='20';
% Use concatenation with square brackets to joins
% text variables together into larger strings:
lmbd_He= ['0.146+0.000334*(u+' tf)'];
lmbd_UO2=['8.706 - 0.00911*(u+' tf ')'+3.992e-6*(u+' tf
')^2 - 5.004e-10*(u+' tf ')^3'];
% =====

```

```

[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'XLim',[-R_el_out1*1.05 R_el_out1*1.05]);
set(ax,'YLim',[-R_el_out1*1.05 R_el_out1*1.05]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% pdecirc(0,0,0.0038,'C1');
pdecirc(0,0,r_UO2,'C1')
pdeellip(0,0, R_el_in1, R_el_in2,0,'E1')
pdeellip(0,0,R_el_out1,R_el_out2,0,'E2')
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','C1
+E1+E2')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(12,...'neu',...1,...alfa,...'0')
pdesetbd(11,...'neu',...1,...alfa,...'0')
pdesetbd(10,...'neu',...1,...alfa,...'0')
pdesetbd(9,...'neu',...1,...alfa_drop,...'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinement','regular');
% [p,e,t]=initmesh(g);
% [p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
pdetool('initmesh')
% pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...

```

```

[lmbd_Zr '!' lmbd_He '!' lmbd_UO2],...
'0!0!0',...
['(0)+(0).*(0.0)!(0)+(0).*(0.0)!(' qV ')+(0).*(0.0)],...
'(1.0).*(1.0)!(1.0).*(1.0)!(1.0).*(1.0)',... '0:10',... '0.0',... '0.0',... '[0 100]');

% Use the "char" function to create character array
% from strings of different lengths (see 2-26 Programming)
setappdata(pde_fig,'currparam',...
char('1.0!1.0!1.0',...
'1.0!1.0!1.0',...
[lmbd_Zr '!' lmbd_He '!' lmbd_UO2],...
['0!0!' qV],...
'0!0!0',...
'0.0!0.0!0.0 '))

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('0','6360','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','1','1e-4','1000','fixed','inf'));

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve');

```

## Заключение

PDEToolbox является эффективным и доступным средством решения задач тепломассообмена. Освоение этого встроенного в Matlab инструмента является естественным первым шагом к более мощным вычислительным пакетам, в особенности к системе Femlab, также базирующейся на вычислительной среде Matlab и известной как оперативное средство решения сложных реальных задач.

PDEToolbox сочетает в себе, с одной стороны, фирменный графический пользовательский интерфейс, встроенные эффективные алгоритмы построения областей, сеток, решений, и – с другой – открытость программы, возможность пользовательского вмешательства на разных уровнях. Благодаря этому, можно разрабатывать удобные специализированные системы, как в приведенном выше простом примере задачи о температурном поле твэла (см. функцию «Fuel\_El\_UO2\_He\_Zr»).

### 11.8. Примеры решения задач в пакетах MathCad и ANSYS

Примеры решения задач в MathCad сгруппированы по соответствующим главам и представлены в [25, 26], ниже представим решение задач теплопроводности в пакете Ansys. В настоящее время пакет Ansys представляет собой многодисциплинарный программный комплекс для решения задач механики твердого тела, электротехники, магнитодинамики, теплообмена и гидродинамики как в одномерной постановке, так и в рамках 3-D моделирования.

Ниже на рисунках 11.27, 11.28 представлен входной интерфейс программного комплекса Ansys Student раздела Mechanical APDL, предназначенного и для решения задач теплопроводности.

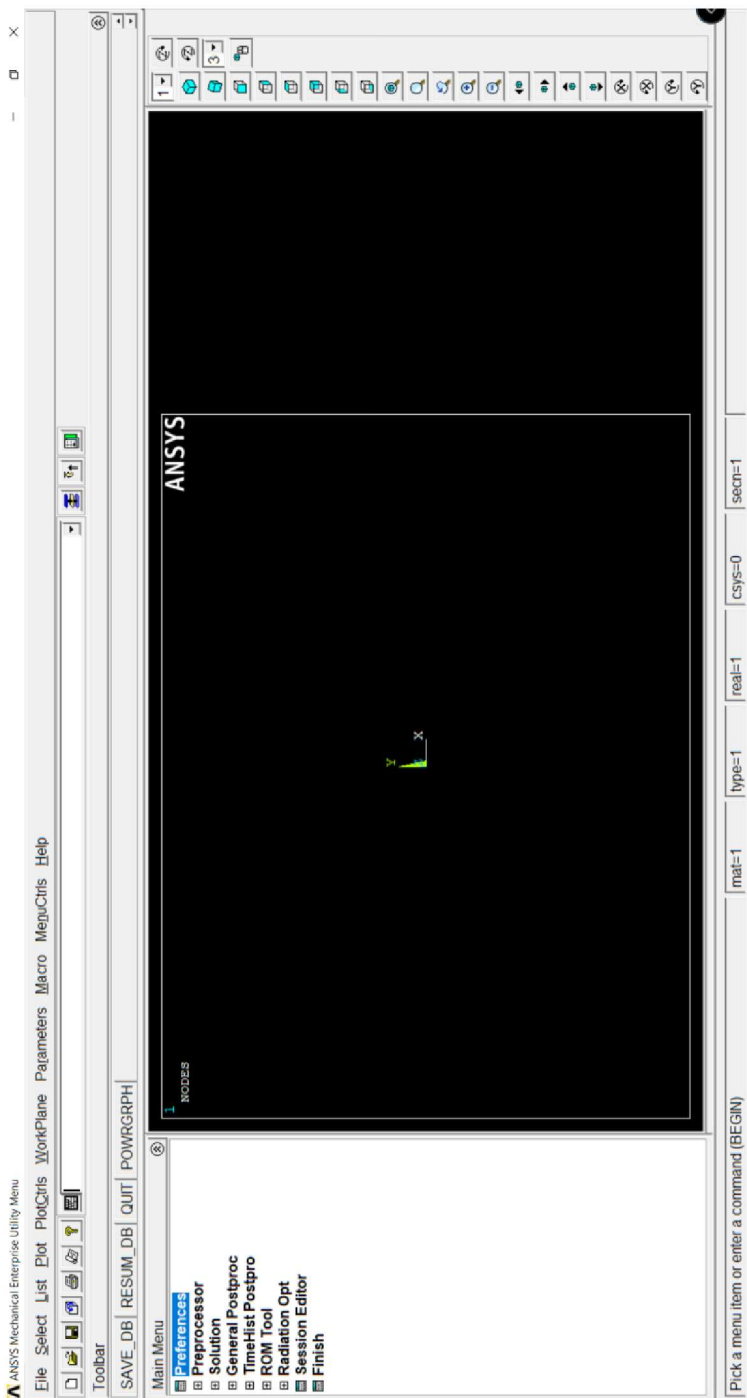


Рис.11.27. Входной интерфейс программы Ansys



В области, обозначенной как **Main Menu**, представлены основные этапы моделирования, а именно:

**Preferences** – выбор класса задач для решения, выбираем тепловые задачи, тип **Thermal**

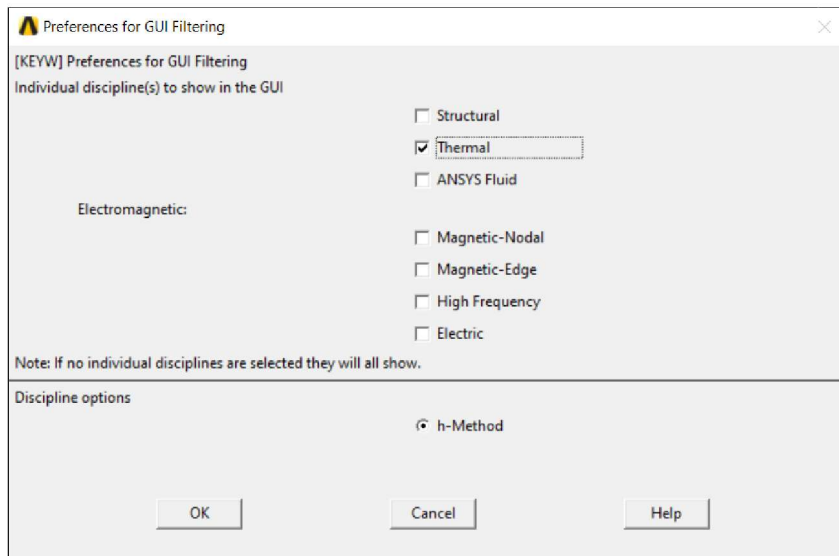


Рис.11.28. Выбор типа решаемых задач

Рассмотрим применение основных подпунктов **Main Menu** в процессе численного моделирования задач стационарной и нестационарной теплопроводности

**Задача №1.** Стационарная теплопроводность пластины при граничных условиях I-го рода

Плоская стенка выполнена из бетона. Толщина стенки  $\delta = 300$  мм. На одной стороне стенки температура  $t_{c1} = 21$  °С, на другой  $t_{c2} = -28$  °С. Найти плотность теплового потока через стенку и распределение температуры в стенке при плотности бетона  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>, теплопроводности  $\lambda = 1.28$  Вт/м×К, теплоемкости  $C_p = 0.84$  кДж/кг×К.

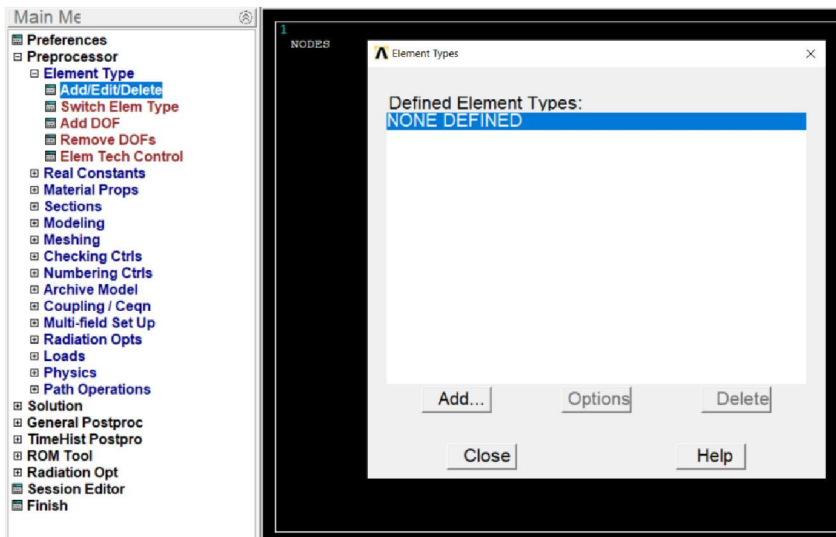
**Решение:** Анализ условия задачи показывает, что стенка имеет два других размера (высота и ширина) много больше, чем толщина стенки  $\delta$  – приближение плоской стенки, т.е. тепловой

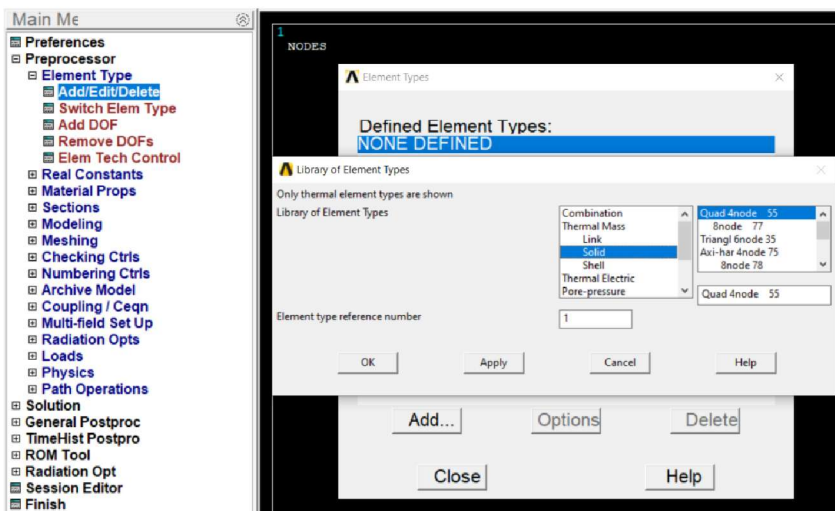
поток направлен вдоль толщины стенки, тепловым потоком через торцы можно пренебречь. Теплофизические свойства материала стенки постоянны, внутренние источники теплоты отсутствуют. Математическое описание задачи соответствует задаче одномерной стационарной теплопроводности гл. 4 п. 4.2 формулы (4.6). Задача имеет аналитическое решение, полученное в гл. 4 формулы (4.10), (4.12), которое может быть использовано для сравнения.

Таким образом, при моделировании в Ansys необходимо построить двумерный объект – прямоугольник, приближение плоской стенки будем задавать с помощью граничных условий 2-го рода  $q = 0$  на торцах этого прямоугольника.

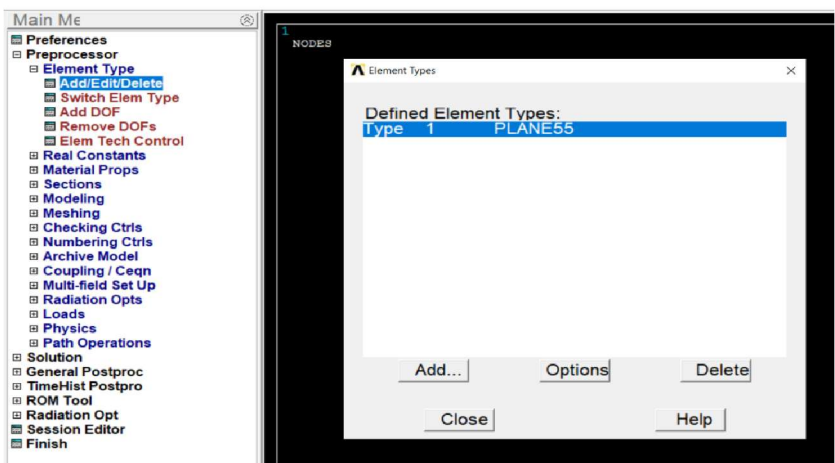
**Preprocessor** – построение объекта исследования, задание теплофизических свойств материалов объекта, создание расчетной области путем генерации сетки из выбранных элементов

**Шаг 1.** Выбираем в меню **Preprocessor** тип элементов, которыми будем разбивать расчетную область **Element type\Add\Edit\Delete** с помощью кнопки **Add** и далее, например, с помощью мышки **Thermal Mass\Solid** плюс **Quad** (четырёхугольник, тип 55)





OK

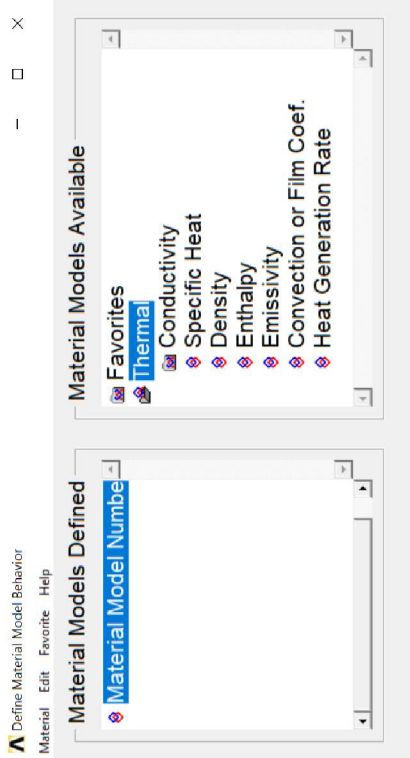


Close

Шаг 2. Задаем единицы измерения температуры и теплофизические свойства материала:  
**Material Props\Temperature Units**



**Material Props\Material Models\Thermal**



Выбираем коэффициент теплопроводности **Conductivity** неизменным по всем направлениям пространства **Isotropic** и вводим его значение для материала в задаче (бетон)



Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ▢ Preferences
- ▢ Preprocessor
  - ▢ Element Type
  - ▢ Real Constants
  - ▢ Material Props
    - ▢ Material Library
    - ▢ Temperature Units
    - ▢ Electromag Units
    - ▢ Material Models
      - ▢ Convert ALPx
      - ▢ Change Mat Num
      - ▢ Write to File
      - ▢ Read from File
  - ▢ Sections
  - ▢ Modeling
  - ▢ Meshing
  - ▢ Checking Ctrls
  - ▢ Numbering Ctrls
  - ▢ Archive Model

Define Material Model Behavior  
Material Edit Favorite Help

Material Models Defined

- ▢ Material Model Number

Material Models Available

- ▢ Favorites
- ▢ Thermal
  - ▢ Conductivity
    - ▢ Isotropic
    - ▢ Orthotropic
  - ▢ Spf
    - ▢ Conductivity for Material Number 1
- ▢ Def
- ▢ Em
- ▢ Cor

Conductivity (Isotropic) for Material Number 1

Temperatures  
KXX

T1

1.28

Add Temperature Delete Temperature

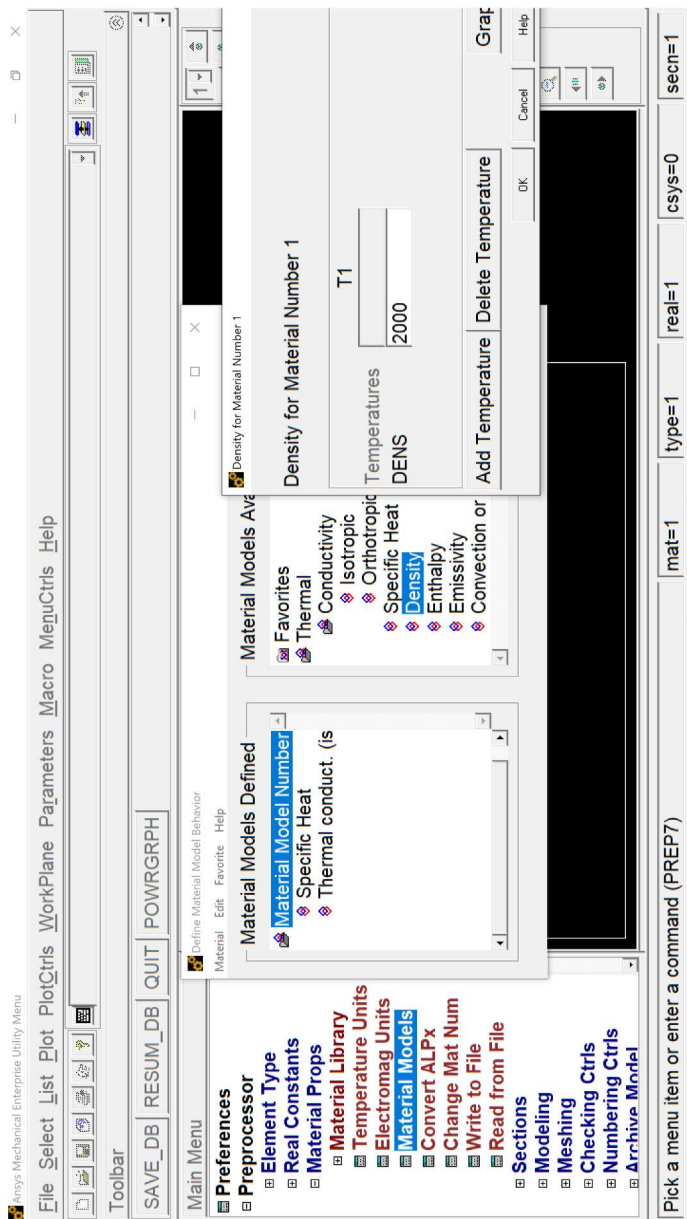
Graph

Pick a menu item or enter a command (PREP7)

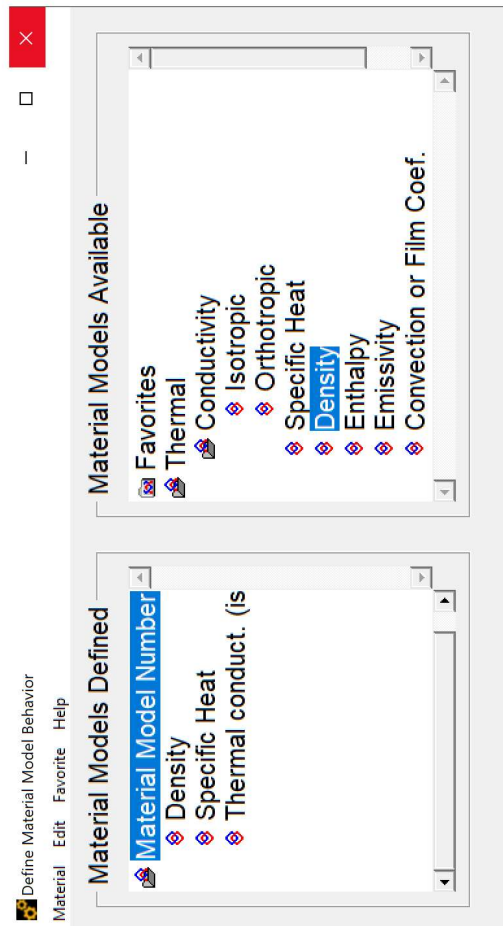
OK Cancel Help



После **OK** (результат задания теплоемкости переместился в поле **Material Model Number 1**) выбираем плотность материала **Density** и вводим ее постоянное значение из условий задачи. Задание зависимости плотности от температуры производится аналогично коэффициенту теплопроводности.



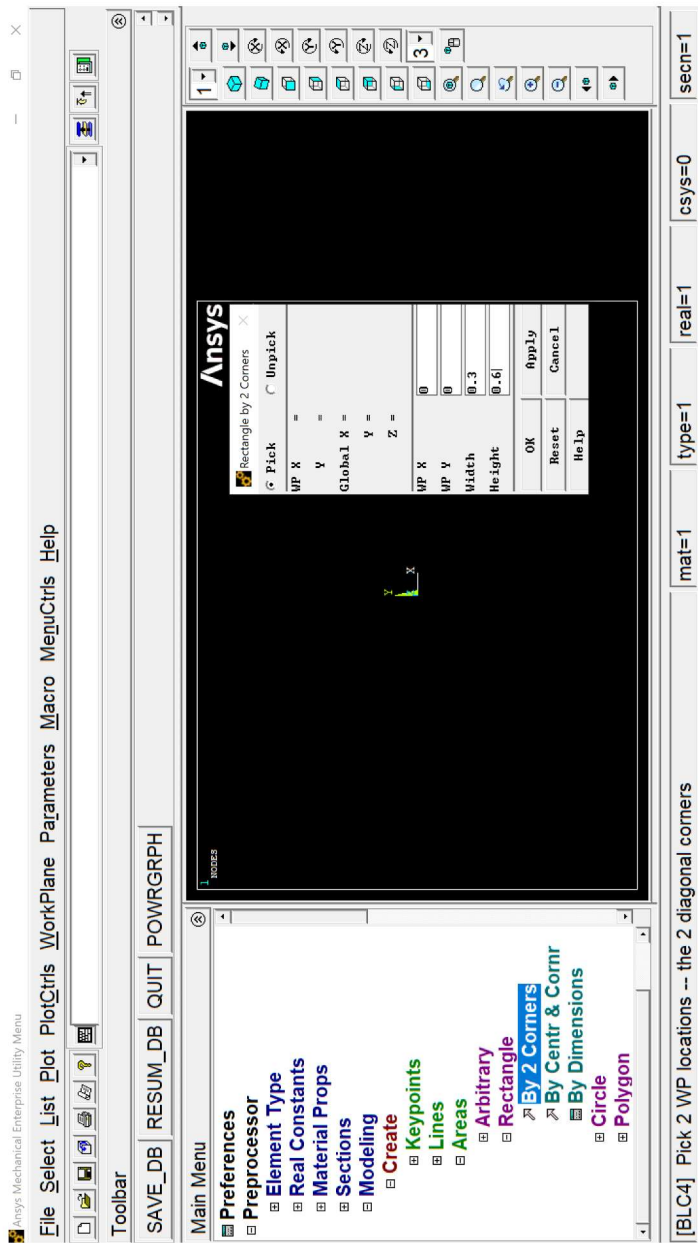
После **ОК** (результат задания плотности переместился в поле **Material Model Number 1**) все свойства материала по условиям задачи заданы, закрываем окно задания теплотехнических свойств.



**Шаг 3.** Сохранение созданного проекта с помощью команд меню **File\Save As** на диск, в папку с английским названием в виде файла с английским именем и расширением **.db**, каждый **Шаг** сохранения желательно делать с оригинальным именем файла.

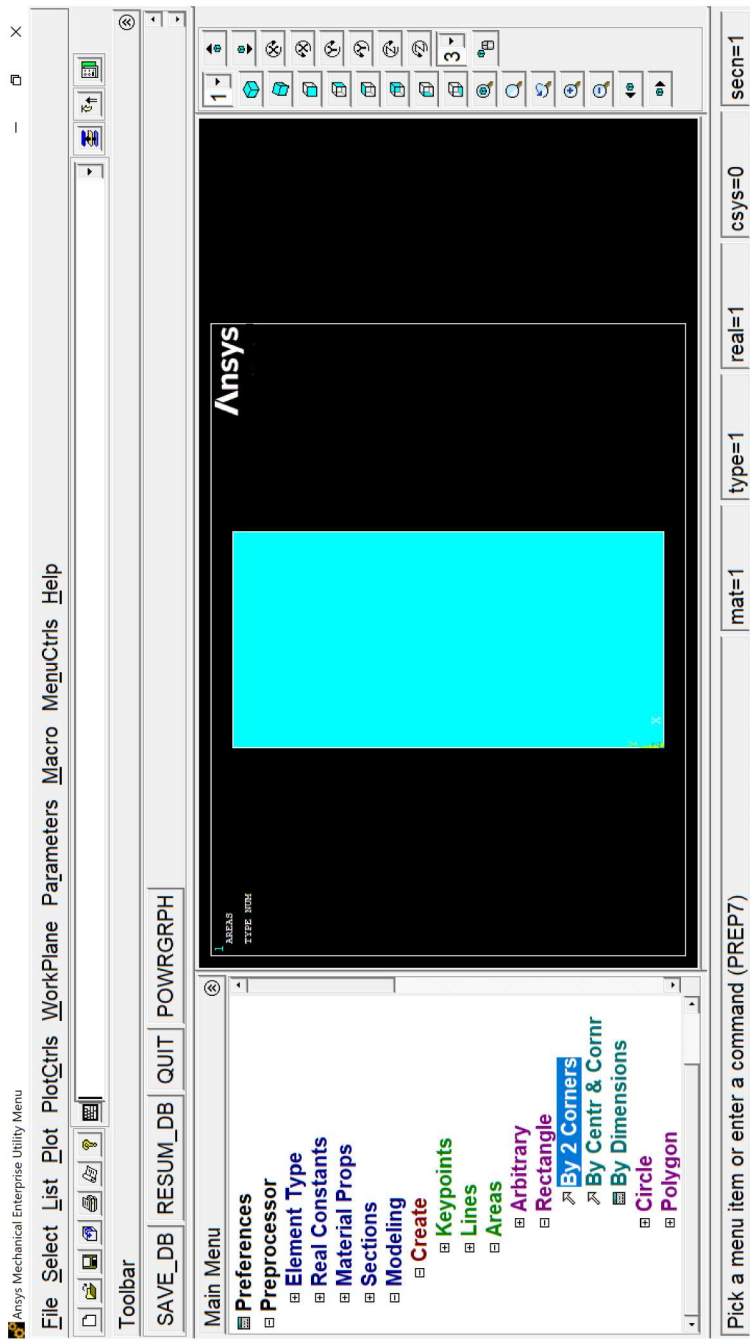


## Шаг 4. Создание объекта Производится в меню Modeling>Create\Areas\Rectangle\By 2 Corners

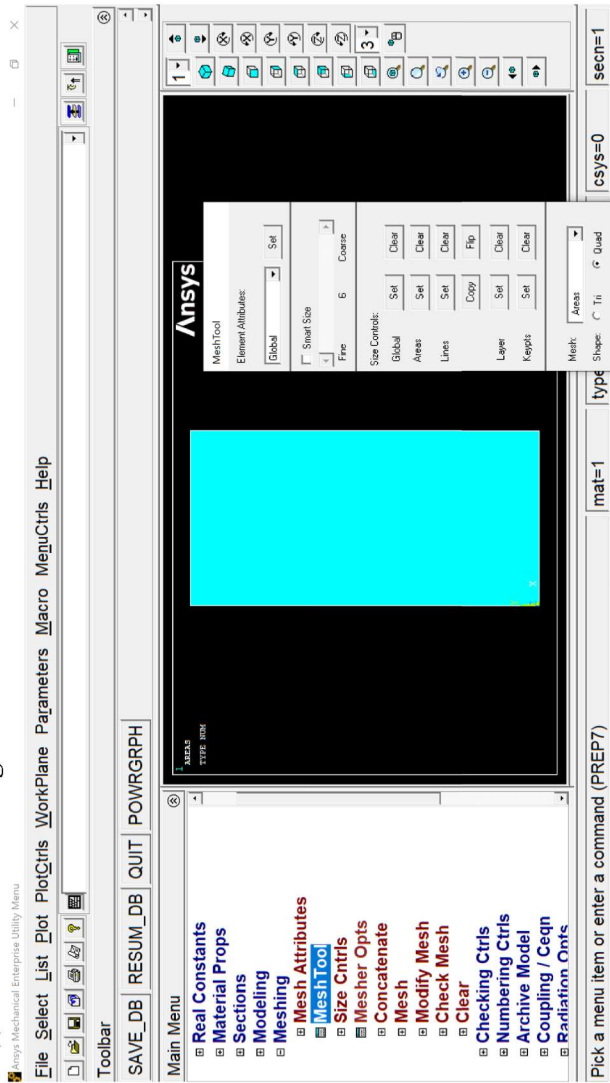


OK

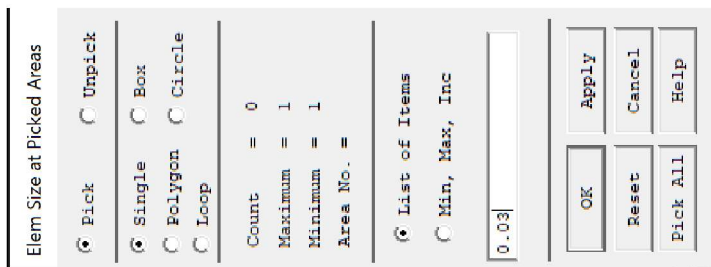
### И возможно повторить Шаг 3.



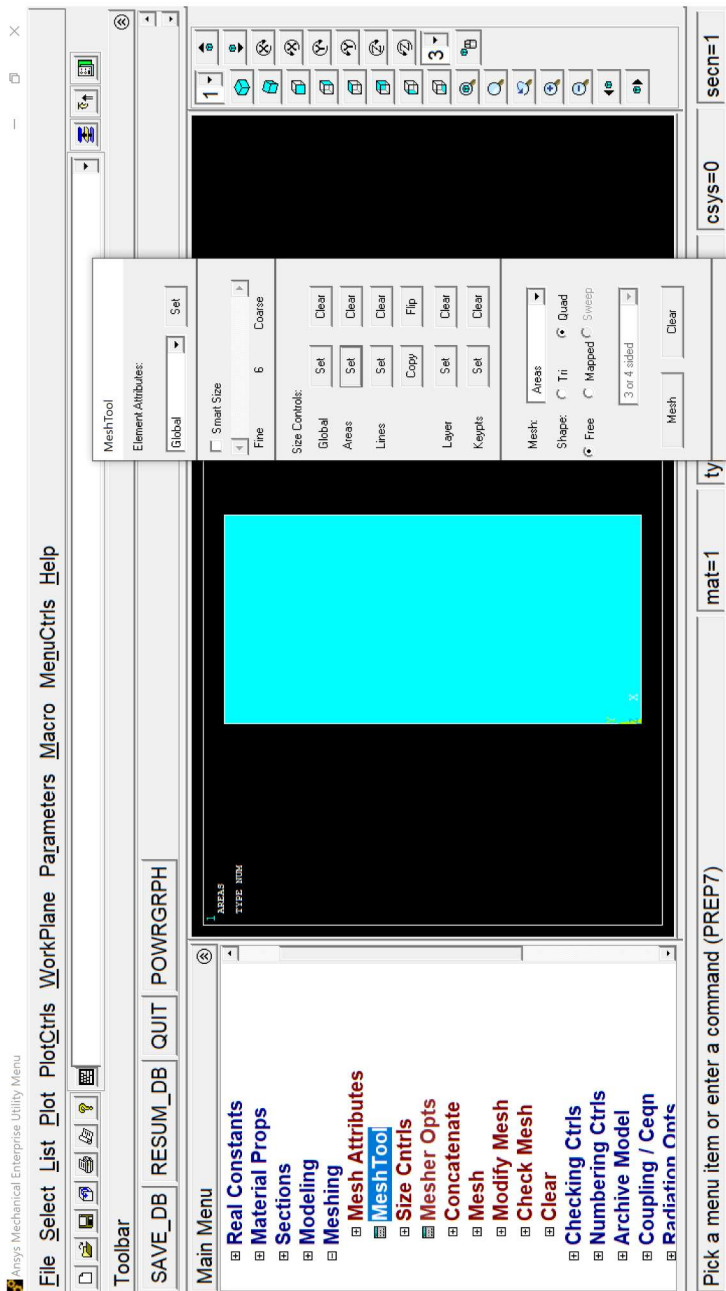
## Шаг 5. Создание расчетной сетки Производится в меню **Meshing\MeshTool**



Задаем размер стороны четырехугольника **Size Controls Areas** кнопка **Set** и, выделив курсором («стрелка вверх») расчетную область, нажатием левой кнопки мыши (цвет меняется с голубого на малиновый) вводим размер 0.03 м.



OK, далее **Meshing\Meshtool**  
**\Mesh** Areas, форма **Shape** - четырехугольник **Quad**, разбиение – **Free**



Кнопка **Mesh**, затем навести курсор на расчетную область (голубой цвет) курсор изменится на «стрелка вверх» и, нажав левую кнопку мыши, выделить расчетную область, подлежащую разбиению (малиновый цвет).

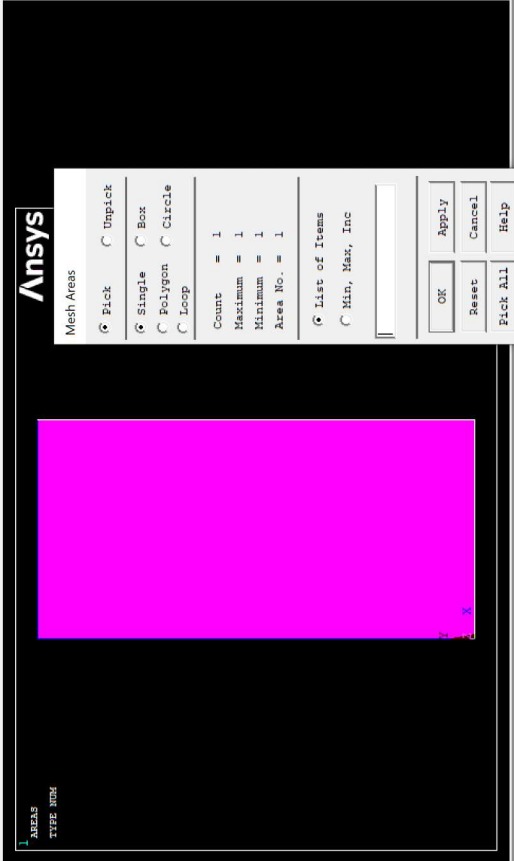


Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ▢ Real Constants
- ▢ Material Props
- ▢ Sections
- ▢ Modeling
- ▢ Meshing
  - ▢ Mesh Attributes
  - ▢ MeshTool
- ▢ Size Cntrls
- ▢ Mesher Opts
- ▢ Concatenate
- ▢ Mesh
- ▢ Modify Mesh
- ▢ Check Mesh
- ▢ Clear
- ▢ Checking Cntrls
- ▢ Numbering Cntrls
- ▢ Archive Model
- ▢ Coupling / Ceqn
- ▢ Radiation Cntrls



[AMESH] Pick or enter areas to be meshed

mat=1

type=1

real=1

csys=0

secn=1

далее в окне **Mesh Areas** нажать **OK**

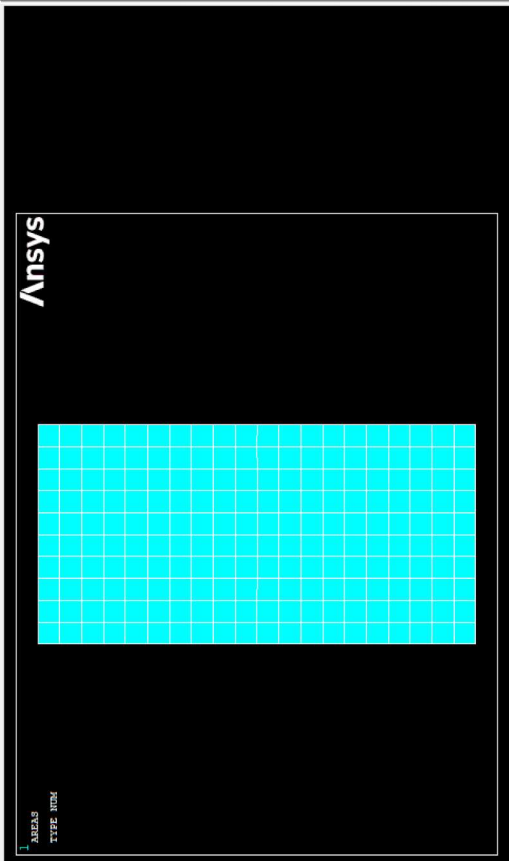


Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ▣ Real Constants
- ▣ Material Props
- ▣ Sections
- ▣ Modeling
- ▣ Meshing
  - ▣ Mesh Attributes
  - ▣ MeshToo
- ▣ Size Cntrls
- ▣ Mesher Opts
- ▣ Concatenate
- ▣ Mesh
- ▣ Modify Mesh
- ▣ Check Mesh
  - ▣ Clear
- ▣ Checking Cntrls
- ▣ Numbering Cntrls
- ▣ Archive Model
- ▣ Coupling / Ceqn
- ▣ Radiation Onts



Pick a menu item or enter a command (PREP7)

mat=1

type=1

real=1

csys=0

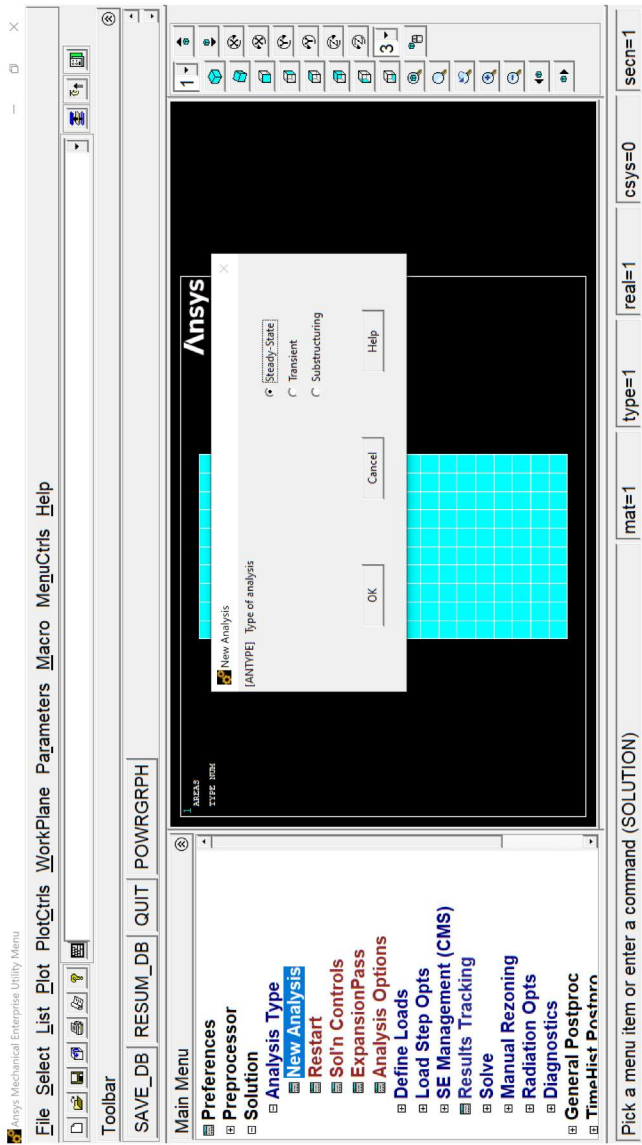
secn=1

Расчетная сетка построена, повторить Шаг 3, закрыть меню Preprocessor

## Шаг 6. Опции решения

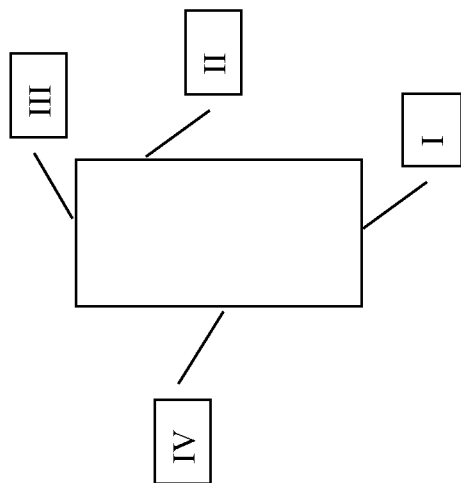
**Processor** – задание начальных и граничных условий, выбор метода решения, решение задачи.

Задача стационарная, выбираем **Solution\Analysis Type\New Analysis**, далее выбираем **Steady State** и нажимаем **OK**





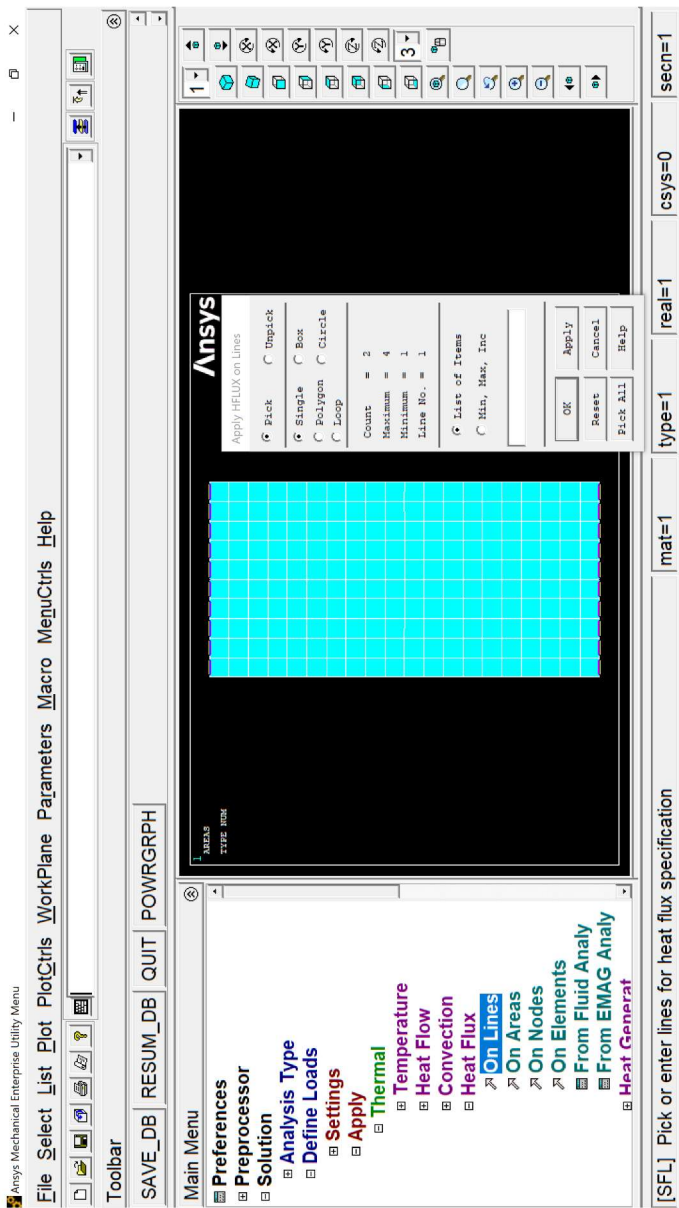
**Шаг 7.** Задание начальных и граничных условий  
Задача стационарная, значит, задаем только граничные условия:  
для границ I, III – граничные условия 2-го рода  $q = 0$



Переходим в меню

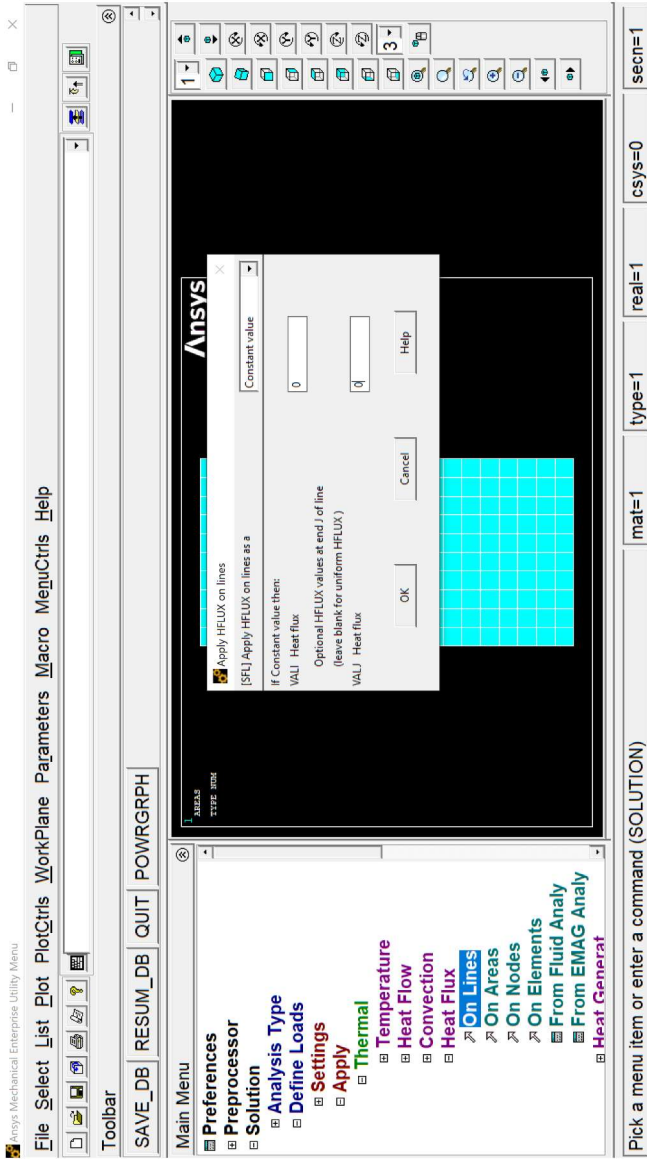
**Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Heat Flux\On Lines**

Наводим курсор на линию границы I («стрелка вверх») нажимаем левую кнопку мыши – граница выделяется штриховой линией, на границах I и III заданы одинаковые граничные условия, поэтому сразу же выделяем и границу III, («стрелка вверх») нажимаем левую кнопку мыши – граница выделяется штриховой линией.



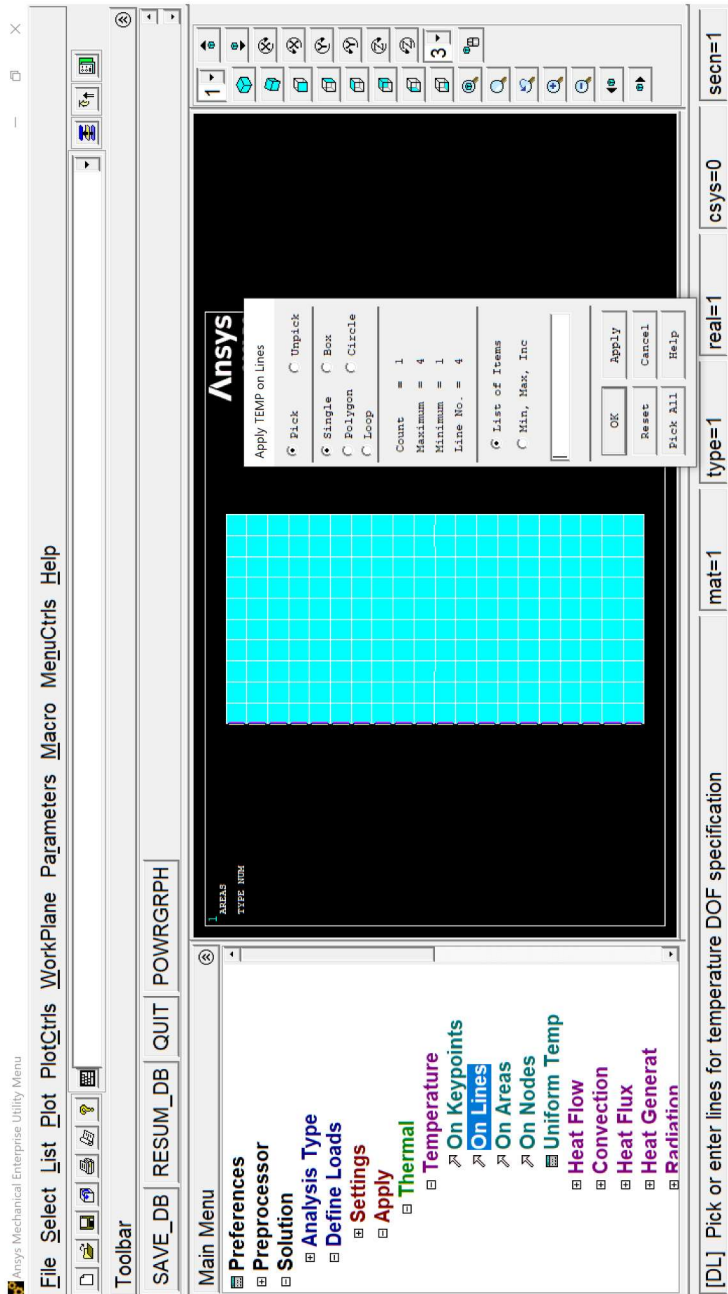
Нажимаем **OK**

И задаем значение плотности теплового потока **HFLUX** в виде постоянной величины **Constant value** равным **0**

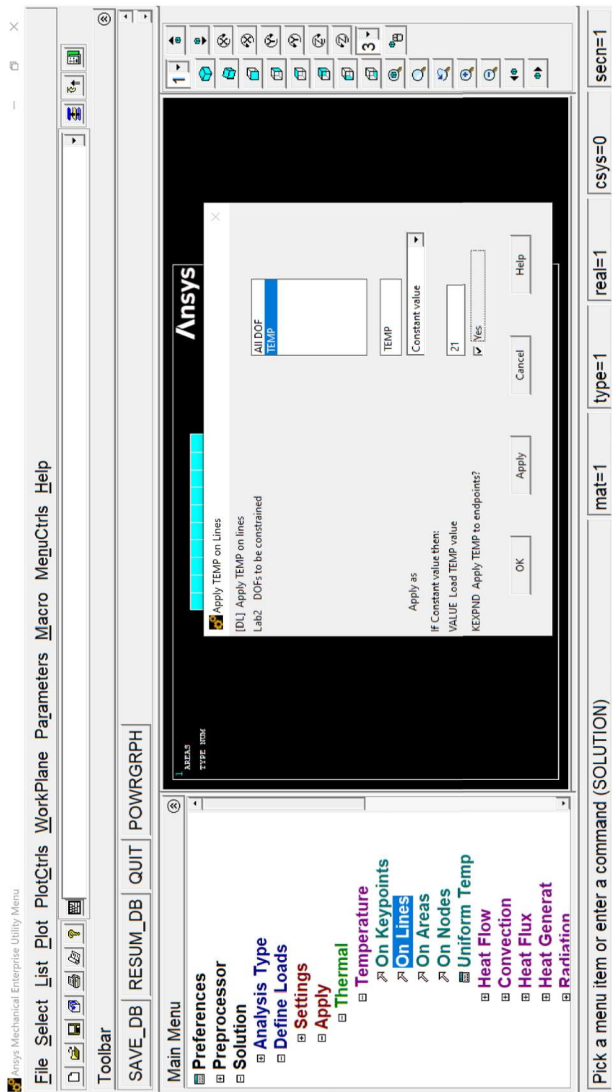


После нажатия кнопки **OK** граничные условия на границах I и III заданы.

Задаем граничные условия на границе IV в виде постоянной температуры  $t_{c1} = 21 \text{ }^{\circ}\text{C}$  с помощью меню **Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Temperature\On Lines** и наведения курсора на линию границы IV («стрелка вверх»), путем нажатия левой кнопки мыши – граница выделяется штриховой линией



Нажав кнопку **OK**, задаем значение температуры в виде постоянной величины 21 °C, при этом применяем данную температуру и к концам отрезка границы IV **Apply TEMP to endpoints** – галочка **Yes**



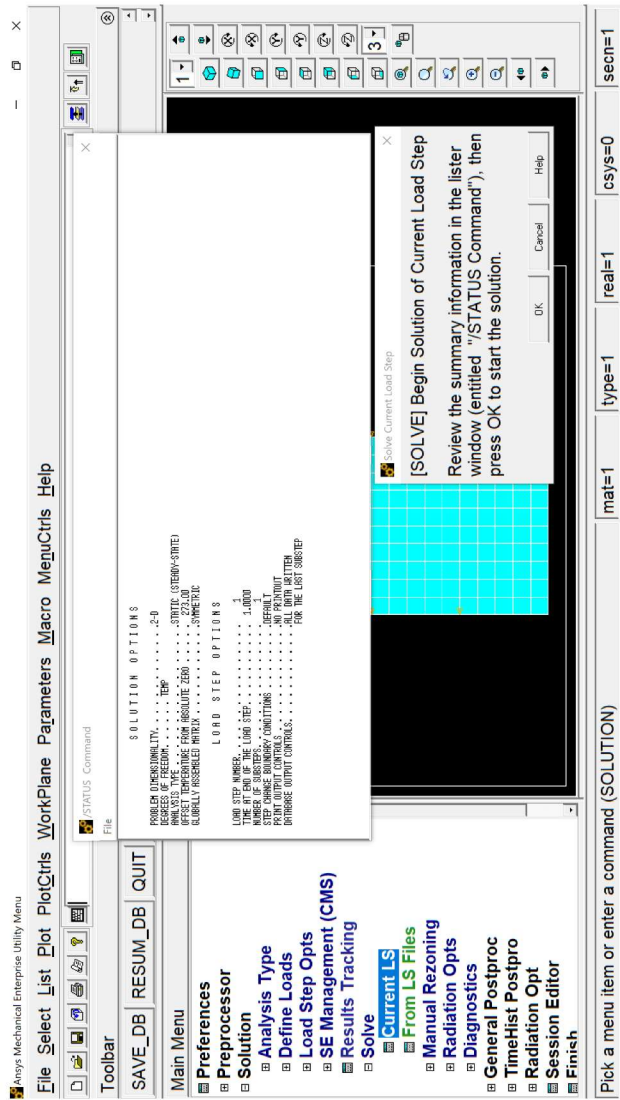
Нажатие кнопки ОК фиксирует задание граничного условия I-го рода на границе IV.

Задаем граничные условия на границе II в виде постоянной температуры  $t_{c2} = -28^{\circ}\text{C}$  аналогично заданию г.у. на границе IV.

Повторяем Шаг 3.

## Шаг 8. Решение

Производится с помощью меню **Solution\Solve\Current LS (Current Load Step - Текущий шаг нагружения)**. Появляющееся окно **Status** – информационное, запуск на решение осуществляется в окне **Solve Current Load Step** путем нажатия кнопки **OK**



По окончании решения появляется сообщение



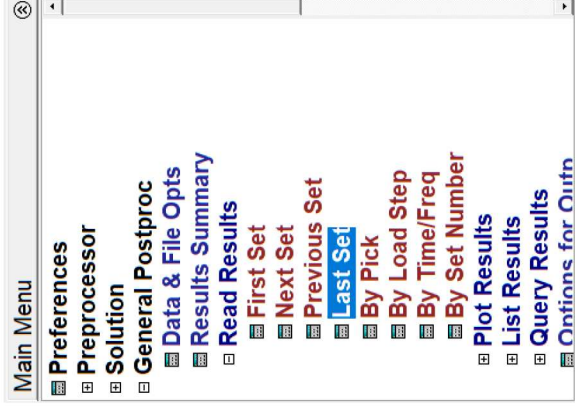
Теперь необходимо отобразить результаты расчета.

**Шаг 9. PostProcessor** – отображение результатов решения в виде графиков, полей искомых величин, разверток решения во времени, сохранение и передача результатов численного моделирования для дальнейшей обработки.

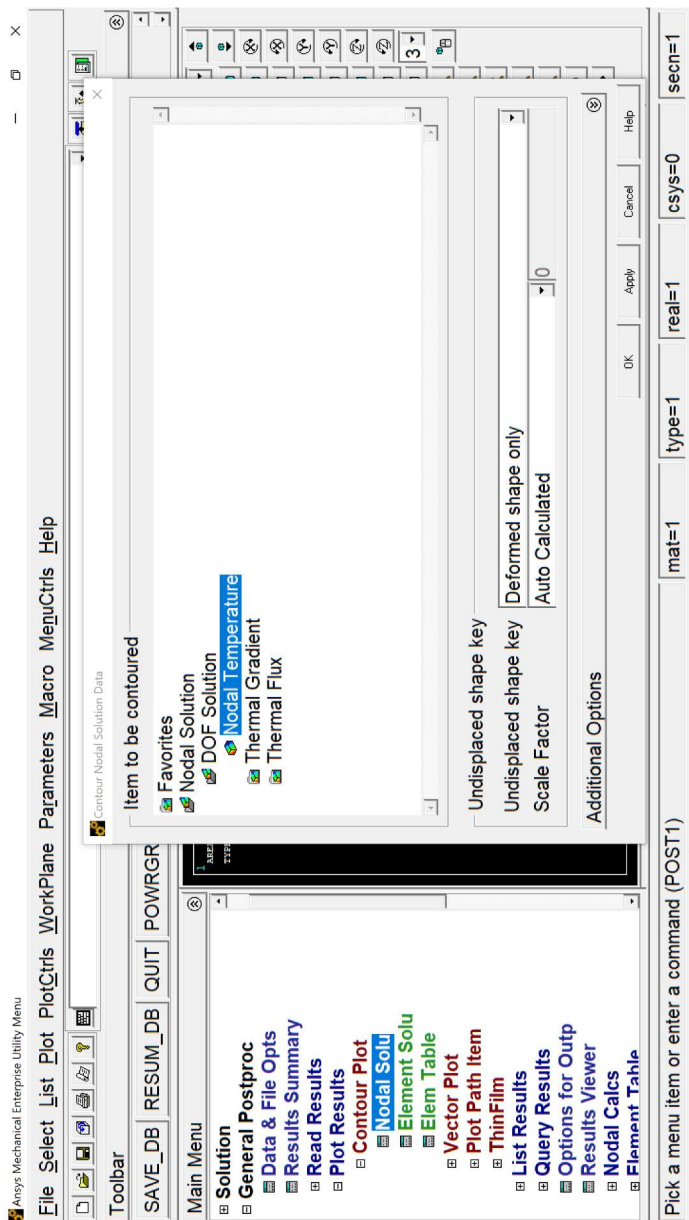
Осуществляется в меню **General Postproc**.

Сначала необходимо прочитать полученные данные **General Postproc\Read Results\Last Set** (задача стационарная, поэтому берем крайний набор результатов).

Далее построение полей искомых величин, например, температуры в узлах сетки, с интерполяцией между узлами.



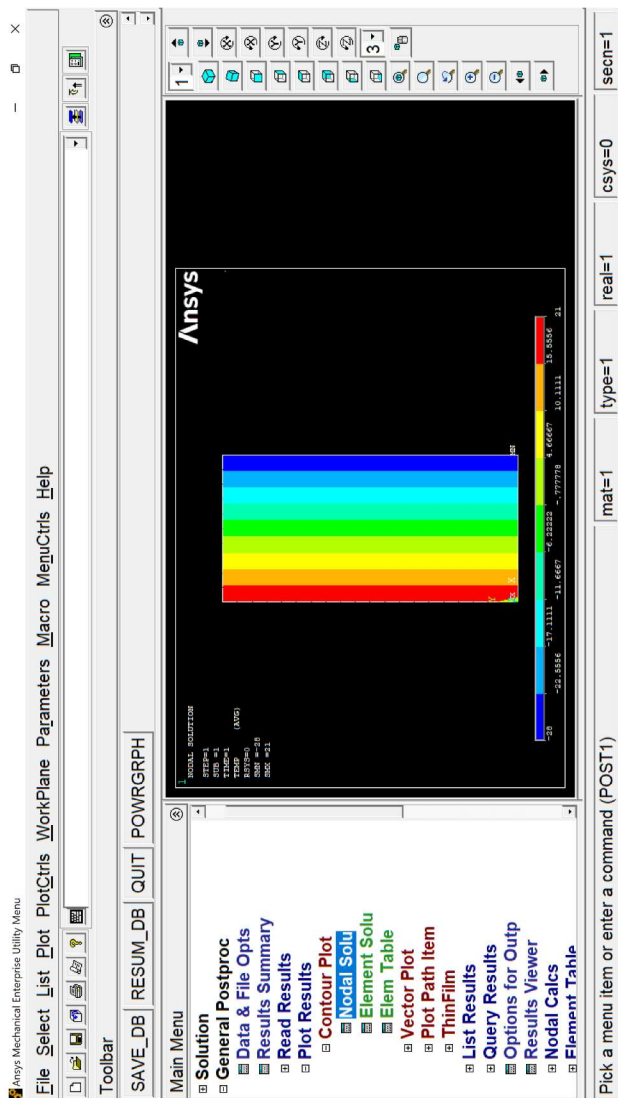
В меню **General Postproc\Plot Results\Contour Plot\Nodal Solu** в открывшемся окне **Contour Nodal Solution Data** выбираем **Nodal Solution\DOF Solution\Nodal Temperature**



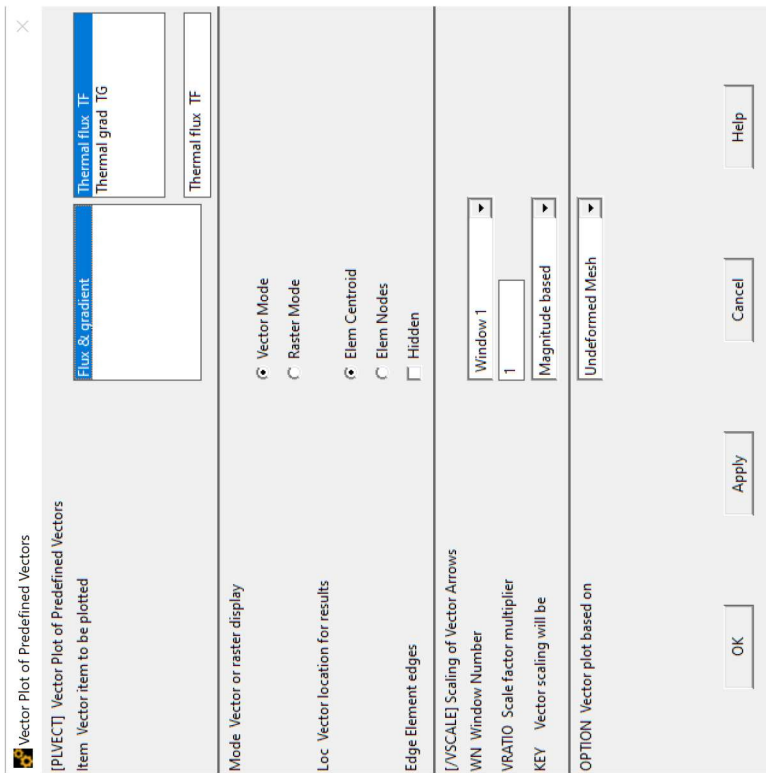
И после нажатия кнопки **OK**, получаем поле температуры в расчетной области.



Как и следовало ожидать, изотермические поверхности параллельны боковым граням, на которых задана постоянная температура, сохраняем рисунок с помощью меню **PlotCtrls\Write Metafile!**



Строим поле вектора плотности теплового потока с помощью меню **General Postproc\Plot Results\Predefined**

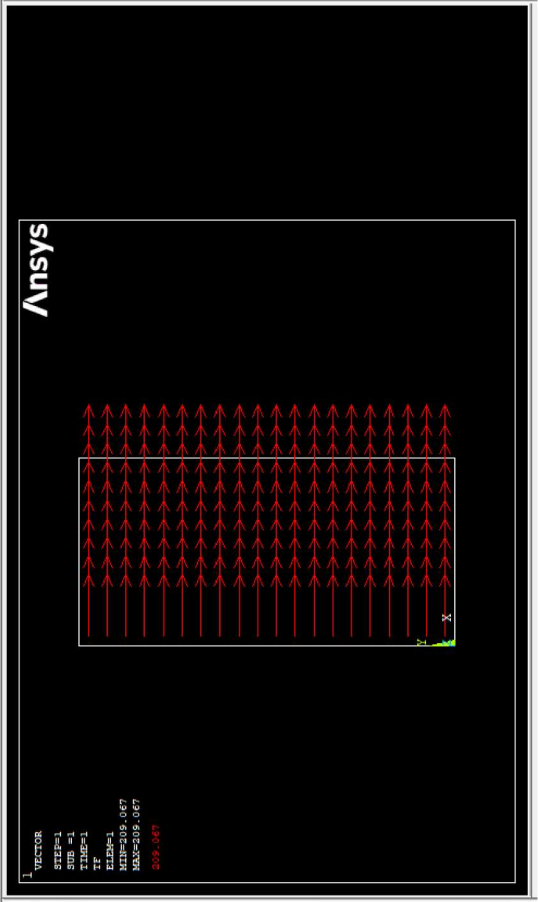


Выбираем **Thermal flux TF** и после нажатия **OK**, получаем:

Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

- Main Menu
- ▢ Solution
  - ▢ General Postproc
    - ▢ Data & File Opts
    - ▢ Results Summary
    - ▢ Read Results
    - ▢ Plot Results
      - ▢ Contour Plot
      - ▢ Vector Plot
      - ▢ Predefined
      - ▢ User-defined
      - ▢ Plot Path Item
      - ▢ ThinFilm
    - ▢ List Results
    - ▢ Query Results
    - ▢ Options for Outp
    - ▢ Results Viewer
    - ▢ Nodal Calcs
    - ▢ Element Table
    - ▢ Path Operations



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Pick a menu item or enter a command (POST1)

mat=1 type=1 real=1 csys=0 sech=1

Рисунок также можно сохранить в виде метафайла. Из рисунка видно, что вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности в сторону убывания температуры, получен ответ на первый вопрос задачи о величине плотности теплового потока  $q = 209.067 \text{ Вт/м}^2$ .

Теперь зная величину плотности теплового потока  $q$  и площадь боковой поверхности стены  $F$ , возможно *рассчитать тепловой поток потери теплоты* через бетонную стенку  $Q = q \times F$  [Вт] и, следовательно, *сделать оценку мощности системы отопления*.

Сравнение с аналитическим решением (4.10), (4.12) в MathCad показывает полное совпадение

$$\delta_{\text{экв}} := 0.3 \quad \lambda := 1.28 \quad \rho := 2000 \quad C_p := 840$$

$$tc1 := 21 \quad tc2 := -28$$

$$q := \frac{\lambda}{\delta} \cdot (tc1 - tc2) = 209.067$$

Строим график изменения температуры по толщине стенки с помощью создания оси  $X$  в расчетной области и присвоения значений температуры оси  $Y$ .

## Меню Plot\Nodes

С помощью меню **General Postproc\Path Operations\Define Path\By Nodes**

Создаем ось  $Y$  путем выделения узла на левой грани ( $tc_1$ ) подводим курсор и нажимаем левую кнопку мыши – точка начала отсчета и выделения противстоящего ему узла на правой грани – точка окончания оси ( $tc_2$ ).

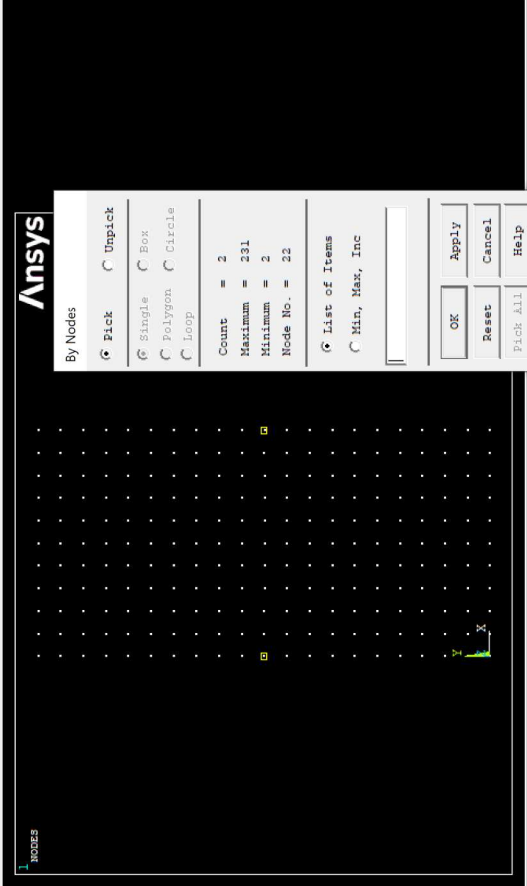
Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- General Postproc
  - Data & File Opts
  - Results Summary
  - Read Results
  - Plot Results
  - List Results
  - Query Results
  - Options for Outp
  - Results Viewer
  - Nodal Calcs
  - Element Table
  - Path Operations
    - Define Path
    - By Nodes**
    - On Working Plane
    - By Location
    - Path Status
    - Modify Path
    - Path Ontions

1 NODES



ANSYS

By Nodes

- Pick  Unpick
- Single  Box
- Polygon  Circle
- Loop

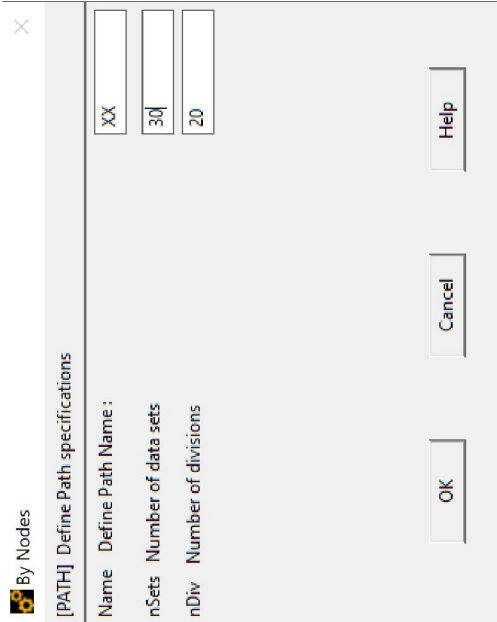
Count = 2  
Maximum = 231  
Minimum = 2  
Node No. = 22

List of Items

- Min, Max, Inc

OK Apply  
Reset Cancel  
PICK ALL Help

**OK** и задаем название оси абсцисс – **XX**



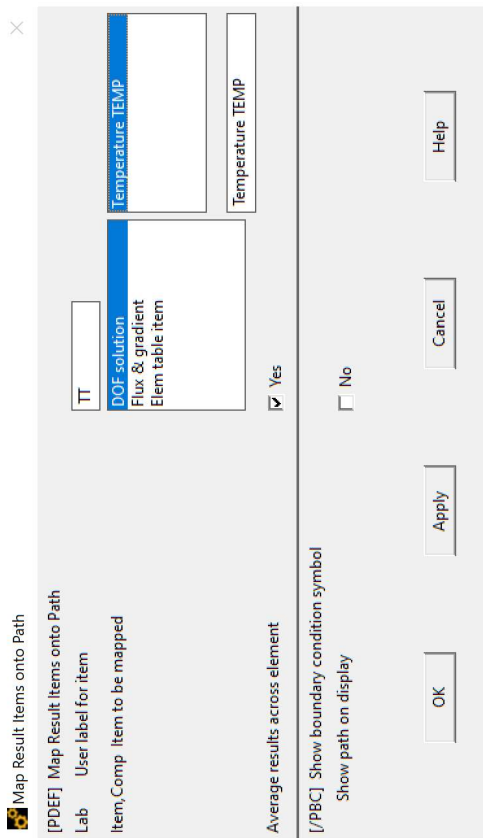
[PATH] Define Path specifications	
Name	XX
nSets	30
nDiv	20

Buttons: OK, Cancel, Help

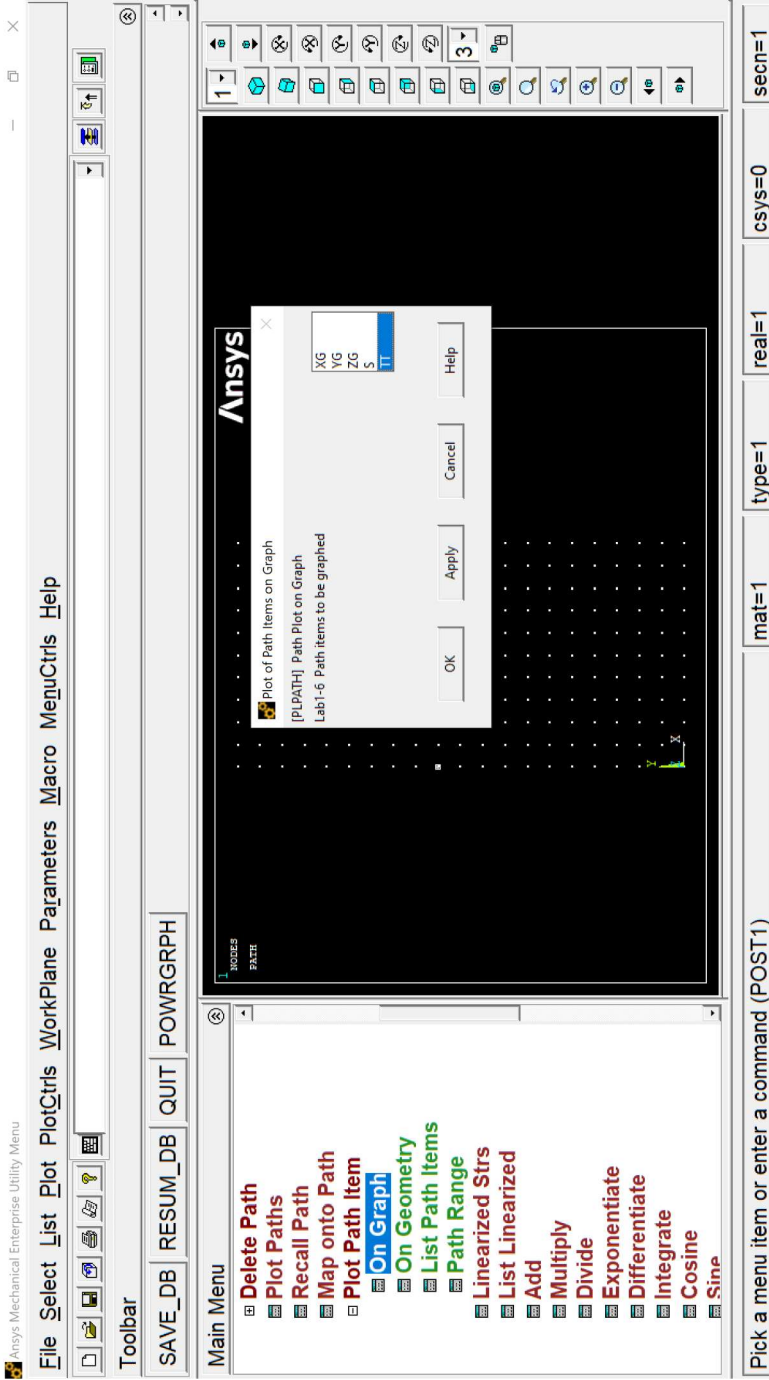
**OK** и далее **General Postproc\Path Operations\Plot Path\**

Теперь определяем переменную, которую будем помещать на ось ординат – **TT** в меню

**General Postproc\Path Operations\Map onto Path**



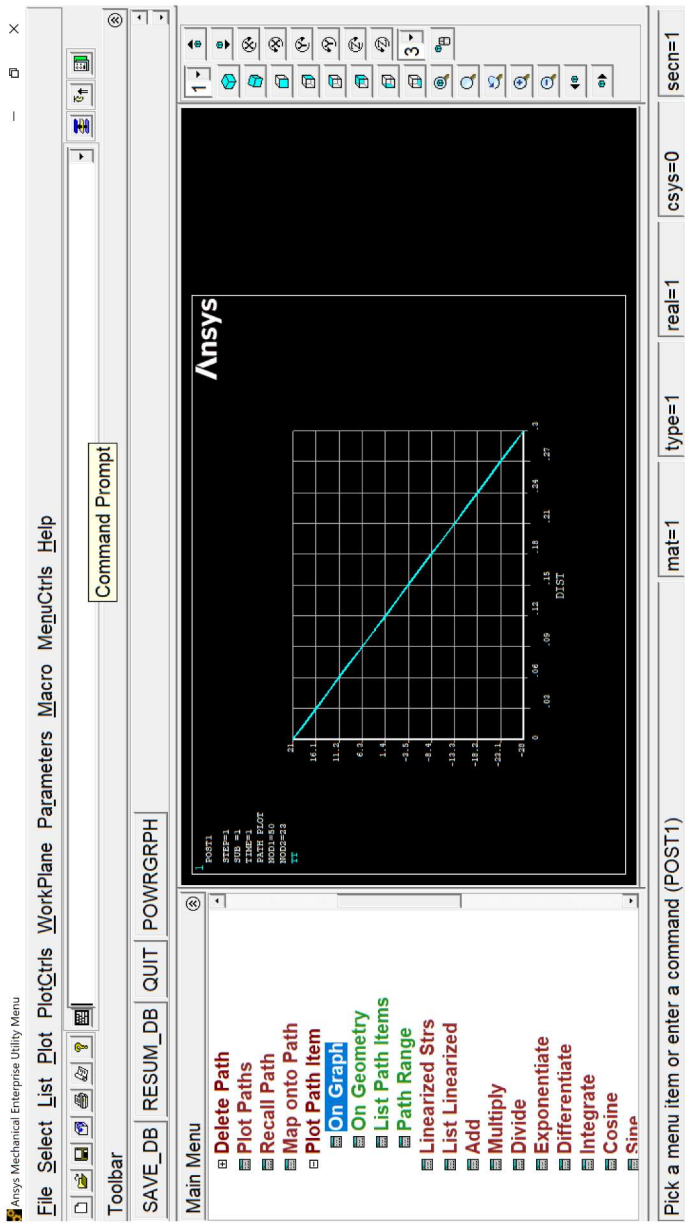
Строим график изменения температуры по толщине **General Postproc\Path Operations\Plot Path Items\On Graph**



Pick a menu item or enter a command (POST1)

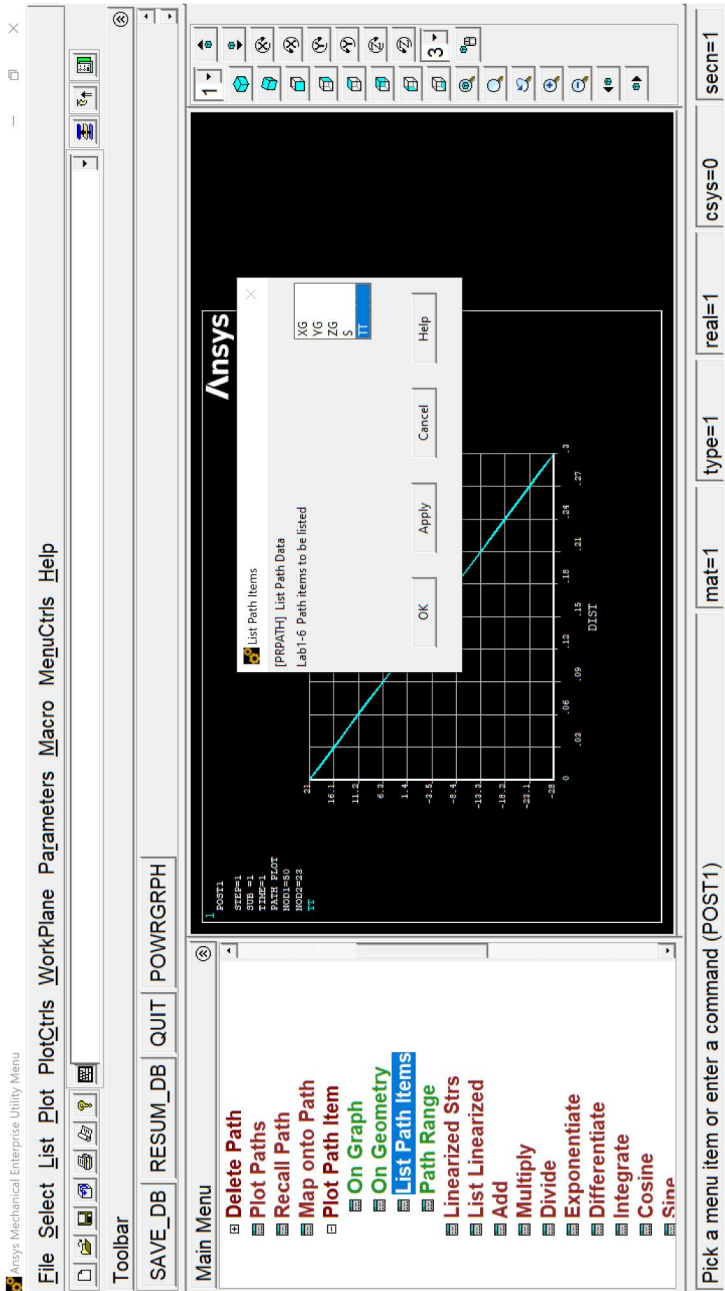
OK





Есть возможность сохранить график в виде рисунка мегафайл.

Сохранение значений графика в файл в меню **General Postproc\Path Operations\Plot Path Items\List Path Items**



После **OK** получаем таблицу данных, в которой **S** – это координата X

File

```

PRINT ALONG PATH DEFINED BY PRATH COMMAND. DS%=-
0
***** PATH VARIABLE SUMMARY *****
S          TT
0.0000    21.000
0.15000E-001  18.550
0.30000E-001  16.100
0.45000E-001  13.650
0.60000E-001  11.200
0.75000E-001  8.7500
0.90000E-001  6.3000
0.10500    3.8500
0.12000    1.4000
0.13500   -1.0500
0.15000   -3.5000
0.16500   -5.9500
0.18000   -8.4000
0.19500  -10.850
0.21000  -13.300
0.22500  -15.750
0.24000  -18.200
0.25500  -20.650
0.27000  -23.100
0.28500  -25.550
0.30000  -28.000

```

Локальное меню файл позволяет сохранить данные в виде текстового файла.

Получен ответ на второй вопрос задачи. Закрываем окно PRPATH. Выходим из Ansys.

### Задача №2. Стационарная теплопроводность пластины при граничных условиях 3-го рода

Все условия задачи аналогичны условиям задачи №1, кроме граничных условий на боковых сторонах стенки, а именно: боковые поверхности стенки в данной задаче омываются жидкостью (разными жидкостями, газом, разными газами), т.е. задаются граничные условия 3-го рода и рассчитывается процесс теплопередачи через плоскую стенку (п.4.2);

- на одной стороне стенки (граница IV) задан коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1 = 10 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$ , температура жидкости  $t_{ж1} = 21 \text{ }^\circ\text{С}$ , температура поверхности стенки  $t_{c1}$  – неизвестна;
- на другой стороне стенки (граница II) задан коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2 = 40 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$ , температура жидкости  $t_{ж2} = -28 \text{ }^\circ\text{С}$ , температура поверхности стенки  $t_{c2}$  – неизвестна.

Найти плотность теплового потока через стенку и распределение температуры в стенке, включая  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ .

**Решение:** Математическое описание задачи соответствует задаче одномерной стационарной теплопроводности главе 4 формулы (4.3), (4.5). Для сравнения эта задача имеет аналитическое решение, полученное в гл. 4 формулы (4.14), (4.15).

Таким образом, при моделировании в Ansys необходимо начинающим пользователям создать новый проект, построить двумерный объект – прямоугольник, а приближение плоской стенки будем задавать с помощью граничных условий 2-го рода  $q = 0$  на торцах этого прямоугольника.

Повторям Шаги 1–6 полностью в соответствии с решением задачи №1.

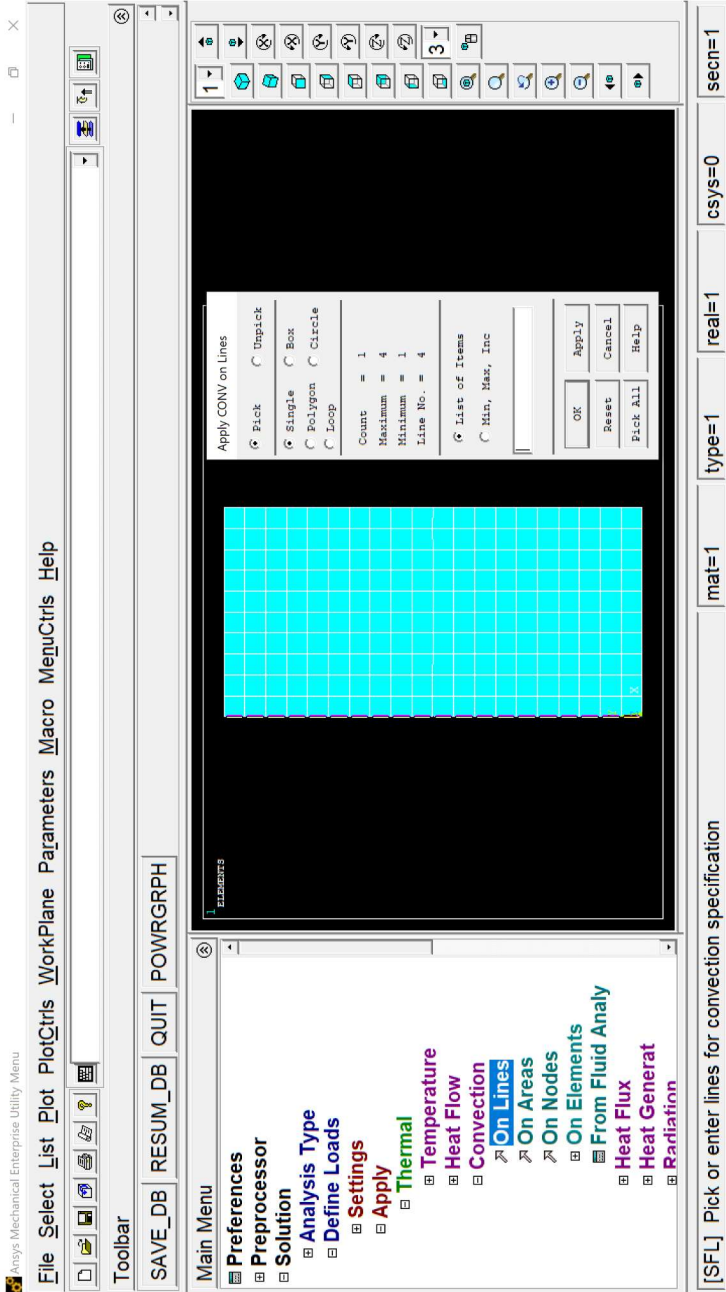
Повторям Шаг 7 полностью в соответствии с решением задачи № 1 для задания граничных условий на I и III границах.

Далее модифицируем Шаг 7 следующим образом.

Задаем граничные условия на границе IV в виде постоянного коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1 = 10 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$  и постоянной температуры жидкости  $t_{ж1} = 21 \text{ }^\circ\text{С}$  с помощью меню.

**Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Convection\On Lines**

и наведения курсора на линию границы IV («стрелка вверх»), путем нажатия левой кнопки мыши – граница выделяется штриховой линией



Нажав кнопку **OK**, задаем значения коэффициента теплоотдачи (Film coef) и температуры жидкости «на бесконечности» (Bulk Temp)

Apply CONV on lines

[SFL] Apply Film Coef on lines

If Constant value then:  
VALJ Film coefficient

[SFL] Apply Bulk Temp on lines

If Constant value then:  
VAL2J Bulk temperature

If Constant value then:  
Optional CONV values at end J of line  
(leave blank for uniform CONV)  
VALJ Film coefficient   
VAL2J Bulk temperature

OK Cancel Help

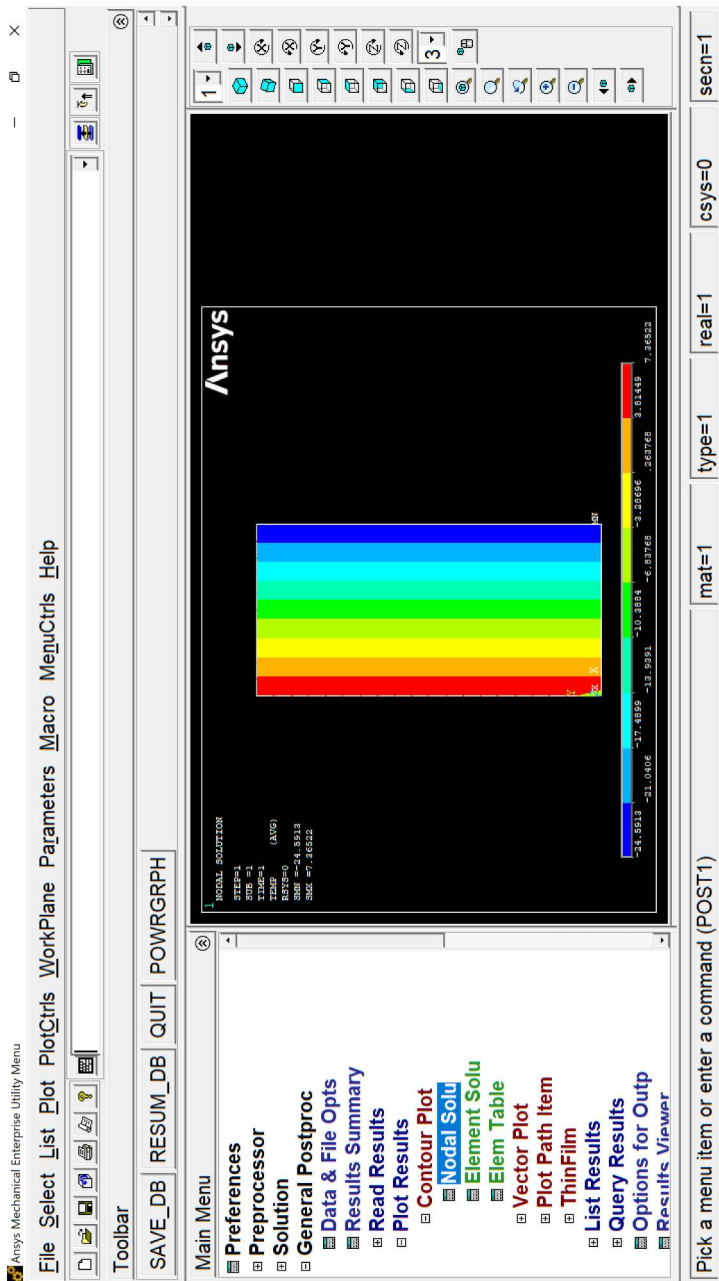
Нажатие кнопки **OK** фиксирует задание граничного условия 3-го рода на границе IV. Задаем граничные условия на границе II в виде постоянного коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2 = 40 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$  и постоянной температуры жидкости  $t_{ж2} = -28 \text{ }^\circ\text{C}$  аналогично заданию г.у. на границе IV.

### Повторяем Шаг 3

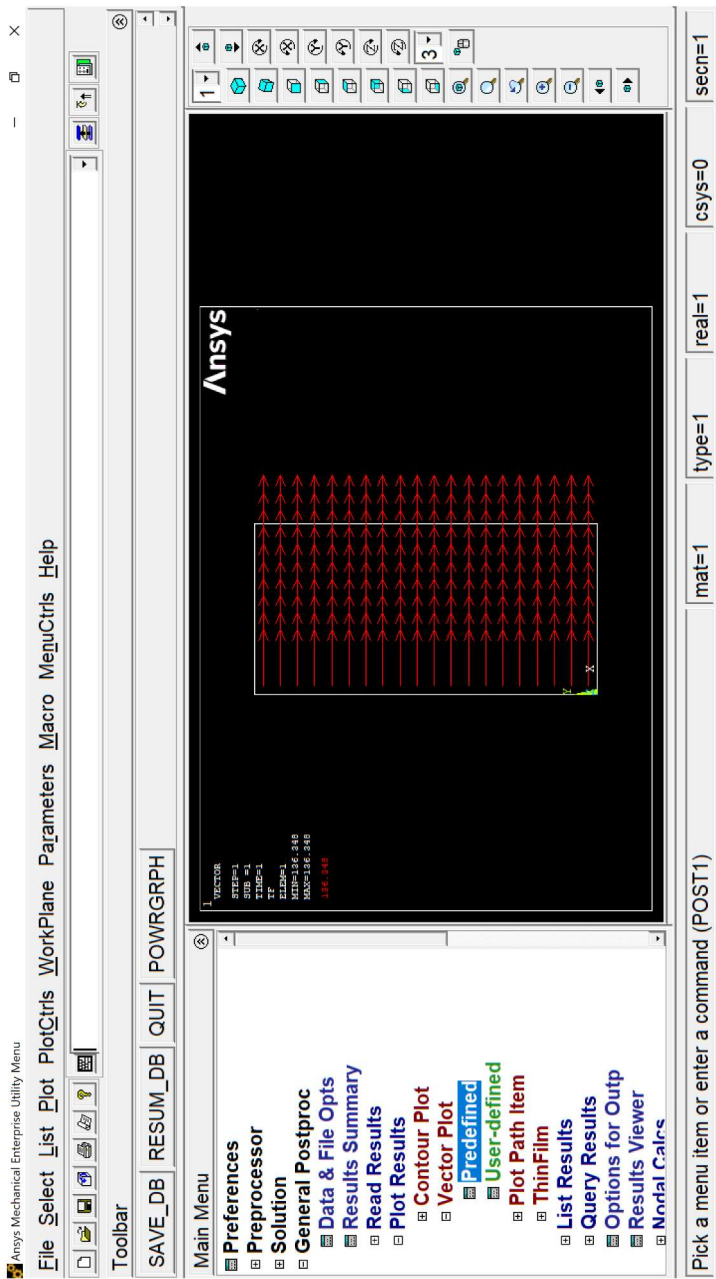
Далее повторяем **Шаг 8** – решение и **Шаг 9** – построитель

В процессе выполнения **Шага 9** получим

- поле температуры в расчетной области.



- ответ на первый вопрос задачи о величине плотности теплового потока  $q = 136.348 \text{ Вт/м}^2$ . Самостоятельно сравнить с ответом в задаче №1. Почему результаты отличаются?



- Сравнение с аналитическим решением (4.14), (4.15) в MathCad показывает полное совпадение.



$$\delta := 0.3 \quad \lambda := 1.28 \quad C_p := 840$$

$$\alpha_1 := 10 \quad \text{tg1} := 21$$

$$\alpha_2 := 40 \quad \text{tg2} := -28$$

$$q := \frac{\text{tg1} - \text{tg2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = 136.348$$

$$t_{c1} := \text{tg1} - \frac{q}{\alpha_1} = 7.365 \quad t_{c2} := \text{tg2} + \frac{q}{\alpha_2} = -24.591$$

Сравниваем значения  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ , полученные в MathCad и в решении Ansys, для этого самостоятельно по аналогии с задачей №1 строим график изменения температуры по толщине стенки на **Шаге 9** и получаем таблицу данных графика.

**Задача №3.** Стационарная теплопроводность пластины при граничных условиях 1-го рода и коэффициенте теплопроводности материала пластины, зависящем от температуры.

Плоская стенка выполнена из пеношамотного кирпича. Толщина стенки  $\delta = 300$  мм. На одной стороне стенки температура  $t_{c1} = 800$  °С, на другой  $t_{c2} = 60$  °С. Найти плотность теплового потока через стенку и распределение температуры в стенке при теплопроводности пеношамотного кирпича  $\lambda(t) = 0.1 + 0.000145 \times t$  Вт/м×К.

**Решение:** Анализ условия задачи показывает, что стенка имеет два других размера (высота и ширина) много больше, чем толщина стенки  $\delta$  – приближение плоской стенки, т.е. тепловой поток направлен вдоль

толщины стенки, тепловым потоком через торцы можно пренебречь. Внутренние источники теплоты отсутствуют. Математическое описание задачи соответствует задаче одномерной стационарной теплопроводности в гл. 4 формулы (4.3), (4.5). Задача имеет аналитическое решение, полученное в гл. 4 п.4.4 формулы (4.21), (4.22), которое может быть использовано для сравнения. Таким образом, при моделировании в Ansys необходимо построить двумерный объект – прямоугольник, приближение плоской стенки будем задавать с помощью граничных условий 2-го рода  $q = 0$  на торцах этого прямоугольника.

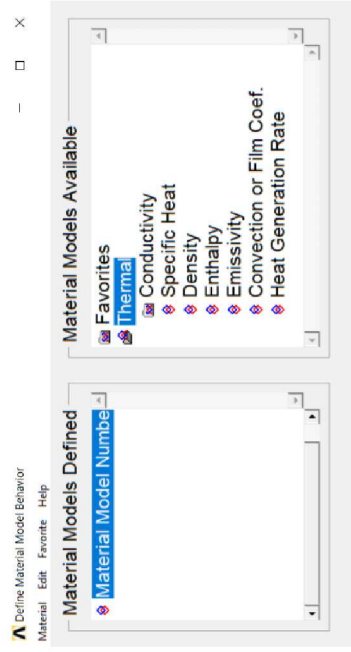
Повторяем Шаги 1–9 полностью в соответствии с решением задачи №1, за исключением Шага 2:

**Шаг 2.** Необходимо задать коэффициент теплопроводности материала в функции от температуры, учитывая то, что эта зависимость представляет линейную функцию температуры, достаточно двух точек:

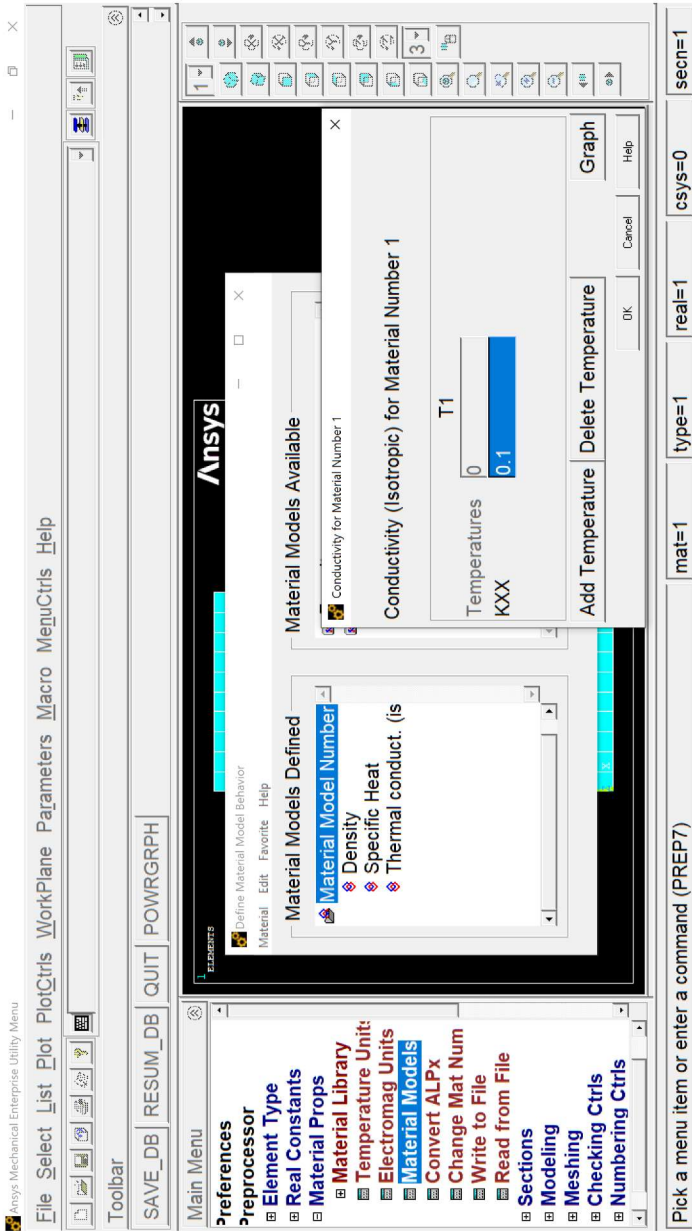
$$t = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow \lambda(0) = 0.1$$

$$t = 800 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow \lambda(800) = 0.1 + 0.000145 \times 800 = 0.216$$

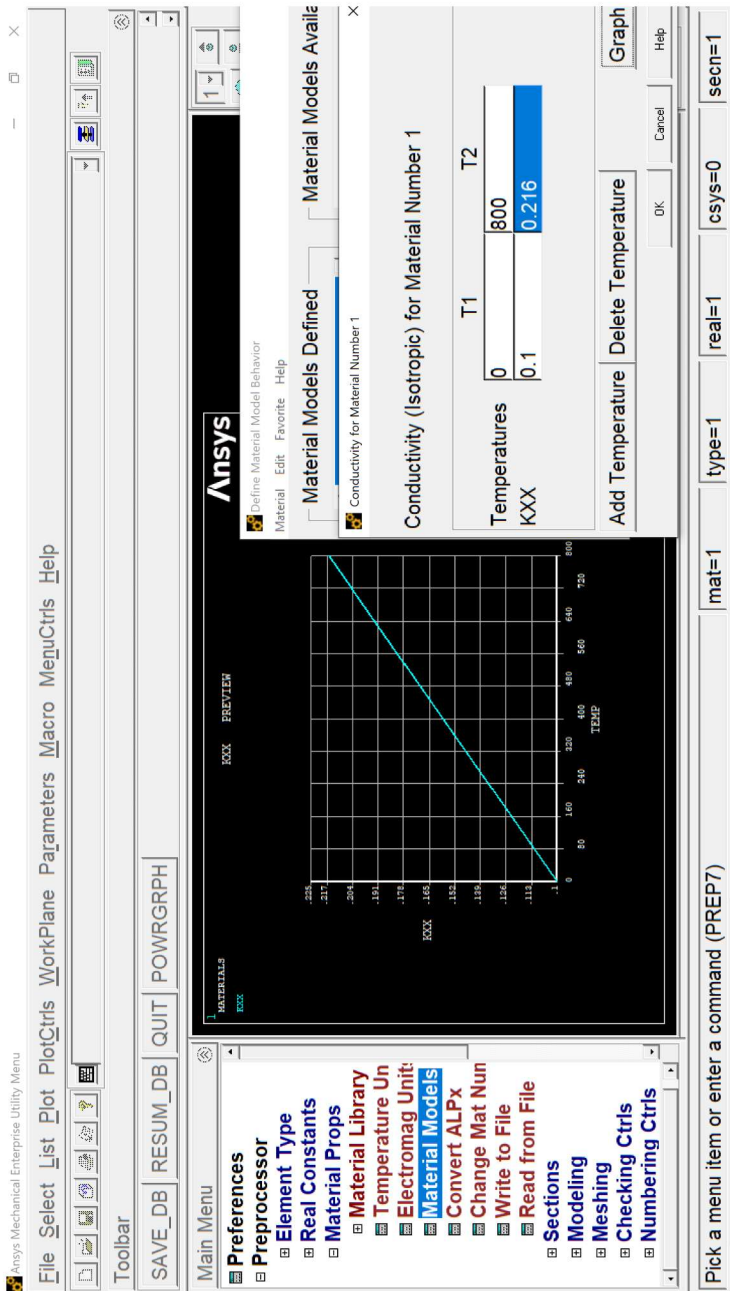
В меню **Material Props\Material Models\Thermal**



Выбираем коэффициент теплопроводности **Conductivity** неизменный по всем направлениям пространства **Isotropic** и вводим его значение для материала в задаче при температуре  $t = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$



Далее нажимаем кнопку **Add Temperature** и вводим вторую пару значений  $t = 800 \text{ }^\circ\text{C}$   $\lambda(800) = 0.216$ , нажав после этого кнопку **Graph**, визуальнo контролируем характер изменения коэффициента теплопроводности с температурой (возможно сохранение графика в виде метафайла)

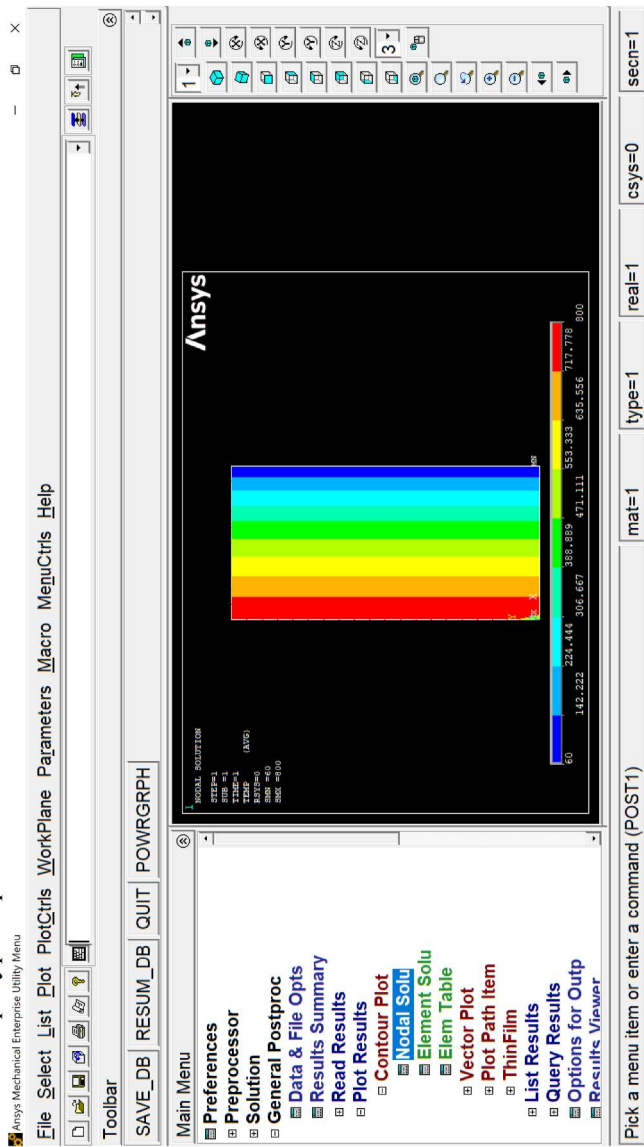


Нажатие **OK** фиксирует ввод переменного коэффициента теплопроводности. Далее закрываем окно моделей материалов и выполняем команду меню **Plot\Areas**

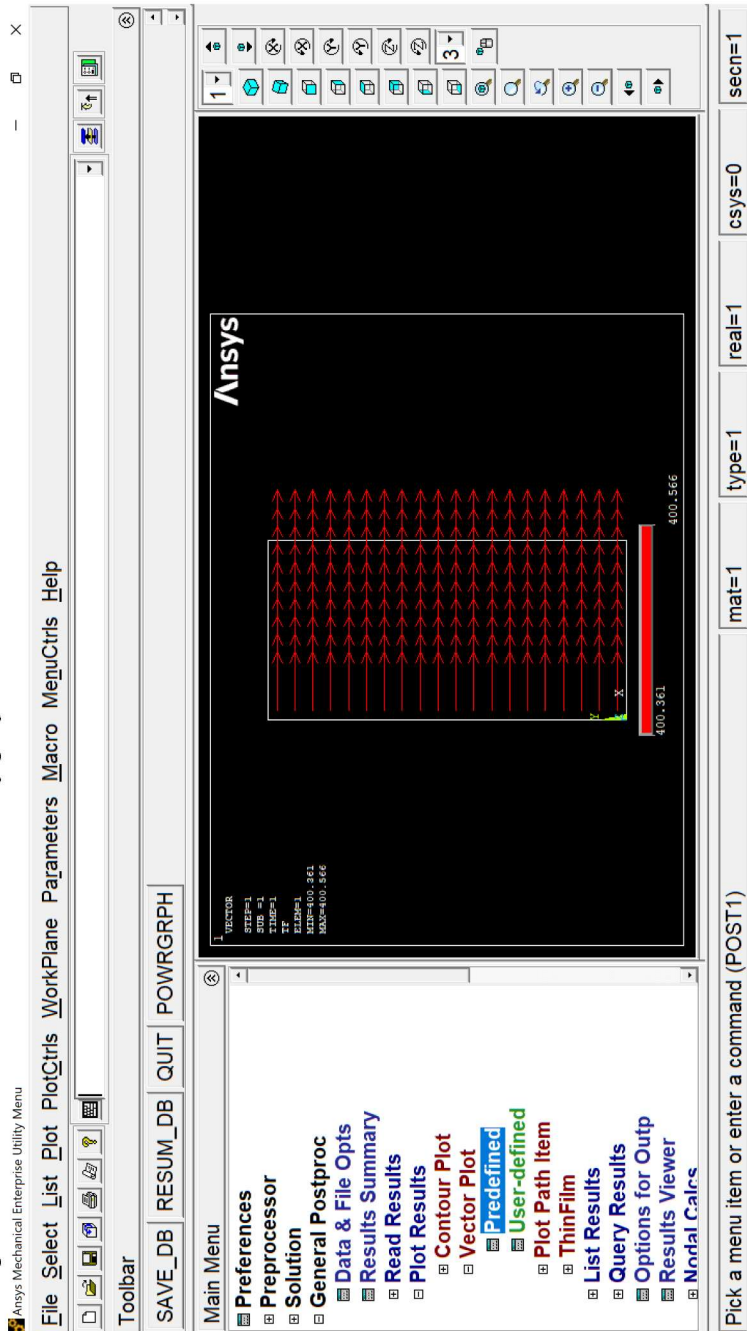
Выполняя **Шаг 7**, вводим для границы IV значение  $t_{c1} = 800$  и для границы II  $t_{c2} = 60$ .  
 Далее повторяем **Шаг 8** – решение с итерациями по уточнению коэффициента теплопроводности при изменении температуры в узлах сетки и **Шаг 9** – постпроцессор

В процессе выполнения **Шага 9** получим

- поле температуры в расчетной области



- ответ на первый вопрос задачи о величине плотности теплового потока  $q = 400.463 \text{ Вт/м}^2$ . Самостоятельно сравнить с ответом в задаче №1. Почему результаты отличаются?



- Сравнение с аналитическим решением (4.21), (4.22) в MathCad показывает полное совпадение.

$$\delta_{\text{max}} := 0.3 \quad \lambda(x) := 0.1 + 0.000145 \cdot x$$

$$tc1 := 800 \quad \lambda(800) = 0.216$$

$$tc2 := 60 \quad \lambda(60) = 0.109$$

$$\lambda_m := \frac{1}{tc2 - tc1} \cdot \int_{tc1}^{tc2} \lambda(x) dx = 0.162$$

+

$$q := \frac{tc1 - tc2}{\delta} \cdot \frac{400.463}{\lambda_m}$$

$$\frac{400.361 + 400.566}{2} = 400.463$$

- строим график изменения температуры по толщине стенки на **Шаге 9** и получаем таблицу данных графика.

Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ▢ Results Viewer
- ▢ Nodal Calcs
- ▢ Element Table
- ▢ Path Operations
  - ▢ Define Path
  - ▢ Delete Path
  - ▢ Plot Paths
  - ▢ Recall Path
  - ▢ Map onto Path
  - ▢ Plot Path Item
    - ▢ On Graph
    - ▢ On Geometry
    - ▢ List Path Items
    - ▢ Path Range
  - ▢ Linearized Strs
  - ▢ List Linearized
  - ▢ Add
  - ▢ Multiply
  - ▢ Divide

1 POST1

STEP=1

SUB = 1

TIME=1

PATH PLOT

MODE1=11

MODE2=22

11

ANSYS

1 1

1 2 3



Из рисунка видно, что в отличие от решения задачи №1 распределение температуры по толщине пластины имеет нелинейный характер, график имеет выпуклость вверх, т.к. теплопроводность увеличивается с увеличением температуры

\*\*\*\*\* PATH VARIABLE SUMMARY \*\*\*\*\*

S	T
0.0000	800.00
0.15000E-001	771.64
0.30000E-001	743.29
0.45000E-001	713.76
0.60000E-001	684.24
0.75000E-001	653.38
0.90000E-001	622.53
0.10500	590.16
0.12000	557.79
0.13500	523.65
0.15000	489.51
0.16500	453.27
0.18000	417.03
0.19500	378.25
0.21000	339.46
0.22500	297.51
0.24000	255.55
0.25500	209.48
0.27000	163.41
0.28500	111.70
0.30000	60.000

**Задача №4.** Стационарная теплопроводность цилиндрического стержня при граничных условиях 3-го рода и наличии внутреннего источника теплоты

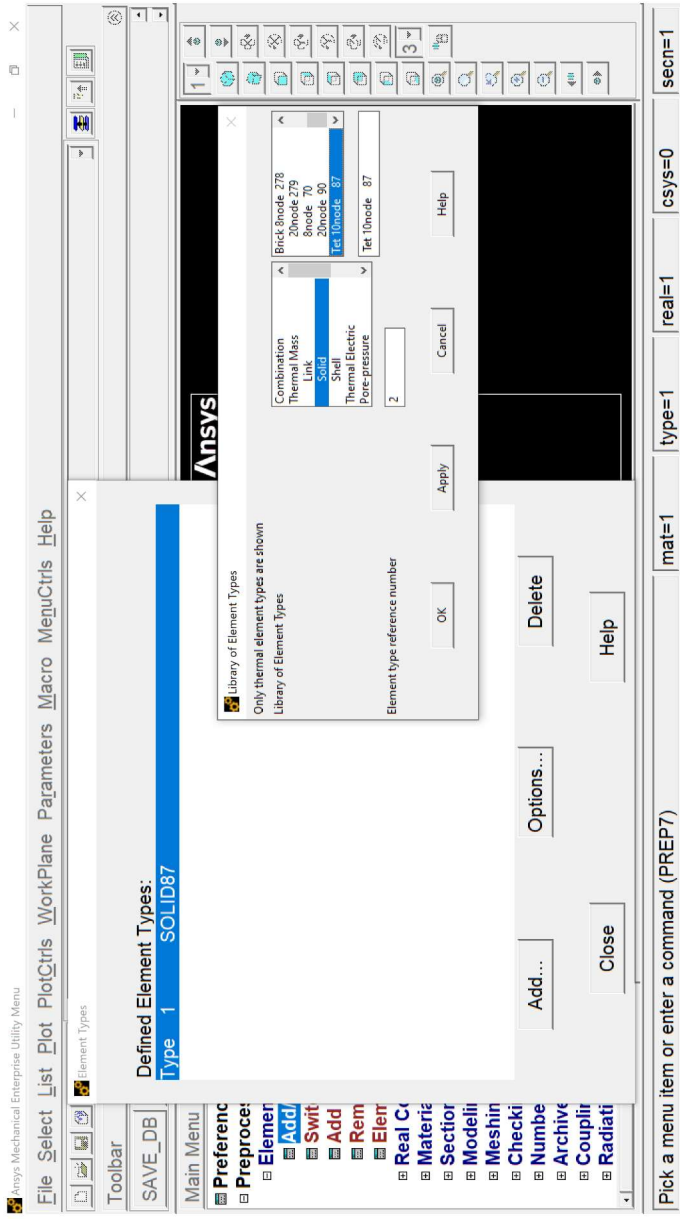
Длинный цилиндрический стержень диаметром  $d = 0,091$  м охлаждается жидкостью (разными жидкостями, газом, разными газами), омывающей его боковую поверхность, задан коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 6500 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$  и температура жидкости  $t_{\text{ж}} = 370 \text{ }^\circ\text{C}$ . В стержне действует источник теплоты с объемным энерговыделением  $q_v = 8 \times 10^7 \text{ Вт/м}^3$ . Найти плотность теплового потока на боковой поверхности стержня и распределение температуры в стержне при теплопроводности материала стержня  $\lambda = 30 \text{ Вт/м} \times \text{К}$ .

**Решение:** Анализ условия задачи показывает, что стержень имеет длину много больше диаметра - приближение бесконечного цилиндра, т.е. теплота отводится от боковой поверхности стержня, тепловым потоком через торцы стержня можно пренебречь. Теплофизические свойства материала постоянны, внутренние источники теплоты присутствуют. Математическое описание задачи соответствует задаче стационарной теплопроводности с граничными условиями 3-го рода гл. 4 п. 4.2 формулы (4.3, 4.4). Задача имеет аналитическое решение, полученное в гл.11 п.11.2 формула (11.8), которое может быть использовано для сравнения с результатами численного моделирования в Ansys в виде функциональной зависимости температуры от радиуса и плотности теплового потока на боковой поверхности стержня радиусом  $r_0$ :

$$\left( \right)_{\text{ж}} + \frac{v \cdot 0}{2\alpha} + \frac{v}{4\lambda} \left( 0^2 \right), \quad c = \frac{v \cdot 0}{2}.$$

Таким образом, при моделировании в Ansys необходимо построить трехмерный объект – цилиндр, приближение бесконечного цилиндра будем задавать с помощью граничных условий 2-го рода  $q = 0$  на торцах этого цилиндра.

Повторяем **Шаг 1** из решения задачи 1, но в меню **Preprocessor\Element type\Add\Edit\Delete** с помощью кнопки **Add** выбираем с помощью мышки **Thermal Mass\Solid** плюс **Tet** (тетраэдр, тип 87), так как объект трехмерный.

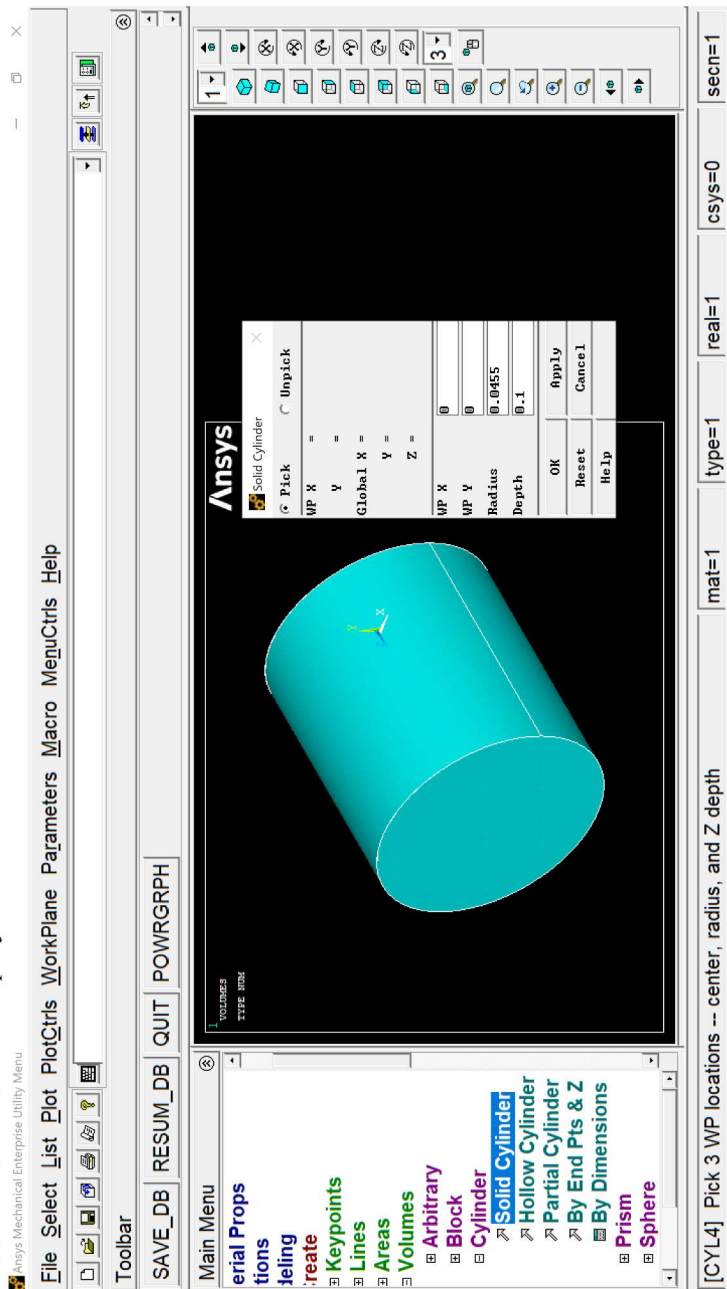


Далее повторяем **Шаг 2** из решения задачи 1, задаем только коэффициент теплопроводности **Conductivity** неизменный по всем направлениям пространства **Isotropic** и вводим его значение для материала в решаемой задаче 4

Далее повторяем **Шаг 3**

#### Шаг 4. Создание объекта

Производится в меню **Modeling\Create\Volumes\Cylinder\Solid Cylinder**, на копии экрана ниже показан ввод исходных данных и результат нажатия **OK**



И возможно повторить Шаг 3

#### Шаг 5. Создание расчетной сетки

Выполняется в том же порядке, что и Шаг 5 задачи 1:

Производится в меню **Meshing\Meshtool** с учетом особенностей 3D задачи

Задаем размер стороны тетраэдра **Size Controls Global** кнопка **Set** и, выделив курсором («стрелка вверх») расчетную область, нажатием левой кнопки мыши (цвет меняется с голубого на малиновый), вводим размер 0.01 м

**OK**, далее **Meshing\Meshtool**

**\Mesh Volumes**, форма **Shape** - тетраэдр **Tet**, разбиение - **Free**

Кнопка **Mesh**, затем навести курсор на расчетную область (голубой цвет) курсор изменится на «стрелка вверх» и, нажав левую кнопку мыши, выделить расчетную область, подлежащую разбиению (малиновый цвет)

далее в окне **Mesh Volumes** нажать **OK**. Скриншот с результатами и обозначением граничных поверхностей представлен ниже

MeshTool

Element Attributes: Global Set

Smart Size:  Fine 6 Coarse

Size Controls:

Global	Set	Clear
Areas	Set	Clear
Lines	Set	Clear
Layer	Copy	Flip
Keypoints	Set	Clear
	Set	Clear

Mesh: Volumes  
 Shape: Tet Hex  
 Free  Mapped  Sweep  
 3 or 4 sided Mesh Clear

Refine at: Elements Refine

File Select List Macro MenuCtrls Help

Toolbar

SAVE\_DB RESU

Main Menu

- Preferences
- Preprocessor
  - Element Type
  - Real Constants
  - Material Properties
  - Sections
  - Modeling
  - Meshing
    - Mesh Attributes
    - Mesh Tool
    - Size Controls
    - Mesh Operations
    - Concatenate
    - Mesh
    - Modify Mesh
    - Check Mesh
    - Clear
    - Checking Controls

Pick a menu item

GRPH

III

I, II, IV

I

Global Element Sizes

[ESIZE] Global element sizes and divisions (applies only to "unsized" lines)

SIZE Element edge length 0.01

NDIV No. of element divisions 0

Cancel

OK

SEP7) mat=1 type=1 real=1 csys=0 secn=1

Расчетная сетка построена, повторить **Шаг 3**, закрыть меню **Preprocessor**

**Шаг 6.** Опции решения  
Повторяем **Шаг 6** из решения задачи 1

**Шаг 7.** Задание начальных и граничных условий, и внутреннего источника  
Задача стационарная, значит, задаем только граничные условия:

для границ I, III – торцевые поверхности цилиндра, граничные условия 2-го рода  $q = 0$

Переходим в меню

**Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Heat Flux\On Areas**

Наводим курсор на площадь границы I («стрелка вверх») нажимаем левую кнопку мыши – площадь границы выделяется малиновым цветом, на площади границ I и III заданы одинаковые граничные условия, поэтому сразу же выделяем и площадь границы III, («стрелка вверх») нажимаем левую кнопку мыши – площадь границы выделяется штриховой линией. Обращаем внимание на внутреннюю нумерацию граничных поверхностей в Ansys – **Area No** (1 и 2, соответствуют границам I и III), **Maximum = 4**, значит боковая поверхность представлена двумя полубочками с **Area No** (3 и 4, соответствующую границам II и IV)

Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ices
- essor
- sis Type
- Loads
- things
- ply
- Thermal
  - Temperature
  - Heat Flow
  - Convection
  - Heat Flux
- On Lines
- On Areas
- On Nodes
- On Elements
- From Fluid Analy
- From EMAG Analy

The image shows a 3D model of a cylinder with a mesh. A dialog box titled 'Apply HFLUX on Areas' is open over the model. The dialog box contains the following information:

**Apply HFLUX on Areas**

Pick  Unpick

Single  Box

Polygon  Circle

Loop

Count = 2  
Maximum = 4  
Minimum = 1  
Area No. = 1

List of Items

Min, Max, Inc

OK Apply  
Reset Cancel  
Pick All Help

1 3

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[SFA] Pick or enter areas for heat flux specification

mat=1

type=1

real=1

csys=0

secn=1



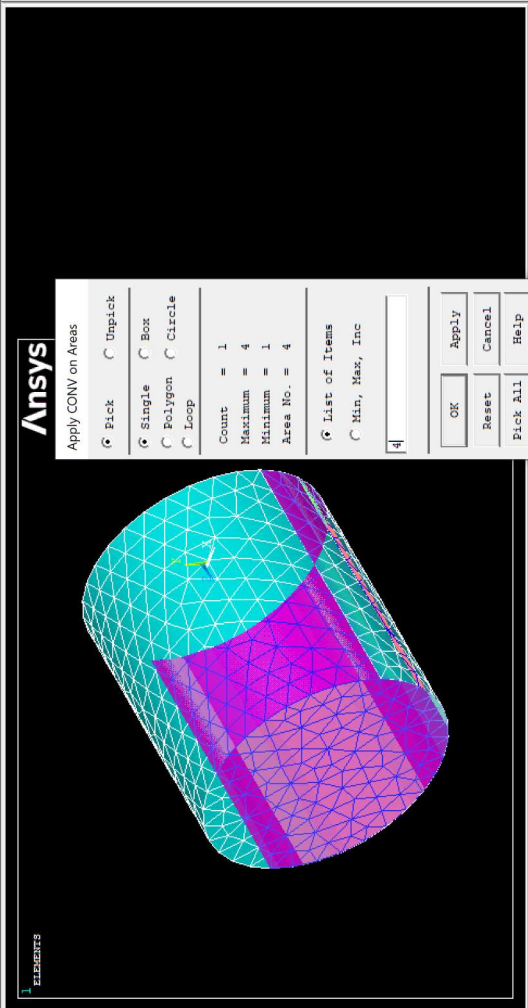
## Нажимаем ОК

И задаем значение плотности теплового потока **HFLUX** в виде постоянной величины **Constant value** равным **0** аналогично действиям в задаче 1. После нажатия кнопки **ОК** граничные условия на границах I и III заданы. Далее модифицируем **Шаг 7** следующим образом:

Задаем граничные условия на поверхностях границ II, IV в виде постоянного коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 6500 \text{ Вт/м}^2 \times \text{К}$  и постоянной температуры жидкости  $t_{\text{ж}} = 370 \text{ }^{\circ}\text{C}$  с помощью меню **Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Convection\On Areas** и наведения курсора на поверхность границы II, IV («стрелка вверх»), путем нажатия левой кнопки мыши – поверхность границы выделяется малиновым цветом, либо последовательным вводом номера (**Area No 3** и **4**) граничной поверхности в окне, отмеченным красным прямоугольником на скриншоте выше.

Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH



secn=1

csys=0

real=1

type=1

mat=1

[SFA] Pick or enter areas for convection specification

**Apply CONV on Areas**

Pick    Unpick  
 Single    Box  
 Polygon    Circle  
 Loop

Count = 1  
 Maximum = 4  
 Minimum = 1  
 Area No. = 4

List of Items  
 Min, Max, Inc

4

Main Menu

- nses
- ressor
- 1
- ysis Type
- e Loads
- ttings
- ply
- Thermal
  - Temperature
  - Heat Flow
  - Convection
    - On Lines
    - On Areas
    - On Nodes
    - On Elements
  - From Fluid Analy
    - Heat Flux
    - Heat Generat

Нажав кнопку **OK**, задаем значения коэффициента теплоотдачи (Film coef) и температуры жидкости «на бесконечности» (Bulk Temp)

Apply CONV on areas

[SFA] Apply Film Coef on areas

If Constant value then:  
VAL1 Film coefficient

[SFA] Apply Bulk Temp on areas

If Constant value then:  
VAL2 Bulk temperature

LKEY Load key, usually face no.  
(required only for shell elements)

OK Cancel Help

Нажатие кнопки **OK** фиксирует задание граничного условия 3-го рода на границе IV.

Задаем граничные условия на границе II в виде постоянного коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 6500$  Вт/м<sup>2</sup>×К и постоянной температуры жидкости  $t_{ж} = 370$  °С аналогично заданию г.у. на границе IV.

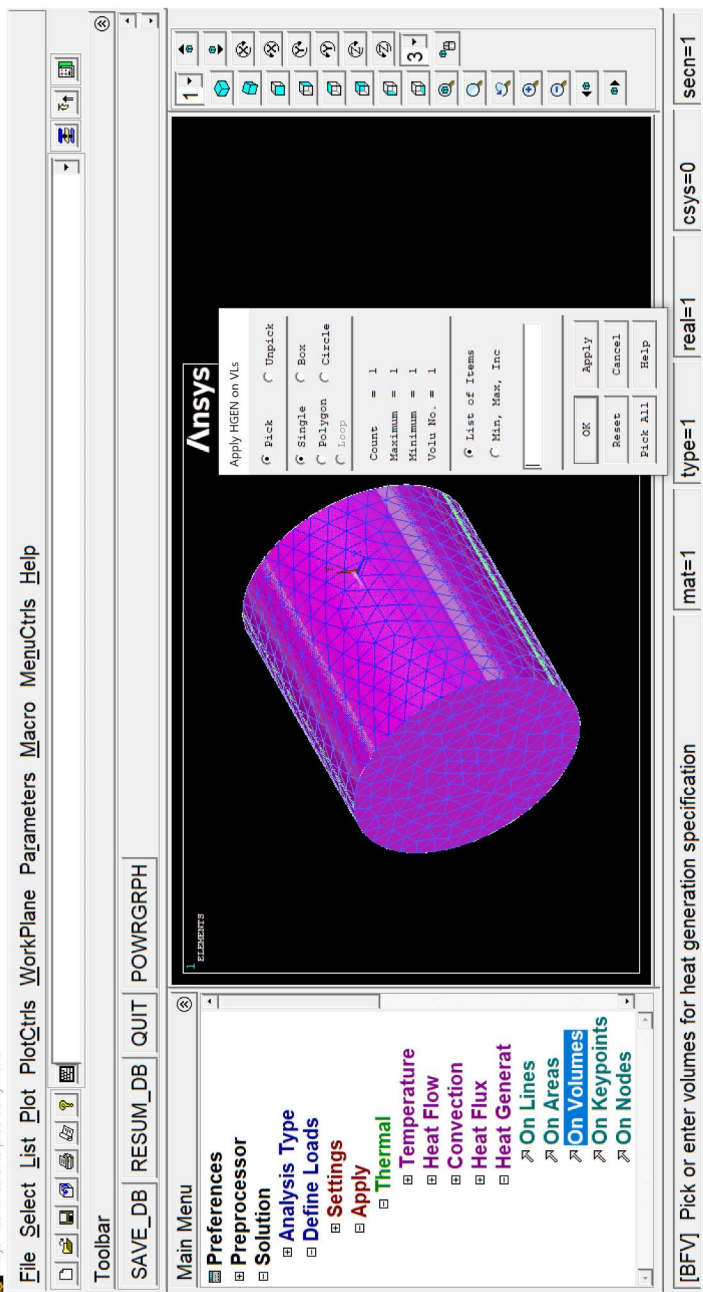
Повторяем **Шаг 3**

Далее модифицируем **Шаг 7** для задания внутреннего источника следующим образом:

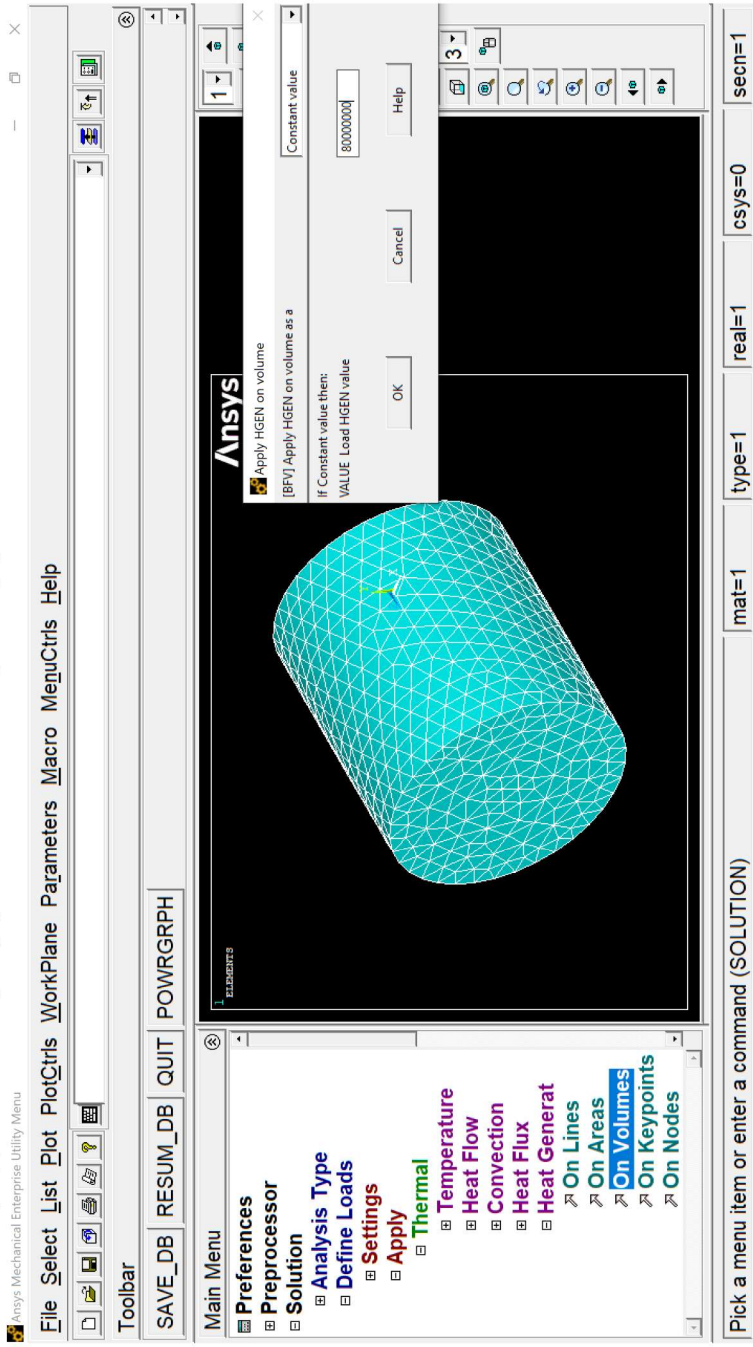
с помощью меню **Solution\Define Loads\Apply\Thermal\Heat Generat\On Volumes** и наведения курсора на цилиндр («стрелка вверх»), путем нажатия левой кнопки мыши – весь цилиндр окрашивается в малиновый цвет – объем выбран



ANSYS Mechanical Enterprise Utility Menu



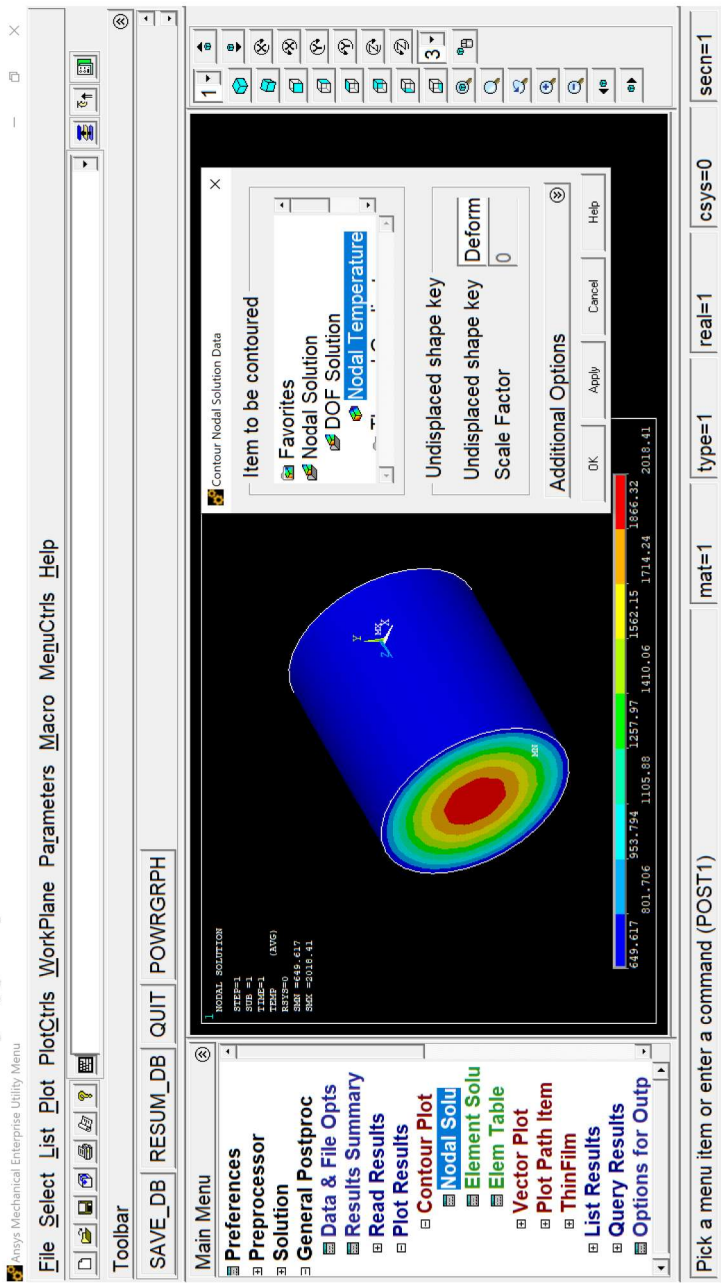
Нажав **OK**, задаем величину внутреннего источника (HGEN)  $qv = 80000000 \text{ Вт/м}^3$ .



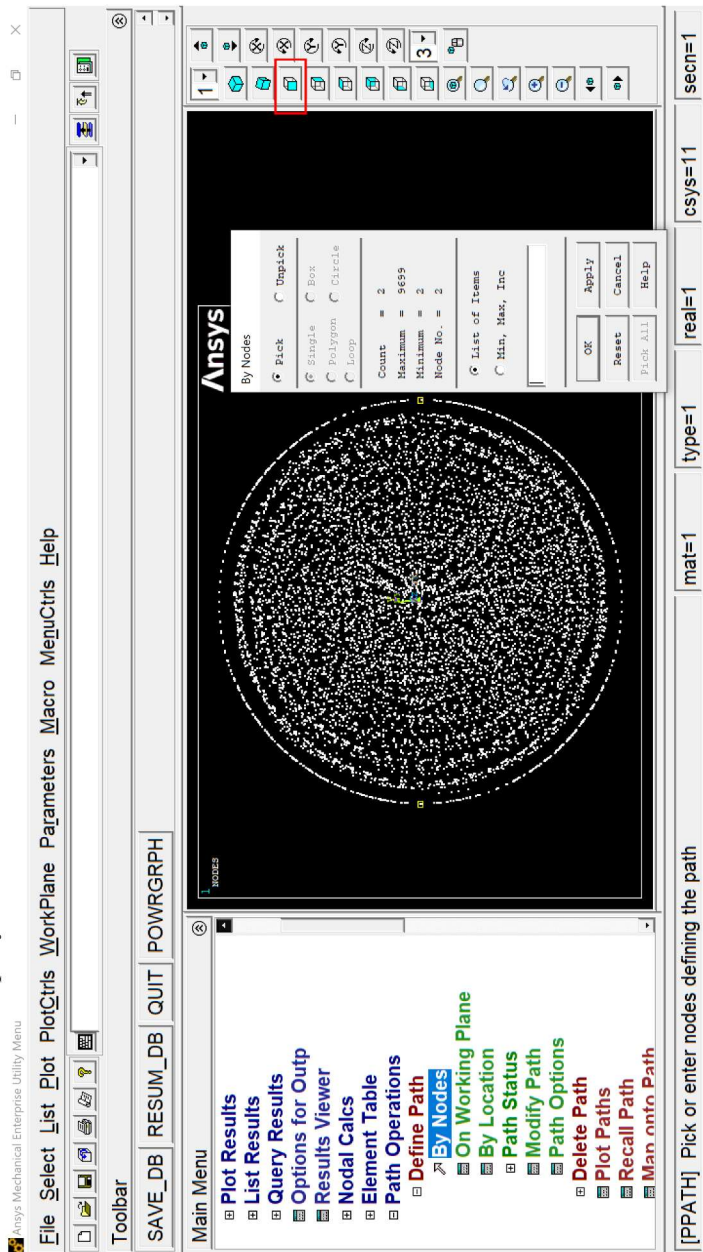
**OK**

Далее повторяем Шаг 8 – решение и Шаг 9 – постпроцессор  
 В процессе выполнения Шага 9 получим

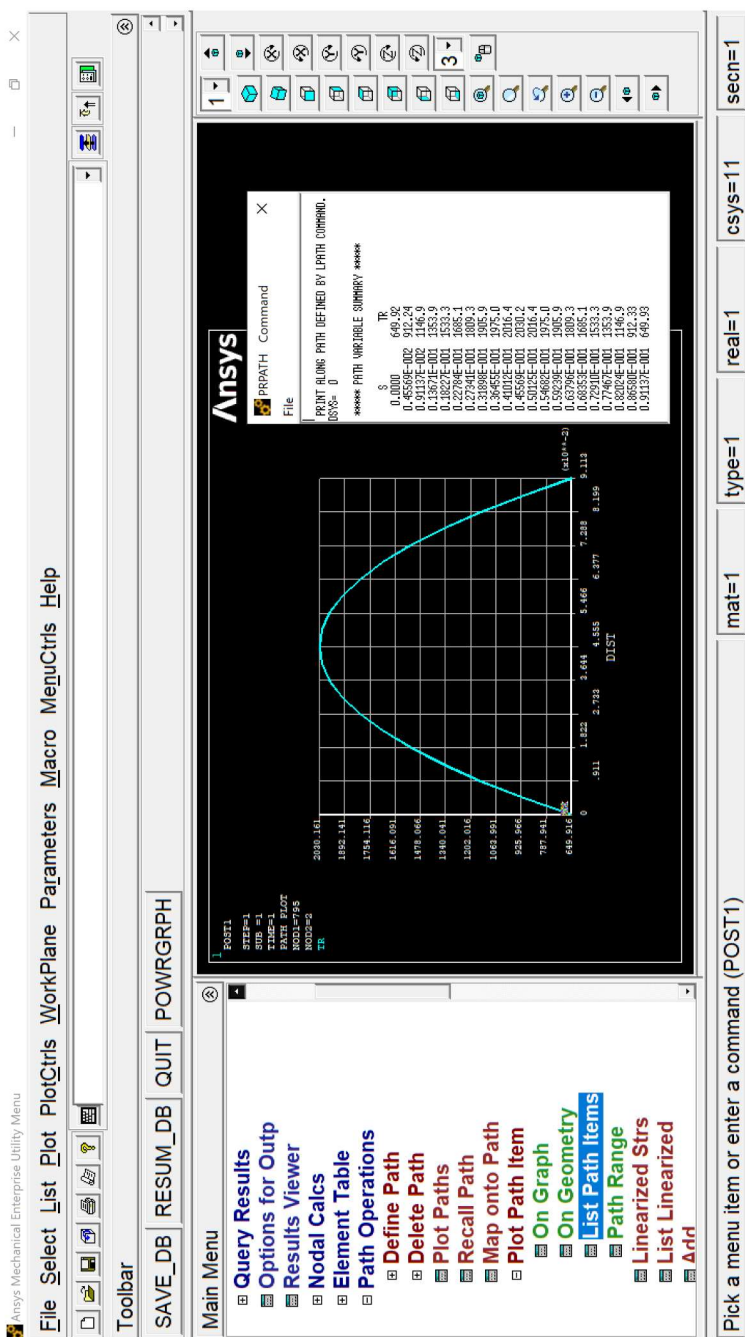
- поле температуры в расчетной области



С помощью **Path Operations** следуя алгоритму, представленному в задаче 1, построим распределение температуры по радиусу поперечного сечения цилиндра, определив ось **x** **By Nodes** как ось радиусов по крайним узлам – как показано на рисунке ниже

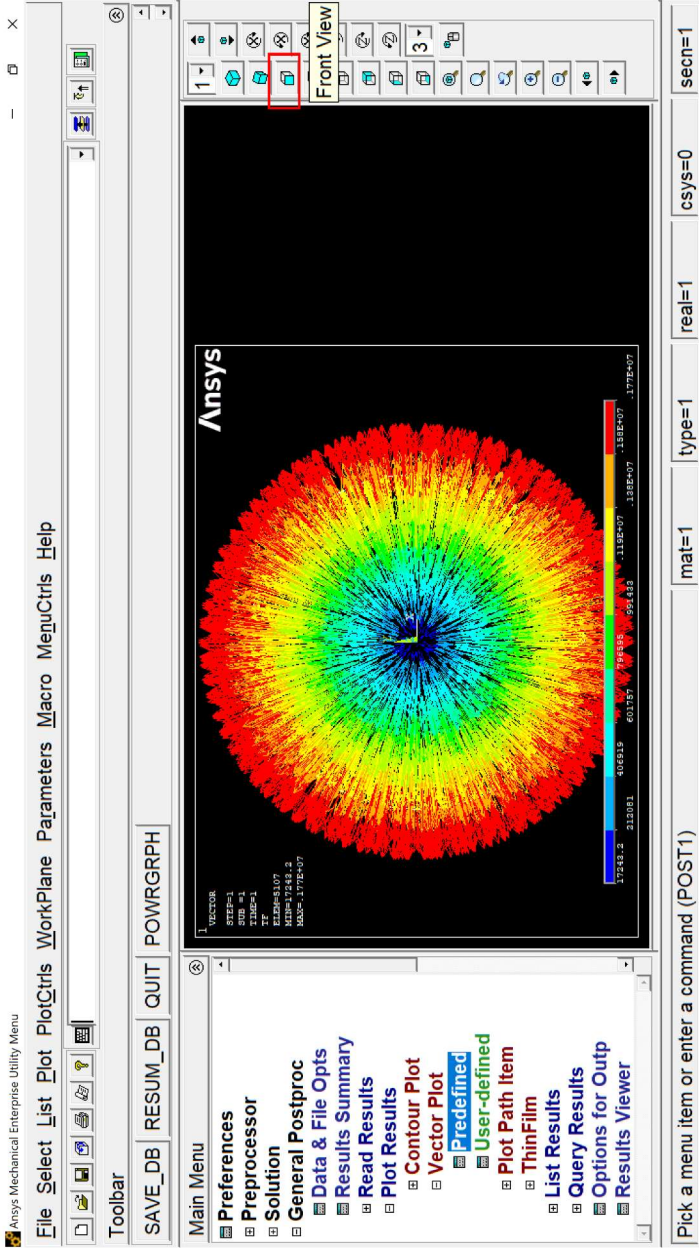


Поместив на эту ось с помощью **Map onto Path** рассчитанные значения температуры, построим график изменения температуры **t(r) Plot Path Item\On Graph**

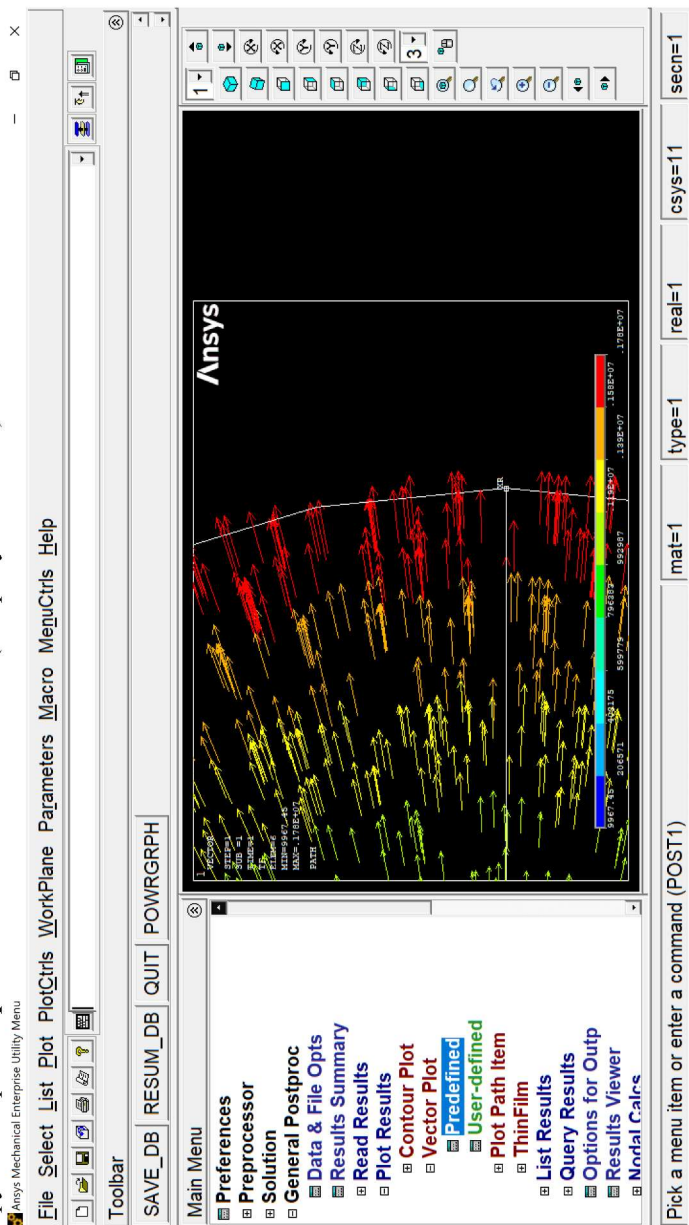


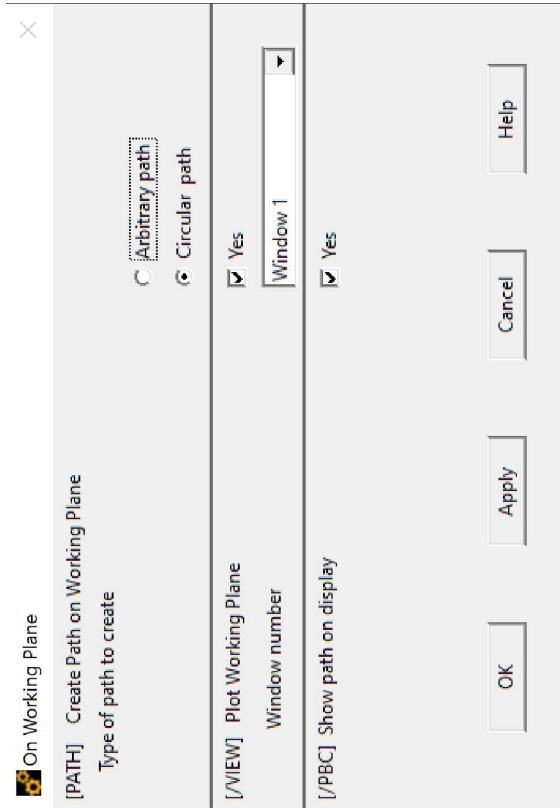


- ответ на вопрос задачи о величине плотности теплового потока  $q = 1.78 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2$  на боковой поверхности



Или более детально, используя инструмент «Лупа» в правой части интерфейса Ansys, и с помощью **Path Operations** построив график изменения локальной плотности теплового потока по внешней поверхности стержня, определим, что плотность теплового потока на боковой поверхности стержня изменяется по периметру в интервале  $q_c = 1.813 \div 1.823 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2$  (см. рисунок ниже).





Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

- Main Menu
- ▢ List Results
  - ▢ Query Results
  - ▢ Options for Outp
  - ▢ Results Viewer
  - ▢ Nodal Calcs
  - ▢ Element Table
  - ▢ Path Operations
    - ▢ Define Path
      - ▢ By Nodes
      - ▢ On Working Plane
      - ▢ By Location
      - ▢ Path Status
      - ▢ Modify Path
      - ▢ Path Options
      - ▢ Delete Path
      - ▢ Plot Paths
      - ▢ Recall Path
      - ▢ Map onto Path
      - ▢ Plot Path Item

ANSYS

Circular Path Points

Pick     Unpick

MP X =    Y =    Global X =    Y =    Z =

MP X    0  
 MP Y    0  
 Radius    0.0455

OK    Apply    Cancel  
 Reset    Help

Pick or enter 2 WP locations -- center and radius    mat=1    type=1    real=1    csys=11    secn=1

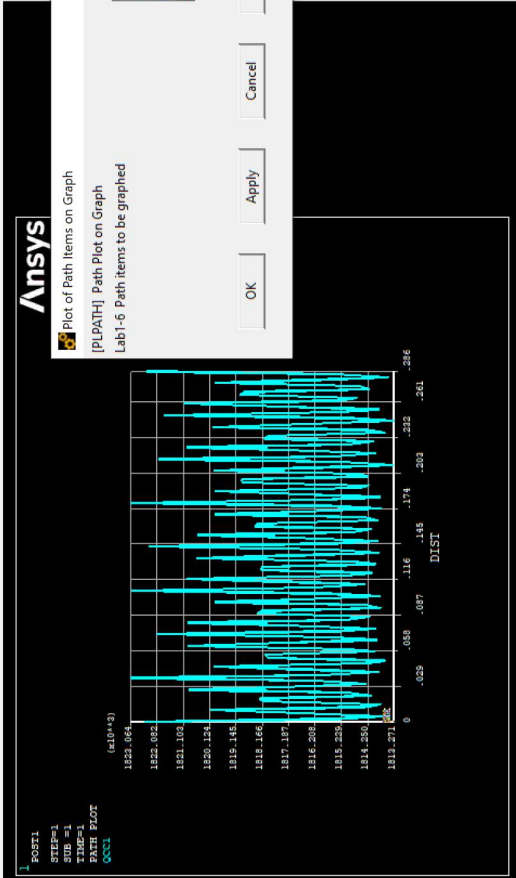


Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- Options for Output
- Results Viewer
- Nodal Calcs
- Element Table
- Path Operations
  - Define Path
  - Delete Path
  - Plot Paths
  - Recall Path
  - Map onto Path
  - Plot Path Item
    - On Graph
    - On Geometry
    - List Path Items
    - Path Range
    - Linearized Strs
    - List Linearized
    - Add
    - Multiply



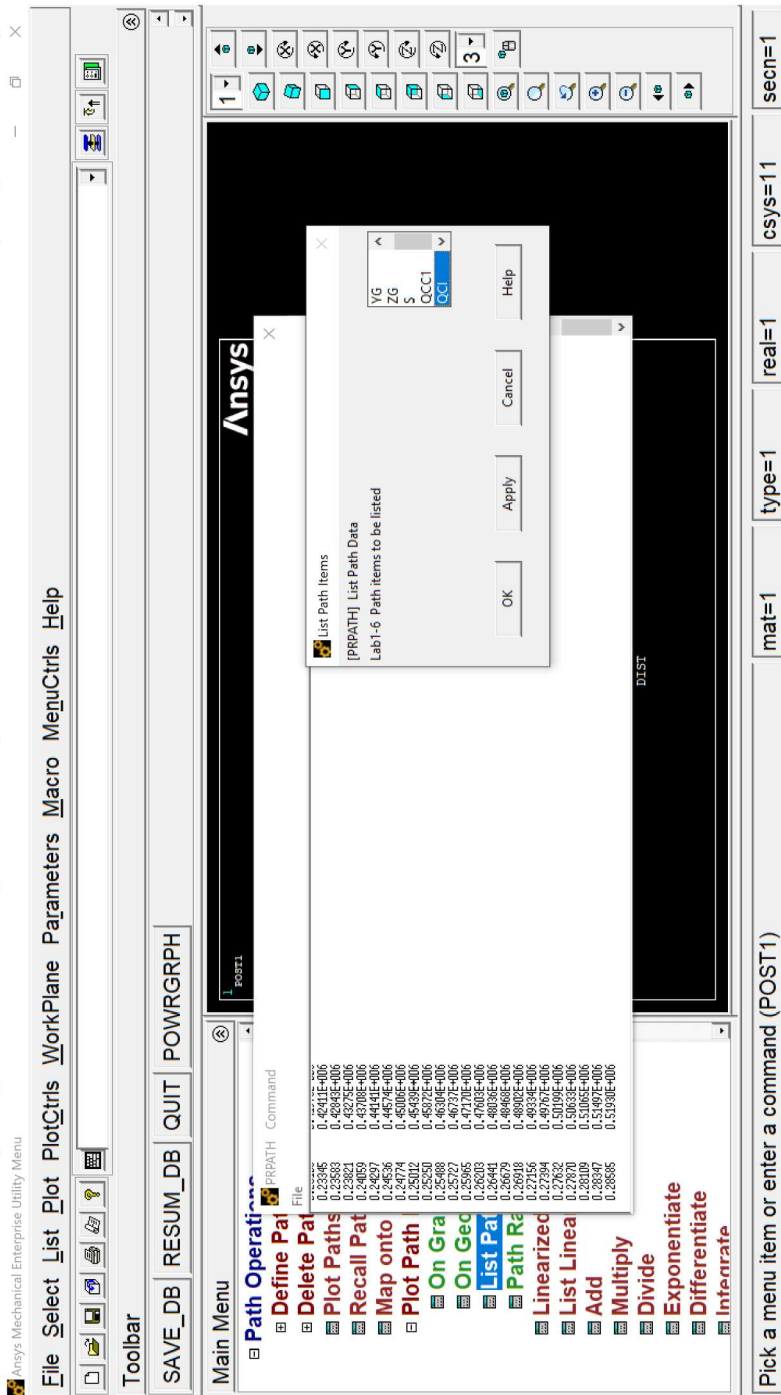
Pick a menu item or enter a command (POST1)

mat=1 type=1 real=1 csys=11 sect=1

Осреднение плотности теплового потока по боковой поверхности проведем также средствами Ansys как среднеинтегральное значение  $\frac{1}{F} \cdot \int_0^F c d$ . Для этого выберем **General Postproc Path Operations\Integrate**, введем соответствующие переменные в интеграл



И после **OK**, выбрав **General Postproc\Path Operations\Plot Path Items**, получим таблицу



```

qV := 8·107      tc := 650      tg := 370      α := 65000      λ := 30
d0 = 0.091      r0 :=  $\frac{d0}{2}$  = 0.0455

```

$$t(r) := \left[ tg + \frac{qV \cdot r0}{2\alpha} + \frac{qV}{4\lambda} \cdot (r0^2 - r^2) \right]$$

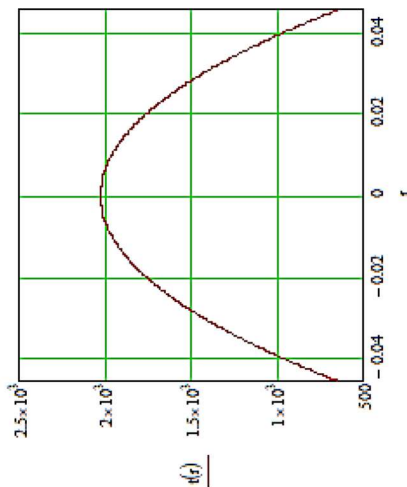
$$qc := \frac{qV \cdot r0}{2} = 1820000$$

$$tmax := t(0) = 2030.167 \quad tc := t(r0) = 650$$

$$\Delta t := t(0) - t(r0) = 1380.167$$

В которой в конце правого столбца будет стоять интеграл, а в конце левого столбца будет стоять дели- тель (ФАСТ из предыдущего рисунка). Соответственно среднинегральное значение  $q_c$  получится путем деле- ния последнего значения правой колонки на последнее значение левой колонки:  $q_c = 0,51930E+006/0,28585 = 1.817 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2$

- Сравнение с аналитическим решением в MathCad (представлено ниже) показывает наличие не- значительных расхождений как в распределении темпе- ратуры по радиусу  $t(r)$ , так и в величине плотности теп- лового потока на боковой поверхности  $q_c$ . Одна из воз- можных причин – недостаточно подробное разбиение расчетной области на элементы. Пользователю предла- гается самостоятельно улучшить (сделать более деталь- ным) разбиение расчетной области, например, с помо- щью опции **Refine** из **Preprocessor\Meshing\Meshtool** до получения так называемого сеточно-независимого ре- шения.





Закрываем окно PRPATH. Выходим из Ansys.

**Задача №5.** Нестационарная теплопроводность цилиндра конечных размеров при граничных условиях 3-го рода и отсутствии внутреннего источника теплоты

Цилиндрическую заготовку диаметром  $d = 330$  мм и длиной  $L = 350$  мм, с начальной температурой  $t_0 = 700$  °С поместили в охлаждаемый бассейн с температурой жидкости  $t_{ж} = 20$  °С, в котором она начала охлаждаться при постоянном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha = 80$  Вт/(м<sup>2</sup>К). Свойства материала заготовки: марка – Сталь 40Ni15Cr, плотность – 9073 кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоёмкость – 460 Дж/(кг К), теплопроводность – 11,6 Вт/(м К)

Рассчитать температурное поле в цилиндре как функцию радиуса  $r$  и линейной координаты  $x$  в момент времени  $\tau_1 = 6$  мин от начала охлаждения

**Решение:** Математическое описание задачи соответствует задаче нестационарной теплопроводности гл. 5 формулы (5.2), разделы (5.2, 5.3, 5.5).

Таким образом, при моделировании в Ansys необходимо начинающим пользователям создать новый проект, построить трехмерный объект – цилиндр конечных размеров, порядок построения аналогичен задаче 4, задать свойства материала аналогично задаче 1 и задать граничные условия 3-го рода аналогично задаче 4 для *внешних поверхностей цилиндра (две торцевые поверхности и две полубочки)*. Особенностью задачи является наличие начального условия по распределению температуры и задание шага интегрирования по времени.

Используя исходные данные задачи 5:

Повторяем Шаг 1 из решения задачи 4

Повторяем Шаг 2 из решения задачи 1

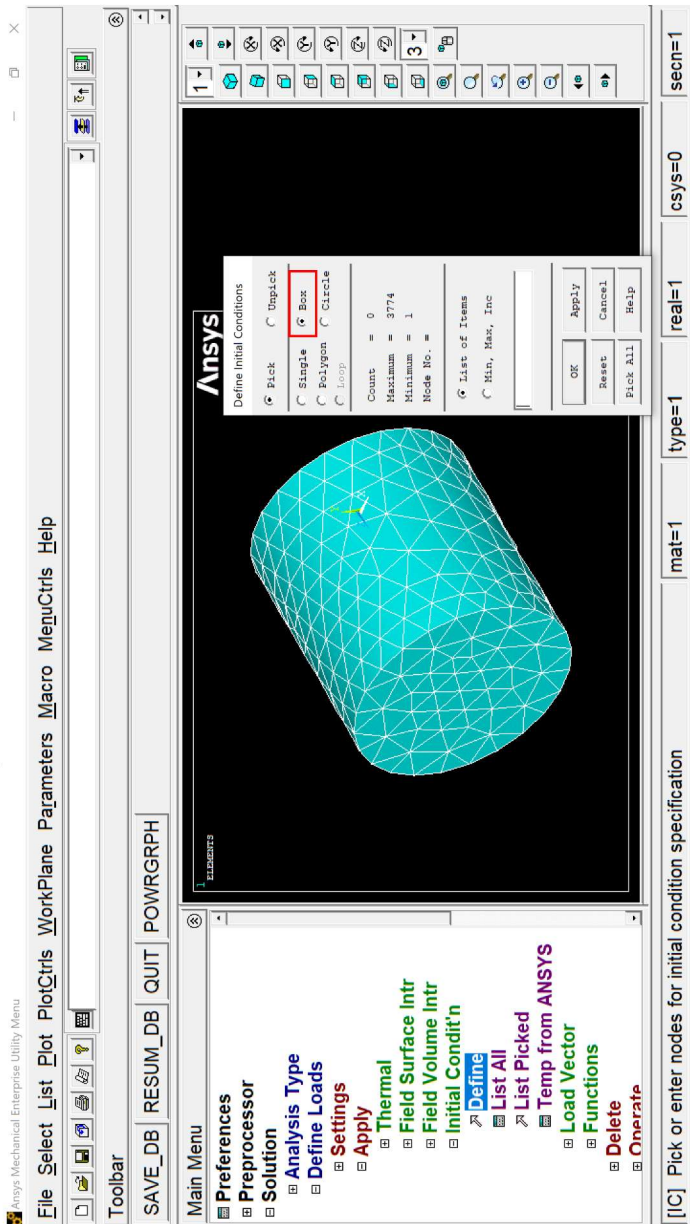
Выполняем Шаг 3 из решения задачи 1

Повторяем Шаги 4–5 из решения задачи 4

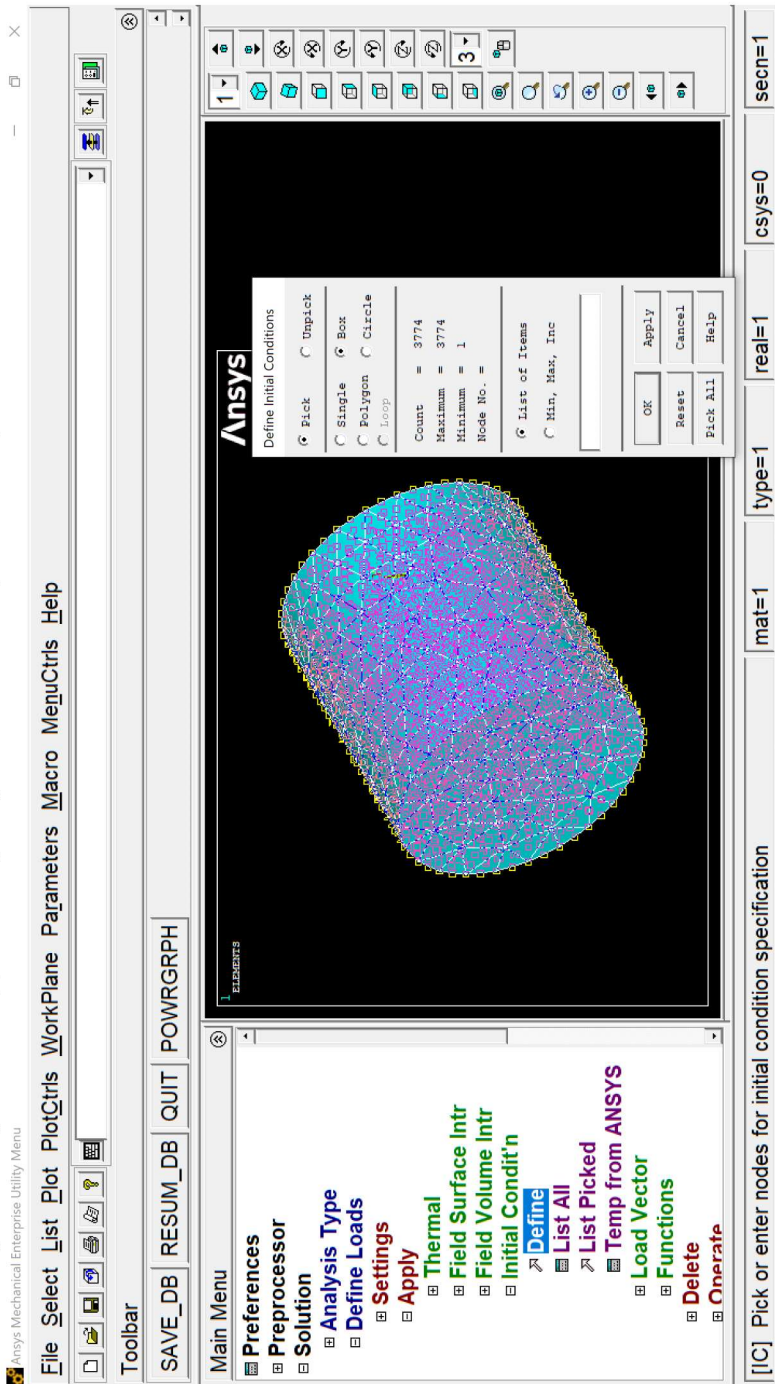
На Шаге 6 действуем аналогично задаче 1, но так как задача нестационарная, выбираем Solution\Analysis Type\New Analysis, далее выбираем Transient и нажимаем ОК

### Шаг 7. Задание начальных и граничных условий

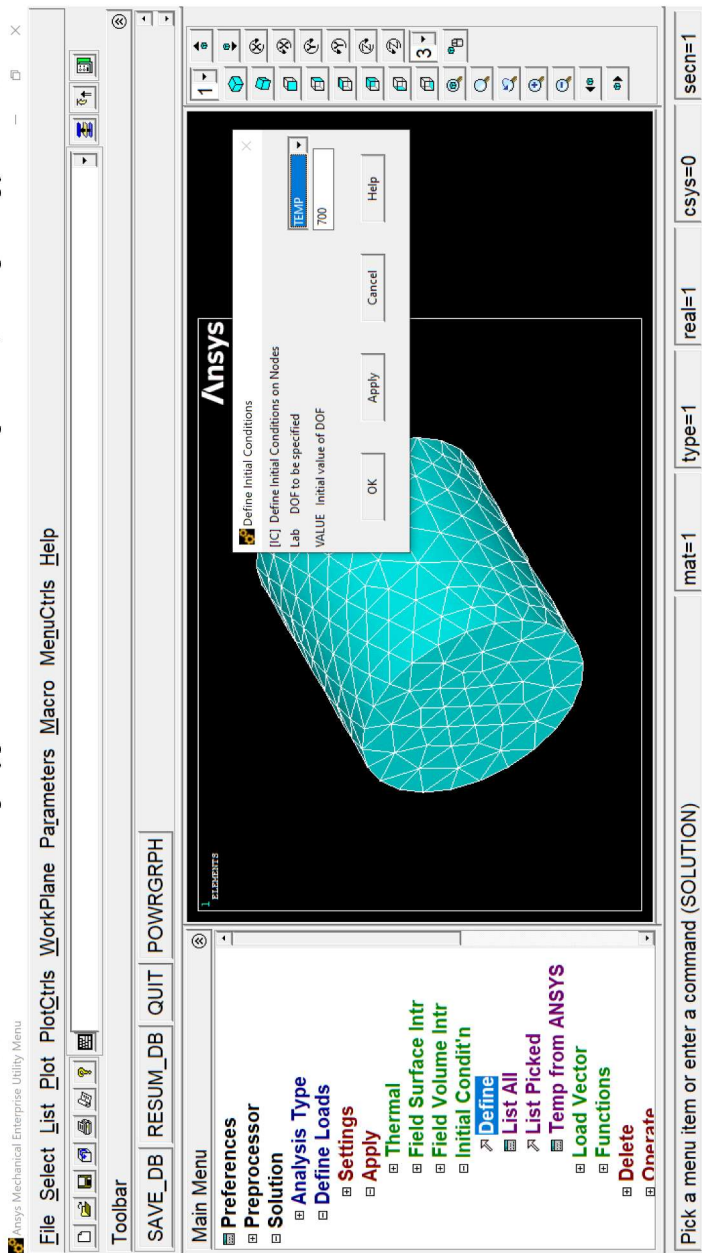
Задам граничные условия для всех границ I – IV аналогично заданию г.у. 3-го рода для границ II, IV в задаче 4  
Задание начального условия (значение температуры 700 °C во всей области) проводите с помощью **Solution\Define Loads\Initial Condit'n\Define буллет Box**



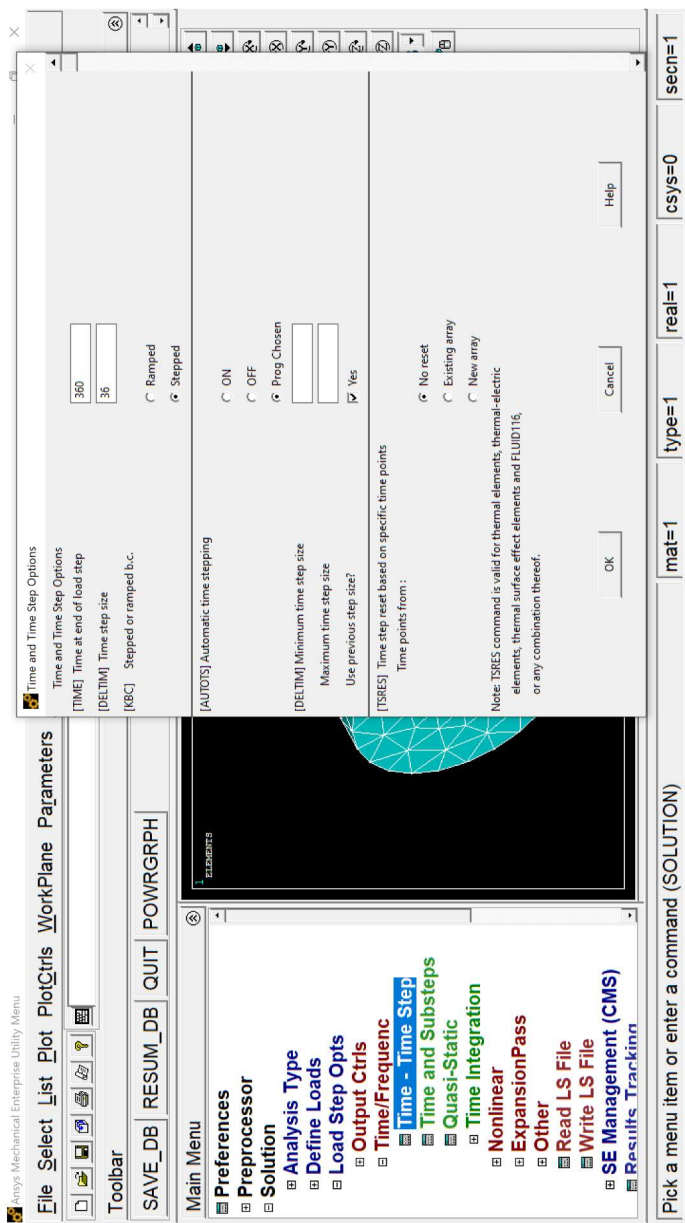
и зажав левую кнопку мыши выделяется прямоугольная область, включающая объект



После **ОК** вводим значение температуры в начальный момент времени, **ОК** фиксирует ввод



Далее задаем конечное время расчета и шаг интегрирования по времени **Solution\Load Step Opts\Time/Freque\Time** – **Time Step** вводим в соответствующие поля 360 и 36



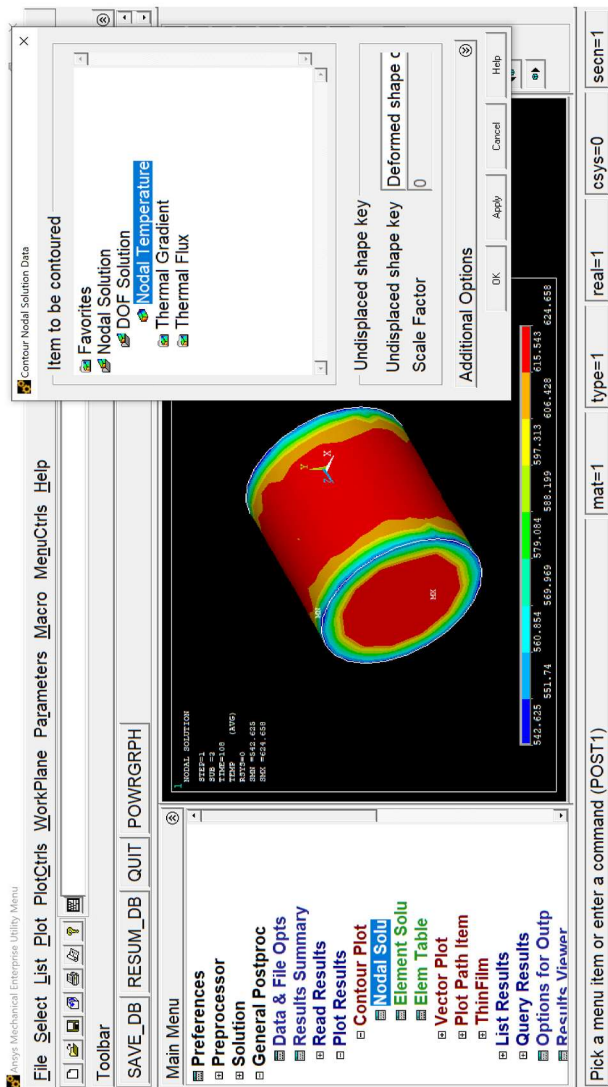
**OK**

Повторяем Шаг 3

Далее повторяем Шаг 8 – решение и Шаг 9 – постпроцессор

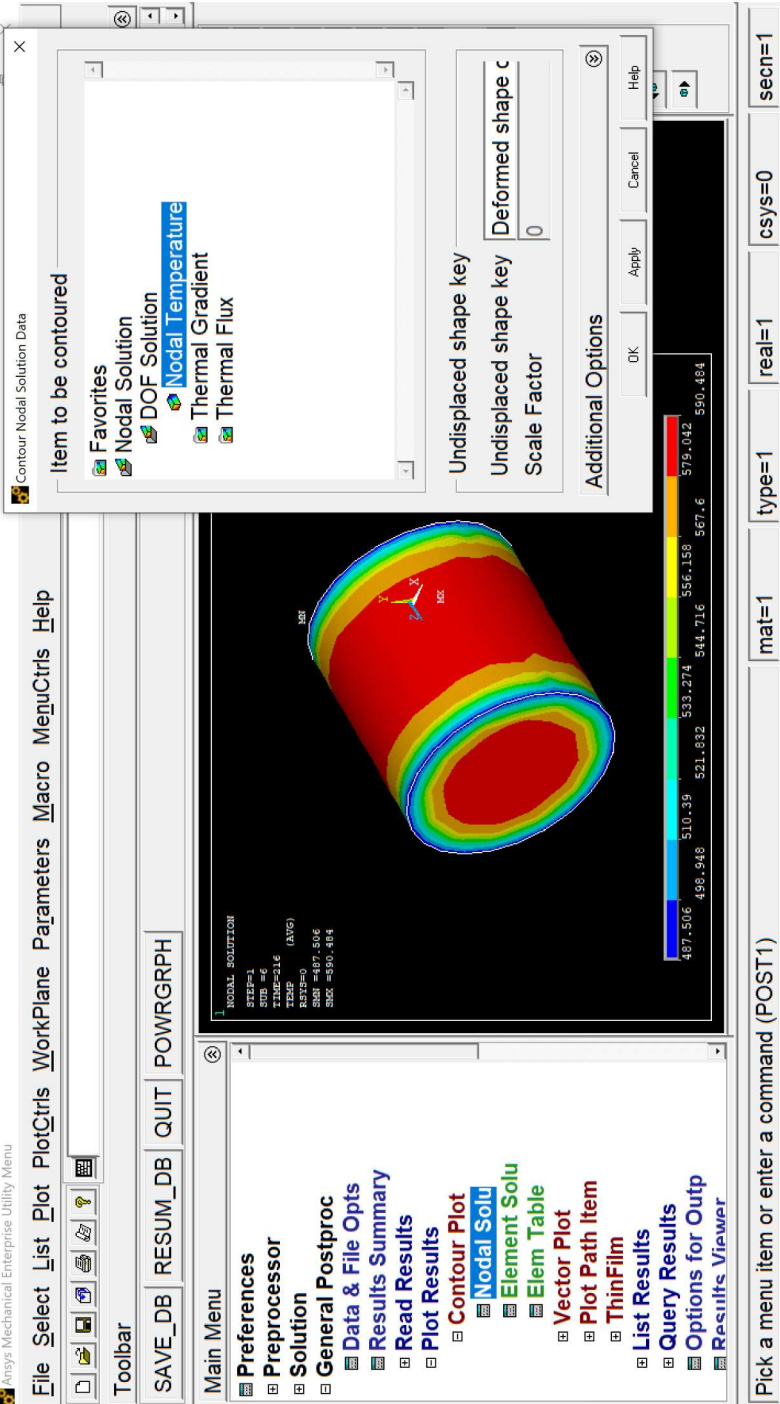
В процессе выполнения Шага 9 получим

- поле температуры в расчетной области в моменты времени, соответствующие шагу интегрирования и в конечный момент времени. Для их визуального отображения необходимо в **General PostProc\Read Results** выбрать и прочитать соответствующий набор результатов (**Fist set, Next set, Last set**) и отобразить их на экране с помощью **General PostProc\Plot Results\Contour Plot\Nodal Solu** ниже показаны два скриншота с полем температуры в промежуточные моменты времени (108 и 216 сек.) и в конечный момент времени



Pick a menu item or enter a command (POST1)

Момент времени 108 сек.



Момент времени 216 сек.

В конечный момент времени через 6 мин. (360 сек.) после начала охлаждения

Ansys Mechanical Enterprise Utility Menu

File Select List Plot PlotCtrls WorkPlane Parameters Macro MenuCtrls Help

Toolbar

SAVE\_DB RESUM\_DB QUIT POWRGRPH

Main Menu

- ▢ Preferences
- ▢ Preprocessor
- ▢ Solution
- ▢ General Postproc
  - ▢ Data & File Optis
  - ▢ Results Summary
  - ▢ Read Results
  - ▢ Plot Results
    - ▢ Contour Plot
      - ▢ Nodal Solu
      - ▢ Element Solu
      - ▢ Elem Table
      - ▢ Vector Plot
      - ▢ Plot Path Item
      - ▢ ThinFilm
    - ▢ List Results
    - ▢ Query Results
    - ▢ Options for Outp
    - ▢ Results Viewer

Contour Nodal Solution Data

Item to be contoured

- ▢ Favorites
- ▢ Nodal Solution
- ▢ DOF Solution
- ▢ Nodal Temperature
- ▢ Thermal Gradient
- ▢ Thermal Flux

Undisplaced shape key

Undisplaced shape key Deformed shape c

Scale Factor 0

Additional Options

DK Apply Cancel Help

1 NODAL SOLUTION

STEP=1

SUB =10

TIME=360

TIME (AVG)

TEMP

SMN =439.406

SMX =548.343

439.406 453.023 466.64 480.257 493.875 507.492 521.109 534.726 548.343

Pick a menu item or enter a command (POST1) mat=1 type=1 real=1 csys=0 secn=1



Задача решена, получена развертка по времени процесса охлаждения цилиндра, таблицы значений температуры (**Path Operations**) могут быть использованы для последующей обработки.

Выходим из Ansys.

При решении достаточно простых задач стационарной теплопроводности, имеющих аналитическое решение, преимущества Ansys не очевидны, более того, эти задачи можно использовать для проверки правильности работы самого Ansys. Однако, при решении задач в областях сложной геометрии, при задании различных граничных условий на разных участках граничных поверхностей, в условиях нестационарности процесса, наличия внутренних источников и учета переменности теплофизических свойств материалов численное решение с помощью Ansys или аналогичных программ может оказаться единственно возможным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990.
2. Гребер, Г. Основы учения о теплообмене / Г. Гребер, С. Эрк, У. Григульль. – М.: Иностранная литература, 1958.
3. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергия. 1975.
4. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука. 1978.
5. Кириллин, В.А. Техническая термодинамика / В.А. Кириллин, В.В. Сычев, А.Е. Шейндлин. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008.
6. Кириллов, П.Л. Справочник по теплогидравлическим расчетам / П.Л. Кириллов, Ю.С. Юрьев, В.П.Бобков. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
7. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – М.: Атомиздат, 1979.
8. Лабунцов, Д.А. Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике / Д.А. Лабунцов. – М.: Издательство МЭИ, 2000.
9. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967.
10. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия. 1977.
11. Моисеев, Н.Н. Математика ставит эксперимент / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука. 1979.
12. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука. 1984.
13. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
14. Петухов, Б.С. Опытное изучение процессов теплопередачи / Б.С. Петухов. – М.; Л.: ГЭИ, 1952.

15. Петухов, Б.С. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, С.А. Ковалев, Л.Г. Генин. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
16. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1970.
17. Практикум по теплопередаче: учеб. пособие / А.П.Солодов, Ф.Ф.Цветков, А.В.Елисеев и др.; под ред. А.П. Солодова. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
18. Солодов, А.П. Mathcad. Дифференциальные модели / А.П. Солодов, В.Ф. Очков. – М.: Изд-во МЭИ, 2002.
19. Справочник по теплообменникам. В 2 т.: пер. с англ. / под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. – М.: Энергоатомиздат. – Т.1. – 1987.
20. Теория тепломассообмена / под ред. А.И. Леонтьева. – М.: Изд-во МГТУ, 1997.
21. Теплоэнергетика и теплотехника: справочник. Кн. 2. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент /под. ред. А.В. Клименко, В.М. Зорина. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007.
22. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М: Наука, 1966.
23. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969.
24. HEDH: Heat Exchanger Design Handbook / Hewitt G.F., Executive Editor. 1998.
25. Solodov, A. Differential models. An Introduction with Mathcad / A. Solodov, V. Ochkov. – Springer Berlin Heidelberg, New York, 2004.
26. Солодов, А.П. Тепломассообмен в энергетических установках: Инженерные методы расчета [Электронный курс]: учебное пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2015.

*Учебное издание*

Солодов Александр Павлович  
Сиденков Дмитрий Владимирович  
Величко Валентин Иванович

# ТЕПЛОМАССООБМЕН

Том 1

Учебник

Редактор Е.В. Политковская  
Компьютерная верстка Ю.В. Макарова

---

Подписано в печать	28.12.21.	Печать офсетная	Формат 60x90 1/16
Печ. л. 30,25.	Тираж 400 экз.	Изд. № 21у-011	Заказ №

---

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.  
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.