

MOИ



КНИГА-ПОБЕДИТЕЛЬ
конкурса рукописей учебников
по направлениям
подготовки в МЭИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

В.П. Радин, Е.В. Позняк, О.В. Новикова

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебник

по курсу

«Устойчивость механических систем»

для студентов, обучающихся по направлению

15.03.03 «Прикладная механика»

Москва

Издательство МЭИ

2023

УДК 531
ББК 22.21
Р 15

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре робототехники, мехатроники,
динамики и прочности машин

Рецензенты: В.П. Чирков, докт. техн. наук, НИУ «МЭИ»;
А.Е. Белкин, докт. техн. наук, МГТУ им. Баумана

Радин, В.П.

Р 15 Устойчивость механических систем: учебник / В.П.Радин,
Е.В. Позняк, О.В. Новикова. – М.: Издательство МЭИ,
2023. – 260 с.

ISBN 978-5-7046-2805-7

Излагаются основные понятия и теоремы теории устойчивости. Выводятся уравнения возмущенного движения для упругого тела, формулируются динамический и статический методы исследования устойчивости. Основное внимание уделяется исследованию равновесия механических систем при действии нагрузок, явно не зависящих от времени. Изложены методы определения критических нагрузок, построения границ областей устойчивости в консервативных и неконсервативных системах, расчета на устойчивость за пределами упругости. Рассмотрены особенности неконсервативных задач теории упругой устойчивости, решены задачи определения критических нагрузок стержней, пластин и оболочек.

Для студентов обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика» и изучающих дисциплину «Устойчивость механических систем».

**УДК 531
ББК 22.21**

ISBN 978-5-7046-2805-7

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	8
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ....	10
1.1. Понятие устойчивости.....	10
1.2. Определение устойчивости по Ляпунову для дискретных систем.....	12
1.3. Определение устойчивости по Ляпунову для упругих систем.....	14
1.4. Применение метрических пространств для определения устойчивости упругих систем.....	16
1.5. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.....	17
Контрольные вопросы и упражнения.....	19
2. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА...	21
2.1. Предварительные замечания.....	21
2.2. Эйлеровы и лагранжевы координаты.....	22
2.3. Изменение длины линейного элемента.....	23
2.4. Уравнения нелинейной теории упругости.....	24
2.5. Уравнения в вариациях для упругого тела (уравнения первого приближения).....	27
2.6. Учет поведения нагрузки при составлении уравнений в вариациях.....	30
Контрольные вопросы.....	32
3. СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ.....	33
3.1. Постановка задачи об устойчивости упругих систем...	33
3.2. Динамический метод исследования устойчивости.....	33
3.3. Статический метод исследования устойчивости.....	35
3.4. Примеры применения статического метода исследования устойчивости.....	36
3.5. Область применения статического метода исследования устойчивости.....	41
3.6. Примеры применения динамического метода исследования устойчивости.....	45
Контрольные вопросы.....	54

4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ	55
4.1. Системы с конечным числом степеней свободы.....	55
4.2. Построение границы области устойчивости для консервативной системы.....	61
4.3. Решение краевой задачи на собственные значения.....	64
4.4. Применение метода разложения по формам собственных колебаний.....	71
4.5. Исследование устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью.....	75
Контрольные вопросы и упражнения.....	81
5. ОСОБЕННОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ.....	83
5.1. Типы потери устойчивости.....	83
5.2. Взаимодействие частот и форм.....	85
5.3. Влияние демпфирования на критические значения параметров неконсервативного нагружения.....	86
Контрольные вопросы.....	90
6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ.....	91
6.1. Формула Релея.....	91
6.2. Частные случаи формулы Релея.....	92
6.3. Энергетическое истолкование формулы Релея.....	100
6.4. Вариационный принцип Треффца.....	102
6.5. Методы Ритца и Бубнова-Галеркина.....	104
Контрольные вопросы и упражнения.....	107
7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ПУАНКАРЕ.....	111
7.1. Точки бифуркации, предельные точки.....	111
7.2. Применение теории бифуркаций.....	116
7.3. Послекритические деформации сжатых стержней.....	118
7.4. Устойчивость пологой арки.....	125
Контрольные вопросы.....	128
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ.....	129
8.1. Продольный изгиб сжатых стержней.....	129
8.2. Способы определения критической силы.....	132
8.3. Устойчивость стержней на упругом основании.....	139
8.4. Смена формы потери устойчивости.....	144

Контрольные вопросы и упражнения.....	149
9. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН ПРИ СЖАТИИ.....	151
9.1. Постановка задачи.....	151
9.2. Устойчивость прямоугольных пластин при сжатии в одном направлении.....	152
9.3. Устойчивость пластины при сжатии в двух направлениях.....	158
9.4. Устойчивость прямоугольных пластин при сдвиге.....	161
9.5. Устойчивость круговых и кольцевых пластин.....	164
9.6. Послекритические деформации пластин.....	167
9.7. Понятие о редуccionном коэффициенте.....	169
9.8. Расчет послекритических деформаций методом Бубнова–Галеркина.....	172
Контрольные вопросы.....	178
10. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК....	179
10.1. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии.....	179
10.2. Случай внешнего гидростатического сжатия.....	184
10.3. Сопоставление результатов линейной теории устойчивости оболочек с экспериментом.....	188
10.4. Понятие о нелинейной теории устойчивости оболочек	191
Контрольные вопросы.....	193
11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ	195
11.1. Границы применимости теории упругой устойчивости	195
11.2. Касательно-модульная критическая сила.....	199
11.3. Приведенно-модульная критическая сила.....	201
11.4. Сопоставление теорий касательного и приведенного модулей.....	205
Контрольные вопросы.....	207
12. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.....	208
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	236
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	242
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	254
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	256

ПРЕДИСЛОВИЕ

Устойчивость является одним из существенных требований механической надежности конструкций. Элементы теории устойчивости механических систем изучаются в технических дисциплинах «Сопротивление материалов», «Механика материалов и конструкций» и т.д. Однако специалистам по динамике и прочности машин необходимы более глубокие знания и навыки расчетов в области исследования устойчивости механических систем. В учебнике существенно расширен материал по прикладной теории устойчивости, по постановке и решению задач, по исследованию устойчивости механических систем. Сразу отметим, что из всего разнообразия задач теории устойчивости рассматривается устойчивость положений равновесия механических систем при действии сил, явно не зависящих от времени. Основное внимание уделено исследованию устойчивости упругих систем с распределенными параметрами. Но некоторые вопросы и положения теории устойчивости поясняются или рассматриваются на примерах систем с конечным числом степеней свободы.

Наиболее хорошо разработанной в настоящее время является теория устойчивости механических систем, находящихся под действием потенциальных (консервативных) сил. Основы этой теории заложены еще в работах Эйлера. Строгое исследование устойчивости в смысле позже разработанной теории А.М. Ляпунова в этом случае заменяется на отыскание таких наименьших значений нагрузки для упругих систем, при которых помимо исходной формы равновесия существуют смежные, весьма близкие к исследуемой, другие формы равновесия. Этот метод носит название метода Эйлера. По существу метод Эйлера применительно к устойчивости упругих систем сводит задачу отыскания критических нагрузок к определению наименьших собственных значений некоторых однородных краевых задач.

С развитием машиностроения, авиации, ракетной техники значительно расширился класс нагрузок, действующих на элементы конструкций. Например, реактивные силы тяги, аэродинамиче-

ские силы, электромагнитные силы, действующие на роторы электрических машин и т.д., характерной особенностью которых является то, что работа, совершаемая ими по замкнутому пути, отлична от нуля. Такие силы называются неконсервативными силами. Метод Эйлера, будучи весьма плодотворным для определения критических нагрузок в консервативных системах, примененный для неконсервативных систем часто приводит к парадоксальным результатам. В этих случаях необходимо применять динамический метод исследования устойчивости. И хотя основная часть учебника посвящена расчету стержней, пластин и оболочек при действии консервативных нагрузок, излагаются также методы определения критических нагрузок и методы построения границ областей устойчивости для неконсервативных систем. Отмечаются особенности неконсервативных задач теории упругой устойчивости. Некоторые характерные особенности закритического поведения нелинейной неконсервативной системы иллюстрируются в приложении.

При написании учебника был использован многолетний опыт преподавания дисциплины «Устойчивость механических систем» в НИУ «МЭИ» для студентов направления подготовки «Прикладная механика» образовательной программы «Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры», а также научно-исследовательская работа сотрудников кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». Существенную помощь в изложении основных положений и иллюстративных примеров по теории устойчивости оказало использование литературы, список которой приводится в конце учебника.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. Понятие устойчивости

История расчета на устойчивость механических систем, находящихся под действием внешних сил, насчитывает уже более 250 лет. основополагающими работами в этой области являются работы Эйлера. От содержания, вкладываемого в каждом частном случае в понятие устойчивости, существенно зависит постановка задачи и выбор метода ее решения.

Слово «*устойчивость*» – это старое русское слово. Оно встречается уже в работах Эйлера, написанных на русском языке. В словаре Даля – «*устойчивый*» – это «стойкий», «крепкий», «твердый», «не шаткий». В современном словаре русского языка прилагательное «*устойчивый*» поясняется как «имеющий способность твердо стоять, не падая и не колеблясь», «не подверженный колебаниям и изменениям». Английское прилагательное «stable» происходит от латинского слова «*stabilis*», которое само является производным от «*stare*» (выстоять). Его основные значения суть «прочно установленный», «прочно стоящий».

Понятие *устойчивости* употребляется как в повседневной жизни, так и во многих областях естествознания и техники. Можно привести следующие примеры проблем, связанных с устойчивостью: *устойчивость* движения планет, космических кораблей, ракет, самолетов, судов и наземных экипажей; *устойчивость* ламинарного течения жидкости; *устойчивость* процесса горения; *устойчивость* высокотемпературной плазмы; *устойчивость* систем автоматического управления и энергетических систем; *устойчивость* биологической клетки; *устойчивость* существования биологических видов; *устойчивость* вычислительных процессов и т.д. Вот далеко не полный перечень проблем с использованием понятия устойчивости. Определение устойчивости, используемое подчас в смежных областях знаний, часто не совпадают.

Устойчивость механической системы это свойство движения или в частном случае равновесия, которое понимается в широком смысле. Нестрогое понятие устойчивости можно пояс-

нить так. Рассмотрим некоторую механическую систему. Допустим, что известно некоторое движение (равновесие) этой системы, осуществляемое при определенном сочетании параметров, как самой системы, так и окружающей среды. Назовем это движение *невозмущенным*. Теперь представим себе, что все или часть параметров получили изменения. Движение системы также изменится. Назовем его *возмущенным*. Возникает вопрос: насколько возмущенное движение будет отличаться от невозмущенного движения. Устойчивость есть свойство системы мало отклоняться от невозмущенного движения (или равновесия) при малых возмущениях.

Приведенное выше определение устойчивости обладает нечеткостью и расплывчатостью. Для применения математических методов исследования требуется строгое определение устойчивости. Многие знаменитые математики и механики (Эйлер, Лагранж, Лаплас, Пуассон, Максвелл, Раус, Пуанкаре, Жуковский и др.) внесли крупный вклад в развитие теории устойчивости. Однако наибольшая заслуга в формировании современной теории устойчивости принадлежит А.М. Ляпунову. Он впервые дал строгое определение устойчивости, сформулировал и доказал основные теоремы, предложил два основных метода исследования устойчивости движения. Корректное определение устойчивости должно включать указание следующих элементов:

- невозмущенное движение (равновесие), устойчивость которого исследуется;
- параметры движения, по отношению к которым исследуется устойчивость;
- класс возмущений;
- интервал времени, на котором исследуется устойчивость.

При определении устойчивости по Ляпунову рассматриваются возмущения в начальных условиях и неограниченный отрезок времени. В дальнейшем рассматривается так называемая локальная устойчивость, т.е. устойчивость по отношению к малым возмущениям.

1.2. Определение устойчивости по Ляпунову для дискретных систем

Рассмотрим сначала механические системы с конечным числом степеней свободы (дискретные системы). Пусть движение некоторой системы с n степенями свободы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно фазовых переменных $y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N = 2n$

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Или, если ввести вектор $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, где $[\]^T$ — знак транспонирования, то векторная форма уравнений запишется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t). \quad (1.1)$$

Пусть $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)]^T$ — некоторое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям при t_0 :

$$\mathbf{y}(t_0) = [y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_N(t_0)]^T.$$

Назовем это движение невозмущенным. Наряду с ним рассмотрим возмущенное движение $\tilde{\mathbf{y}}(t) = [\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_N(t)]^T$. Оно удовлетворяет тем же уравнениям движения (1.1) и возмущенным начальным условиям

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}}, t). \quad (1.2)$$

Разности $x_j(t) = \tilde{y}_j(t) - y_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, N$) назовем отклонениями или возмущениями. Введем вектор отклонений $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ Разности $x_j(t_0) = \tilde{y}_j(t_0) - y_j(t_0)$,

($j = 1, 2, \dots, N$) в начальный момент времени $t = t_0$ – это начальные возмущения (отклонения). Они являются компонентами вектора $\mathbf{x}(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_N(t_0)]^T$.

Невозмущенное движение $\mathbf{y}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\exists \delta > 0$ такое, что для всех движений, удовлетворяющих в начальный момент времени условиям

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| = \|\tilde{\mathbf{y}}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta$$

следует

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$$

для всех моментов времени $t > t_0$ ($\forall t > t_0$). Здесь $\|\cdot\|$ – какая-либо норма вектора. Например, евклидова норма вектора $\mathbf{x}(t)$, определяемая по формуле

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \left(\sum_{k=1}^N x_k^2(t) \right)^{1/2}.$$

Невозмущенное движение $\mathbf{y}(t)$ называется неустойчивым, если можно найти такое $\varepsilon_1 > 0$ и такой момент времени t_1 , что для любого $\exists \delta > 0$, такого, что

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| = \|\tilde{\mathbf{y}}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta$$

будет иметь место неравенство

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)\| > \varepsilon_1$$

Невозмущенное движение $\mathbf{y}(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно:

- устойчиво по Ляпунову;
- и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0.$$

Если в уравнении (1.1) правая часть удовлетворяет условию $\mathbf{f}(0,t) = 0$, то тривиальное решение этого уравнения $\mathbf{y} = 0$ есть положение равновесия механической системы и приведенные выше определения касаются определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости этого положения равновесия.

1.3. Определение устойчивости по Ляпунову для упругих систем

Под упругими системами здесь и далее понимаем системы с распределенными параметрами, т.е. системы с распределенной упругостью и массой.

Состояние распределенной (континуальной) упругой системы (рис. 1.1) может быть описано уравнениями в частных производных относительно функций перемещений

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad x_j \in V.$$

Как и раньше, наряду с невозмущенным движением

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) \quad (j = 1, 2, 3)$$

с начальными условиями $u_j(x_1, x_2, x_3, 0) \quad (j = 1, 2, 3)$ рассмотрим возмущенное движение

$$\tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_j(x_1, x_2, x_3, t) + \bar{u}_j(x_1, x_2, x_3, t),$$

где $\bar{u}_j(x_1, x_2, x_3, t)$ — отклонения.

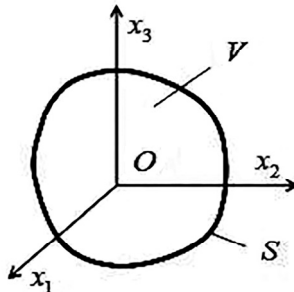


Рис. 1.1. Упругое тело объема V и площадью поверхности S

По аналогии с дискретными системами естественно ввести такое определение устойчивости: движение (равновесие) упругой системы называется устойчивым, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что из условия

$$\left| \tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, 0) - u_j(x_1, x_2, x_3, 0) \right| < \delta, \quad j = 1, 2, 3,$$

следует

$$\left| \tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, t) - u_j(x_1, x_2, x_3, t) \right| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

для всех $t > 0$ и всех точек из области V .

Выше дано определение устойчивости по перемещениям. Однако малость отклонений по перемещениям, строго говоря, является недостаточной. Практически наиболее важным является вопрос о поведении напряжений σ_{jk} и деформаций ε_{jk} .

Движение (равновесие) упругой системы называется устойчивым по деформациям, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что из условия

$$\left| \tilde{\varepsilon}_{jk}(x_1, x_2, x_3, 0) - \varepsilon_{jk}(x_1, x_2, x_3, 0) \right| < \delta, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

следует

$$\left| \tilde{\varepsilon}_{jk}(x_1, x_2, x_3, t) - \varepsilon_{jk}(x_1, x_2, x_3, t) \right| < \varepsilon, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

для всех $t > 0$ и всех точек из области V .

Поскольку компоненты тензора малых деформаций определяются по формулам Коши, т.е. с использованием компонент градиента перемещений

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1.4)$$

то из устойчивости по перемещениям, вообще говоря, не следует устойчивость по деформациям. Например, рассмотрим функцию $f(x) = \alpha \cdot \sin(x/\alpha)$, где α – параметр, который стремится к нулю. Вычислим производную $f'(x) = \cos(x/\alpha)$. Очевидно, что при $\alpha \rightarrow 0$ ее (производную) нельзя сделать сколь угодно малой. Од-

нако мы будем исключать подобные функции из рассмотрения. Если исключить из рассмотрения движение тела как жесткого целого, то можно сохранить лишь требование устойчивости по деформациям.

1.4. Применение метрических пространств для определения устойчивости упругих систем

Функции перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям и граничным условиям. Тем самым на них накладываются определенные условия гладкости. Совокупность этих функций образует некоторое функциональное пространство. Если мы введем в нем метрику, то получим метрическое пространство. Выше по умолчанию в качестве метрики подразумевалась поточечная близость функций.

Будем рассматривать векторное пространство элементов, характеризующих невозмущенное движение $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ и возмущенное движение $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, связанное с невозмущенным движением с помощью вектора отклонений $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$. Предположим, что в пространстве перемещений введена норма

$$\|\mathbf{u}\| = \left[\int_V (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dV \right]^{1/2}.$$

Тогда вместо поточечной близости перемещений в возмущенном движении и в невозмущенном движении (1.3) можно ввести близость по норме

$$\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\| = \left\{ \int_V [(\tilde{u}_1 - u_1)^2 + (\tilde{u}_2 - u_2)^2 + (\tilde{u}_3 - u_3)^2] dV \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Из точечной близости функций следует близость по норме. Обратное заключение справедливо лишь для так называемых «хороших» функций, т.е. функций, не имеющих особенностей в области своего определения V .

В качестве нормы вектора невозмущенного движения можно взять потенциальную энергию упругой деформации

$$\|\mathbf{u}\|_U^2 = \frac{1}{2} \int_V \lambda_{jklm} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{lm} dV,$$

где λ_{jklm} — тензор упругих постоянных твердого тела. Тогда, поскольку компоненты тензора отклонений деформаций определяются как $\bar{\varepsilon}_{jk} = \tilde{\varepsilon}_{jk} - \varepsilon_{jk}$, то норма отклонений вектора перемещений по потенциальной энергии определится следующим образом

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_U = \left(\frac{1}{2} \int_V \lambda_{jklm} \bar{\varepsilon}_{jk} \bar{\varepsilon}_{lm} dV \right)^{1/2},$$

где компоненты тензора $\bar{\varepsilon}_{jk}$ определяются согласно (1.4)

$$\bar{\varepsilon}_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right).$$

Теперь дадим следующее определение устойчивости движения (равновесия) упругого тела: движение (равновесие) будет устойчиво по потенциальной энергии, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что из выполнения условия $\|\bar{\mathbf{u}}(0)\|_U < \delta$ следует $\|\bar{\mathbf{u}}(t)\|_U < \varepsilon$ при $t > t_0$.

1.5. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Вновь обратимся к системам с конечным числом степеней свободы и сформулируем теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, которые составляют основу первого метода Ляпунова исследования устойчивости. Вычтем уравнение (1.1) из уравнения (1.2)

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{dt} - \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t).$$

Учитывая, что $\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ и что исследуемое на устойчивость движение $\mathbf{y}(t)$ предполагается известным, перепишем уравнение возмущенного движения (1.2) относительно отклонений $\mathbf{x}(t)$ в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (1.5)$$

где обозначено $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$. Таким образом, исследование устойчивости решения $\mathbf{y}(t)$ уравнения (1.1) соответствует исследованию устойчивости тривиального решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ уравнения возмущенного движения (1.5). При исследовании локальной устойчивости, когда отклонения $\mathbf{x}(t)$ малы, правую часть уравнения (1.5) раскладывают в ряд по степеням компонент вектора возмущений $\mathbf{x}(t)$ и удерживают лишь первые степени. При этом вместо (1.5) получим линейные уравнения возмущенного движения или уравнения в вариациях

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (1.6)$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}(t)$ определяются следующим образом

$$\mathbf{A}(t) = [a_{jk}(t)] = \left[\frac{\partial f_j(x_1, x_2, \dots, x_N, t)}{\partial x_k} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}(t) \equiv 0}.$$

И, наконец, будем рассматривать автономные системы. В этом случае правые части уравнений (1.1), (1.2) и (1.6) не зависят от времени, а элементы матрицы \mathbf{A} – суть постоянные числа. Уравнение (1.6) перепишем в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.7)$$

Первая теорема Ляпунова. Если действительные части всех собственных значений матрицы \mathbf{A} в правой части уравнения (1.7) отрицательны, то невозмущенное движение (равновесие) асимптотически устойчиво.

Вторая теорема Ляпунова. Если среди собственных значений матрицы A найдется хотя бы одно с положительно действительной частью, то невозмущенное движение (равновесие) неустойчиво.

Сомнительный случай по Ляпунову. Первая и вторая теоремы Ляпунова оставляют невыясненным случай, когда некоторые из собственных значений матрицы A имеют отрицательные действительные части, в то время как остальные собственные значения чисто мнимые (сомнительный случай по Ляпунову). В этом случае уравнения первого приближения не позволяют судить об устойчивости (неустойчивости), и в уравнениях для возмущений (1.5) нужно удерживать члены более высокого порядка. Избежать сомнительного случая при исследовании устойчивости механических систем помогает неизбежное наличие демпфирования в механических системах.

Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости с использованием уравнений первого приближения (линейных уравнений с постоянными коэффициентами) в полной мере переносятся и на системы с распределенными параметрами (на упругие системы). Существенное отличие состоит в том, что для отыскания вышеупомянутых собственных значений, или по-другому, характеристических показателей для дискретных систем нужно решать алгебраическую задачу на собственные значения. В случае упругих систем – краевую задачу на собственные значения. Если система неконсервативная, то имеет место несамосопряженная краевая задача.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая информация должна быть указана для корректного определения устойчивости механической системы?
2. Сформулируйте определение устойчивости по Ляпунову для положения равновесия механической системы.
3. В чем сходство и отличие определения устойчивости по Ляпунову для механических систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами?

4. Нормы каких параметров могут быть использованы для формулировки устойчивости по Ляпунову положения равновесия механической системы с распределенными параметрами?

5. Каким образом применяется теорема Ляпунова для определения устойчивости положения равновесия механической системы с конечным числом степеней свободы?

6. Динамическая система описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot x + b \cdot y, \\ \frac{dy}{dt} = c \cdot x + d \cdot y. \end{cases}$$

Для заданных значений коэффициентов уравнений исследовать на устойчивость положение равновесия $x = y = 0$ и тип этой точки на фазовой плоскости. Изобразить качественную картину поведения фазовых траекторий в окрестности этих точек.

Вариант	a	b	c	d
I	-3	-2	-2	-2
II	3	-2	2	-2
III	1	-2	2	-2
IV	1	-2	3	1
V	1	-2	3	-1

2. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА

2.1. Предварительные замечания

Если в основу исследования устойчивости положить уравнения классической теории упругости, то в силу теоремы единственности Кирхгофа мы придем к выводу, что при заданных нагрузках и заданных граничных условиях возможна лишь единственная форма равновесия. Между тем сама постановка задачи упругой устойчивости предполагает возможность существования форм равновесия или движения, отличных от невозмущенной формы. Так, несколько забегаая вперед, скажем, что исследуя устойчивость равновесия в смысле Эйлера, мы ищем те значения нагрузки, при которых наряду с невозмущенной формой равновесия существуют смежные с ней другие формы равновесия.

Исследование устойчивости движения или в частном случае положения равновесия упругих тел по отношению к малым возмущениям приводят к линейным дифференциальным уравнениям. Однако эти уравнения отличаются от уравнений классической теории упругости наличием дополнительных членов, содержащих параметры, с точностью до которых задается внешняя нагрузка. Чтобы получить эти члены, необходимо различать геометрию начального невозмущенного состояния, устойчивость которого исследуется, и геометрию смежных состояний. В линейной теории упругости это различие не учитывается. Для составления уравнений относительно малых возмущений необходимо исходить из уравнений нелинейной теории упругости.

В дальнейшем мы будем рассматривать некоторые неконсервативные задачи для стержней. Однако, чтобы не отвлекаться на введение и использование различных гипотез для прикладных теорий (стержни, пластины, оболочки), проведем вывод уравнений в вариациях, исходя из уравнений теории упругости для произвольного упругого тела. Для вывода уравнений в вариациях для упругого тела напомним некоторые положения классической теории упругости.

2.2. Эйлеровы и лагранжевы координаты

Будем характеризовать положение точек сплошной упругой среды в ее недеформированном состоянии их координатами относительно некоторой неподвижной, произвольно выбранной прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Пусть в процессе движения и деформирования точка среды с координатами x_1, x_2, x_3 получает перемещение с компонентами $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$, $j=1, 2, 3$ относительно тех же осей и зависящими от координат рассматриваемой точки (рис. 2.1). Новое положение точки относительно той же системы координат определим координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 , которые связаны со старыми координатами и перемещениями следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3, t), \\ \xi_2 &= x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3, t), \\ \xi_3 &= x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3, t),\end{aligned}$$

или

$$\xi_j = x_j + u_j(x_1, x_2, x_3, t), \quad j=1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Таким образом, координаты любой точки твердого деформируемого тела ξ_j , ($j=1, 2, 3$) связаны с точкой пространства относительно некоторой неподвижной системы координат. Такой способ описания движения сплошной среды называется *эйлеровым*.

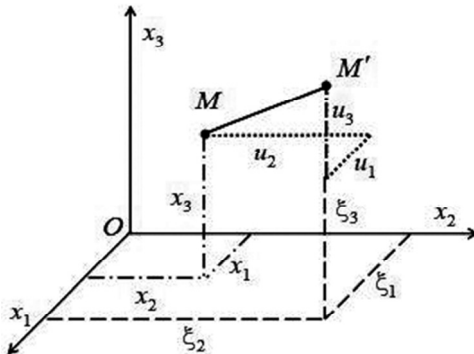


Рис. 2.1. Координаты и перемещения точки M в эйлеровой системе координат

В механике деформируемого твердого тела часто более удобным является способ описания движения Лагранжа. При этом способе с каждой точкой среды связываются координаты x_j ($j = 1, 2, 3$), которые не изменяются в процессе движения. Это так называемая «вмороженная» система координат, совпадающая с неподвижной декартовой системой координат лишь в недеформированном состоянии. После деформации среды лагранжева система координат становится криволинейной, но координаты точки x_j ($j = 1, 2, 3$) останутся теми же самыми.

2.3. Изменение длины линейного элемента

Рассмотрим в декартовой системе координат две бесконечно близкие точки M_1 и M_2 твердого тела в недеформированном состоянии (рис. 2.2) и соответствующий линейный элемент M_1M_2 длиной ds . Квадрат длины этого элемента в недеформированном состоянии определится соотношением

$$(ds)^2 = (dx_j)^2 = \delta_{jk} dx_j dx_k. \quad (2.2)$$

Здесь dx_j — проекции элемента ds на координатные оси, δ_{jk} — символы Кронекера ($\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$, $j \neq k$).

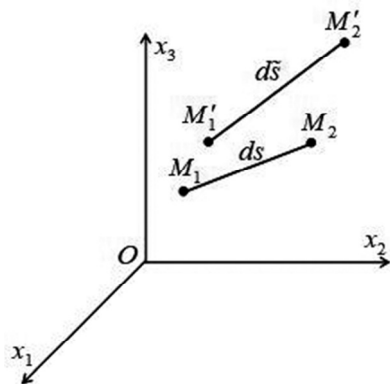


Рис. 2.2. Бесконечно малый элемент до и после деформации

После деформации точка M_1 займет положение M_1' , точка M_2 – положение M_2' , а квадрат длины линейного элемента $d\tilde{s}$ определится как

$$(d\tilde{s})^2 = (d\xi_j)^2 = \delta_{jk} d\xi_j d\xi_k. \quad (2.3)$$

На основании формулы (2.1) приращение $d\xi_j$ можно выразить следующим образом

$$d\xi_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k = \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k.$$

Тогда разность квадратов длин элементов после деформации и до деформации можно записать в виде

$$(d\tilde{s})^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{jk} dx_j dx_k,$$

где через ε_{jk} обозначен тензор конечных деформаций – тензор Грина, компоненты которого определяются по формулам

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (2.4)$$

При малых градиентах перемещений нелинейные члены отбрасывают и вместо (2.4) получают тензор малых деформаций, определяемый формулами Коши (1.4).

2.4. Уравнения нелинейной теории упругости

Рассмотрим деформируемое твердое тело объемом V , на которое действуют объемные силы с компонентами X_j и поверхностные силы p_j на части поверхности S_σ . В динамических задачах в силу принципа Даламбера к объемным силам X_j относят и даламберовы силы инерции. На остальной части поверхности S_u заданы перемещения. Пусть $\Phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{33})$ – плотность потенциальной энергии упругой деформации, выраженная через компоненты тензора деформаций и отнесенная к единице объема в

недеформированном состоянии. Тогда полная потенциальная энергия упругой деформации будет определяться интегралом по объему V

$$U = \int_V \Phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{33}) dV.$$

Уравнения нелинейной теории упругости получим из принципа возможных перемещений, согласно которому работа всех внешних сил на малых возможных перемещениях δu_j равна изменению потенциальной энергии деформации тела, т.е.

$$\delta U = \int_V X_j \delta u_j dV + \int_{S_\sigma} p_j \delta u_j dS. \quad (2.5)$$

Вычислим вариацию потенциальной энергии упругой деформации системы δU с применением формулы производной от произведения двух функций

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta u_j) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \delta u_j \right) dV - \\ &- \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \right) \delta u_j dV. \end{aligned}$$

К первому интегралу в правой части этого равенства применим формулу Гаусса–Остроградского и учтем, что на части поверхности тела S_u , где заданы перемещения, δu_j равны нулю

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \delta u_j \right) dV = \int_{S_\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} n_k \delta u_j dS.$$

Здесь n_k — компоненты вектора нормали к поверхности S_σ . Таким образом, вместо (2.5) после элементарных преобразований имеем

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \right) + X_j \right] \delta u_j dV - \int_{S_\sigma} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} n_k - p_j \right] \delta u_j dS = 0.$$

В силу произвольности виртуальных перемещений, приравнявая к нулю множители при δu_j , получим уравнения, справедливые для объема V , и граничные условия на поверхности S_σ

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} \right) + X_j = 0, \text{ в объеме } V, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} n_k = p_j, \text{ на поверхности } S_\sigma.$$

Преобразуем уравнения и граничные условия с учетом выражения для компонент тензора конечных деформаций (2.4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial (\partial u_j / \partial x_k)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right).$$

Тогда уравнения и граничные условия (2.6) переписутся следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] + X_j = 0, \text{ в объеме } V, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) n_k = p_j, \text{ на поверхности } S_\sigma.$$

Дальнейшие преобразования заключаются в том, что предполагается малость относительных деформаций e_k в направлении координатных осей Ox_k . Как отмечается в классической литературе по механике деформируемого твердого тела, при рассмотрении вопросов упругой устойчивости вполне допустимо считать перемещения и углы поворота конечными, а изменения

площадей и линейных размеров – пренебрежимо малы. На основании сказанного имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sigma_{kl} \frac{1}{1 + e_k} \approx \sigma_{kl},$$

т.е. предполагается, что справедлива формула Грина, в которой функция $\Phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{33})$ выполняет роль упругого потенциала. И, наконец, включая в рассмотрение кроме активных объемных сил и даламберовы силы инерции $-\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$, окончательно запишем приближенные нелинейные уравнения теории упругости и граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sigma_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] + X_j - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \text{ в объеме } V, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) n_k = p_j, \text{ на поверхности } S_\sigma.$$

Перемещения u_j в этих уравнениях считаются конечными, а точность этих уравнений не меньше, чем точность соответствующих прикладных теорий для стержней, пластин и оболочек. Уравнения и граничные условия (2.8) дополняются соотношениями упругости

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jklm} \varepsilon_{lm}. \quad (2.9)$$

2.5. Уравнения в вариациях для упругого тела (уравнения первого приближения)

Рассмотрим некоторое невозмущенное движение упругого тела. Пусть оно характеризуется перемещениями u_j , компонентами тензора напряжений σ_{jk} , объемными силами X_j и поверхностными силами p_j . Перечисленные параметры удовлетворяют

уравнения невозмущенного движения с граничными условиями (2.8). Наряду с этим движением рассмотрим возмущенное движение, которое характеризуется параметрами $\tilde{u}_j, \tilde{\sigma}_{jk}, \tilde{X}_j, \tilde{p}_j$. Возмущенные и невозмущенные параметры отличаются на некоторые, вообще говоря, малые величины отклонений $\bar{u}_j, \bar{\sigma}_{jk}, \bar{X}_j, \bar{p}_j$, т.е.

$$\tilde{u}_j = u_j + \bar{u}_j, \quad \tilde{\sigma}_{jk} = \sigma_{jk} + \bar{\sigma}_{jk}, \quad \tilde{X}_j = X_j + \bar{X}_j, \quad \tilde{p}_j = p_j + \bar{p}_j. \quad (2.10)$$

Характеристики возмущенного движения $\tilde{u}_j, \tilde{\sigma}_{jk}, \tilde{X}_j, \tilde{p}_j$ удовлетворяют тем же уравнениям и граничным условиям, что и характеристики невозмущенного движения

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tilde{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \right) \right] + \tilde{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} = 0, \quad \text{в объеме } V, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\sigma}_{jl} \left(\delta_{kl} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \right) n_k = \tilde{p}_j, \quad \text{на поверхности } S_\sigma.$$

Подставляя сюда соотношения (2.10), получим уравнения относительно отклонений $\bar{u}_j, \bar{\sigma}_{jk}, \bar{X}_j, \bar{p}_j$, которые с учетом (2.8) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right] + \bar{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial t^2} = 0, \quad \text{в объеме } V, \quad (2.12)$$

$$\bar{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) n_k + \sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_k = \bar{p}_j, \quad \text{на поверхности } S_\sigma.$$

Параметры невозмущенного движения здесь предполагаются известными. На основании малости отклонений параметров возмущенного движения от невозмущенного проведем линейри-

зацию этого уравнения, отбросив члены второго порядка малости типа $\bar{\sigma}_{kl} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l}$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right] + \bar{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial t^2} = 0, \text{ в объеме } V, \quad (2.13)$$

$$\bar{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) n_k + \sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_k = \bar{p}_j, \text{ на поверхности } S_\sigma.$$

Компоненты тензора напряжений $\bar{\sigma}_{jk}$ выразим через отклонения в перемещениях \bar{u}_j с точностью до линейных членов. С учетом симметрии тензора упругих постоянных λ_{jklm} имеем

$$\bar{\sigma}_{jk} = \lambda_{jklm} \bar{\varepsilon}_{lm} = \frac{1}{2} \lambda_{jklm} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right) = \lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m}. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.13) совместно с соотношением (2.14) есть уравнения первого приближения или уравнения в вариациях.

Дальнейшее упрощение уравнений первого приближения возможно в случаях, когда невозмущенное состояние незначительно отличается от первоначального недеформированного состояния. Это часто встречается в задачах, когда невозмущенное состояние можно считать «жестким», а переход в возмущенное состояние связан с возникновением больших перемещений. Поэтому при решении таких задач упругой устойчивости геометрия невозмущенного состояния обычно отождествляется с геометрией недеформированного состояния. В этом случае пренебрегаем членами

нами $\bar{\sigma}_{kl} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\sigma}_{kl} \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] \approx \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right).$$

Окончательно уравнения в вариациях для упругого тела (уравнения первого приближения) совместно с силовыми граничными условиями и соотношениями упругости примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) + \bar{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial t^2} = 0, \text{ в объеме } V,$$

$$\lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} n_k + \sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_k = \bar{p}_j, \text{ на поверхности } S_\sigma, \quad (2.15)$$

$$\bar{\sigma}_{jk} = \lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m}.$$

2.6. Учет поведения нагрузки при составлении уравнений в вариациях

Характер поведения нагрузки при малых отклонениях может оказать существенное влияние на тип уравнений в вариациях. Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся типы нагрузок.

А. Потенциальные или, как их еще иногда называют, «мертвые» силы – силы, которые остаются неизменными как по величине, так и по направлению при любых отклонениях тела от исследуемого на устойчивость невозмущенного состояния (рис. 2.3,а). В проекциях на неподвижные декартовы координаты компоненты этой нагрузки (объемных и поверхностных сил) остаются неизменными, т.е.

$$\bar{X}_j = 0, \quad \bar{p}_j = 0. \quad (2.16)$$

Б. Следящие силы – это силы, которые остаются постоянными по величине, перемещаются вместе с телом и поворачиваются таким образом, что углы, образованные вектором силы с координатами лагранжева базиса остаются неизменными (рис. 2.3,б).

Направляющие косинусы координатных векторов n_{jk} после перехода системы в возмущенное состояние с учетом малости линейных относительных деформаций можно определить по формуле

$$n_{jk} \approx \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}.$$

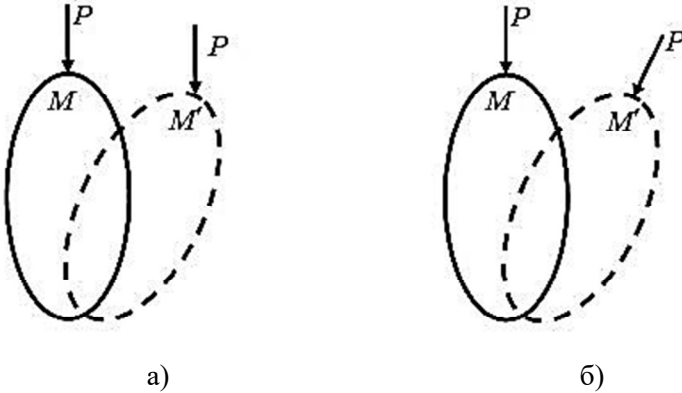


Рис. 2.3. Потенциальная: а) и следящая б) силы

Следовательно, компоненты объемных и поверхностных сил определяются соотношениями

$$\tilde{X}_j = X_k n_{jk} \approx X_k \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) = X_j + X_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k},$$

$$\tilde{p}_j = p_k n_{jk} \approx p_k \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) = p_j + p_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}.$$

Отсюда для отклонений следящей нагрузки получим

$$\bar{X}_j = X_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}, \quad \bar{p}_j = p_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}. \quad (2.17)$$

В. Объемные и поверхностные силы образуют поля, зависящие от эйлеровых координат точки, в которой они действуют. В этом случае, раскладывая компоненты нагрузок в степенные ряды

и удерживая линейные члены в силу малости отклонений перемещений \bar{u}_j , получим

$$\tilde{X}_j = X_j(x_1 + \bar{u}_1, x_2 + \bar{u}_2, x_3 + \bar{u}_3) = X_j + \frac{\partial X_j}{\partial x_k} u_k + \dots,$$

$$\tilde{p}_j = p_j(x_1 + \bar{u}_1, x_2 + \bar{u}_2, x_3 + \bar{u}_3) = p_j + \frac{\partial p_j}{\partial x_k} u_k + \dots$$

Тогда для отклонений объемных и поверхностных сил получим

$$\bar{X}_j = \frac{\partial X_j}{\partial x_k} u_k, \quad \bar{p}_j = \frac{\partial p_j}{\partial x_k} u_k. \quad (2.18)$$

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры решенных ранее задач, в которых вы применяли эйлеров или лагранжев способ описания движения.

2. Почему для составления уравнений возмущенного движения механических систем необходимо исходить из геометрически нелинейных уравнений теории упругости и в чем заключается линейаризация нелинейного варианта уравнений возмущенного движения?

3. Уравнения в вариациях, уравнения нейтрального равновесия, уравнения первого приближения – в чем сходство и в чем отличие этих одних из основных понятий теории устойчивости механических систем?

4. Каким образом учитывается характер поведения нагрузки при составлении и исследовании уравнений в вариациях?

3. СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Постановка задачи об устойчивости упругих систем

Уравнения в вариациях (2.15) позволяют судить об устойчивости или неустойчивости невозмущенного состояния упругого тела. Наибольший интерес представляют задачи об устойчивости некоторых форм равновесия. Основная задача теории упругой устойчивости состоит в отыскании таких значений параметров системы и/или внешних условий, которые соответствуют переходу от устойчивости к неустойчивости. Чаще всего с точностью до параметров задаются внешние нагрузки (силы). Тогда говорят о критических силах (критических параметрах нагрузки). Потеря устойчивости исследуемой формы равновесия называется *бифуркацией* (раздвоение форм равновесия).

Пусть, например, внешние силы характеризуются одним параметром β . Без ограничения общности можно считать, что параметр β изменяется в пределах $0 \leq \beta < \infty$, причем при $\beta = 0$ невозмущенная форма равновесия устойчива. Верхняя грань значений β_* , при которых невозмущенная форма равновесия (движения) остается устойчивой называется *критической*. В случае конечного числа параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ вводится r -мерное пространство параметров, и размечают в нем области устойчивости и неустойчивости. Поверхности, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, называются критическими поверхностями.

3.2. Динамический метод исследования устойчивости

Пусть упругое тело находится под действием нагрузок, явно не зависящих от времени и пропорциональных некоторому одному параметру β (рис. 3.1).

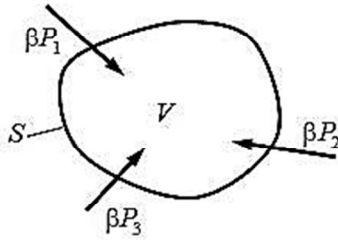


Рис. 3.1. Упругое тело под действием сил, пропорциональных одному параметру

Тогда в силу линейности задачи компоненты тензора напряжений, объемные и поверхностные силы также будут пропорциональны параметру β

$$\sigma_{kl} \rightarrow \beta \sigma_{kl}, \quad \bar{X}_j \rightarrow \beta \bar{X}_j, \quad \bar{p}_j \rightarrow \beta \bar{p}_j,$$

и уравнения в вариациях (2.15) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) + \beta \bar{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial t^2} = 0 \text{ в объеме } V, \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\lambda_{jklm} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} n_k + \beta \sigma_{kl} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_k = \beta \bar{p}_j \text{ на } S_\sigma,$$

$$\bar{u}_j = 0 \text{ на } S_u.$$

По существу это есть уравнения малых колебаний упругой системы около невозмущенного положения равновесия системы. Если ввести вектор отклонений $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, то по аналогии с теорией колебаний эти уравнения и их частные случаи для прикладных теорий (стержни, пластины, оболочки) можно записать в операторной форме

$$C\bar{\mathbf{u}} + A \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} + \beta B\bar{\mathbf{u}} + \varepsilon D \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь A, B, C, D – линейные дифференциальные операторы. A – инерционный оператор, C – упругий оператор, D – диссипативный оператор, учитывающий рассеяние энергии при колебаниях. От операторного уравнения свободных колебаний упругих систем уравнение (3.2) отличается наличием параметрического оператора B , характерного для задач устойчивости.

Будем искать решение этого уравнения (3.2) в виде

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{\varphi}(x_1, x_2, x_3) e^{\lambda t}, \quad (3.3)$$

где $\bar{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ – форма движения в окрестности исследуемого на устойчивость положения равновесия, λ – характеристический показатель, определяющий поведение системы во времени в окрестности положения равновесия. После подстановки выражения (3.3) в уравнение (3.2) получим

$$C\bar{\varphi} + \beta B\bar{\varphi} + \varepsilon D(\lambda)\bar{\varphi} + \lambda^2 A\bar{\varphi} = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, задача свелась к отысканию собственных значений λ операторного уравнения (3.4).

Очевидно, что невозмущенное движение (равновесие) будет асимптотически устойчивым, если действительные части всех характеристических показателей отрицательные $\text{Re} \lambda < 0$. Метод, основанный на исследовании устойчивости движения около невозмущенного положения равновесия упругой системы, называется *динамическим методом*.

3.3. Статический метод исследования устойчивости

Этот метод берет своё начало от работ Эйлера (1774). Согласно этому методу исследование устойчивости заменяется отысканием форм равновесия, близких к невозмущенной. В этом методе фактор времени игнорируется, и операторное уравнение этого метода вместо (3.4) приобретает вид

$$C\bar{\varphi} + \beta B\bar{\varphi} = 0. \quad (3.5)$$

Это есть уравнение нейтрального равновесия, т.е. уравнение равновесия для состояний, смежных с невозмущенным состоянием. В этом методе критическим значением параметра нагружения β_* будет то, при котором это уравнение имеет нетривиальное решение, т.е. β_* будет совпадать с наименьшим собственным значением однородной краевой задачи.

3.4. Примеры применения статического метода исследования устойчивости

Рассмотрим применение статического метода исследования устойчивости для определения критической нагрузки консольного стержня с прямолинейной осью при действии потенциальной («мертвой») силы Q (рис. 3.2,а) и при действии следящей силы P (рис. 3.2,б). Будем исследовать устойчивость прямолинейной формы равновесия стержня с изгибной жесткостью EI и длиной l . Пренебрегая продольными деформациями, отклонения от прямолинейной формы в плоскости наименьшей жесткости, т.е. поперечные перемещения сечений стержня относительно его оси обозначим через $w(x)$.

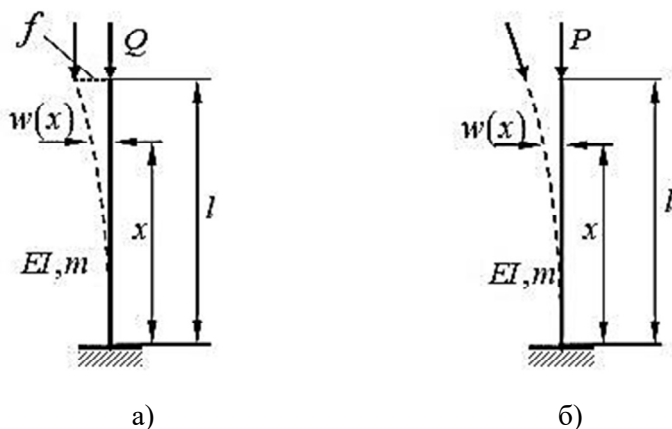


Рис. 3.2. Консольный стержень под действием сжимающей потенциальной силы а) и следящей силы б)

А. Стержень, сжатый потенциальной («мертвой») силой

Уравнение нейтрального равновесия (3.5) для исследования устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня имеет вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + Q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) дополняется граничными условиями, которые в данном случае будут следующими

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad (x = 0), \\ EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 w}{dx^3} + Q \frac{dw}{dx} = 0, \quad (x = l). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \alpha = \frac{Ql^2}{EI}. \quad (3.8)$$

Тогда уравнение (3.6) и граничные условия (3.7) переписутся следующим образом

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.9) будем искать в виде $w(\xi) = C \exp(r\xi)$. Подстановка этого выражения в уравнение (3.9) дает алгебраическое уравнение для определения показателей r

$$r^4 + \alpha r^2 = 0. \quad (3.11)$$

Его корни $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha}$, $r_{3,4} = 0$. Таким образом, общее решение уравнения (3.9), содержащее четыре произвольные постоянные $C_j, j = 1 \div 4$, имеет вид

$$w(\xi) = C_1 \cos \sqrt{\alpha}\xi + C_2 \sin \sqrt{\alpha}\xi + C_3\xi + C_4. \quad (3.12)$$

Подстановка этого выражения в граничные условия (3.10) дает однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $C_{1 \div 4}$:

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0, \\ \sqrt{\alpha}C_2 + C_3 &= 0, \\ -\alpha C_1 \cos \sqrt{\alpha} - \alpha C_2 \sin \sqrt{\alpha} &= 0, \\ (\alpha\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\alpha})C_1 \sin \sqrt{\alpha} + (-\alpha\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha})C_2 \cos \sqrt{\alpha} + \alpha C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что, безусловно, $C_2 = C_3 = 0$. Требуя, чтобы остальные постоянные не равнялись нулю, т.е. $C_4 = -C_1 \neq 0$, получим условие нетривиальности решения уравнения (3.9) для $w(\xi)$ или условие существования смежных с прямолинейной изогнутых форм равновесия стержня

$$\cos \sqrt{\alpha} = 0. \quad (3.13)$$

Это есть уравнение для определения критического значения параметра нагрузки α_* . Наименьший корень уравнения (3.13) равен $\sqrt{\alpha_*} = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha_* = \frac{\pi^2}{4}$. Следовательно, с учетом введенных ранее безразмерных параметров (3.8) для критического значения потенциальной сжимающей силы имеем

$$Q_* = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (3.14)$$

Введем обозначение $C_4 = -C_1 \equiv f$. Тогда для формы поте-ри устойчивости с учетом значения для α_* и с точностью до по-стоянного множителя получим

$$w(\xi) = f[1 - \cos(\pi\xi/2)] = f[1 - \cos(\pi x/2l)]. \quad (3.15)$$

Здесь под f понимается наибольшее отклонение сечений стержня от оси Ox , которое достигается при $\xi = 1$ или $x = l$.

В этой задаче для определения критического значения сжи-мающей силы можно исходить из уравнения нейтрального равно-весия второго порядка

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = Q(f - w).$$

Или, с учетом (3.8)

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \alpha w = \alpha f.$$

Так как прогиб f при $x = l$ неизвестен, то необходимо три граничных условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad w = f, \quad (\xi = 1).$$

Решение уравнения

$$w(\xi) = C_1 \cos \sqrt{\alpha} \xi + C_2 \sin \sqrt{\alpha} \xi + f.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\begin{cases} C_2 + f = 0, \\ \sqrt{\alpha} C_1 = 0, \\ C_1 \sin \sqrt{\alpha} + C_2 \cos \sqrt{\alpha} + f = f. \end{cases}$$

Отсюда также следует условие (3.13).

Б. Стержень, сжатый следящей силой

Теперь попробуем применить статический метод для опре-деления критического значения следящей силы, приложенной к свободному концу консольного стержня (рис. 3.2,б). Сила называ-ется следящей, если ее направление при любых перемещениях

совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения этой силы. Уравнение нейтрального равновесия в этом случае остается тем же:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.16)$$

со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad (x = 0), \\ \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0, \quad (x = l). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обратим внимание на то, что постановка задачи в рассматриваемом случае отличается от предыдущей задачи лишь последним граничным условием для поперечной силы на незакрепленном конце стержня при $x = l$. Здесь следящая сила не дает проекции на ось, перпендикулярную изогнутой оси стержня. Аналогично (3.8) безразмерный параметр следящей нагрузки введем как

$$\beta = \frac{Pl^2}{EI}. \quad (3.18)$$

Тогда уравнение (3.16) и граничные условия (3.17) переписутся как

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad (3.19)$$

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0, \quad (\xi = 1). \quad (3.20)$$

Общее решение уравнения (3.19) имеет вид, совпадающий с (3.12)

$$w(\xi) = C_1 \cos \sqrt{\beta} \xi + C_2 \sin \sqrt{\beta} \xi + C_3 \xi + C_4. \quad (3.21)$$

В соответствии с граничными условиями (3.20) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования C_{1-4}

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0, \\ \sqrt{\beta}C_2 + C_3 &= 0, \\ -\beta \cos \sqrt{\beta} C_1 - \beta \sin \sqrt{\beta} C_2 &= 0, \\ \beta \sqrt{\beta} \sin \sqrt{\beta} C_1 - \beta \sqrt{\beta} \cos \sqrt{\beta} C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{\beta} & 1 & 0 \\ -\cos \sqrt{\beta} & -\sin \sqrt{\beta} & 0 & 0 \\ \sin \sqrt{\beta} & -\cos \sqrt{\beta} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 \sqrt{\beta} + \sin^2 \sqrt{\beta} = 1$$

при любых значениях параметра β отличен от нуля, из чего следует, что все константы C_j , $j = 1 \div 4$ в выражении для отклонений от прямолинейной формы (3.21) равны нулю. Таким образом, приходим к абсурдному результату о том, что ни при каких значениях сжимающей следящей силы P стержень не теряет устойчивость. Эта задача впервые была поставлена Пфлюгером (1951), который из полученного результата сделал вывод о безграничной устойчивости стержня. Однако полученный факт свидетельствует лишь о том, что статический метод исследования устойчивости в рассматриваемом случае (консольный стержень при действии сжимающей следящей нагрузки) неприменим, и для определения критического значения силы P необходимо обратиться к динамическому методу.

3.5. Область применения статического метода исследования устойчивости

Как уже упоминалось выше, статический метод исследования устойчивости (метод Эйлера), операторная запись которого имеет вид $S\bar{\varphi} + \beta V\bar{\varphi} = 0$, заменяет исследование устойчивости в

строгом смысле отысканием условий существования форм равновесия, смежных к исследуемой форме. Получим достаточные условия применения метода Эйлера. Рассмотрим уравнение динамического метода (3.4), которое после выделения временного множителя и при отсутствии демпфирования запишется как

$$C\bar{\varphi} + \beta B\bar{\varphi} + \lambda^2 A\bar{\varphi} = 0. \quad (3.22)$$

Здесь C и A – симметричные операторы, поскольку при отсутствии внешней нагрузки ($\beta = 0$) система безусловно устойчива и уравнение $C\bar{\varphi} + \lambda^2 A\bar{\varphi} = 0$ есть уравнение собственных колебаний. Если оператор B также является симметричным оператором, то мы имеем задачу на собственные значения для симметричных операторов $C + \beta B$ и A (3.22). В этом случае все собственные значения $\lambda^2(\beta)$ вещественные. При $\lambda^2(\beta) < 0$ (рис. 3.3) все характеристические показатели чисто мнимые, т.е. $\lambda(\beta) = \pm i\omega$, где ω – положительная действительная величина – частота колебательного движения с ограниченной амплитудой в окрестности исследуемого положения равновесия. Таким образом, в этом случае имеет место устойчивость системы. Если $\lambda^2(\beta) > 0$, тогда $\lambda(\beta) = \pm\mu$, где μ – положительная действительная величина. В этом случае среди характеристических показателей будет хотя бы один положительный показатель. Отклонения от положения равновесия монотонно растут во времени, что соответствует неустойчивости системы.

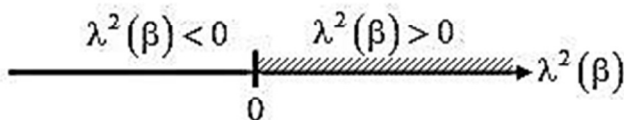


Рис. 3.3. К применению статического метода

При некотором значении параметра нагрузки $\beta = \beta_*$, при котором происходит потеря устойчивости, характеристические показатели обращаются в ноль, т.е. $\lambda^2(\beta_*) = 0$, и вместо уравнения

(3.22) мы получаем уравнение статического метода $C\bar{\varphi} + \beta_*B\bar{\varphi} = 0$. Таким образом, условие применимости статического метода исследования устойчивости – это *симметричность* оператора $C + \beta B$. Этот оператор будет симметричным, если внешние силы обладают потенциалом. Уравнение нейтрального равновесия в этом случае можно трактовать как уравнение Эйлера–Остроградского для некоторой вариационной задачи.

Следящие силы не обладают потенциалом, т.е. являются *неконсервативными*, и задачи об определении критических значений – это задачи с несимметричными операторами. Покажем несимметричность оператора

$$L = EI \frac{d^4}{dx^4} + P \frac{d^2}{dx^2}$$

в случае следящей силы, т.е. с граничными условиями (3.17). Пусть имеются две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принадлежащие области определения оператора L . Это означает, что эти функции имеют производные до четвертой включительно и удовлетворяют граничным условиям (3.17) Вычислим скалярное произведение $(L\varphi, \psi)$

$$\begin{aligned} (L\varphi, \psi) &= \int_0^l \left[EI \frac{d^4\varphi}{dx^4} + P \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right] \psi dx = \int_0^l \left[EI \frac{d^4\psi}{dx^4} + P \frac{d^2\psi}{dx^2} \right] \varphi dx + \\ &+ EI \left[\frac{d^3\varphi}{dx^3} \psi - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \varphi \frac{d^3\psi}{dx^3} \right] \Big|_0^l + P \left[\frac{d\varphi}{dx} \psi - \varphi \frac{d\psi}{dx} \right] \Big|_0^l = \\ &= (\varphi, L\psi) + P \left[\frac{d\varphi(l)}{dx} \psi(l) - \varphi(l) \frac{d\psi(l)}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $(L\varphi, \psi) \neq (\varphi, L\psi)$, то оператор L является несимметричным, а однородная задача на собственные значения (3.16), (3.17) является несамосопряженной. Энергетическим признаком неконсервативности нагрузок является и зависимость их работы от пути, а не только от начальных и конечных положений, как у потенциальных нагрузок.

На рисунке 3.4 изображены три варианта перехода системы из исходного прямолинейного состояния B в изогнутое состояние C , такое же, как на рис. 3.2,б. В варианте а) при перемещении конечного сечения стержня сила P остается вертикальной, а затем происходит ее поворот до совпадения ее направления с направлением касательной к изогнутой оси стержня. При этом работа A силы P будет равна нулю $A = 0$. По второму варианту вектор силы P сначала поворачивается по часовой стрелке, затем стержень принимает положение B , вектор силы поворачивается уже против часовой стрелки и система принимает положение как на рис. 3.2,б. При этом варианте проекция силы P совпадает с направлением линейного перемещения и, следовательно, сила совершает положительную работу $A > 0$. И, наконец, если силу сначала повернуть против часовой стрелки на конечный угол и переместить конечное сечение стержня, то при этом сила P совершит отрицательную работу $A < 0$. Таким образом, работа силы P зависит от пути и, следовательно, P не потенциальная (неконсервативная) сила.

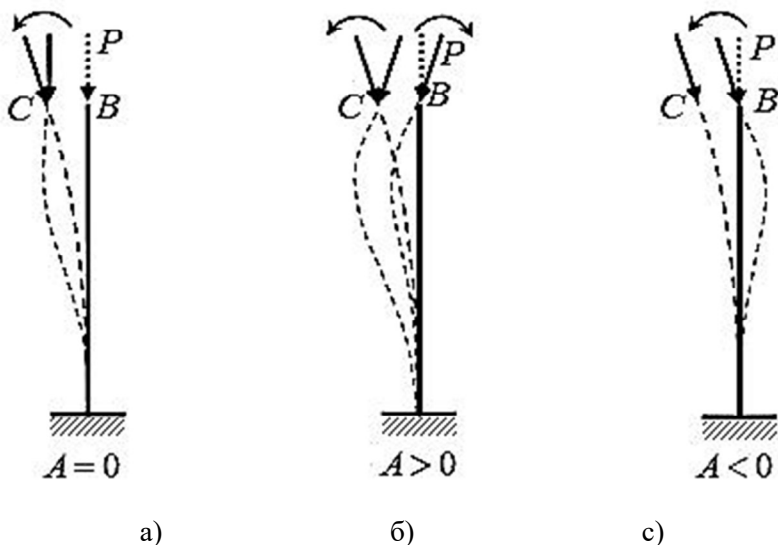


Рис. 3.4. Три варианта перехода стержня со следящей силой из начального прямолинейного состояния в изогнутое

Нетрудно убедиться, что оператор L , но уже с граничными условиями (3.10) будет симметричным. Действительно, после четырехкратного применения правила интегрирования по частям для функций, удовлетворяющим условиям (3.10), получим

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi) + \left[EI \frac{d^3\varphi(l)}{dx^3} + P \frac{d\varphi(l)}{dx} \right] \psi(l) - \left[EI \frac{d^3\psi(l)}{dx^3} + P \frac{d\psi(l)}{dx} \right] \varphi(l) = (\varphi, L\psi).$$

Для решения неконсервативных задач теории упругой устойчивости статический метод (метод Эйлера) неприменим. В этом случае необходимо применение динамического метода исследования устойчивости, являющегося универсальным по отношению к характеру действующих нагрузок.

Имеются некоторые исключения. Статический метод применяется для расчета на устойчивость оболочек при действии гидростатического давления, которое является следящей нагрузкой, но по своей природе оно обладает потенциалом. Возможны случаи, когда «следящая» составляющая неконсервативной нагрузки при отклонениях системы от положения равновесия не совершает работы. Например, если верхний конец стержня в схеме на рис. 3.2,б будет шарнирно оперт, то возможно применение статического метода.

3.6. Примеры применения динамического метода исследования устойчивости

Теперь применим динамический метод исследования устойчивости прямолинейной формы равновесия для определения критических значений потенциальной силы Q и следящей силы P , действующих на консольный стержень.

А. Стержень, сжатый потенциальной (мертвой) силой

Уравнение динамического метода – уравнение колебаний стержня с погонной массой m относительно отклонений от пря-

молинейной формы $w(x, t)$ (уравнение возмущенного движения) при отсутствии демпфирования имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.23)$$

Граничные условия остаются теми же, что и при применении статического метода (3.7). Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \alpha = \frac{Ql^2}{EI}, \quad \tau = \Omega_0 t, \quad \Omega_0^2 = \frac{EI}{ml^4}. \quad (3.24)$$

Тогда уравнение и граничные условия переписутся следующим образом

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.25)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 1).$$

Выделим временную составляющую в выражении для отклонений с помощью представления

$$w(\xi, \tau) = \varphi(\xi) e^{\lambda \tau}, \quad (3.27)$$

где $\varphi(\xi)$ – форма возмущенного движения. Характеристические показатели λ удобно представить следующим образом $\lambda = i\bar{\omega}$, где безразмерный параметр $\bar{\omega} = \omega / \Omega_0$ есть частота колебаний системы в окрестности положения равновесия. Подстановка (3.27)

в уравнение (3.25) и граничные условия (3.26) приводит к следующей краевой задаче относительно форм колебаний $\varphi(\xi)$

$$\frac{d^4\varphi}{d\xi^4} + \alpha \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \bar{\omega}^2\varphi = 0, \quad (3.28)$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} + \alpha \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 1).$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (3.28) ищем в виде

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{r_j \xi}, \quad (3.30)$$

где показатели r определяются из биквадратного уравнения

$$r^4 + \alpha r^2 - \bar{\omega}^2 = 0.$$

Его корни представим в виде

$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \bar{\omega}^2}} = \pm i \gamma_1, \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \bar{\omega}^2} - \frac{\alpha}{2} = \pm \gamma_2,$$

здесь для краткости записи введены обозначения

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \bar{\omega}^2} + \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \bar{\omega}^2} - \frac{\alpha}{2}. \quad (3.31)$$

Таким образом, общее решение (3.30) уравнения (3.28) после определения показателей r можно записать в виде

$$\varphi(x) = C_1 \sin \gamma_1 \xi + C_2 \cos \gamma_1 \xi + C_3 \operatorname{sh} \gamma_2 \xi + C_4 \operatorname{ch} \gamma_2 \xi. \quad (3.32)$$

Удовлетворим граничным условиям (3.29), подставляя в них выражение (3.32). В результате получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_1 \div C_4$

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_3 &= 0, \\ -\gamma_1^2 \sin \gamma_1 C_1 - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 C_2 + \gamma_2^2 \operatorname{sh} \gamma_2 C_3 + \gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_2 C_4 &= 0, \\ (-\gamma_1^3 + \alpha \gamma_1) \cos \gamma_1 C_1 + (\gamma_1^3 - \alpha \gamma_1) \sin \gamma_1 C_2 + \\ + (\gamma_2^3 + \alpha \gamma_2) \operatorname{ch} \gamma_2 C_3 + (\gamma_2^3 + \alpha \gamma_2) \operatorname{sh} \gamma_2 C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Условие нетривиальности решения для постоянных $C_1 \div C_4$ (равенство нулю определителя этой системы) дает трансцендентное уравнение $\Delta(\bar{\omega}, \alpha) = 0$, связывающее частоту движения $\bar{\omega}$, вообще говоря, комплексную с параметром внешней нагрузки α

$$2\bar{\omega}^2 + (\alpha^2 + 2\bar{\omega}^2) \cos \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 - |\bar{\omega}| \alpha \sin \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 = 0. \quad (3.33)$$

Результаты решения уравнения (3.33) с применением методов минимизации функций нескольких переменных представлены на рис. 3.5. Здесь построены зависимости действительной и мнимой частей характеристических показателей $\operatorname{Re} \lambda$ и $\operatorname{Im} \lambda$ от параметра сжимающей потенциальной силы α .

При возрастании α на отрезке $[0, \pi^2/4]$ минимальные по модулю характеристические показатели являются чисто мнимыми ($\operatorname{Re} \lambda = 0$) и монотонно убывают до 0 при критическом значении $\alpha_* = \pi^2/4$. Если нагрузка на стержень отсутствует ($\alpha = 0$), то мнимая часть наименьшего характеристического показателя есть первая собственная частота колебаний, отнесенная к некоторой характерной частоте Ω_0 (3.24). При $\alpha > \pi^2/4$ исследуемые характеристические показатели становятся действительными $\lambda = \pm \mu$ ($\mu > 0$) и один из них будет положительным. Следовательно, среди

решений для $w(\xi, \tau)$ будет решение, монотонно возрастающее во времени $w(\xi, \tau) = \varphi(\xi)e^{\mu\tau}$. Это соответствует потере устойчивости стержня. Потеря устойчивости с монотонным отклонением от исследуемого положения равновесия называется статической потерей устойчивости или *дивергенцией*. Такой тип потери устойчивости характерен для консервативных систем.

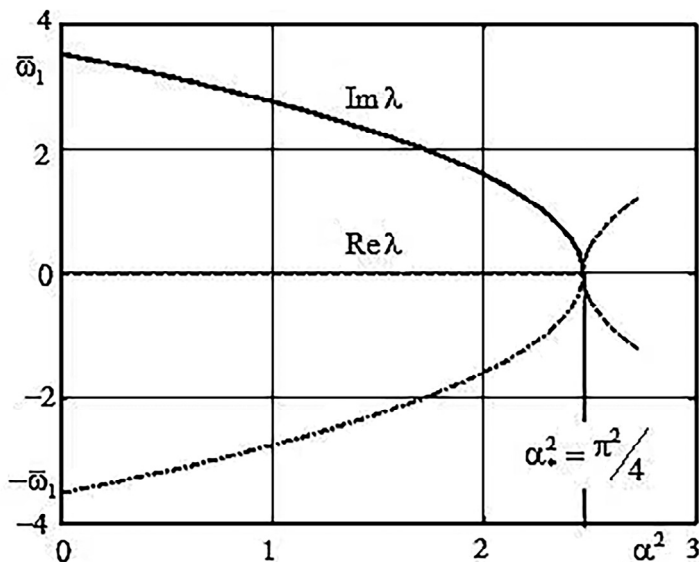


Рис. 3.5. Зависимость характеристических показателей от параметра внешней нагрузки α

Траектории характеристических показателей на комплексной плоскости $\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda$ при возрастании параметра нагрузки α от 0 до значений, больших α_* проиллюстрированы на рис. 3.6,а. При $\alpha = \alpha_*$ происходит выход одного из показателей в правую полуплоскость через начало координат, что и соответствует потере устойчивости по типу дивергенция. Иногда такой тип потери устойчивости называют *жесткой* потерей устойчивости. На рисунке 3.6,б показано поведение во времени верхнего сечения стержня при $\alpha > \alpha_*$.

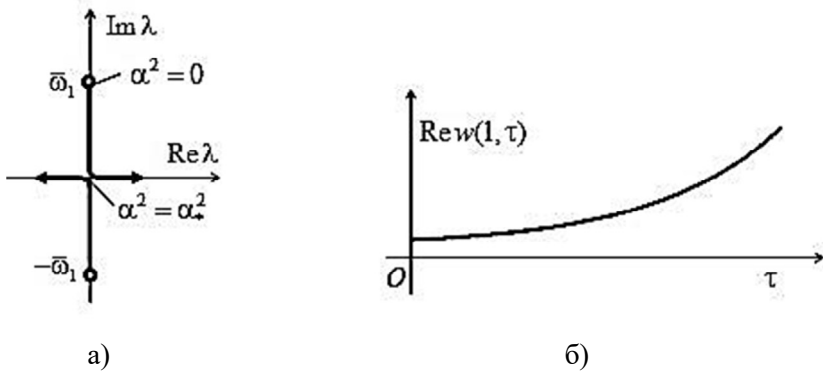


Рис. 3.6. Траектории характеристических показателей а) и поведение системы при потере устойчивости б)

Как видно из рис. 3.5, потеря устойчивости стержня соответствует обращению в нуль частоты колебаний и, если сразу положить в уравнении (3.33) $\bar{\omega}_1 = 0$, т.е. $\text{Im} \lambda = 0$, то из формул (3.31) следует $\gamma_1 = \sqrt{\alpha}$ и $\gamma_2 = 0$. Уравнение (3.33) при этом превращается в уравнение (3.13), полученное при применении статического метода исследования устойчивости $\alpha^2 \cos \sqrt{\alpha} = 0$.

Б. Стержень, сжатый следящей силой

Теперь применим динамический метод исследования устойчивости для определения критического значения следящей силы (рис. 3.2,б). Уравнение движения в окрестности прямолинейной формы равновесия и граничные условия с учетом ранее введенных безразмерных параметров в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.34)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\xi = 1).$$

Как и в предыдущем случае, решение уравнения возмущенного движения (3.34) ищем в виде $w(\xi, \tau) = \varphi(\xi)e^{\lambda\tau}$, где $\lambda = i\bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \omega / \Omega_0$. Для форм движения $\varphi(\xi)$ из (3.34) и (3.35) получим уравнение и граничные условия в виде

$$\frac{d^4\varphi}{d\xi^4} + \beta \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \bar{\omega}^2\varphi = 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 0), \\ \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} = 0, \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Аналогично предыдущей задаче для функции $\varphi(\xi)$ получим следующее выражение

$$\varphi(\xi) = C_1 \sin \gamma_1 \xi + C_2 \cos \gamma_1 \xi + C_3 \operatorname{sh} \gamma_2 \xi + C_4 \operatorname{ch} \gamma_2 \xi. \quad (3.38)$$

Здесь γ_1 и γ_2 определяются формулами (3.31) с заменой параметра потенциальной силы α на параметр следящей силы β .

Удовлетворяя граничным условиям (3.37) для постоянных интегрирования $C_1 \div C_4$, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_3 &= 0, \\ -\gamma_1^2 \sin \gamma_1 C_1 - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 C_2 + \gamma_2^2 \operatorname{sh} \gamma_2 C_3 + \gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_2 C_4 &= 0, \\ -\gamma_1^3 \cos \gamma_1 C_1 + \gamma_1^3 \sin \gamma_1 C_2 + \gamma_2^3 \operatorname{ch} \gamma_2 C_3 + \gamma_2^3 \operatorname{sh} \gamma_2 C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы получим трансцендентное уравнение, связывающее частоту колебаний с параметром следящей силы $\Delta(\bar{\omega}, \beta) = 0$ или в развернутом виде

$$\beta^2 + 2\bar{\omega}^2(1 + \cos \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2) - |\bar{\omega}| \beta \sin \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 = 0. \quad (3.39)$$

Результаты решения уравнения (3.39) представлены на рис. 3.7, где построены зависимости от величины следящей силы первых двух характеристических показателей. При $\beta = 0$ мнимые части характеристических показателей равны соответственно первой и второй собственным частотам консольного стержня $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Действительные части λ при этом равны нулю. Напомним, что мы рассматриваем пока системы без учета демпфирования. При возрастании параметра β от 0 до критического значения $\beta = \beta_* = 20,05$ из-за взаимодействия первой и второй форм колебаний происходит сближение первой и второй частот и при $\beta = \beta_*$ они становятся равными, а действительные части характеристических при этом становятся отличными от нуля. Случай $\bar{\omega} = 0$, как это имело место для стержня, сжатого потенциальной силой, невозможен при $\beta \neq 0$.

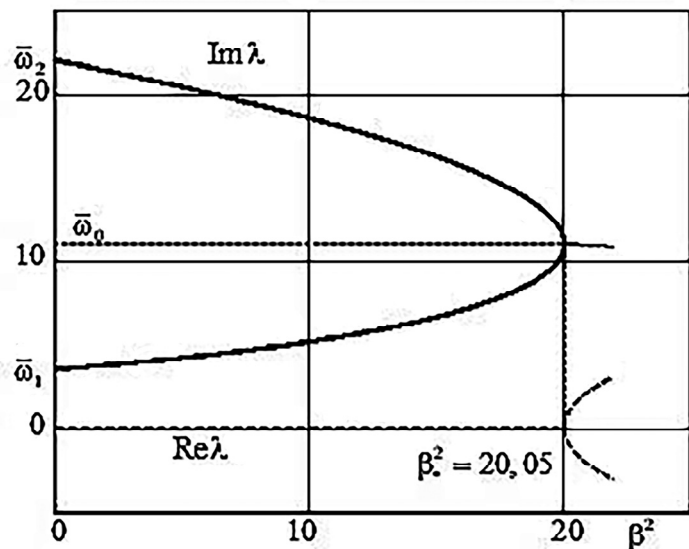


Рис. 3.7. Зависимость характеристических показателей от параметра внешней нагрузки β

Таким образом, при $\beta > \beta_* = 20,05$ характеристические показатели будут комплексными $\lambda = \pm\mu + i\bar{\omega}_0$, и, следовательно, по крайней мере одно из решений будет иметь вид $w(\xi, \tau) = \varphi(\xi)\exp[(\mu + i\bar{\omega}_0)\tau]$, где $\mu > 0$. Система теряет устойчивость колебательным образом. Такая потеря устойчивости называется динамической потерей устойчивости или *флаттером*. Иногда такой тип потери устойчивости называют *мягкой* потерей устойчивости. Траектории характеристических показателей на плоскости $\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda$ при возрастании параметра следящей силы β представлены на рис. 3.8,а. Наступление флаттера обусловлено выходом одного из характеристических показателей в правую полуплоскость. Однако, в отличие от статической потери устойчивости, этот выход происходит не через начало координат, а через мнимую ось с отличной от нуля мнимой частью λ . На рисунке 3.8,б показано поведение во времени верхнего сечения стержня при $\beta > \beta_*$.

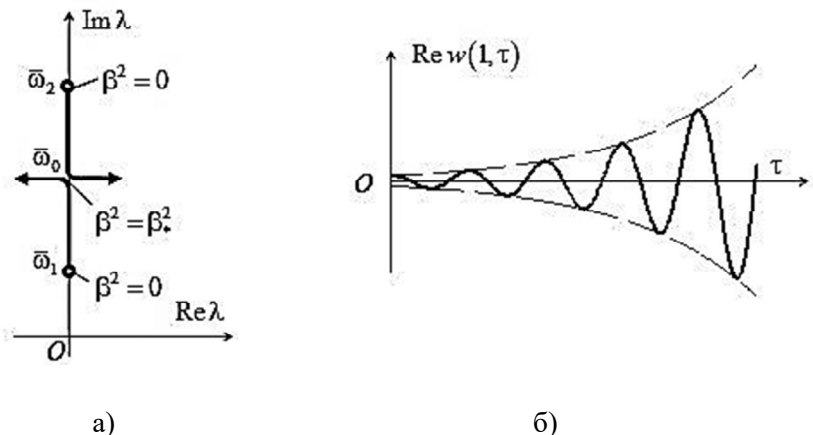


Рис. 3.8. Траектории характеристических показателей а) и поведение системы при потере устойчивости б)

Контрольные вопросы

1. В чем состоит суть динамического и статического методов исследования устойчивости положений равновесия упругих систем при действии сил, явно не зависящих от времени?

2. При единстве цели статического и динамического методов (исследование устойчивости механических систем) в чем состоит принципиальная разница в механизме применения этих методов?

3. В каких случаях статический и динамический методы исследования устойчивости упругих систем дают одинаковые результаты, а в каких один из этих методов становится неприменимым?

4. Какова область применения статического метода исследования устойчивости, и какими свойствами обладают операторы, определяющие уравнения нейтрального равновесия при применении статического метода?

5. Какие существуют типы потери устойчивости положения равновесия, и в каких случаях они реализуются? Каково поведение систем при различных типах потери устойчивости?

6. В терминах функционального анализа охарактеризуйте задачи устойчивости положения равновесия механических систем по определению критических значений потенциальных и неконсервативных нагрузок.

4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

4.1. Системы с конечным числом степеней свободы

Наиболее общим подходом к исследованию устойчивости положения равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы и определению критических нагрузок является энергетический подход, основанный на анализе изменения потенциальной энергии при отклонениях от положения равновесия. Суть этого подхода состоит в использовании теоремы Лагранжа–Дирихле:

Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет изолированный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

На этой теореме основан второй метод Ляпунова. Его формулировка для более общего случая уравнения возмущенного движения следующая:

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Если внешние нагрузки, действующие на систему с идеальными связями, устойчивость положения равновесия которой исследуется, консервативные, то при таких нагрузках и связях упругая система является консервативной, и для исследования устойчивости ее положения равновесия используют теорему Лагранжа–Дирихле. При этом ограничиваются статическим подходом, при котором условия равновесия в процессе потери устойчивости формулируются без учета инерционных сил, связанных с деформацией исследуемой системы в процессе потери устойчивости. Для консервативных систем такой статический подход всегда приводит к тем же значениям критических нагрузок, что и более общий динамический метод.

Рассмотрим задачу по определению критического значения силы P_* на основе теоремы Лагранжа–Дирихле для системы с двумя степенями свободы (рис. 4.1). Система представляет собой двухзвенный маятник, который в невозмущенном состоянии расположен вертикально, упругие шарниры между звеньями маятника и в креплении маятника с основанием не нагружены. За обобщенные координаты примем углы φ_1 и φ_2 отклонений звеньев от вертикального положения. Маятник с абсолютно жесткими звеньями находится при действии сжимающей потенциальной силы P .

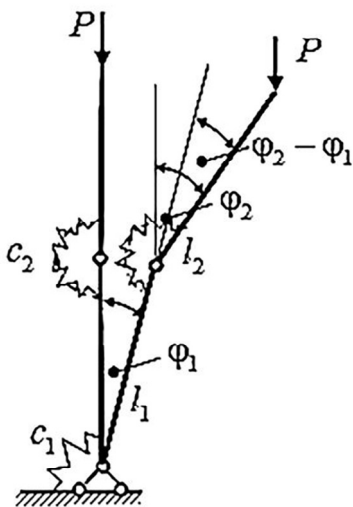


Рис. 4.1. Двухзвенный маятник при сжатии

На основе статического метода исследования устойчивости рассмотрим смежное с прямолинейным положение равновесия, когда стержни маятника получают малые углы поворота φ_1 и φ_2 (на рисунке они не малы из соображений наглядности). Запишем выражение для изменения полной потенциальной энергии системы при переходе из исходного прямолинейного положения в смежное. Это выражение должно включать энергию, которая

накапливается в упругих элементах, и изменение потенциала сжимающей силы, равное совершенной работе, взятой с обратным знаком

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}c_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 - P[l_1(1 - \cos \varphi_1) + l_2(1 - \cos \varphi_2)]. \quad (4.1)$$

Для малых отклонений от прямолинейного положения равновесия, можно провести линеаризацию выражения (4.1). Здесь линеаризация понимается на уровне потенциальной энергии. Другими словами, преобразуем выражение для потенциальной энергии $\mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2)$ к квадратичной форме. Тогда вместо (4.1) имеем

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}c_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}P[l_1\varphi_1^2 + l_2\varphi_2^2]. \quad (4.2)$$

Согласно теореме Лагранжа–Дирихле условие перехода в нейтральное состояние соответствует экстремальному значению полной энергии $\mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2)$, т.е. должны выполняться условия

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_2} = 0.$$

После дифференцирования выражения (4.2) получим одно-родную систему линейных уравнений относительно φ_1, φ_2

$$\begin{aligned} c_1\varphi_1 - c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Pl_1\varphi_1 &= 0, \\ c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Pl_2\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - Pl_1)\varphi_1 - c_2\varphi_2 &= 0, \\ -c_2\varphi_1 + (c_2\varphi_2 - Pl_2)\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Существование положения равновесия, смежного с прямолинейным, соответствует нетривиальному решению системы (4.3). Такое решение возможно при условии, если определитель этой системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - Pl_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - Pl_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение относительно сжимающей силы

$$P^2 - P \left(\frac{c_1 + c_2}{l_1} + \frac{c_2}{l_2} \right) + \frac{c_1 c_2}{l_1 l_2} = 0. \quad (4.4)$$

Примем для простоты записи $l_1 = l_2 \equiv l$, $c_1 = c_2 \equiv c$. Тогда уравнение (4.4) примет вид

$$P^2 - 3P \frac{c}{l} + \frac{c^2}{l^2} = 0,$$

а его меньший корень из двух $P_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{c}{l}$ дает критическое значение сжимающей силы для системы (рис. 4.1)

$$P_* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{c}{l}.$$

Предлагаем читателю рассмотреть другой вариант перехода в смежное состояние, когда поворот звеньев системы происходит в разные стороны, и определить соответствующее значение критической силы.

Определим критическую силу для системы, изображенной на рис. 4.2. Система состоит из трех, абсолютно жестких стержней одинаковой длины a , соединенных между собой упругими шарнирами жесткостью c . По концам стержневая система шарнирно оперта. Правая опора подвижная. Невозмущенное состояние системы – стержни расположены на одной прямой и сжаты потенциальной силой P .

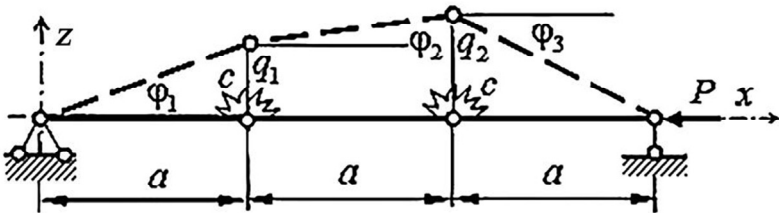


Рис. 4.2. Стержневая система с упругими шарнирами

Рассмотрим смежное состояние. Оно изображено штриховой линией и характеризуется перемещениями шарниров q_1 и q_2 , которые примем за обобщенные координаты, а также малыми углами отклонений стержней от горизонтального положения φ_1, φ_2 и φ_3 . В силу малости эти углы можно выразить через обобщенные координаты следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{a}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2 - q_1}{a}, \quad \varphi_3 = \frac{q_2}{a}.$$

Вычислим энергию, которая накапливается в упругих шарнирах при переходе системы в смежное состояние

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c(\varphi_2 + \varphi_3)^2 = \frac{1}{2}c\left(\frac{q_2 - q_1}{a} - \frac{q_1}{a}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}c\left(\frac{q_2 - q_1}{a} + \frac{q_2}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{a^2}(q_2 - 2q_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{a^2}(2q_2 - q_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{c}{a^2}(5q_1^2 + 5q_2^2 - 8q_1q_2). \end{aligned}$$

Работа силы P при этом будет следующей

$$\begin{aligned} \Pi &= -P(3a - a \cos \varphi_1 - a \cos \varphi_2 - a \cos \varphi_3) = \\ &= -\frac{P \cdot a}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = -\frac{P \cdot a}{2}\left(\frac{q_1^2}{a^2} + \frac{(q_2 - q_1)^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{a^2}\right) = \\ &= -\frac{P}{2a}(2q_1^2 - 2q_1q_2 + 2q_2^2) = -\frac{P}{a}(q_1^2 - q_1q_2 + q_2^2). \end{aligned}$$

Здесь, как и в предыдущем примере, учтена малость углов φ_j , т.е.

$$1 - \cos \varphi = 1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Таким образом, для полной энергии системы $\mathcal{E}(q_1, q_2)$ имеем

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{1}{2}\frac{c}{a^2}(5q_1^2 + 5q_2^2 - 8q_1q_2) - \frac{P}{a}(q_1^2 - q_1q_2 + q_2^2). \quad (4.5)$$

Условие экстремальности полной энергии (4.5)

$$\delta \mathcal{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_2} = 0$$

приводит к однородной системе относительно обобщенных координат q_1 и q_2

$$\frac{1}{2} \frac{c}{a^2} (10q_1 - 8q_2) - \frac{P}{a} (2q_1 - q_2) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{c}{a^2} (10q_2 - 8q_1) - \frac{P}{a} (2q_2 - q_1) = 0.$$

Равенство нулю определителя этой системы, рассматриваемое как уравнение для определения критической силы, дает наименьший корень

$$P_* = \frac{c}{a}.$$

Здесь уместно вспомнить о методах приведения систем с распределенными параметрами к системам с конечным числом степеней свободы, в частности о методе дискретизации упругих свойств. Рассмотрим стержень длиной $l = 3a$ с изгибной жесткостью EI , шарнирно опертый по концам. Жесткость участка длиной a по отношению к повороту крайнего сечения можно определить, например, по методу Максвелла–Мора с использованием элементарной эпюры (рис. 4.3).



Рис. 4.3. Эпюра единичного изгибающего момента

Цепочка элементарных действий, начиная с определения угловой податливости δ дает

$$\delta = \frac{1}{EI} 1 \cdot a \cdot 1 = \frac{a}{EI}, \quad c = \frac{EI}{a};$$

$$P_* = \frac{c}{a} = \frac{EI}{a^2}, \quad a = \frac{l}{3}, \quad P_* = \frac{9EI}{l^2}.$$

Таким образом, получаем оценку для критической силы шарнирно опертого упругого стержня, которая, как известно, равна

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,87 EI}{l^2}.$$

Форма потери устойчивости представлена на рис. 4.4.

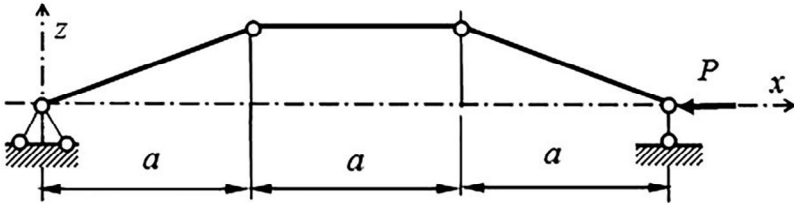


Рис. 4.4. Форма потери устойчивости

4.2. Построение границы области устойчивости для консервативной системы

Для случая воздействия группы потенциальных нагрузок на систему с конечным числом степеней свободы применение теоремы Лагранжа–Дирихле дает возможность построить границу области устойчивости в пространстве параметров нагружения. Несколько усложним систему, рассмотренную выше [1]. Сделаем обе шарнирные опоры неподвижными, а нагружение пусть осуществляется двумя силами P_1 и P_2 , приложенными к шарнирам (рис. 4.5).

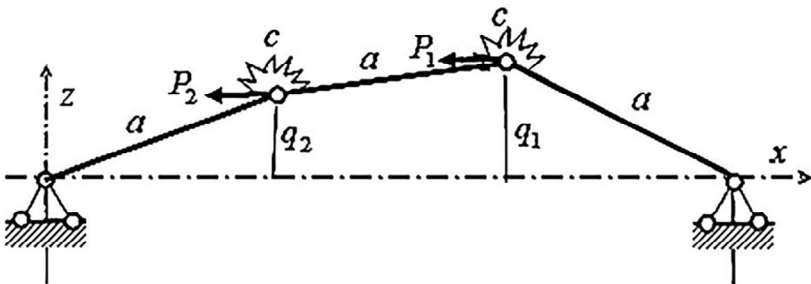


Рис. 4.5. Стержневая система с неподвижными опорами

По терминологии, принятой в сопротивлении материалов, система статически неопределима. И хотя в расчетах на устойчивость стержней и стержневых систем осевыми деформациями пренебрегают, для определения продольных усилий привлекают уравнения, в которых фигурируют осевые перемещения.

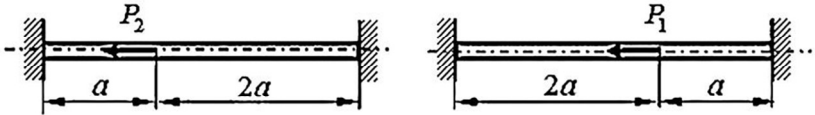


Рис. 4.6. К определению реакций опор

Рисунок 4.6 иллюстрирует схемы простейших задач, решение которых позволяет перейти от исходной системы (рис. 4.5) к статически определимой, которая изображена на рис. 4.7 с подвижной правой опорой и нагружением в этом сечении силой

$$Q = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2.$$

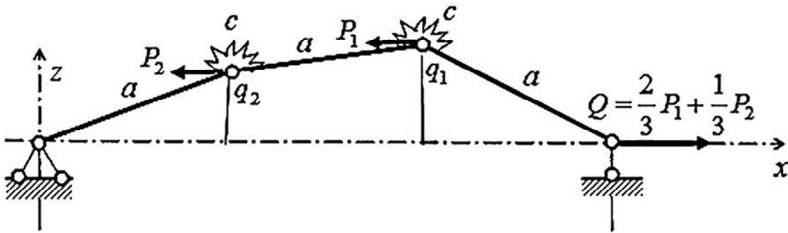


Рис. 4.7. Стержневая система с подвижной опорой

Используя полученные выше соотношения, для полной энергии получим следующее выражения

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{2} \frac{c}{a^2} (2q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{c}{a^2} (2q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2} P_2 \frac{q_2^2}{a} - \\ & - \frac{1}{2} P_1 \frac{q_2^2}{a} - \frac{1}{2} P_1 \frac{(q_2 - q_1)}{a} + \frac{1}{2} Q \frac{[q_2^2 + (q_2 - q_1)^2 + q_1^2]}{a}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Условие стационарности полной энергии (4.6)

$$\delta\mathcal{E} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q_2} = 0$$

приводит к системе однородных уравнений относительно обобщенных координат q_1 и q_2

$$\begin{aligned} q_1 \left(5\frac{c}{a} - P_1 + 2Q \right) - q_2 \left(4\frac{c}{a} - P_1 + Q \right) &= 0, \\ -q_1 \left(4\frac{c}{a} - P_1 + Q \right) + q_2 \left(5\frac{c}{a} - P_2 - 2P_1 + 2Q \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Приравнявая нулю определитель полученной однородной системы, получим уравнение границы области устойчивости в координатах P_1, P_2

$$P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 - 3P_1\frac{c}{a} + 3P_2\frac{c}{a} - 27\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) есть уравнение эллипса. Отрицательные значения действующих сил соответствуют изменению их направления. Критические значения каждой из действующих сил определяются из квадратного уравнения, если другую силу приравнять нулю

$$P_{1*} = \frac{3}{2}\frac{c}{a}(1 \pm \sqrt{13}), \quad P_{2*} = \frac{3}{2}\frac{c}{a}(-1 \pm \sqrt{13}).$$

Это точки пересечения границы области устойчивости (эллипса) с координатными осями. Для удобства построения введем безразмерные параметры нагрузок $p_\alpha = \frac{P_\alpha a}{c}, (\alpha=1,2)$. Область устойчивости представлена на рис. 4.8. С учетом изменения направления действия сил граница области устойчивости представляет собой замкнутую кривую.

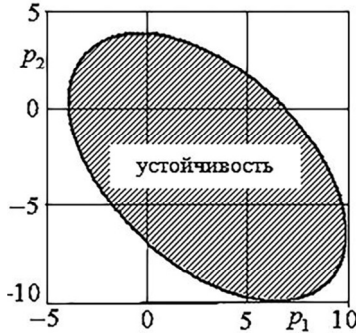


Рис. 4.8. Область устойчивости на плоскости параметров нагружения

Важным свойством линейных консервативных систем является выпуклость границы области устойчивости. В общем случае она может состоять из набора прямолинейных и криволинейных участков.

4.3. Решение краевой задачи на собственные значения

Часто элементы конструкций, для которых необходим расчет на устойчивость, находятся в условиях нагружения двух и более нагрузок. Если эти нагрузки явно не зависят от времени, возникает задача об устойчивости некоторых положений равновесия по отношению к малым возмущениям. При непотенциальном нагружении применяется динамический метод исследования устойчивости. Как отмечалось в третьей главе, важный практический интерес представляет определение границ (критических поверхностей) областей устойчивости в пространстве параметров, отделяющих в пространстве параметров область устойчивости равновесного положения от области неустойчивости. Эта критическая поверхность (граница области устойчивости) обычно состоит из различных частей, пересечение которых соответствует различным типам потери устойчивости: дивергенции или флаттеру. Типы бифуркации неконсервативных систем зависят как от параметров внешнего нагружения, так и от внутренних параметров системы: распределения жесткостных и инерционных характеристик, характеристик демпфирования и т.д.

На примерах неконсервативных систем рассмотрим два метода построения границ областей устойчивости для распределенных систем: метод непосредственного решения однородной краевой задачи на собственные значения и метод разложения по формам собственных колебаний. В первом случае приходим к трансцендентному уравнению, которое связывает параметры системы и характеристические показатели. Во втором – к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения.

Пусть консольный стержень длиной l (рис. 4.9), находится под действием постоянных по величине потенциальной («мертвой») и следящей сил. Направление последней при любых перемещениях совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения этой силы. Применяя динамический метод исследования устойчивости для рассматриваемой системы, запишем уравнение малых колебаний (уравнение возмущенного движения) в следующем виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_i EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + 2mb_e \frac{\partial w}{\partial t} + (Q + P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

Здесь EI – жесткость стержня на изгиб, m – погонная масса стержня, b_i – коэффициент внутреннего трения, описываемое моделью Фойхта, b_e – коэффициент внешнего трения, P – следящая сила, Q – «мертвая» потенциальная сила, не меняющая своего направления при любых отклонения стержня от положения равновесия.

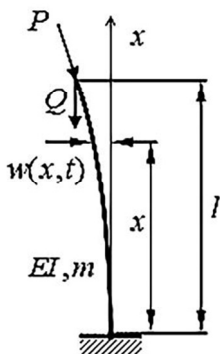


Рис. 4.9. Консольный стержень при действии потенциальной и следящей сил

Уравнение (4.9) дополним граничными условиями, которые для рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x = 0), \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x = l). \end{aligned} \quad (4.10)$$

С помощью параметров

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \varepsilon_i = b_i \omega_0, \quad \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{Ql^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EI}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

перепишем уравнение (4.9) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \quad (4.12)$$

Граничные условия (4.10) соответственно преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

В силу линейности уравнения (4.12) его решение можно представить в виде

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \exp(\lambda \tau), \quad (4.14)$$

где $W(\xi)$ – функция координаты ξ (форма потери устойчивости), λ – характеристический показатель, определяющий поведение решения во времени. Если действительные части всех характеристических показателей λ отрицательные, то решение $w(\xi, \tau)$ за-

тухает во времени, и прямолинейная форма равновесия стержня (тривиальное решение уравнения (4.4)) является устойчивой. Неустойчивость (дивергенция или флаттер) наступает тогда, когда хотя бы один из характеристических показателей переходит в правую полуплоскость, т.е. его действительная часть становится положительной. Для определения $W(\xi)$ и λ получаем обобщенную задачу на собственные значения с уравнением

$$\lambda^2 W + \lambda \left(\varepsilon_i \frac{d^4 W}{d\xi^4} + 2\varepsilon_e W \right) + \frac{d^4 W}{d\xi^4} + (\alpha + \beta) \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \quad (4.15)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad W = 0, \quad \frac{dW}{d\xi} = 0, \\ \xi = 1, \quad \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0, \quad (1 + \varepsilon_i \lambda) \frac{d^3 W}{d\xi^3} + \alpha \frac{dW}{d\xi} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Решение краевой задачи (4.7), (4.8) ищем в виде $W(\xi) = C \exp(r\xi)$. После подстановки этого выражения в уравнение (4.7) для показателей r получим биквадратное уравнение

$$r^4 (1 + \lambda \varepsilon_i) + (\alpha + \beta) r^2 + \lambda^2 + 2\lambda \varepsilon_e = 0. \quad (4.17)$$

Его решение будет следующим

$$r_{1\div 4} = \pm \sqrt{\frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\lambda(1 + \lambda \varepsilon_i)(\lambda + 2\varepsilon_e)}}{2(1 + \lambda \varepsilon_i)}}. \quad (4.18)$$

Таким образом, формы потери устойчивости определяются выражением

$$W(\xi) = \sum_{k=1}^4 C_k \exp(r_k \xi).$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.8), из условия нетривиальности решения системы однородных алгебраических уравнений для констант $C_{1\div 4}$ имеем трансцендентное уравнение, свя-

зываются параметры нагружения системы α, β и характеристические показатели λ

$$\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda) = 0, \quad (4.19)$$

где через $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ обозначен определитель матрицы размерностью 4×4

$$\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ r_1 & & & r_4 \\ r_1^2 e^{r_1} & \dots & & r_4^2 e^{r_4} \\ [(1 + \varepsilon_i \lambda) r_1^3 + \alpha r_1] e^{r_1} & & & [(1 + \varepsilon_i \lambda) r_4^3 + \alpha r_4] e^{r_4} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (4.19) представляет собой неявную зависимость характеристических показателей от параметров краевой задачи. Критической поверхности соответствует совокупность значений параметров α и β , при которых хотя бы один из характеристических показателей λ пересекает мнимую ось. Если это пересечение происходит через начало координат $\lambda = 0$ плоскости $\text{Re} \lambda, \text{Im} \lambda$, то соответствующие значения α и β соответствуют дивергентному типу потери устойчивости. В других случаях, т.е. когда $\text{Re} \lambda = 0$, а $\text{Im} \lambda \neq 0$, то имеет место колебательный тип потери устойчивости – флаттер.

Функция $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ является комплекснозначной. Комплексное выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда равен нулю его модуль $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$. Но модуль комплексного числа не может быть отрицательным. Таким образом, любой корень λ уравнения (4.19) является одновременно и точкой абсолютного локального (ввиду дискретности множества корней) минимума модуля левой части уравнения. Таким образом, задача построения границ области устойчивости сводится к задаче поиска абсолютного минимума функции $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$. При фиксирован-

ных значениях α и β действительная функция $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$ рассматривается как функция действительной и мнимой частей характеристического показателя λ . Для построения границы области устойчивости задаются постоянные параметры системы, в частности, коэффициенты демпфирования. Вычисляются первые две собственные частоты консольного стержня $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Частоты подправляются с учетом внутреннего и внешнего трения. Эти значения принимаются в качестве первого приближения для отыскания двух локальных минимумов функции $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$

$$\lambda_1 = -\varepsilon_e - \frac{\varepsilon_t \bar{\omega}_1^2}{2} + i \sqrt{\bar{\omega}_1^2 - \left(\varepsilon_e + \frac{\varepsilon_t \bar{\omega}_1^2}{2} \right)^2},$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon_e - \frac{\varepsilon_t \bar{\omega}_2^2}{2} + i \sqrt{\bar{\omega}_2^2 - \left(\varepsilon_e + \frac{\varepsilon_t \bar{\omega}_2^2}{2} \right)^2}.$$

Далее параметры внешней нагрузки возрастают от нуля до тех значений, при которых один из характеристических показателей (для рассматриваемой системы это λ_1) перейдет в правую полуплоскость с обращением в нуль его действительной части.

Участки границы, соответствующие дивергентным формам потери устойчивости, могут быть определены проще. Для этого нужно сразу положить в уравнении (4.17) $\lambda = 0$. Тогда вместо (4.17) и (4.18) имеем

$$r^4 + (\alpha + \beta)r^2 = 0, \quad r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i \sqrt{\alpha + \beta}. \quad (4.20)$$

Следовательно, формы потери устойчивости $W(\xi)$ в данном случае будут определяться выражением

$$W(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \cos(\sqrt{\alpha + \beta} \xi) + C_4 \sin(\sqrt{\alpha + \beta} \xi). \quad (4.21)$$

Удовлетворение граничным условиям (4.8) и условию не-тривиальности решения для констант $C_1 \div C_4$ в выражении (4.13) дает уравнение, определяющее границы области дивергенции

$$\Delta_2(\alpha, \beta) = 0, \quad (4.22)$$

где через $\Delta_2(\alpha, \beta)$ обозначено выражение

$$\Delta_2(\alpha, \beta) = \beta + \alpha \cos(\sqrt{\alpha + \beta}). \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23), определяющее границу области дивергенции, решается с помощью функций отыскания корней трансцендентных уравнений.

Для значений коэффициентов демпфирования $\varepsilon_e = 0,1$ и $\varepsilon_i = 0,01$ на рис. 4.10 построена граница области устойчивости ABC (сплошная линия), примыкающая к началу координат. Часть границы AB – это граница флаттера. Ее пересечение соответствует колебательному типу потери устойчивости. Часть границы CB – это граница дивергенции. При ее пересечении происходит монотонное отклонение стержня от прямолинейной формы равновесия. Точки плоскости на участке границы CB совместно с кривой BD , отмеченной штриховой линией, удовлетворяют уравнению (4.14). При $\beta = 0$ в точке C критическое значение параметра $\alpha_* = \pi^2 / 4$ (см. главу 3).

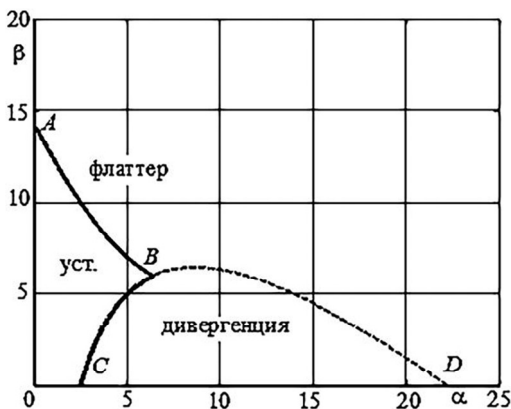


Рис. 4.10. Граница области устойчивости на плоскости параметров нагружения

4.4. Применение метода разложения по формам собственных колебаний

Будучи точным, метод, основанный на решении трансцендентного уравнения типа (4.19), в вычислительном отношении связан со значительными трудностями из-за сложной структуры гиперповерхности, для которой отыскиваются локальные минимумы, выбора начальных приближений и т.д. Эти трудности многократно увеличиваются при увеличении числа варьируемых параметров. В связи с этим более удобным способом построения критических поверхностей является метод нормальных координат или метод разложения по формам собственных колебаний.

Для применения вышеуказанного метода уберем из граничных условий (4.23) параметр потенциальной силы α и с помощью δ -функции введем его проекцию в дифференциальное уравнение (4.22). Тогда придем к уравнению возмущенного движения вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + \\ & + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Представим решение $w(\xi, \tau)$ уравнения (4.24) в виде ряда по формам собственных колебаний

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi), \quad \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\chi_1 \xi) \\ \varphi_2(\chi_2 \xi) \\ \dots \\ \varphi_n(\chi_n \xi) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

где $\mathbf{q}(\tau)$ – вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ – вектор форм собственных колебаний консольного стержня, χ_k – параметры, определяемые из частотного уравнения

$$1 + \operatorname{ch} \chi \cos \chi = 0,$$

n – число удерживаемых членов ряда.

В скалярной форме разложение (4.26) имеет вид

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \varphi_k(\chi_k \xi). \quad (4.27)$$

С использованием известных функций Крылова

$$\begin{aligned} S_1(\chi_k \xi) &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\chi_k \xi) + \cos(\chi_k \xi)], & S_2(\chi_k \xi) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\chi_k \xi) + \sin(\chi_k \xi)], \\ S_3(\chi_k \xi) &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\chi_k \xi) - \cos(\chi_k \xi)], & S_4(\chi_k \xi) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\chi_k \xi) - \sin(\chi_k \xi)] \end{aligned}$$

для форм собственных колебаний консольного стержня имеем следующее выражение:

$$\varphi_k(\chi_k \xi) = S_4(\chi_k \xi) - \frac{S_2(\chi_k)}{S_1(\chi_k)} S_3(\chi_k \xi). \quad (4.28)$$

Применим к уравнению возмущенного движения процедуру метода Бубнова–Галеркина. Для этого подставим в уравнение (4.24) разложение (4.27). Затем поочередно умножим полученное уравнение на каждую собственную форму $\varphi_k(\chi_k \xi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и проинтегрируем полученные выражения по ξ от 0 до 1. В результате придем к системе обыкновенных дифференциальных

уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$. Матричную форму этой системы можно записать в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}]\mathbf{q} = 0. \quad (4.29)$$

Матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ и \mathbf{D} размерностью $n \times n$, входящие в уравнение (4.29), вычисляются по формулам

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{B} = \int_0^1 \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^1 \frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{D} = \int_0^1 \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi.$$

Если $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$, как это видно из выражений (4.26), вектор-столбец, то в формулах (4.30) с использованием знака транспонирования $\boldsymbol{\varphi}^T(\xi)$ — вектор-строка. В силу свойства ортогональности системы форм собственных колебаний матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} получаются диагональными.

Представляя вектор обобщенных координат в виде $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau)$ и подставляя это выражение в уравнение (4.29), вместо трансцендентного уравнения (4.19) относительно характеристических показателей λ получаем алгебраическую проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$\mathbf{P}_2 \lambda^2 + \mathbf{P}_1 \lambda + \mathbf{P}_0 = 0, \quad (4.31)$$

где обозначено

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_1 = 2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}. \quad (4.32)$$

Применение метода разложения по формам собственных колебаний, по существу, сводит систему с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы. Для исследования устойчивости систем с конечным числом сте-

пней свободы имеется ряд критериев (критерий Рауса-Гурвица, критерий Зубова и т.д.), позволяющих судить о расположении характеристических показателей на комплексной плоскости и строить границы областей устойчивости в пространстве параметров без вычисления самих показателей. В частности, если для рассматриваемой системы применяется критерий Рауса-Гурвица, то соответствующая матрица Гурвица составляется из коэффициентов характеристического полинома матрицы \mathbf{G} , которая согласно (4.29) имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}] & -\mathbf{A}^{-1}(2\varepsilon_e\mathbf{A} + \varepsilon_i\mathbf{C}) \end{bmatrix}.$$

Равенство нулю определителя матрицы Гурвица определяет границу области дивергенции на плоскости параметров нагружения α, β . Граница области флаттера, как правило, может быть определена из условия равенства нулю главного минора порядка $n - 1$. Однако следует отметить, что в настоящее время при наличии эффективных вычислительных алгоритмов и быстродействующих компьютеров эти критерии стали менее актуальны, так как затраты машинного времени на непосредственное вычисление корней характеристических уравнений типа (4.31) не намного превышают время вычислений с использованием критериев. При решении уравнения (4.31) фиксируются те значения параметров α и β , при которых хотя бы один из характеристических показателей λ переходит в правую полуплоскость. Таким образом, строится граница области устойчивости.

Точность построения границ области устойчивости методом нормальных координат зависит от числа удерживаемых членов в разложении (4.26). На рисунке 4.11 на плоскости параметров нагружения α, β сплошными линиями отмечена точная граница области устойчивости, построенная с использованием уравнения (4.19). Штриховой и штрихпунктирной линиями показаны границы, построенные с использованием двух и четырех членов ряда в разложении $w(\xi, \tau)$. Числа у кривых на рисунке соответствуют

значению числа членов ряда n . Граница, полученная с использованием $n = 8$, практически совпадает с границей, построенной с использованием точного метода решения краевой задачи на собственные значения. Следует также отметить, что наибольшие отклонения метода разложения по формам собственных колебаний наблюдаются в окрестности угловой точки границы, где происходит смена типа потери устойчивости. При вычислениях, как и ранее (рис. 4.10), для значений коэффициентов демпфирования принято $\varepsilon_e = 0,1$ и $\varepsilon_i = 0,01$.

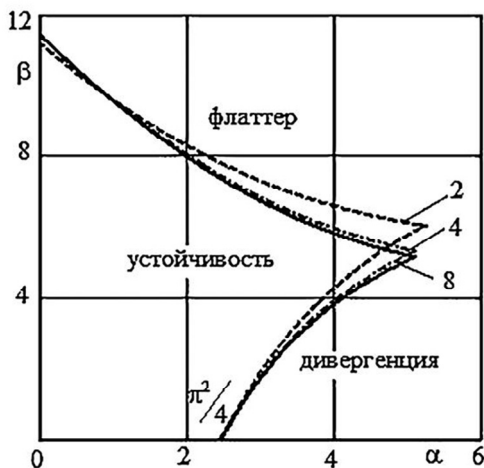


Рис. 4.11. Границы области устойчивости, полученные с удержанием различного числа членов ряда

4.5. Исследование устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью

Неконсервативные нагрузки на упругие системы, в частности, на трубопроводы возникают со стороны протекающей по ним жидкости. Рассмотрим прямолинейный участок трубопровода, наполненный невязкой жидкостью, которая движется с невозмущенной скоростью v . Расчетная схема трубопровода может быть представлена в виде стержня с изгибной жесткостью EI , погон-

ной массой m_0 и длиной l . Пусть один конец стержня жестко заземлен в заделке, а другой свободен от закреплений (рис. 4.12). Плотность протекающей жидкости обозначим через m , а перемещения сечений стержня при отклонениях от прямолинейной формы равновесия – через $w(x, t)$.

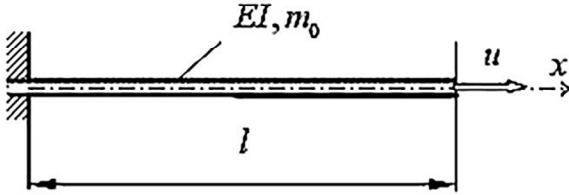


Рис. 4.12. Расчетная схема участка трубопровода

Будем считать движение жидкости одномерным, а условия на выходе из трубопровода такими, что осевые усилия от потока отсутствуют. При этом можно трактовать жидкость как подвижную нагрузку с интенсивностью сил инерции, равной $-m \frac{d^2 w}{dt^2}$.

Здесь под оператором d^2 / dt^2 понимается полная производная по времени, при вычислении которой необходимо учитывать, что жидкость участвует в двух движениях: движение по трубопроводу со скоростью v и в отклонениях $w(x, t)$ от оси Ox вместе с деформациями трубопровода

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Кроме обычной нормальной даламберовой силы, учитываемой первым членом в правой части этого выражения, второй член соответствует кориолисовому ускорению из-за поворота потока частиц жидкости, и третий член связан с центробежными силами, определяемыми кривизной потока при колебаниях трубопровода. Оператор внешнего рассеяния энергии считаем про-

порциональным инерционному оператору. Тогда уравнение малых колебаний около невозмущенной формы равновесия $w \equiv 0$ можно записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2b(m_0 + m) \frac{\partial w}{\partial t} + (m_0 + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4.33)$$

где b – параметр внешнего трения. Уравнение (4.33) необходимо дополнить граничными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x = 0), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (x = l). \quad (4.34)$$

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad \varepsilon = \frac{b}{\omega_0}, \quad (4.35)$$

$$\mu = \frac{m}{m_0 + m}, \quad \alpha = v \sqrt{\frac{ml^2}{EI}}.$$

За параметры нагружения, на плоскости которых будем строить границу области устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода, примем следующие: α – параметр, характеризующий расход жидкости и μ – относительную погонную массу жидкости. Уравнение (4.33) относительно $w(\xi, \tau)$ и граничные условия (4.34) с учетом (4.35) перепишутся следующим образом

$$(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\alpha \sqrt{\mu(1 - \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2 (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad (4.36)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\xi = 1). \quad (4.37)$$

В силу линейности уравнения возмущенного движения (4.36) представим его решение $w(\xi, \tau)$ в виде

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \exp(\lambda \tau). \quad (4.38)$$

Подстановка (4.38) в уравнение (4.36) приводит к обобщенной задаче на собственные значения с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} (1-\mu) \frac{d^4 W}{d\xi^4} + \alpha^2 (1-\mu) \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \\ + 2\lambda \alpha \sqrt{\mu(1-\mu)} \frac{dW}{d\xi} + (\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda) W = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

и граничными условиями:

$$W = \frac{dW}{d\xi} = 0, \quad (\xi = 0), \quad \frac{d^2 W}{d\xi^2} = \frac{d^3 W}{d\xi^3} = 0, \quad (\xi = 1). \quad (4.40)$$

Характеристические показатели λ , соответствующие не тривиальному решению однородной краевой задачи (4.39), (4.40), образуют дискретное множество. Общее решение линейного дифференциального уравнения (4.39) можно записать в виде

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{r_j \xi}, \quad (4.41)$$

где C_j – некоторые постоянные, r_j – показатели, определяемые из алгебраического уравнения

$$(1-\mu)r^4 + \alpha^2(1-\mu)r^2 + 2\lambda\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}r + \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda = 0. \quad (4.42)$$

В общем случае характеристические показатели λ являются комплексными, образуя комплексно-сопряженные пары. Следовательно, и коэффициенты алгебраического уравнения (4.42) комплексные, а его корни $r_{1\pm 4}$ уже не являются комплексно-сопряженными.

Удовлетворение граничным условиям (4.40) и требование нетривиальности решения уравнений для $C_{1\div 4}$ приводят к уравнению, определяющему границу области устойчивости в пространстве параметров системы

$$\Delta(\alpha, \mu, \lambda) = 0, \quad (4.43)$$

где

$$\Delta(\alpha, \mu, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 e^{r_1} & r_2^2 e^{r_2} & r_3^2 e^{r_3} & r_4^2 e^{r_4} \\ r_1^3 e^{r_1} & r_2^3 e^{r_2} & r_3^3 e^{r_3} & r_4^3 e^{r_4} \end{vmatrix}.$$

Для применения метода разложения по формам собственных колебаний необходимо провести те же действия, что и в предыдущем параграфе 4.3. В результате приходим к уравнению относительно обобщенных координат $\mathbf{q}(\tau)$ вида

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + [2\varepsilon\mathbf{A} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}]\dot{\mathbf{q}} + (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D})\mathbf{q} = 0, \quad (4.44)$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{C} и \mathbf{D} вычисляются по тем же формулам (4.30), а матрица \mathbf{B} по формуле

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi$$

или в индексных выражениях для элементов матрицы $\mathbf{B} = [b_{jk}]$, ($j, k = 1, 2, \dots, n$) можно записать

$$b_{jk} = \int_0^1 \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi} \varphi_k(\xi) d\xi.$$

Коэффициенты характеристического полинома вида (4.31) для рассматриваемой задачи суть следующие матрицы

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_1 = 2\varepsilon\mathbf{A} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}, \quad \mathbf{P}_0 = (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}). \quad (4.45)$$

Как показали вычисления, при определенных сочетаниях параметров потока жидкости в системе возможна потеря устойчивости только колебательного типа, т.е. флаттер. На рисунке 4.13 для коэффициентов демпфирования $\varepsilon = 0$ на плоскости «относительная масса жидкости μ – расход жидкости α » приведены результаты вычислений границы области устойчивости двумя вышеизложенными методами. Точная граница флаттера, построенная с использованием уравнения (4.43), показана сплошной линией. Область устойчивости расположена ниже этой линии. Пунктирные, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют вычислениям при различном числе членов ряда в разложении (4.27). Из рисунка следует, что граница флаттера имеет достаточно сложную конфигурацию с наличием участков немонотонной зависимости $\alpha(\mu)$. Чтобы достаточно точно построить границу при использовании метода разложения по собственным формам колебаний, необходимо взять не менее восьми членов ряда.

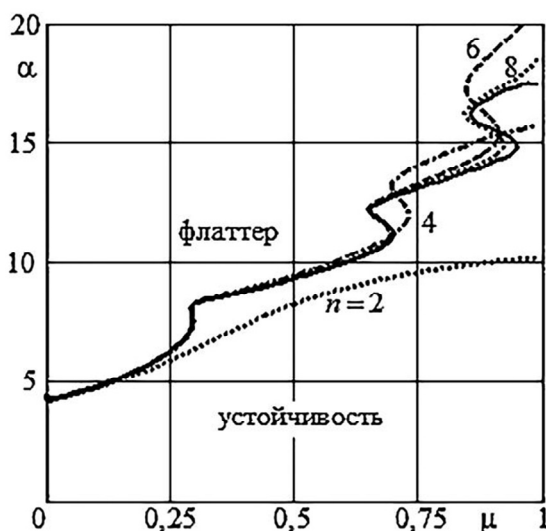


Рис. 4.13. Граница области устойчивости для участка трубопровода с протекающей жидкостью, n – число удержанных членов ряда

Программа вычислений для построения на плоскости параметров протекающей жидкости μ, α границы области устойчивости участка трубопровода на языке программирования GNU Octave приведена в Приложении 1. Для удобства восприятия программного кода в Приложении 1 приведены необходимые формулы метода разложения по формам собственных колебаний решения уравнения возмущенного движения.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте теорему Лагранжа–Дирихле и поясните ее связь со вторым методом Ляпунова исследования устойчивости.

2. Для каких механических систем (с точки зрения внешних сил, связей) для исследования устойчивости равновесия применима теорема Лагранжа–Дирихле?

3. Определить критическое значение силы P для системы, изображенной на рис. 4.14

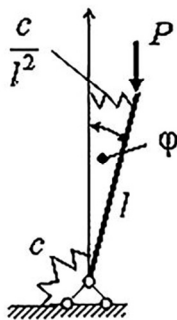


Рис. 4.14. Стержень с упругими опорами

4. Построить границу области устойчивости на плоскости действующих нагрузок P_1 и P_2 для системы, изображенной на рис. 4.15

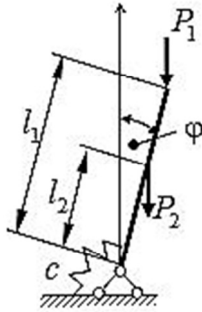


Рис. 4.15. Стержень при действии двух сил

5. В чем состоит отличие задачи по определению собственных частот изгибных колебаний стержня с прямолинейной осью при действии продольной сжимающей силы и задачи расчета критической силы для того же стержня?

6. Каким образом исследование устойчивости системы с распределенными параметрами можно свести к исследованию устойчивости системы с конечным числом степеней свободы?

7. Какие типы потери устойчивости могут возникнуть в трубопроводе с протекающей жидкостью?

5. ОСОБЕННОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

5.1. Типы потери устойчивости

Основным методом исследования неконсервативных задач теории устойчивости является динамический метод, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения исследуемого состояния системы. Это может быть либо положение равновесия, либо некоторое движение системы, устойчивость которого исследуется. Вообще говоря, эти задачи нелинейные, а уравнения, которые изучаются с точки зрения устойчивости их решения, представляют собой линеаризованные уравнения или, по терминологии Пуанкаре, уравнения в вариациях соответствующих нелинейных уравнений. Если учитывается диссипация энергии при колебаниях, то к этим уравнениям в полной мере применима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. При этом исключается из рассмотрения так называемый сомнительный случай по Ляпунову, когда характеристические показатели для уравнений первого приближения находятся на мнимой оси. Роль уравнения первого приближения для исследования устойчивости тривиального положения равновесия в рассмотренных ранее задачах выполняют уравнения (4.9), (4.33). Кроме необходимости использования динамического метода неконсервативные системы имеют ряд специфических особенностей, которые должны учитываться как при проектировании элементов конструкций, так и при расчете на устойчивость.

В механических системах, находящихся в положении равновесия и под действием потенциальных нагрузок, явно не зависящих от времени, возможен лишь статический тип потери устойчивости, т.е. дивергенция. Из рассмотренных ранее примеров к такому случаю относится задача об устойчивости консольного стержня при действии сжимающей потенциальной силы. В главе 4 задачи устойчивости для консервативных систем с конечным числом степеней свободы также связаны с потерей устойчивости по типу дивергенции. В неконсервативных системах при достижении

нагрузок критических значений возможны оба типа потери устойчивости. Для участка гибкого трубопровода с протекающей жидкостью (пункт 4.5) потеря устойчивости при пересечении границы $\alpha(\mu)$ происходит только по типу флаттер. Как уже отмечалось в главе 4 граница области устойчивости для консольного стержня, находящегося под действием потенциальной и следящей сил, состоит из двух частей: границы флаттера (линия AB на рис. 4.10) и граница дивергенции (линия BC на рис. 4.10). Для более сложных систем граница области устойчивости может быть с более сложным чередованием границ дивергенции и флаттера, а сами области устойчивости могут быть неодносвязными. В закритических областях, где динамическое поведение системы необходимо исследовать с учетом соответствующих нелинейностей, обнаружены так называемые вторичный флаттер и вторичная дивергенция, возможно существование устойчивых и неустойчивых предельных циклов, а также хаотических движений. В Приложении 2 приводятся некоторые данные по исследованию устойчивости нелинейной системы с двумя степенями свободы с анализом закритического поведения.

Области устойчивости могут быть невыпуклыми. Эту особенность иллюстрирует, например, граница области дивергенции на рис. 4.10. Если при равенстве нулю следящей силы, т.е. при $\beta = 0$, критическое значение параметра потенциальной силы равно $\alpha_* = \pi^2 / 4$, то с ростом β в определенных пределах критическое значение α увеличивается. Это означает, что невысокие значения следящей силы оказывают стабилизирующие действие на систему.

Исследования общих свойств границ областей устойчивости для консервативных систем позволяют сформулировать теорему о выпуклости этих границ. Согласно этой теореме граница области устойчивости не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости. Например, для случая действия двух потенциальных нагрузок граница области устойчивости может состоять из криволинейных участков, обращенных выпуклостью к области неустойчивости, и отрезков прямых.

5.2. Взаимодействие частот и форм

В качестве следующей особенности неконсервативных систем можно отметить существенное взаимодействие частот и форм колебаний. В качестве первого примера напомним зависимость первых двух частот колебаний, т.е. $\text{Im} \lambda_{1,2}$, от параметра следящей силы β (рис. 3.7). Критическое значение $\beta_* = 20,05$ определяется слиянием первой и второй частот колебаний. На рисунке 5.1 для трубопровода с протекающей жидкостью (пункт 4.5) при весьма малых значениях относительной массы жидкости $\mu \rightarrow 0$ и при отсутствии диссипации построены зависимости мнимых частей первых четырех характеристических показателей (частот колебаний) от параметра расхода α . Критическое значение параметра α_* , соответствующее наступлению флаттера, определяется слиянием первой и второй частот. Взаимодействие форм колебаний имеет место и для высших частот, и, хотя этот результат имеет чисто теоретическое значение, при дальнейшем увеличении параметра α происходит слияние третьей и четвертой частот, но уже в области флаттера.

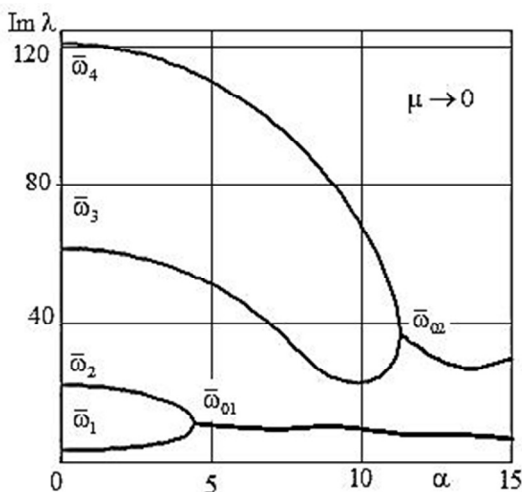


Рис. 5.1. Зависимость частот колебаний от параметра расхода

Обычно флаттер наступает вследствие слияния или сближения низших собственных частот при отсутствии демпфирования, и чем ближе эти собственные частоты при отсутствии нагрузки, тем ниже критическое значение этой нагрузки. В связи с этим можно упомянуть парадокс С.Л. Николаи. Он рассмотрел задачу об устойчивости консольного стержня при действии на него на свободном конце следящего момента, т.е. момента, плоскость действия которого остается перпендикулярной оси стержня при любых изгибных деформациях стержня (рис. 5.2)

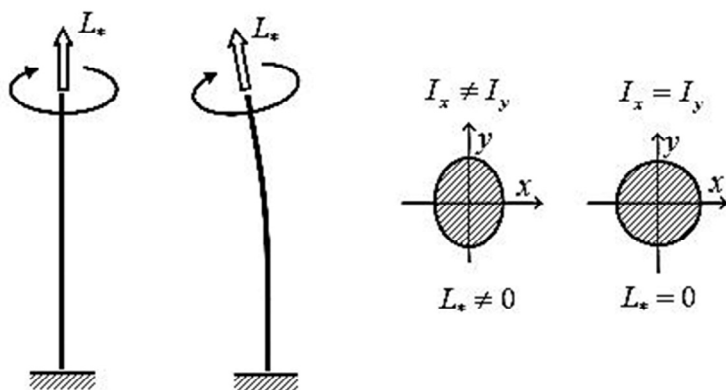


Рис. 5.2. Задачи Николаи

Критическое значение крутящего момента L_* зависит от частот, а в данном случае от осевых изгибающих моментов инерции в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Парадокс состоит в том, что при отсутствии демпфирования при $I_x = I_y$ $L_* \rightarrow 0$.

5.3. Влияние демпфирования на критические значения параметров неконсервативного нагружения

Наиболее специфическим для неконсервативных систем является влияние демпфирования на критические значения нагрузок. Внимательный читатель должен был бы обратить внимание

на тот факт, что, например, при $\alpha = 0$ критическое значение параметра следящей силы, полученное в главе 4 при наличии внутреннего и внешнего трения в системе, значительно меньше того значения, которое было определено в главе 3 (рис. 3.7), где изначально полагалось, что трение отсутствует. Это обусловлено так называемым дестабилизирующим влиянием демпфирования на величину критических нагрузок в неконсервативных системах.

В третьей главе мы получили критическое значение параметра следящей силы β_* для консольного стержня, равное 20,05. Однако при $\beta < \beta_*$ и при отсутствии демпфирования характеристические показатели находятся на мнимой оси, т.е. $\lambda = \pm i\omega_k, k = 1, 2, \dots$ и становятся кратными при $\beta = \beta_*$. Нахождение характеристических показателей на мнимой оси по теории Ляпунова следует считать сомнительным случаем. В связи с этим было бы правильнее называть вышеуказанное значение параметра следящей силы квазикритическим, и в отличие от $\beta_* = \beta_*(\varepsilon)$ с учетом трения в дальнейшем будем обозначать его $\tilde{\beta}_*$. Таким образом, $\tilde{\beta}_* = 20,05$. Интуиция подсказывает, что критические значения параметра нагрузки при наличии демпфирования $\beta_*(\varepsilon)$ больше, чем квазикритическое $\tilde{\beta}_*$, т.е. $\beta_*(\varepsilon) \geq \tilde{\beta}_*$. Кроме того, $\tilde{\beta}_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_*(\varepsilon)$. Однако еще в 1952 г. Г. Циглер в задаче об устойчивости двойного маятника при действии следящей силы обнаружил явление дестабилизирующего действия исчезающе малого демпфирования. Несколькими годами позже В.В. Болотиным были получены условия дестабилизации. Так, например, было показано, что для систем с конечным числом степеней свободы при неконсервативном нагружении дестабилизация имеет место при различных парциальных коэффициентах демпфирования.

Проведем исследование влияния внешнего и внутреннего рассеяния энергии на критические значения следящей силы, действующей на консольный стержень (см. рис. 3.2,б). В основу

расчетов положим уравнение динамического метода (4.4) при отсутствии потенциальной силы $\alpha = 0$ и точный метод определения критических нагрузок. На рисунке 5.3 построена зависимость критического значения параметра следящей силы β_* от коэффициента внешнего трения ε_e при отсутствии внутреннего трения $\varepsilon_i = 0$. Здесь наблюдается монотонное, хотя и не очень существенное увеличение β_* от своего квазикритического значения $\tilde{\beta}_* = 20,05$. Явления дестабилизации в данном случае не наблюдается.

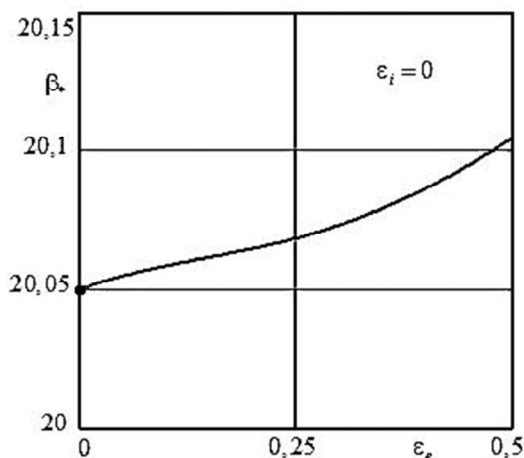


Рис. 5.3. Зависимость критического значения следящей силы от величины внешнего трения при $\varepsilon_i = 0$

Влияние внутреннего трения при отсутствии внешнего трения ($\varepsilon_e = 0$) проиллюстрировано на рис. 5.4. Здесь наблюдается дестабилизация системы при малых ($\varepsilon_i < \sim 0,18$) значениях коэффициента внутреннего трения ε_i . Если $\varepsilon_i \rightarrow 0$ (исчезающее малое демпфирование), то вычисления дают существенно меньшее значение параметра следящей силы $\beta_* = 10,94$, чем квазикритическое $\tilde{\beta}_*$.

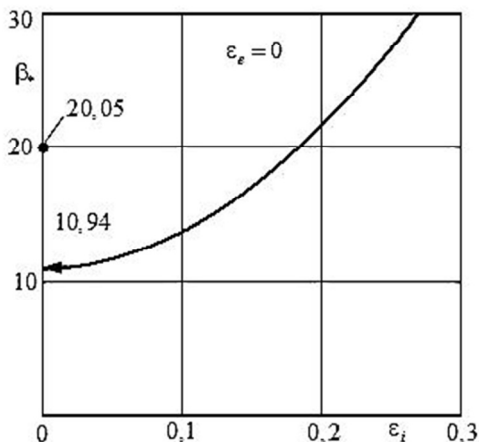


Рис. 5.4. Зависимость критического значения следящей силы от величины внутреннего трения при $\epsilon_e = 0$

Теперь рассмотрим влияние демпфирования на положение границ областей устойчивости. На рисунке 4.10 построена граница области устойчивости для стержня, находящегося под действием сжимающих потенциальной и следящей сил при значениях коэффициентов внутреннего и внешнего демпфирования, равных соответственно $\epsilon_i = 0,01$ и $\epsilon_e = 0,1$. Оставив значение коэффициента внешнего трения тем же, построим границы области устойчивости для различных значений коэффициента внутреннего трения. Результаты вычислений представлены на рис. 5.5. Положение границы дивергенции, которая может быть получена статическим методом, естественно не зависит от величины демпфирования, а также и от распределения инерционных свойств системы. Меняется положение границы флаттера, помеченное на рисунке цифрами. Кривая 1 соответствует значению коэффициента внутреннего трения, равного $\epsilon_i = 0,01$ – кривая 1; $\epsilon_i = 0,005$ – кривая 2 и $\epsilon_i = 0,001$ – кривая 3. Дестабилизирующее влияние внутреннего трения здесь проявляется в том, что с увеличением ϵ_i значения параметра следящей силы снижаются, и граница флаттера приближается к началу координат.

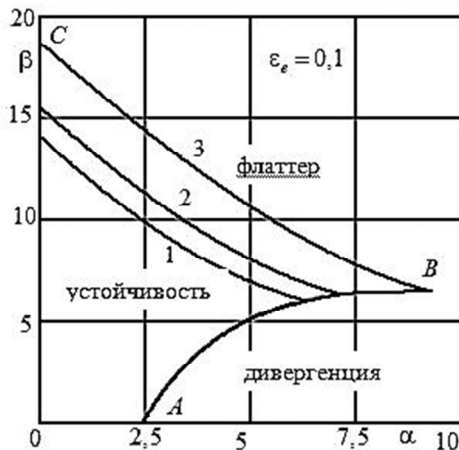


Рис. 5.5. Границы области устойчивости стержня при различных значениях коэффициента внутреннего трения

В других неконсервативных задачах теории упругой устойчивости эффект дестабилизации может быть менее выражен. В частности, влияние внутреннего и внешнего трения на положение границы флаттера в задаче об устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью соответствует классическим представлениям о роли трения в динамических задачах.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры неконсервативных задач теории упругой устойчивости.
2. Может ли потеря устойчивости механической системы происходить по типу дивергенция при нагружении неконсервативными силами?
3. Какие характерные изменения претерпевают частоты собственных колебаний упругой системы при возрастании неконсервативных нагрузок и достижения их критических значений?
4. В чем заключается парадокс Циглера о влиянии рассеяния энергии на величину неконсервативных критических нагрузок?
5. В чем состоит дестабилизирующая роль демпфирования в неконсервативных системах?

6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

6.1. Формула Релея

Как и во многих других разделах механики, вариационные методы нашли широкое применение и в расчетах на устойчивость механических систем. В главе 4 уже упоминалась теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных систем. Содержанием теоремы Лагранжа–Дирихле является следующее утверждение: *Если в положении равновесия консервативной системы с голономными стационарными связями потенциальная энергия \mathcal{E} имеет изолированный минимум ($\delta^2 \mathcal{E} > 0$), то такое положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Рассмотрим консервативные задачи теории устойчивости, т.е. когда внешние силы, действующие на упругую систему, обладают потенциалом. В этом случае применим статический метод исследования устойчивости – метод Эйлера. Уравнение статического метода (уравнение нейтрального равновесия) относительно отклонений φ от исследуемого на устойчивость положения равновесия имеет вид

$$C\varphi + \beta V\varphi = 0.$$

Здесь β – параметр внешней нагрузки. Умножим скалярно на φ . Тогда получим

$$\beta = -\frac{(C\varphi, \varphi)}{(V\varphi, \varphi)}.$$

Здесь $\frac{1}{2}(C\varphi, \varphi) = U_0(\varphi)$ – потенциальная энергия упругой деформации, соответствующая отклонениям системы от положения равновесия. Вычисляется по классическим формулам линейной теории упругости так, как будто начальное состояние не деформировано. $\frac{1}{2}(V\varphi, \varphi) = -W_0(\varphi)$ – некоторый квадратичный функционал от φ (параметрический функционал).

Таким образом, можно записать формулу Релея в теории упругой устойчивости:

$$\beta = \frac{U_0(\varphi)}{W_0(\varphi)}.$$

Эта формула точная, т.к. φ – решение уравнения нейтрального равновесия. Если функция φ не является точным решением уравнения нейтрального равновесия, но принадлежит энергетическому пространству H_C оператора C , то для оценки сверху для критического значения параметра нагрузки получаем формулу Релея в виде

$$\beta_* = \min_{\varphi \in H_C} \frac{U_0(\varphi)}{W_0(\varphi)}. \quad (6.1)$$

Таким образом, для оценки критического параметра нагрузки для упругой системы с использованием формулы Релея необходимо выбрать подходящие функции из энергетического пространства оператора C . Проще говоря, эти функции должны удовлетворять, по крайней мере, кинематическим граничным условиям и условиям дифференцируемости необходимое число раз. Далее остается отыскать минимальное значение отношения квадратичных функционалов $U_0(\varphi)$ и $W_0(\varphi)$.

6.2. Частные случаи формулы Релея

Рассмотрим несколько случаев применения метода Релея для определения критического значения нагрузки.

А. Стержни

Пусть консольный стержень с прямолинейной осью длиной l и жесткостью на изгиб в плоскости чертежа EI , находится под действием сжимающей распределенной нагрузки $\beta q(x)$ (рис. 6.1). Параметр β характеризует интенсивность нагрузки. В сечениях стержня возникает продольная сила $\beta N(x)$. В задачах устойчивости, в частности, в уравнениях нейтрального равновесия, $\beta N(x) > 0$, если продольная сила сжимающая.

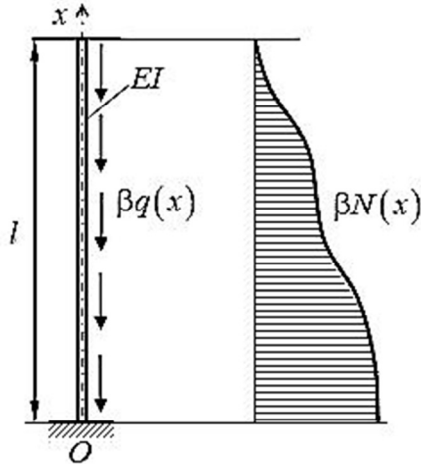


Рис. 6.1. Сжатие стержня распределенной нагрузкой

Уравнение нейтрального равновесия для прямолинейного стержня с постоянной изгибной жесткостью относительно смежных состояний равновесия, определяемых поперечными перемещениями $w(x)$, имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \beta \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) дополняется соответствующими граничными условиями. Применение метода Релея для определения критического значения нагрузки не предполагает интегрирования уравнения (6.2). Функционал, стоящий в числителе формулы Релея (6.1) определяет потенциальную энергию изгиба

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Функционал U_0 при вариационном выводе уравнения (6.2) порождает первый член уравнения. Множитель при β в (6.2) можно записать как

$$Bw = \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right), \quad (6.3)$$

– это следствие влияния продольных нагрузок на поперечные перемещения стержня при переходе в смежное состояние, порождается функционалом W_0 . Используя выражение (6.3), построим вид этого функционала согласно его определению через параметрический оператор B . Вычислим скалярное произведение $\frac{1}{2}(Bw, w)$ и применим правило интегрирования по частям

$$\frac{1}{2}(Bw, w) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) w dx = \frac{1}{2} N \frac{dw}{dx} w \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

В силу граничных условий для стержня на рис. 6.1 внеинтегральный член равен нулю. Можно показать, что и при других опорных закреплениях внеинтегральный член также будет равен нулю. Таким образом имеем

$$W_0 = -\frac{1}{2}(Bw, w) = \frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (6.4)$$

Рассмотрим пример применения формулы Релея для определения критического параметра нагружения. Пусть на консольный стержень действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 6.2). Сначала приведем результаты точного решения задачи. Если начало продольной координаты поместить на свободном конце стержня (рис. 6.2,а), то продольная сила в сечении с координатой x определится как $N(x) = qx$.

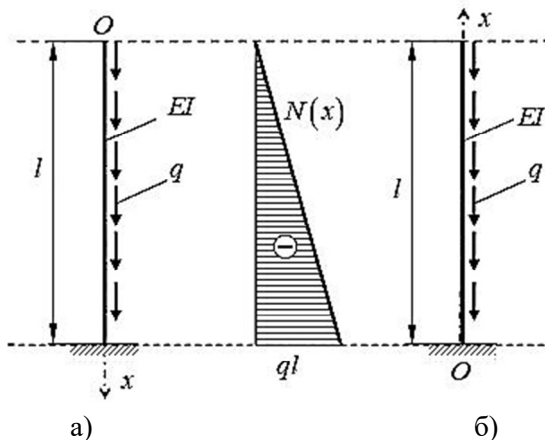


Рис. 6.2. Сжатие стержня равномерно распределенной нагрузкой

Вместо стандартного вида уравнения нейтрального равновесия

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left[N(x) \frac{dw}{dx} \right] = 0$$

получим уравнение второго порядка. Из рассмотрения условия равновесия элемента стержня (рис. 6.3) следует, что поперечная сила в сечениях стержня Q равна

$$Q = EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -N(x) \frac{dw}{dx},$$

откуда следует

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} + N(x) \frac{dw}{dx} = 0.$$

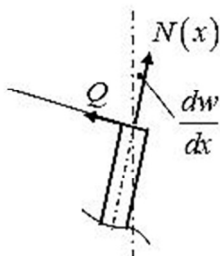


Рис. 6.3. К выводу уравнения (6.5)

Обозначив $\theta = \frac{dw}{dx}$ и с учетом $N(x) = qx$, приходим к одной из стандартных форм уравнения Бесселя

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + qx\theta = 0. \quad (6.5)$$

Точное решение уравнения (6.5) дает $(ql)_* = 7,84 \frac{EI}{l^2}$.

Теперь для оценки критической нагрузки воспользуемся формулой Релея

$$\beta_* = \min_{\varphi} \frac{U_0(\varphi)}{W_0(\varphi)}.$$

Вернемся к более привычному варианту направления координатной оси Ox (начало координат в заделке, рис. 6.2,б). В этом случае формула для продольной силы будет следующей:

$$N(x) = ql \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

За параметр нагрузки примем $\beta = ql$. Тогда согласно формуле Релея для критического значения $\beta_* = (ql)_*$ имеем

$$\beta_* = (ql)_* = \min_{\varphi} = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx}.$$

Возьмем сначала весьма простое, но достаточно грубое приближение

$$\varphi = fx^2, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 2fx, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2f.$$

Выбранная функция удовлетворяет кинематическим граничным условиям, однако, оценка для критического значения параметра нагрузки

$$(ql)_* = \frac{EI \int_0^l 4dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) 4x^2 dx} = \frac{EI}{\frac{l^3}{3} - \frac{l^4}{4l}} = 12 \frac{EI}{l^2}$$

почти в полтора раза больше точного значения.

Теперь выберем функцию несколько более сложную

$$\varphi = fl \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{l^3} \right), \quad \frac{d\varphi}{dx} = f \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \right), \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{f}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Кроме кинематических граничных условий при $x=0$ (равенство нулю прогиба и угла поворота), выполняется одно динамическое граничное условие (равенство нулю изгибающего момента) при $x=l$. Следовательно, от формулы Релея стоит ожидать более корректной оценки для критического значения параметра $(ql)_*$.

$$(ql)_* = \frac{EI \int_0^l \left[\frac{f}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]^2 dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left[f \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \right) \right]^2 dx} = 8 \frac{EI}{l^2}.$$

Проведенные вычисления подтверждают эти ожидания. Полученная оценка больше точного значения всего на 2%. Такую же оценку дает аппроксимация формы потери устойчивости функцией

$$\varphi(x) = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Б. Пластины

На рисунке 6.4 изображен фрагмент прямоугольной пластины постоянной толщины h , срединная плоскость которой отнесена к прямоугольной системе координат. Пластина нагружена усилиями в срединной плоскости. Потеря плоской формы равновесия пластин происходит в случае, если усилия в срединной плоскости достигают критических значений.

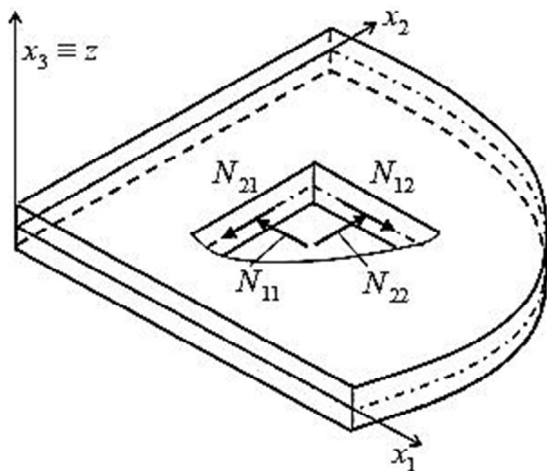


Рис. 6.4. Пластина с усилиями в срединной плоскости

Смежными с исследуемой на устойчивость плоской формой равновесия являются изогнутые состояния пластины. При общепринятых гипотезах изгиба пластин и в общепринятых обозначениях уравнение нейтрального равновесия относительно нормальных к срединной плоскости перемещений $w(x_1, x_2)$ имеет вид

$$D\Delta\Delta w + \beta \left(N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пласти-

ны. Потенциальная энергия упругой деформации, входящая в формулу Релея запишется следующим образом

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint_S D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, а параметрический функционал вычисляется по формуле

$$W_0 = \frac{1}{2} \iint_S \left[N_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + 2N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2.$$

Для круговых и кольцевых пластин от прямоугольных координат x, y переходят к полярным координатам r, θ . Ограничимся осесимметричным случаем $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ и сплошной круговой пластиной радиуса R . В этом случае выражение для потенциальной энергии упругой деформации запишется как

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^R D \left[(\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] 2\pi r dr.$$

Здесь $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ Для параметрического функционала получим

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_0^R N_r \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 2\pi r dr.$$

В. Упругое тело

При исследовании устойчивости упругого тела, нагруженного силами, пропорциональными некоторому параметру β (рис. 6.5) в нем возникают напряжения, также пропорциональные тому же параметру, т.е. $\beta \sigma_{jk}$.

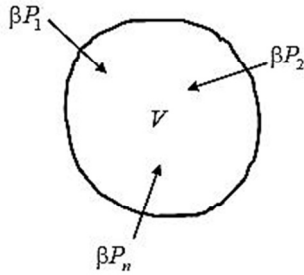


Рис. 6.5. Трехмерное упругое тело

Если начальное (невозмущенное) состояние отождествить с недеформированным (правда для трехмерных тел это не всегда можно делать), то уравнение нейтрального равновесия можно записать как (см. главу 1)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{jklm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) = 0,$$

а функционалы U_0 и W_0 примут следующий вид

$$U_0 = \frac{1}{2} \iiint_V \lambda_{jklm} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} dV, \quad W_0 = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dV.$$

6.3. Энергетическое истолкование формулы Релея

В пункте 6.1 формула Релея была получена формально, исходя из уравнения статического метода исследования устойчивости (уравнения нейтрального состояния)

$$\beta_* = \min_{\varphi} \frac{U_0(\varphi)}{W_0(\varphi)}.$$

Но эта формула имеет и четкое энергетическое обоснование. Рассмотрим упругую систему, нагруженную внешними консервативными силами. Полная потенциальная энергия системы с начальными перемещениями φ' равна

$$\mathcal{E}(\varphi') = U(\varphi') + \Pi(\varphi'). \quad (6.6)$$

Здесь

$$U(\varphi') = \iiint_V \Phi(\varepsilon_{jk}) dV$$

– потенциальная энергия упругой деформации, выраженная через свою плотность $\Phi(\varepsilon_{jk})$, где ε_{jk} нелинейно выражаются через перемещения φ' . Не следует путать с потенциальной энергией упругой деформации

$$U_0(\varphi) = \iiint_V \Phi_0(\varepsilon_{jk}) dV,$$

где ε_{jk} линейно выражаются через φ – малые отклонения от исследуемого на устойчивость положения равновесия.

В формуле (6.6) $\Pi(\varphi')$ – потенциал внешних сил.

Пусть φ_0 – исследуемая невозмущенная форма равновесия упругой системы. Составим выражение для полной потенциальной энергии для состояний, близких к невозмущенной форме равновесия φ_0 , т.е. $\varphi_0 + \varphi$. Здесь φ – малые отклонения, совместимые со связями, $\mathcal{E}(\varphi_0 + \varphi)$ – это функция от φ . Разложим ее в ряд Тейлора

$$\mathcal{E}(\varphi_0 + \varphi) = \mathcal{E}(\varphi_0) + \delta_* \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) + \frac{1}{2} \delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) + \dots$$

$\delta_* \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) = 0$, так как φ_0 – форма равновесия. В соответствие с теоремой Лагранжа-Дирихле форма равновесия φ_0 – устойчива, если полная потенциальная энергия в состоянии φ_0 имеет локальный минимум. Достаточным условием этого является

$$\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) > 0$$

в некоторой окрестности φ_0 при $\varphi \neq 0$. Форма равновесия φ_0 будет неустойчивой, если хотя бы для одного φ

$$\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) < 0.$$

Критическому случаю отвечает $\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) = 0$.

Можно показать, что, если невозмущенное состояние отождествляется с недеформированным (см. главу 1), то

$$\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) = U_0(\varphi) - \beta W_0(\varphi).$$

Таким образом, равенство $\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) = 0$ приводит к формуле Релея

$$\beta = \frac{U_0(\varphi)}{W_0(\varphi)}.$$

Здесь $U_0(\varphi)$ и $W_0(\varphi)$ имеют смысл при φ , допустимых со связями.

6.4. Вариационный принцип Треффца

Вариационный принцип Треффца формулируется следующим образом: состояния равновесия, смежные с невозмущенной формой равновесия, таковы, что для них первая вариация от второй специальной вариации полной энергии равна нулю:

$$\delta(\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi)) = 0. \quad (6.7)$$

Формулу (6.7) нельзя понимать, как третью вариацию. Вторая специальная вариация $\delta_*^2 \mathcal{E}$ (обозначим специальную вариацию звездочкой) – это вариация на смежных состояниях равновесия, т.е. обычные вариации заменяются действительными отклонениями. Геометрическая иллюстрация вариационного принципа Треффца представлена на рис. 6.6. Кривая ABC в пространстве состояний демонстрирует невозмущенные формы равновесия при различных значениях параметра внешней нагрузки β . Пусть при возрастании этого параметра точки состояния перемещаются от A до C , причем участок AB соответствует устойчивым состояниям ($\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) > 0$), а участок BC – неустойчивым ($\delta_*^2 \mathcal{E}(\varphi_0, \varphi) < 0$).

В точке смены характера положения равновесия B при $\beta = \beta_*$ вариации полной энергии на совместимых со связями $\delta\varphi$ смежных состояниях (кривая DBE) равны нулю $\delta\mathcal{E} = 0$.

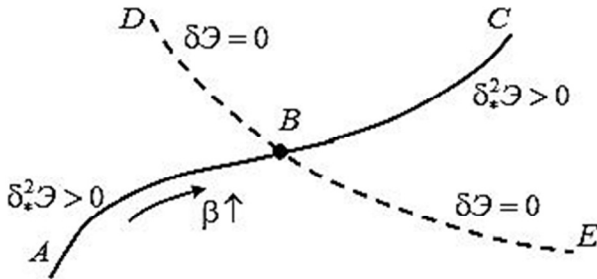


Рис. 6.6. Иллюстрация принципа Грейфца

Вычислим полную энергию для смежных состояний

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \delta_* \mathcal{E} + \frac{1}{2} \delta_*^2 \mathcal{E} + \dots$$

и вычислим ее вариацию на $\delta\varphi$, совместимых со связями. Тогда $\delta_* \mathcal{E} = 0$, так как исходное состояние – состояние равновесия. Потребуем, чтобы смежные состояния были состояниями равновесия, т.е. $\delta\mathcal{E} = 0$. Поскольку \mathcal{E}_0 не варьируется, то имеем $\delta(\delta_*^2 \mathcal{E}) = 0$. Уравнения Эйлера-Остроградского дадут уравнения нейтрального равновесия для $\delta_*^2 \mathcal{E}$:

$$\delta(\delta_*^2 \mathcal{E}) = \delta[U_0(\varphi) - \beta W_0(\varphi)] = 0.$$

6.5. Методы Ритца и Бубнова–Галеркина

Метод Ритца сводит задачу определения минимального собственного значения краевой задачи $C\varphi + \beta B\varphi = 0$ к отысканию экстремума функции многих переменных. Будем исходить из вариационного принципа Трэффца

$$\delta[U_0(\varphi) - \beta W_0(\varphi)] = 0, \quad (6.8)$$

где

$$U_0 = \frac{1}{2}(C\varphi, \varphi), \quad W_0 = -\frac{1}{2}(B\varphi, \varphi).$$

Представим форму потери устойчивости в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^N f_k \psi_k(x). \quad (6.9)$$

Система координатных (базисных) функций $\{\psi_k\}$ должна удовлетворять следующим условиям.

1. Каждая из них должна принадлежать энергетическому пространству H_C оператора C ; иметь конечную энергетическую норму $\|\psi_k\| < \infty$; удовлетворять, по крайней мере, кинематическим граничным условиям, иметь обобщенные производные до порядка оператора C включительно.

2. Взятые в любом числе, они должны быть линейно независимыми.

3. Система координатных функций $\{\psi_k\}_1^\infty$ должна быть полной в H_C .

Подставляя ряд (6.9) в (6.8) и проводя вычисления соответствующих интегралов, получим функцию многих переменных. Переменными являются коэффициенты f_k в разложении (6.9)

$$U_0(\varphi) - \beta W_0(\varphi) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (c_{jk} f_j f_k - \beta b_{jk} f_j f_k) = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_N). \quad (6.10)$$

Здесь

$$c_{jk} = \frac{1}{2} (C \Psi_j, \Psi_k) = U_0(\Psi_j, \Psi_k), \quad b_{jk} = -\frac{1}{2} (B \Psi_j, \Psi_k) = W_0(\Psi_j, \Psi_k).$$

Экстремум функции $\Phi(f_1, f_2, \dots, f_N)$ достигается при условии

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Таким образом, приходим к однородной системе линейных уравнений относительно коэффициентов f_1, f_2, \dots, f_N

$$\sum_{k=1}^N c_{jk} f_k - \beta \sum_{k=1}^N b_{jk} f_k = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (6.11)$$

Запишем систему (6.11) в матричной форме. Для этого введем вектор \mathbf{x} и матрицы \mathbf{C} и \mathbf{B}

$$\mathbf{x} = (f_1, f_2, \dots, f_N), \quad \mathbf{B} = [b_{jk}], \quad \mathbf{C} = [c_{jk}].$$

Тогда получим

$$(\mathbf{C} - \beta \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = 0,$$

что соответствует обобщенной алгебраической задаче на собственные значения. Критическому значению параметра нагрузки соответствует минимальное собственное значение. Соответствующий собственный вектор совместно с разложением (6.9) определяет форму потери устойчивости.

В методе Бубнова–Галеркина исходят из уравнения статического метода исследования устойчивости (уравнения нейтрального равновесия), левую часть которого запишем через оператор $L(\varphi)$

$$L(\varphi) = C\varphi + \beta B\varphi. \quad (6.12)$$

Как и в методе Ритца, представим форму потери устойчивости в виде ряда

$$\varphi = \sum_{k=1}^N f_k \psi_k(x). \quad (6.13)$$

Здесь $\{\psi_k\}$ – координатные (базисные) функции, которые должны удовлетворять всем граничным условиям и условиям полноты. Согласно методу Бубнова–Галеркина, результат подстановки ряда (6.13) в левую часть уравнения нейтрального равновесия (6.12)

$$L\left(\sum_{k=1}^N f_k \psi_k\right), \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

должен быть ортогонален ко всем координатным функциям, т.е.

$$\sum_{k=1}^N [(C\psi_k, \psi_j) + \beta(B\psi_k, \psi_j)] f_k = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (6.14)$$

Сравнивая с (6.11), опять приходим к алгебраической проблеме на собственные значения.

Если в методе Ритца координатные (базисные функции) удовлетворяют всем граничным условиям, то скалярные произведения $\frac{1}{2}(C\Psi_k, \Psi_j)$ в обоих методах совпадают. Например, для стержня при любых граничных условиях интегрирование по частям этого скалярного произведения в формуле (6.14) дает

$$\frac{1}{2}(C\Psi_j, \Psi_k) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \frac{d^4 \Psi_j}{dx^4} \Psi_k dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \frac{d^2 \Psi_j}{dx^2} \frac{d^2 \Psi_k}{dx^2} dx = c_{jk}.$$

Коэффициенты $b_{jk} = -\frac{1}{2}(B\Psi_j, \Psi_k)$ совпадают по определению оператора B (см. пункт 6.2). Таким образом, разрешающая система метода Бубнова–Галеркина (6.14) будет совпадать с разрешающей системой метода Ритца (6.11).

Контрольные вопросы и упражнения

1. В каком случае формула Релея дает точное значение критической нагрузки?
2. Каким условиям должна удовлетворять функция, аппроксимирующая форму потери устойчивости механической системы, в формуле Релея?
3. Какую оценку (сверху или снизу) дает формула Релея?
4. Для каких задач теории упругой устойчивости оценка критической нагрузки может быть проведена с применением формулы Релея?
5. Найдите соответствие между расчетной схемой конструкции (табл. 1), возможной аппроксимацией формы потери устойчивости (табл. 2) и соответствующим графиком (табл. 3) при применении формулы Релея для оценки критических нагрузок.

Таблица 1

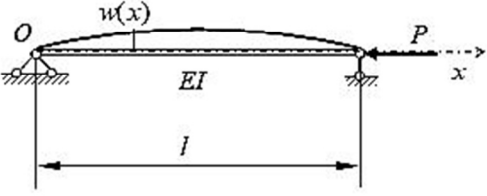
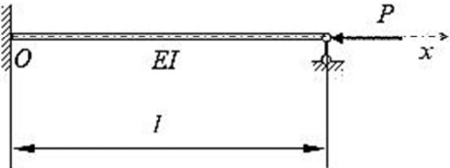
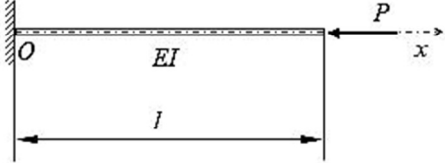
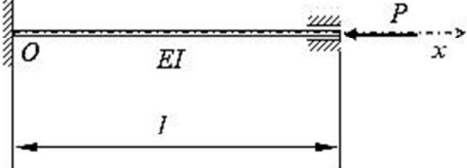
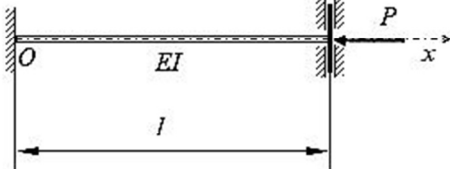
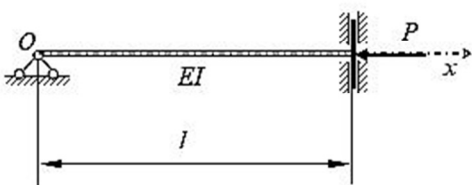



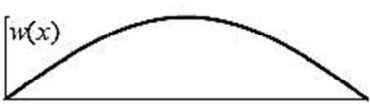

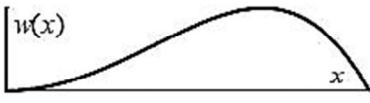
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Таблица 2

1	$w(x) = f \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$	4	$w(x) = f \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right)$
2	$w(x) = f \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$	5	$w(x) = f \cdot x^2 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$
3	$w(x) = f \sin\frac{\pi x}{l}$	6	$w(x) = f \left(1 - \cos\frac{\pi x}{l}\right)$

Таблица 3

1	
2	
3	
4	
5	
6	

6. Применима ли формула Релея для исследования устойчивости упругих систем при неконсервативном нагружении?

7. Каким условиям должны удовлетворять координатные функции в методах Ритца и Бубнова–Галеркина для определения критических нагрузок в теории упругой устойчивости?

8. В каком случае метод Ритца и метод Бубнова–Галеркина дают совпадающие оценки для критических нагрузок?

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ПУАНКАРЕ

7.1. Точки бифуркации, предельные точки

Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы. Пусть f – обобщенная координата, β – параметр внешней нагрузки. Рассмотрим совокупность положений (форм) равновесия при $0 \leq \beta \leq \beta_1$. Полная энергия системы является функцией f и β :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(f, \beta).$$

Положения (формы) равновесия определяются из уравнения

$$\delta \mathcal{E} = L(f, \beta) = 0.$$

По теореме Лагранжа–Дирихле для устойчивых положений (форм) равновесия вторая вариация от полной энергии положительная

$$\delta^2 \mathcal{E} > 0, \text{ или } \frac{\partial L(f, \beta)}{\partial f} > 0.$$

Для неустойчивых положений равновесия

$$\delta^2 \mathcal{E} < 0, \text{ или } \frac{\partial L(f, \beta)}{\partial f} < 0.$$

В точках смены характера равновесия

$$\delta^2 \mathcal{E} = 0, \text{ или } \frac{\partial L(f, \beta)}{\partial f} = 0.$$

Таким образом, задача сводится к определению положений равновесия $f = f(\beta)$ из уравнения $L(f, \beta) = 0$ и исследованию устойчивости этих положений равновесия.

Рассмотрим два случая:

Случай 1. Пусть при $\forall \beta \in [0, \beta_1]$ уравнение $L(f, \beta) = 0$ имеет n простых корней f_1, f_2, \dots, f_n и пусть при этом

$$\frac{\partial L(f, \beta)}{\partial f} \neq 0 \text{ при } f = f_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В этом случае на основании теоремы о неявных функциях мы можем построить n аналитических функций $f_j(\beta)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$. Напомним, что аналитической (голоморфной) функцией называется функция, которая может быть представлена степенным рядом в окрестности точки β_0, f_j^0

$$f_j(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k(j)} \beta^k; \quad a_{k(j)} = \left. \frac{d^k f_j}{d\beta^k} \right|_{\substack{\beta=\beta_0 \\ f=f_j^0}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Например, при $k = 1$ первый (не нулевой) член при β определяет производную

$$a_{1(j)} = \frac{df_j^0}{d\beta} = - \left. \frac{\partial L / \partial \beta}{\partial L / \partial f} \right|_{\substack{\beta=\beta_0 \\ f_j=f_j^0}}.$$

Можно предположить следующую графическую иллюстрацию рассматриваемого случая (рис. 7.1). Точками и крестиками здесь и далее помечены устойчивые и неустойчивые состояния системы соответственно.

В этом случае свойство устойчивости или неустойчивости сохраняется для каждой кривой (рис. 7.1,а), проходящей через точки локальных минимумов или максимумов полной энергии системы (рис. 7.1,б).

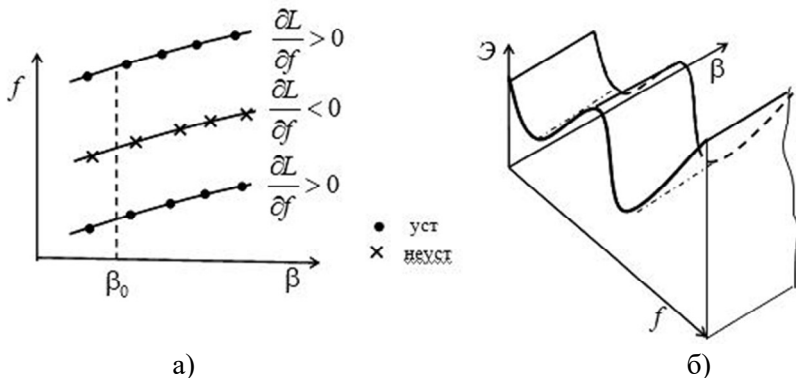


Рис. 7.1. Положения равновесия (а) и полная энергия (б)

Случай 2. Пусть теперь при некотором $\beta_* \in [0; \beta_1]$ нарушается условие применимости теоремы о неявных функциях, т.е. вплоть до производных порядка m имеем

$$\frac{\partial^m L(f, \beta)}{\partial f^m} = 0.$$

В этом случае попытка отыскать решение $L(f, \beta) = 0$ в виде аналитических функций ничего не даст. Но справедлива теорема Вейерштрасса, согласно которой в окрестности точки β_* существует m ветвей, разлагающихся в ряды по дробным степеням $(\beta - \beta_*)$ вида

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(j)} (\beta - \beta_*)^{k/s},$$

где s — натуральное число ($s \leq m + 1$). Такие точки называются **особыми**. Показатели k/s определяются из уравнений ветвления. Ограничимся рассмотрением случаев $m = 1$ и $m = 2$.

Пусть $m = 1$, т.е. $\frac{\partial L(f, \beta)}{\partial f} = 0$ при $\beta = \beta_*$, $f = f_*$. В этом случае $s \leq 2$.

На плоскости β, f для $f(\beta)$ могут быть варианты, представленные на рис. 7.2, а, б.

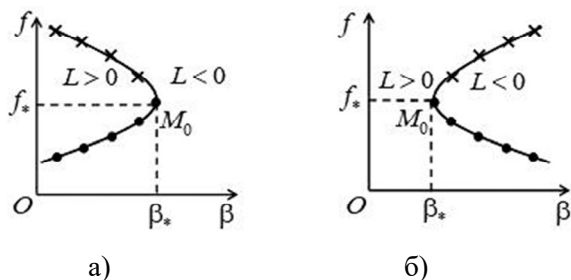


Рис. 7.2. Предельные точки

На этом рисунке точка M_0 – это предельная точка. Обе ветви (устойчивая и неустойчивая) разлагаются по дробным степеням β . В случае а) при $\beta > \beta_*$ нет действительных ветвей, в случае б) – при $\beta < \beta_*$. Предельная точка – это точка, разделяющая ветви, уходящие в одну сторону, и характер устойчивости на них неодинаков. Кривые $f(\beta)$ делят плоскость на области, где знаки функции $L(f, \beta)$ противоположные.

В более общем случае возможны варианты, представленные на рис. 7.3.

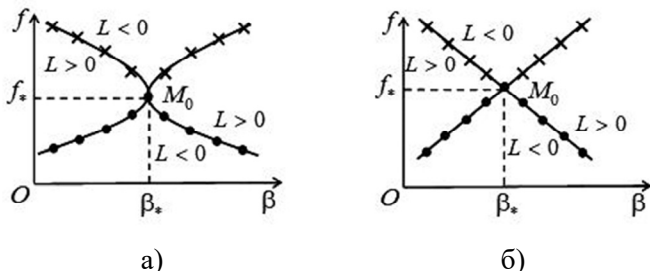


Рис. 7.3. Точки бифуркации

Здесь точка M_0 — точка бифуркации (ветвления). На рисунке 7.3,а в точке бифуркации пересекаются кривые ветвления, которые могут быть представлены разложением по дробным степеням β . На рисунке 7.3,б в точке бифуркации пересекаются кривые ветвления, соответствующие разложению по целым степеням β . В точках бифуркации происходит «обмен устойчивостью».

При $m = 2$, $\frac{\partial^2 L(f, \beta)}{\partial f^2} = 0$, $s \leq 3$. Здесь разнообразие случаев гораздо шире. Простейший и наиболее распространенный случай конфигурации это так называемая «вилка» (рис. 7.4).

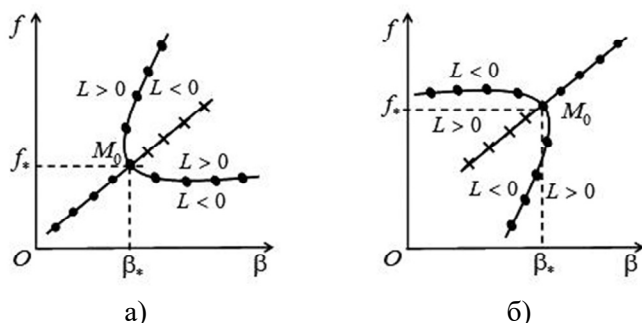


Рис. 7.4. Бифуркационные диаграммы типа «вилка»

Здесь точки M_0 — бифуркационная точка, где пересекаются кривая $f_j(\beta)$, разлагающаяся по дробным степеням β , и кривая $f_k(\beta)$, разлагающаяся по целым степеням β . «Обмен устойчивостью» происходит только на ветвях, разлагающихся по целым степеням β .

Пуанкаре распространил эту теорию на случай систем со многими степенями свободы и применил к системам с распределенными параметрами. Для распределенных систем при исследовании устойчивости в качестве «представительной обобщенной координаты» может быть принят какой-либо локальный или интегральный параметр, что в большинстве случаев дает удовлетворительные результаты.

7.2. Применение теории бифуркаций

Рассмотрим систему с одной степенью свободы (рис. 7.5,а), представляющую собой абсолютно жесткий обращенный маятник с упругой шарнирной опорой. В ненагруженном состоянии положение маятника строго вертикальное. К маятнику приложена потенциальная вертикально направленная сила P . Требуется построить бифуркационную диаграмму.

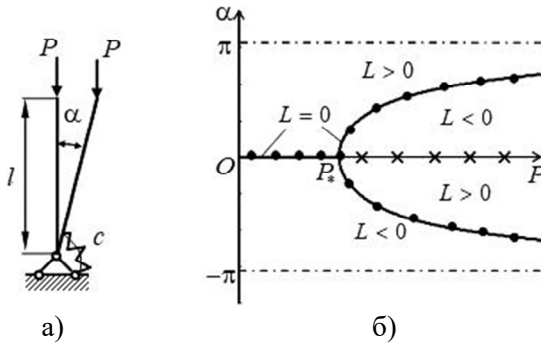


Рис. 7.5. Обращенный маятник (а) и бифуркационная диаграмма (б)

За обобщенную координату f примем угол отклонения стержня маятника от вертикали α , а за параметр нагружения β силу P . Тогда полная энергия системы при отклонении стержня в смежное состояние, включая энергию упругой деформации пружины жесткостью c и работу силы P с обратным знаком, запишется как

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}c\alpha^2 - Pl(1 - \cos \alpha).$$

Из равенства нулю первой вариации полной энергии $\delta\mathcal{E} = 0$ получим уравнения для определения положений равновесия

$$L = c\alpha - Pl \sin \alpha = 0. \quad (7.1)$$

а) первый вариант решения уравнения (7.1) – $\alpha = 0$;

б) второй вариант решения уравнения (7.1) запишем как $P = P(\alpha)$

$$P = \frac{c}{l} \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.2)$$

Учитывая то, что при $\alpha \neq 0$ отношение $\frac{\alpha}{\sin \alpha} > 1$, а при $\alpha \rightarrow 0$ равно нулю, для критического значения сжимающей силы получим

$$P_* = \frac{c}{l}. \quad (7.3)$$

Зависимость $\alpha(P)$ представлена на рис. 7.5,б. Продифференцируем функцию $L(\alpha, P)$ по α и приравняем к нулю $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$. Получим $c - Pl \cos \alpha = 0$ или $\cos \alpha = \frac{P}{P_*}$. Это соотношение свидетельствует о том, что особая точка $\alpha_* = 0, P = P_*$ является точкой бифуркации. Здесь $m = 2$, т.е.

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_*} = 0,$$

а бифуркационная диаграмма – типа «вилки».

При наличии до нагружения у маятника начального угла отклонения α_0 (рис. 7.6,а) рассуждения пункта 7.1 приводят к уравнению, связывающему нагрузку и угол поворота вида

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{\sin \alpha} = \frac{P}{c/l}.$$

Это уравнение определяет устойчивые положение равновесия (рис. 7.6,б).

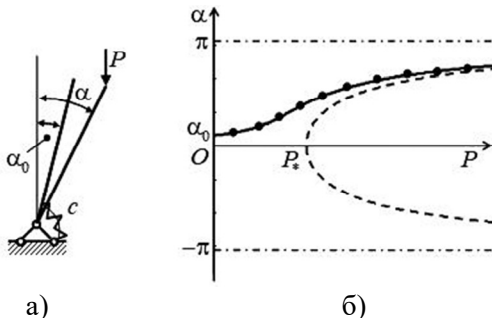


Рис. 7.6. Маятник с начальным отклонением (а) и зависимость угла отклонения от силы (б)

7.3. Послекритические деформации сжатых стержней

Рассмотрим закритические ($P > P_*$) деформации шарнирно опертого стержня с нерастяжимой осью (рис. 7.7). Кроме прямолинейной координаты x введем криволинейную координату s , отсчитываемую от левой неподвижной опоры. Обозначим через $\theta(s)$ — угол поворота поперечного сечения как функция координаты s . Условия на концах стержня $\theta'(0) = \theta'(l) = 0$. Производная от угла поворота сечения по криволинейной координате определяет кривизну оси изогнутого стержня κ

$$\theta'(s) = \frac{d\theta}{ds} = \kappa.$$

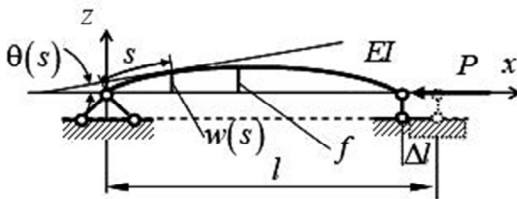


Рис. 7.7. Продольный изгиб стержня в закритическом состоянии

С учетом очевидных соотношений

$$dx = ds \cos \theta, \quad dw = ds \sin \theta, \quad \theta = \arcsin \frac{dw}{ds} \quad (7.4)$$

кривизну κ можно выразить через нормальный прогиб $w(s)$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \arcsin \frac{dw}{ds} = \frac{\frac{d^2w}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2}}. \quad (7.5)$$

Запишем полную энергию системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 ds - P \left(l - \int_0^l \cos \theta ds \right) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds - P \left(l - \int_0^l \cos \theta ds \right).$$

Из условия $\delta \mathcal{E} = 0$ следует уравнение

$$EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0 \quad (7.6)$$

с вышеупомянутыми граничными условиями. Уравнение (7.6) интегрируется в эллиптических функциях. В результате получим $\theta(s)$. Поступим несколько иначе. Используя соотношения (7.4) и (7.5), перейдем в уравнении изгиба к функции $w(s)$

$$EI \frac{d}{ds} \left(\frac{\frac{d^2 w}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds} \right)^2}} \right) + P \frac{dw}{ds} = 0 \quad (7.7)$$

Уравнение (7.7) дополним граничными условиями относительно перемещений

$$w(0) = w(l) = 0 \quad (7.8)$$

и относительно кривизн на концах стержня

$$\theta'(0) = \frac{\frac{d^2 w(0)}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw(0)}{ds} \right)^2}} = 0, \quad \theta'(l) = \frac{\frac{d^2 w(l)}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw(l)}{ds} \right)^2}} = 0, \quad (7.9)$$

Проинтегрируем уравнение (7.7)

$$EI \frac{\frac{d^2 w}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds} \right)^2}} + Pw = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования равна нулю, что следует из условий (7.8) и (7.9), если положить в этом уравнении $s = 0$ или $s = l$. Итак, окончательно получаем уравнение

$$EI \frac{d^2 w}{ds^2} + Pw \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds} \right)^2} = 0 \quad (7.10)$$

с граничными условиями

$$w(0) = w(l) = 0.$$

Решением уравнения (7.10) является

$$w(s) = -2k \sqrt{\frac{EI}{P}} \operatorname{cn} \left(s \sqrt{\frac{P}{EI}} + K \right), \quad (7.11)$$

где $\operatorname{cn}(u, k)$ – эллиптическая функция Якоби (эллиптический косинус), k – модуль эллиптической функции.

Эллиптические функции – это функции, связанные с обращением эллиптических интегралов. Подобно тому, как тригонометрическая функция $u = \sin x$ является обратной по отношению к интегралу

$$x = \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

так и эллиптический синус $u = \operatorname{sn}(x, k)$ является обратной функцией по отношению к эллиптическому интегралу 1-го рода

$$x = \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}.$$

К эллиптическим интегралам и функциям приводит, например, задача о колебаниях математического маятника. Графики эллиптического синуса и косинуса представлены на рис. 7.8.

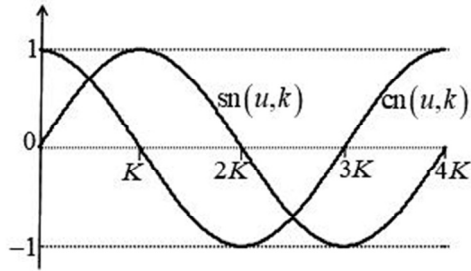


Рис. 7.8. Эллиптические функции Якоби

Период эллиптических функций Якоби $4K(k)$, где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

полный эллиптический интеграл первого рода. Применим к выражению (7.11) граничные условия. При $s=0$ $w(0)=0$ или $\text{cn}(K)=0$ (см. рис. 7.8) выполняется всегда. Удовлетворим условию при $s=l$. Здесь $w(l)=0$ или

$$w(l) = -2k \sqrt{\frac{EI}{P}} \text{cn} \left(l \sqrt{\frac{P}{EI}} + K \right) = 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$l \sqrt{\frac{P}{EI}} + K = 3K.$$

Отсюда получаем уравнение для отыскания модуля эллиптического интеграла k :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} = K(k). \quad (7.12)$$

Графическая иллюстрация решения этого уравнения продемонстрирована на рис. 7.9. При $k \rightarrow 1$ $K(k) \rightarrow \infty$; при $k = 0$

$K(0) = \frac{\pi}{2}$, и уравнение (7.12) имеет смысл в том случае, если

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \geq \frac{\pi}{2}.$$

Другими словами, решение уравнения (7.12) существует, если величина сжимающей нагрузки превышает критическое значение

$$P \geq P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

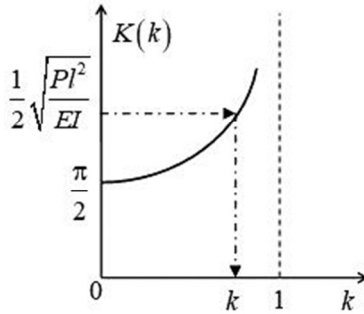


Рис. 7.9. Определение модуля эллиптического интеграла

Таким образом, имеем

$$w(s) = \pm \operatorname{fcn} \left(s \sqrt{\frac{P}{EI}} + K(k) \right), \quad f = \frac{2k}{\sqrt{\frac{P}{EI}}},$$

где f — стрела прогиба балки. Схема построения бифуркационной диаграммы (рис. 7.10) заключается в следующем: задаются $P \geq P_*$, из уравнения (7.12) находится k , а далее определяется максимальное отклонение сечений стержня

$$\frac{f}{l} = 2k \left(\sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \right)^{-1}.$$

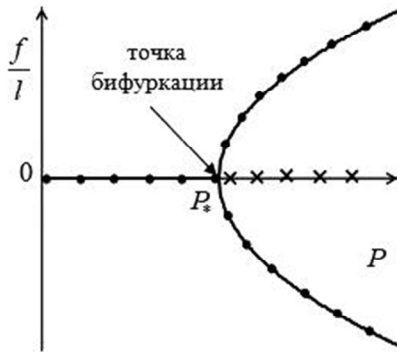


Рис. 7.10. Бифуркационная диаграмма для сжатого стержня

Если стержень имеет начальную кривизну в ненагруженном состоянии со стрелой прогиба f_0 (рис. 7.11,а), то при нагружении продольной силой (рис. 7.11,б) бифуркационная диаграмма будет выглядеть так, как на рис. 7.12.

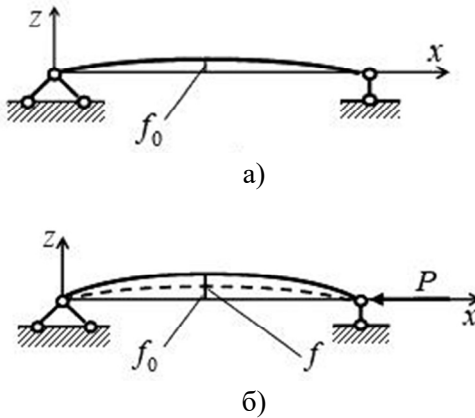


Рис. 7.11. Стержень с начальной кривизной (а) после нагружения (б)

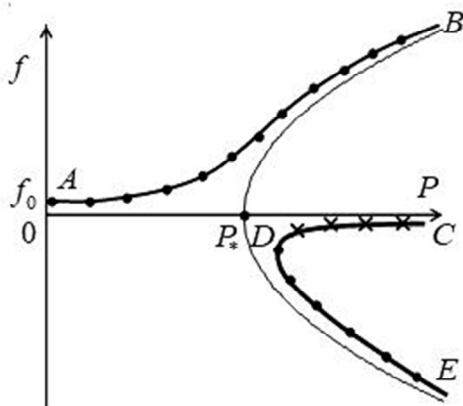


Рис. 7.12. Зависимость прогиба от величины сжимающей силы

Диаграмма имеет ветвь AB – формы устойчивого равновесия, соответствующие прогибу в сторону начального прогиба. При некоторых дополнительных возмущениях могут быть реализованы формы устойчивого равновесия – ветвь DE – формы устойчивого равновесия, соответствующие прогибу в сторону, противоположную начальному прогибу. Ветвь DC – формы неустойчивого равновесия. Точка D – предельная точка для ветви CDE . Примерный вид поверхности полной энергии $\mathcal{E}(P, f)$ представлен на рис. 7.13.

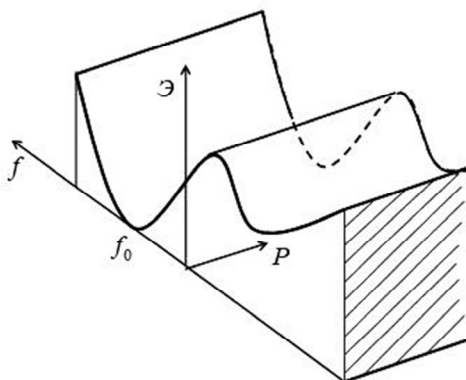


Рис. 7.13. Полная энергия сжатого стержня с начальной кривизной

7.4. Устойчивость пологой арки

Точное решение задачи об устойчивости пологой арки (рис. 7.14,а) дает зависимость $f(P)$, качественная картина которой представлена на рис. 7.14,б. Характерной особенностью этой задачи является наличие устойчивых и неустойчивых состояний, разделенных предельными точками, а также скачкообразные переходы из одних состояний равновесия в другие.

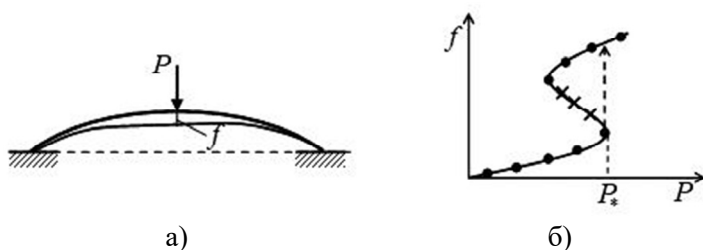


Рис. 7.14. Пологая арка (а) и зависимость прогиба от нагрузки (б)

Для простоты рассмотрим «модель» арки, представляющей собой два стержня одинаковой длины, шарнирно соединенных между собой и присоединенных к основанию неподвижными шарнирными опорами (рис. 7.15). Начальный угол наклона стержней ненагруженной системы α_0 . При нагружении системы в шарнире A вертикальной силой P этот угол уменьшается за счет сжатия стержней. При обращении угла α в нуль арка прощелкивается, и стержни, работающие до этого на сжатие, переходят в состояние растяжения.

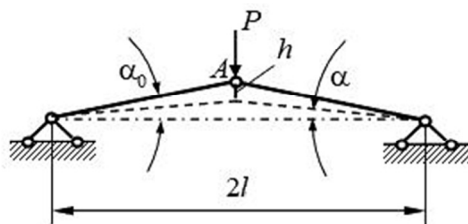


Рис. 7.15. Простейшая модель пологой арки

Пусть угол α_0 , и соответственно α малы, тогда возможна замена

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2.$$

Длина каждого стержня до нагружения определится как

$$\frac{l}{\cos \alpha_0} \approx \frac{l}{1 - \frac{1}{2} \alpha_0^2} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_0^2 \right).$$

После приложения силы длина каждого стержня будет следующей

$$l_1 = \frac{l}{\cos \alpha} \approx \frac{l}{1 - \frac{1}{2} \alpha^2} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right).$$

Укорочение каждого стержня в результате деформирования равно

$$\Delta l = \frac{l}{\cos \alpha_0} - \frac{l}{\cos \alpha} \approx l \frac{1}{2} (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Снижение точки приложения силы P составит

$$h \approx l(\alpha_0 - \alpha).$$

Относительная деформация ε и продольная сила N в стержнях соответственно равны

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \approx \frac{1}{2} (\alpha_0^2 - \alpha^2), \quad N = EF\varepsilon.$$

Полная энергия системы, включающая потенциальную энергию деформирования стержней и работу силы P , взятую с обратным знаком, запишется следующим образом

$$\mathcal{E} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{N^2 l_1}{EF} - Ph = EF\varepsilon^2 l_1 - Pl(\alpha_0 - \alpha).$$

Или, окончательно,

$$\mathcal{E} = EF \frac{1}{4} (\alpha_0^2 - \alpha^2)^2 l - Pl(\alpha_0 - \alpha).$$

Из условия стационарности полной энергии $\delta\mathcal{E} = 0$ получим уравнение для определения положений равновесия

$$L(\alpha, P) = P - EF\alpha(\alpha_0^2 - \alpha^2) = 0. \quad (7.13)$$

Введем безразмерный параметр нагрузки $\beta = \frac{P}{EF}$. Тогда из уравнения (7.13) получим $\beta = \alpha(\alpha_0^2 - \alpha^2)$. Эта зависимость, изображенная на рис. 7.16, определяет возможные положения равновесия. Координаты предельных точек, разделяющих кривую $\beta(\alpha)$ на устойчивые и неустойчивые ветви, определим из условия

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \alpha_0^2 - 3\alpha^2 = 0, \quad \alpha_* = \pm \frac{\alpha_0}{\sqrt{3}},$$

а критическим значениям нагрузки с учетом симметрии системы относительно горизонтальной оси будет соответствовать формула

$$\beta_* = \pm \alpha_* (\alpha_0^2 - \alpha_*^2).$$

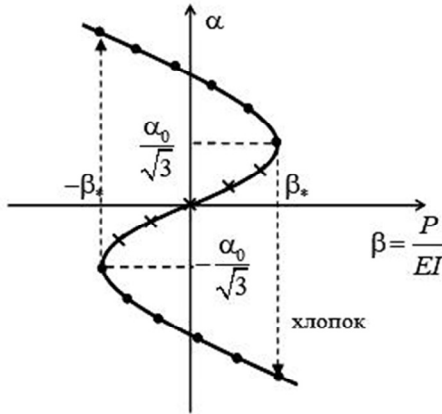


Рис. 7.16. Диаграмма устойчивости арки

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основное содержание теории бифуркаций Пуанкаре и на какой основной теореме теории устойчивости механических систем она основана?

2. Какие особые точки возможны на бифуркационной диаграмме, построенной на плоскости «нагрузка – положения равновесия» для системы с одной степенью свободы, и какими особенностями они могут обладать?

3. Почему для описания послекритических деформаций необходимо привлекать нелинейные уравнения?

4. Какая связь между кривой обобщенная координата – нагрузка и поверхностью, определяющей полную энергию системы, как функции этих переменных?

8. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

8.1. Продольный изгиб сжатых стержней

В этой главе мы продолжим рассматривать задачи на устойчивость стержневых систем, предполагая, что нагрузки потенциальные. Простейшей классической задачей является задача о сжатии шарнирно опертого стержня. Такая система, как и ряд других, была предметом исследований Эйлера, который и считается основателем практических расчетов на устойчивость сжатых стержней.

Рассмотрим шарнирно закрепленный по концам прямолинейный стержень длиной l , жесткостью EI , находящийся под действием сжимающей силы P (рис. 8.1).

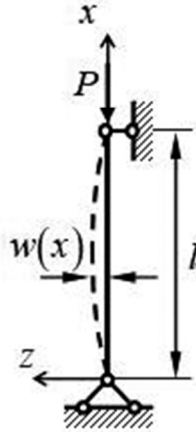


Рис. 8.1. Сжатие шарнирно опертого стержня

Уравнение статического метода или, что то же, уравнение нейтрального равновесия, можно получить из общих уравнений главы 1 с учетом всех предпосылок, которые принимаются при переходе стержня в смежное состояние, т.е. при изгибе, или, проще говоря, на основании рассмотрения уравнений равновесия в перемещениях:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) необходимо дополнить граничными условиями

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \text{при } x = 0, l. \quad (8.2)$$

Введем безразмерные параметры

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

с помощью которых уравнение (8.1) и граничные условия (8.2) перепишутся следующим образом:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \text{при } \xi = 0, 1. \quad (8.3)$$

Решение однородного уравнения (8.3) содержит четыре постоянных интегрирования $C_1 \div C_4$

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4.$$

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{aligned} w(0) = 0 &\rightarrow C_2 + C_4 = 0, \\ w''(0) = 0 &\rightarrow -\beta^2 C_2 = 0 \rightarrow C_2 = C_4 = 0, \\ w(1) = 0 &\rightarrow C_1 \sin \beta + C_3 = 0, \\ w''(1) = 0 &\rightarrow -\beta^2 C_1 \sin \beta = 0 \rightarrow C_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, три константы безусловно равны нулю $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Чтобы смежное (изогнутое) состояние равновесия существовало, т.е. было отлично от нуля, нужно коэффициент при C_1 положить отличным от нуля.

Итак, имеем $\sin \beta = 0$. Значит $\beta_{*k} = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, а сжимающая сила

$$P_{*k} = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мы получили не что иное, как собственные числа однородной краевой задачи (8.1), (8.2). Минимальное значение ($k = 1$) определяет критическую (эйлерову) силу

$$P_* = P_{*1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (8.4)$$

При этом для P_{*k} имеем собственные функции $\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$.

Для $k = 1$ форма потери устойчивости $\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

В формуле Эйлера для критической силы сжатых стержней условия закрепления стержня вводят с помощью коэффициента μ (коэффициент приведения длины)

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (8.5)$$

Значения коэффициентов μ для стержней с различными условиями закрепления вместе с соответствующими характеристическими уравнениями и их наименьшими корнями приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

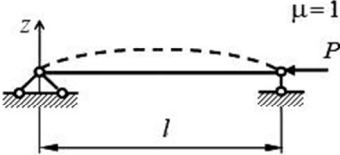
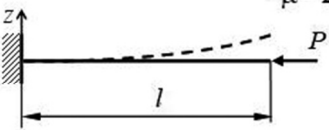
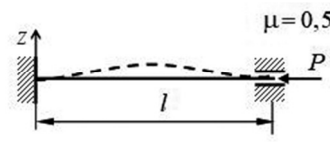
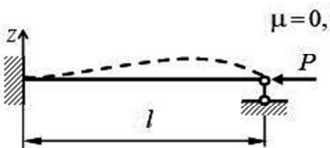
Схема	Характеристическое уравнение	Наименьший корень $P_{кр*} \equiv P$
 <p style="text-align: right;">$\mu = 1$</p>	$\sin \beta = 0$	$\beta_* = \pi$ $P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
 <p style="text-align: right;">$\mu = 2$</p>	$\cos \beta = 0$	$\beta_* = \frac{\pi}{2}$ $P_* = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$

Схема	Характеристическое уравнение	Наименьший корень $P_{кр*} \equiv P$
	$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= 0 \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \frac{\beta}{2} \end{aligned} \right\}$	$\beta_* = 2\pi$ $P_* = \frac{\pi^2 EI}{(0,5l)^2}$
	$\operatorname{tg} \beta = \beta$	$\beta_* = 4,49$ $P_* = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}$

8.2. Способы определения критической силы

Рассмотрим различные варианты определения критического значения сжимающей силы для схемы, представленной на рис. 8.2.



Рис. 8.2. Расчетная схема

Допустим, что известна форма потери устойчивости, удовлетворяющая всем условиям закрепления стержня

$$\varphi(x) = \frac{f}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right]. \quad (8.6)$$

График этой функции представлен на рис. 8.3.

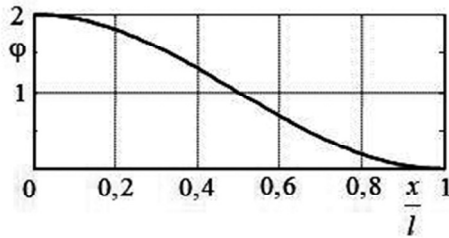


Рис. 8.3. Форма потери устойчивости

Поскольку форма потери устойчивости есть решение уравнения нейтрального равновесия (8.1), то подстановка (8.6) в это уравнение дает

$$\frac{f}{2} \frac{\pi^4}{l^4} EI \cos \frac{\pi x}{l} - P \frac{f}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \cos \frac{\pi x}{l} = 0 \Rightarrow P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Теперь проведем непосредственное интегрирование уравнения нейтрального равновесия

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Запишем решение и необходимые для удовлетворения граничных условий производные

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4,$$

$$\frac{dw}{d\xi} = \beta C_1 \cos \beta \xi - \beta C_2 \sin \beta \xi + C_3,$$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = -\beta^2 C_1 \sin \beta \xi - \beta^2 C_2 \cos \beta \xi,$$

$$\frac{d^3 w}{d\xi^3} = -\beta^3 C_1 \cos \beta \xi + \beta^3 C_2 \sin \beta \xi.$$

Граничные условия для схемы на рис. 8.2 следующие

$$\xi = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0 \quad \xi = 1, \quad w = \frac{dw}{d\xi} = 0.$$

Удовлетворяя этим граничным условиям, получим

$$\begin{aligned} \beta C_1 + C_3 &= 0, \\ -\beta^3 C_1 &= 0 \Rightarrow C_3 = 0, \\ C_2 \cos \beta + C_4 &= 0, \\ \beta C_2 \sin \beta &= 0 \Rightarrow \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = \pi. \end{aligned}$$

Соответственно критическое значение сжимающей силы равно

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Как отмечалось в главе 6, если в качестве функции $\varphi(x)$ взята истинная форма потери устойчивости, формула Релея дает точное значение критической силы

$$P_* = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx}.$$

Найдем необходимые производные

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right], \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f}{2} \frac{\pi}{l} \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right), \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= -\frac{f}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

и вычислим интегралы

$$P_* = \frac{\frac{1}{2} \frac{f^2}{4} EI \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \left(-\cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \frac{f^2}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(-\sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx} = \frac{\pi^2 EI \int_0^\pi \cos^2 y dy}{l^2 \int_0^\pi \sin^2 y dy} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{2}.$$

То есть опять приходим к точному значению силы Эйлера

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Теперь аппроксимируем форму потери устойчивости функцией, удовлетворяющей кинематическим граничным условиям

$$\varphi(x) = \frac{f}{4} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \quad \frac{d\varphi}{dx} = f \frac{x}{l^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = f \frac{1}{l^2} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Для удобства перейдем к безразмерной переменной

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{f}{l} \xi(1 - \xi^2) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{f}{l^2}(1 - 3\xi^2).$$

Вычислим интегралы

$$P_* = \frac{\frac{1}{2} EI \frac{f^2}{l^4} \int_0^1 (1 - 3\xi^2)^2 d\xi}{\frac{1}{2} \frac{f^2}{l^2} \int_0^1 \xi^2 (1 - \xi^2)^2 d\xi} = \frac{EI \int_0^1 (1 - 6\xi^2 + 9\xi^4) d\xi}{l^2 \int_0^1 (\xi^2 - 2\xi^4 + \xi^6) d\xi}$$

и получим оценку сверху для критической силы

$$P_* = \frac{EI}{l^2} \frac{\left(\xi - 2\xi^3 + \frac{9}{5}\xi^5\right)\Big|_0^1}{\left(\frac{1}{3}\xi^3 - \frac{2}{5}\xi^5 + \frac{1}{7}\xi^7\right)\Big|_0^1} = \frac{\left(1 - 2 + \frac{9}{5}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)} = \frac{21}{2} \frac{EI}{l^2} = 10,5 \frac{EI}{l^2} > \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Теперь рассмотрим несколько более сложную задачу (рис. 8.4). Концы стержня неподвижно закреплены. Вследствие этого в опорах будут возникать реакции, равные $\frac{P}{2}$ от силы P , приложенной в середине стержня. Горизонтальная реакция в верхней опоре

равна $Q = P \frac{f}{l}$, где f – поперечное перемещение среднего сечения (точки приложения силы P). Уравнения на двух участках интегрирования будут следующими

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{P}{2} w_1 - P \frac{f}{l} x, \quad (8.7)$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad EI \frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{P}{2} w_2 - P \frac{f}{l} x + P(f - w_2). \quad (8.8)$$

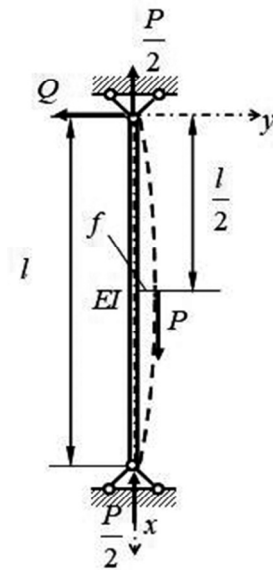


Рис. 8.4. Стержень с неподвижными опорами

Введем безразмерные параметры $\beta^2 = \frac{P}{2EI}$, $\xi = \frac{x}{l}$. Тогда уравнения (8.7), (8.8) переписутся как

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad w \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} - \beta^2 w_1 = -2\beta^2 f \xi,$$

$$\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \quad \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} + \beta^2 w_2 = -2\beta^2 f \xi + 2\beta^2 f.$$

Решение этих уравнений будут следующими:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad w_1 = C_1 \operatorname{sh} \beta \xi + C_2 \operatorname{ch} \beta \xi + 2f\xi,$$

$$\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \quad w_2 = C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi - 2f\xi + 2f.$$

Сформулируем граничные условия и условия стыковки решений

$$\xi = 0, \quad w_1 = 0,$$

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad w_1 = w_2 = f, \quad \frac{dw_1}{d\xi} = \frac{dw_2}{d\xi},$$

$$\xi = 1, \quad w_2 = 0.$$

Удовлетворяя первому условию, получим $C_2 = 0$, следовательно

$$w_1 = C_1 \operatorname{sh} \beta x + 2f\xi.$$

Из второго условия получим $C_1 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} + f = f$, откуда следует $C_1 = 0$. Таким образом, верхняя часть стержня – это прямая линия. Оставшиеся условия дают систему линейных уравнений относительно C_3, C_4, f

$$C_3 \sin \frac{\beta}{2} + C_4 \cos \frac{\beta}{2} + f = f,$$

$$\beta C_3 \cos \frac{\beta}{2} - \beta C_4 \sin \frac{\beta}{2} - 2f = 2f,$$

$$C_3 \sin \beta + C_4 \cos \beta = 0.$$

Условие нетривиальности решения этой системы, а именно равенство нулю определителя этой однородной системы, дает уравнение относительно параметра α , определяющего критические значения силы P

$$D = \begin{vmatrix} \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} & 0 \\ \beta \cos \frac{\beta}{2} & -\beta \sin \frac{\beta}{2} & -4 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9)$$

Решение этого уравнения, графическая иллюстрация которого приведена на рис. 8.5, дает критическую величину силы P_*

$$\frac{\beta}{\pi} = 2, \quad \frac{\beta^2}{\pi^2} = 4, \quad \beta^2 = 4\pi^2 = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad P_* = \frac{8\pi^2 EI}{l^2}.$$

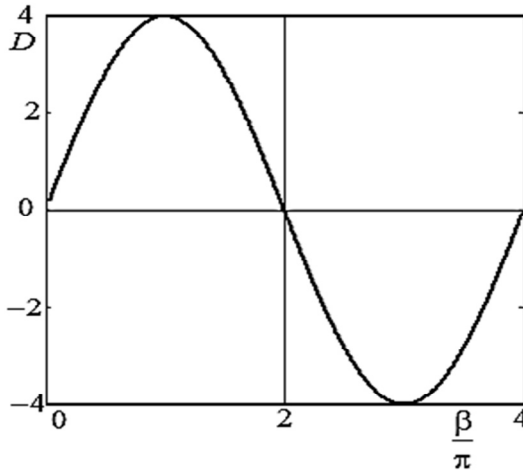


Рис. 8.5. Графическая иллюстрация решения уравнения (8.9)

8.3. Устойчивость стержней на упругом основании

В практике расчетов стержней на устойчивость особый интерес представляют задачи исследования устойчивости конструкций на упругом основании. Рассмотрим стержень жесткостью EI длиной l на упругом основании с линейной жесткостью c . Стержень шарнирно оперт и находится под действием сжимающей силы P (рис. 8.6).

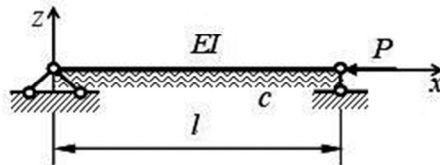


Рис. 8.6. Стержень на упругом основании

Считаем, что минимальная жесткость поперечного сечения стержня совпадает с плоскостью упругого основания. Требуется определить критическую силу P_* .

Реакция основания при поперечных перемещениях сечений стержня равна $q = -cw$. Тогда уравнение нейтрального равновесия в этом случае можно записать следующим образом:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + cw = 0. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) дополним граничными условиями

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \text{при } x = 0; l.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем безразмерные параметры

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad k^4 = \frac{cl^4}{EI}.$$

Тогда уравнение нейтрального равновесия (8.10) переписывается как

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + k^4 w = 0. \quad (8.11)$$

Подставим решение этого линейного уравнения в виде $w(\xi) = C \exp(\lambda \xi)$ и получим биквадратное уравнение для характеристических показателей λ

$$\lambda^4 + \beta^2 \lambda^2 + k^4 = 0. \quad (8.12)$$

Очевидно, что решение этого уравнения приводит к отрицательному квадрату характеристических показателей

$$\lambda^2 = -\frac{\beta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^4}{4} - k^4} < 0.$$

Значит, характеристические показатели будут чисто мнимыми числами и их можно записать следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \pm im_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm im_2,$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} - k^4}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} - \sqrt{\frac{\beta^4}{4} - k^4}}.$$

Решение уравнения (8.11) имеет вид

$$w(\xi) = C_1 \sin m_1 \xi + C_2 \cos m_1 \xi + C_3 \sin m_2 \xi + C_4 \cos m_2 \xi.$$

Подставим решение в граничные условия. При $\xi = 0$ имеем

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, \\ -m_1^2 C_2 - m_2^2 C_4 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $m_1 \neq m_2$, то $C_2 = C_4 = 0$. При $\xi = 1$

$$\begin{cases} C_1 \sin m_1 + C_3 \sin m_2 = 0, \\ -m_1^2 C_1 \sin m_1 - m_2^2 C_3 \sin m_2 = 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

Условие существования смежного положения равновесия в данном случае состоит в равенстве нулю определителя системы (8.13)

$$(m_1^2 - m_2^2) \sin m_1 \sin m_2 = 0.$$

Отсюда следует ряд соотношений

$$\sin m_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad m_\alpha = n\pi, \quad \lambda = \pm in\pi.$$

Подставим в характеристическое уравнение (8.12)

$$n^4 \pi^4 - \beta^2 n^2 \pi^2 + k^4 = 0.$$

Учтем, что $\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}$ и обозначим $\tilde{k} = \frac{k^4}{\pi^4}$ и $P_3 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, тогда

$$n^4 - \frac{P}{P_3} n^2 + \tilde{k} = 0$$

или

$$\frac{P}{P_3} = n^2 + \frac{\tilde{k}}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.14)$$

На рисунке 8.7 представлена кусочно-линейная зависимость критического значения сжимающей силы, отнесенной к P_3 , от относительной жесткости упругого основания \tilde{k} . Число n определяет число полуволн в форме потери устойчивости. Аналитические зависимости для разных участков следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } n=1 & - \frac{P}{P_3} = 1 + \tilde{k}; \quad \text{при } n=2 & - \frac{P}{P_3} = 4 + \frac{\tilde{k}}{4}; \quad n=2 & - \\ & - \frac{P}{P_3} = 9 + \frac{\tilde{k}}{9} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

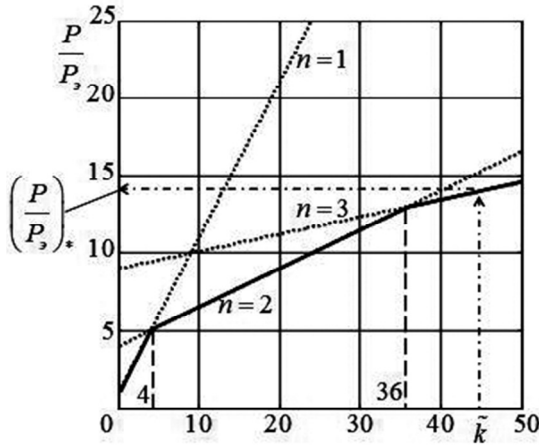


Рис. 8.7. Зависимость критической силы от жесткости основания

На рисунке 8.7 выбранному значению параметра жесткости \tilde{k} соответствует вертикальная линия. Критическому значению сжимающей силы соответствует первое пересечение с вертикальной прямой, соответствующей определенному значению числа полуволн в форме потери устойчивости. Другой способ определения состоит в следующем. Обозначим через $y = n^2$, тогда

$$\frac{P}{P_3} = y + \frac{\tilde{k}}{y}. \text{ Возьмем производную и приравняем ее нулю}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{P_3} \right) = 1 - \frac{\tilde{k}}{y^2} = 0.$$

Величина параметра y , сообщающая отношению $\frac{P}{P_3}$ ми-

нимум, будет следующей: $y_* = n_*^2 = \sqrt{\tilde{k}}$ или $n_* = \sqrt[4]{\tilde{k}} = \frac{k}{\pi}$, тогда

$$\left(\frac{P}{P_3} \right)_* = n_*^2 + \frac{\tilde{k}}{n_*^2}.$$

Особенность форм потери устойчивости стержней на упругом основании заключается в том, что число полуволн для шарнирно опертого стержня далеко не обязательно равно единице, и это число возрастает при увеличении жесткости основания.

Для случая бесконечно длинной балки $l \rightarrow \infty$ (рис. 8.8) запишем выражение для сжимающей силы (8.14) в виде

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} + \frac{1}{\pi^4} \frac{cl^4}{EI} \frac{1}{n^2} \frac{\pi^2 EI}{l^2} = EI \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{c}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2}}$$

и введем параметр волнообразования $y = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, тогда

$$P = EIy + \frac{c}{y}.$$



Рис. 8.8. Стержень бесконечной длины

Найдем минимальное значение сжимающей силы P . Возьмем производную и определим минимизирующее значение параметра y :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = EI - \frac{c}{y^2} = 0, \quad y_* = \sqrt{\frac{c}{EI}}.$$

Итак, критическое значение силы P_* будет равно

$$P_* = EI \sqrt{\frac{c}{EI}} + \frac{c}{\sqrt{\frac{c}{EI}}} = \sqrt{cEI} + \sqrt{cEI} = 2\sqrt{cEI}.$$

8.4. Смена формы потери устойчивости

Для шарнирно опертого стержня с дополнительной упругой опорой жесткостью c , установленной в середине стержня (рис. 8.9), требуется построить зависимость критической силы P от жесткости упругого элемента.

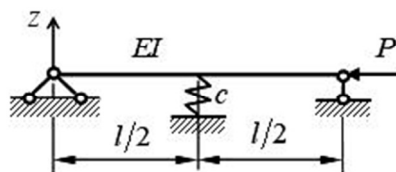


Рис. 8.9. Стержень с дополнительной упругой опорой

Пусть форма потери устойчивости – симметричная. На рисунке 8.10 изображена левая половина стержня.

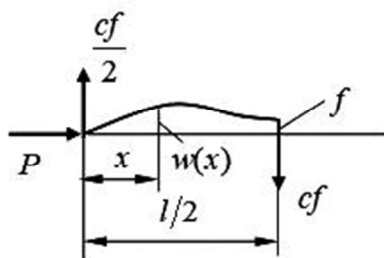


Рис. 8.10. К постановке граничных условий

Для решения задачи используем уравнение нейтрального равновесия второго порядка, по существу, это есть выражение для изгибающего момента в произвольном сечении стержня с координатой x . Начало координат поместим в крайнем левом сечении. При отклонении среднего сечения стержня на величину f со стороны упругой опоры на стержень будет действовать сила, равная cf .

В силу симметрии задачи в опорах стержня возникнут реакции $cf/2$. Тогда для изгибающего момента можно записать

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -Pw + \frac{cf}{2} x$$

или

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = \frac{cf}{2} x. \quad (8.15)$$

Это уравнение надо дополнить граничными условиями:

1) равенство нулю поперечного перемещения при $x=0$;
т.е. $w(0) = 0$;

2) равенство нулю угла поворота при $x=l/2$ в силу симметрии формы потери устойчивости, т.е. $\frac{dw}{dx}\left(\frac{l}{2}\right) = 0$;

Кроме того, поскольку мы обозначили через f неизвестное перемещение среднего сечения стержня $w\left(\frac{l}{2}\right) \equiv f$, то дополнительным условием будет условие равенства полученного решения уравнения (8.15) для $w(x)$ при $x=l/2$ прогибу f , т.е. третье условие будет следующим: $w\left(\frac{l}{2}\right) = f$.

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{cl^3}{2EI}.$$

Здесь ξ — безразмерная координата сечений стержня, β^2 — безразмерное сжимающее усилие, параметр γ — характери-

зует жесткость упругой опоры по отношению к жесткости стержня. Уравнение (8.15) в безразмерных координатах примет вид

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta^2 w = \gamma f \xi.$$

Интегрирование этого неоднородного уравнения дает

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + \frac{\gamma f}{\beta^2} \xi.$$

Из первого условия следует $C_2 = 0$. Остальные два условия дают однородную систему относительно неизвестных C_1 и f

$$\begin{aligned} C_1 \beta \cos \frac{\beta}{2} + f \frac{\gamma}{\beta^2} &= 0, \\ C_1 \sin \frac{\beta}{2} + f \left(\frac{\gamma}{2\beta^2} - 1 \right) &= 0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Из условия существования формы потери устойчивости, а другими словами условия нетривиальности решения уравнения (8.16) получаем трансцендентное уравнение, корни которого при фиксированном γ дают значение β_* , а по нему найдем и критическое значение сжимающей силы P_*

$$\begin{vmatrix} \beta \cos \frac{\beta}{2} & \frac{\gamma}{\beta^2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \frac{\gamma}{2\beta^2} - 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.17}$$

При $\gamma = 0$ (дополнительная опора отсутствует) из первого уравнения системы (8.16) получим $\cos \frac{\beta}{2} = 0$, а из второго уравнения $\sin \frac{\beta}{2} = 1$. Отсюда следует, что $\beta = \pi$. Следовательно критическая сила в этом случае $P_* = P_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Другой крайний случай – при $\gamma \rightarrow \infty$. Оставляя в силе условие равенства нулю угла поворота поперечного сечения при $x = l/2$, в пределе мы получаем случай, представленный на рис. 8.11.

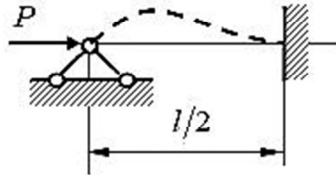


Рис. 8.11. Возможный вариант потери устойчивости

Очевидно, что такой вариант возможен только при условии дополнительных мероприятий, создающих момент на промежуточной опоре, реализующий указанное выше граничное условие. С ростом γ критическая сила монотонно увеличивается и стремится к пределу, равному (см. табл. 8.1)

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{(0,7 \cdot l/2)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{0,7^2} = 8,16 P_3.$$

Для исходной системы исследованная выше форма потери устойчивости реализуется до определенного значения параметра жесткости γ_k . Для $\gamma > \gamma_k$ реализуется антисимметричная форма потери устойчивости (рис. 8.12), при которой среднее сечение стержня не получает поперечных перемещений и, следовательно, критическая сила не зависит от жесткости промежуточной опоры и равна

$$P_* = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 4P_3.$$

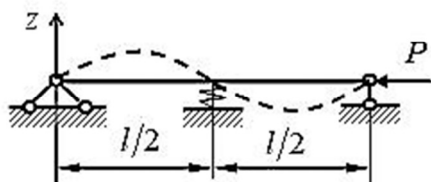


Рис. 8.12. Форма потери устойчивости при большой жесткости промежуточной опоры

Таким образом, полная зависимость критической силы для данной системы от жесткости промежуточной опоры состоит из двух участков, представленных на рис. 8.13 сплошной линией. Участок AB соответствует корням уравнения (8.17). После конечного значения параметра $\gamma_k = 79$ критическая сила постоянна и соответствует потере устойчивости по типу рис. 8.12. Штриховой линией отмечены нереализуемые состояния системы.

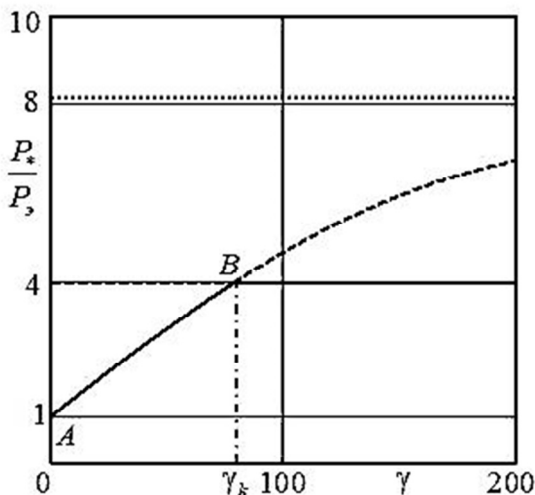


Рис. 8.13. Зависимость критической силы от жесткости опоры

Контрольные вопросы и упражнения

1. Стержневая система ABC с защемленным левым концом и шарнирно опертым левым концом состоит из двух участков AB и BC , соединенных между собой шарниром B (рис. 8.14). Система нагружена сжимающей силой P . Из условия равноустойчивости участков AB и BC требуется определить длину a участка AB .

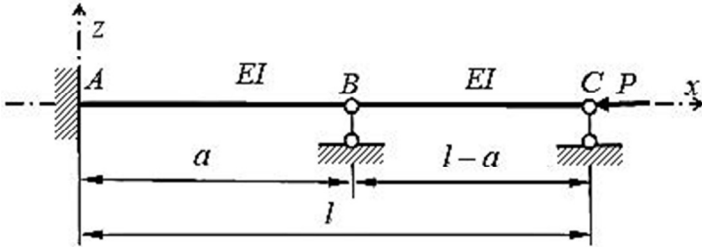


Рис. 8.14. Стержень с промежуточным шарниром

2. Как изменится решение предыдущей задачи, если шарнир B будет не врезанный (рис. 8.15)?

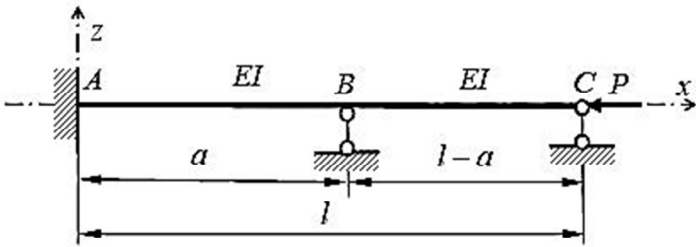


Рис. 8.15. Стержень с тремя опорами

3. Как изменится коэффициент запаса по устойчивости, если в стержневой системе, состоящей из трех стержней и нагруженной в верхнем узле силой величиной $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (рис. 8.16), убрать вертикальный стержень? Все стержни имеют одинаковую жесткость на растяжение–сжатие EF и одинаковую минимальную жесткость в плоскости чертежа EI .

Указание. Коэффициент запаса по устойчивости равен отношению критической нагрузки к действующей на стержень сжимающей силе.

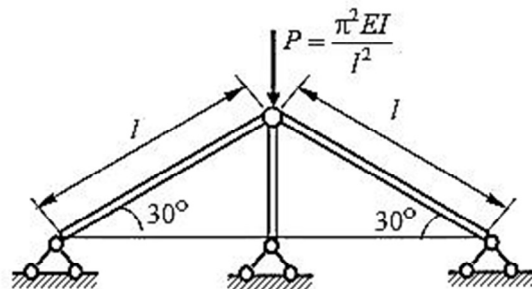


Рис. 8.16. Трехзвенная стержневая система под нагрузкой

4. Как изменяется форма потери устойчивости стержня, связанного с упругим основанием, с ростом жесткости этого основания?

9. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН ПРИ СЖАТИИ

9.1. Постановка задачи

Перейдем к рассмотрению устойчивости двумерных систем. В данной главе рассматривается устойчивость плоской формы равновесия прямоугольных и круговых пластин при сжатии. Сжимающую нагрузку, как принято в теории пластин и оболочек, будем считать распределенной по линиям контуров и действующей в срединной плоскости пластин. Отклонения от невозмущенного плоского состояния пластины обозначим через $w(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 оси декартовой системы координат; ось z направлена перпендикулярно к срединной плоскости (рис. 9.1).

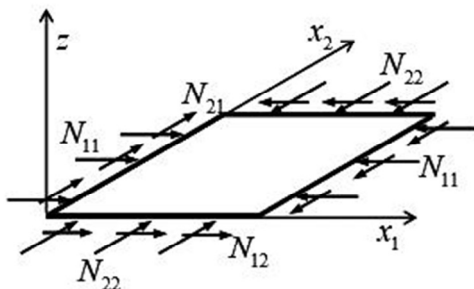


Рис. 9.1. Прямоугольная пластина при сжимающей и сдвиговой нагрузке

Для прямоугольной пластины совместим ее стороны с осями x_1, x_2 . К пластине приложена потенциальная нагрузка, представленная сжимающими нормальными к сторонам пластины силами в направлении x_1 интенсивностью N_{11} и в направлении x_2 интенсивность N_{22} . Кроме того, по контуру действуют сдвигающие усилия N_{12} и N_{21} . Учитывая потенциальный характер нагрузок, а также принимая соотношения линейной теории изгиба пластин, уравнение статического метода исследования устойчивости – уравнение нейтрального равновесия запишем в виде

$$D\Delta\Delta w + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0. \quad (9.1)$$

К уравнению (9.1) необходимо добавить граничные условия на кромках $x_\alpha = 0, a_\alpha; (\alpha = 1, 2)$. Правило знаков для усилий $N_{11} > 0, N_{22} > 0$ при сжатии, $N_{\alpha\beta} (\alpha \neq \beta)$ на площадках с положительной нормалью β положительна (>0), если она совпадает с отрицательным направлением оси x_α .

9.2. Устойчивость прямоугольных пластин при сжатии в одном направлении

Рассмотрим устойчивость прямоугольных пластин, сжатых в направлении оси Ox_1 . Тогда для усилий в срединной плоскости имеем

$$N_{22} = N_{12} = 0, \quad N_{11} \neq 0, \quad N_{11} \equiv N.$$

Пусть пластина шарнирно оперта по всему контуру (рис. 9.2)

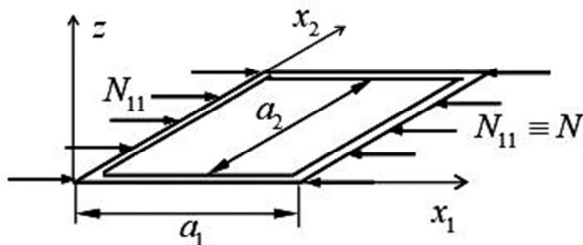


Рис. 9.2. Пластина при сжатии в одном направлении

Тогда уравнение нейтрального равновесия будет иметь вид

$$D\Delta\Delta w + N \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad (9.2)$$

с граничными условиями

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = 0 \quad \text{при } x_\alpha = 0, a_\alpha; (\alpha = 1, 2). \quad (9.3)$$

Уравнение (9.2) и граничные условия (9.3) можно удовлетворить, если положить

$$w(x_1, x_2) = f \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi x_2}{a_2},$$

где m_1, m_2 — числа полуволн в направлении осей x_1, x_2 . После подстановки в уравнение и учета, что $f \neq 0$, получим

$$D \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{a_1^2} + \frac{m_2^2 \pi^2}{a_2^2} \right)^2 - N \frac{m_1^2 \pi^2}{a_1^2} = 0.$$

Отсюда имеем

$$N_{m_1 m_2} = \frac{D a_1^2}{m_1^2 \pi^2} \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{a_1^2} + \frac{m_2^2 \pi^2}{a_2^2} \right)^2. \quad (9.4)$$

Критическим усилием будет наименьшее значение из $N_{m_1 m_2}$. Очевидно, что с увеличением m_2 величина $N_{m_1 m_2}$ растет. Поэтому надо положить $m_2 = 1$. Перепишем выражение (9.4) в виде

$$N_{m_1} = \frac{\pi^2 D}{a_1^2} \left[m_1 + \frac{1}{m_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \right]^2. \quad (9.5)$$

Если $a_1 / a_2 \ll 1$, т.е. $a_2 \gg a_1$ минимум N_{m_1} будет при $m_1 = 1$ (в пределе получаем по существу стержень). Преобразуем теперь формулу (9.4) к следующему виду

$$N_{m_1} = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left[m_1 \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{m_1} \frac{a_1}{a_2} \right]^2 = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} K(m_1, \alpha),$$

где $\alpha = a_1 / a_2$, $K(m_1, \alpha) = \left[\frac{m_1}{\alpha} + \frac{\alpha}{m_1} \right]^2$.

Фиксируем m_1 и найдем $\min K$ по параметру α

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = 0, \quad -\frac{m_1}{\alpha^2} + \frac{1}{m_1} = 0, \quad \alpha_* = m_1.$$

Итак, минимальное значение функции $K(m_1, \alpha)$

$$K(m_1, \alpha_*) = 4.$$

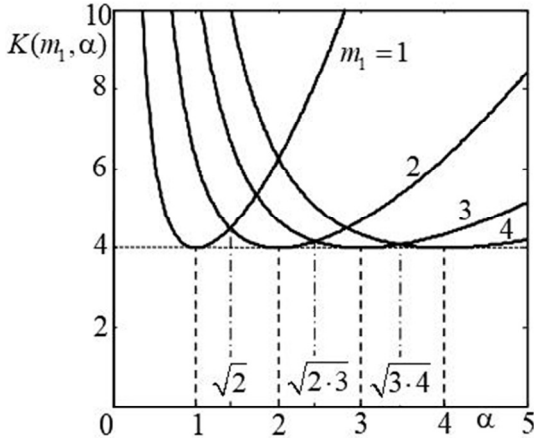


Рис. 9.3. Зависимость функции $K(m_1, \alpha)$ от соотношения сторон пластины

В зависимости от отношения сторон $\alpha = a_1 / a_2$ получаем различное число полуволн в направлении сжатия в форме потери устойчивости.

$$\text{Если параметр } \alpha < \sqrt{2}, \quad N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right)^2, \quad m_1 = 1;$$

$$\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{6}, \quad N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \right)^2, \quad m_1 = 2;$$

$$\sqrt{6} < \alpha < \sqrt{12}, \quad N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} \right)^2, \quad m_1 = 3;$$

и т.д.

Формы потери устойчивости в первом и втором случаях представлены на рис. 9.4.

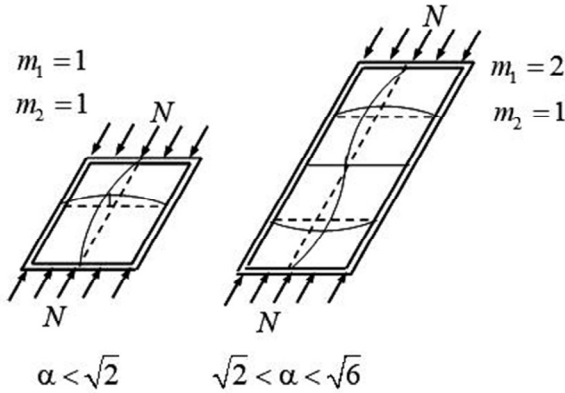


Рис. 9.4. Формы потери устойчивости пластины для случая $m_1 = 1$ и $m_1 = 2$

Таким образом, критическая интенсивность сжимающего усилия определяется по формуле

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} K(m_1, \alpha).$$

Если $a_1 \gg a_2$ ($\alpha \rightarrow \infty$) (рис.9.5), то $K \approx 4$ и для удлиненной в направлении оси Ox_1 имеем формулу для критического усилия

$$N_* = 4 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}.$$

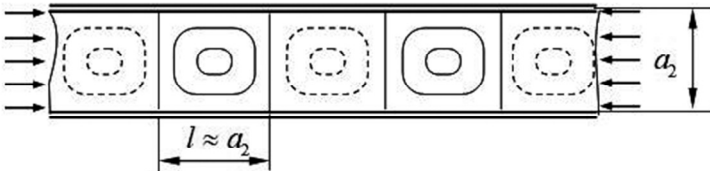


Рис. 9.5. Удлиненная пластина, шарнирно опертая по длинным сторонам

Поскольку $\frac{m_1}{\alpha} \approx 1$, т.е. $m_1 \approx \frac{a_1}{a_2}$, длина полуволны формы

потери устойчивости будет порядка a_2 .

Теперь рассмотрим устойчивость пластины с краевыми условиями Леви. Пусть сжимающая нагрузка действует в направлении оси Ox_1 и приложена к шарнирно опертым кромкам пластины (рис. 9.6). Две другие противоположные кромки защемлены, но точки пластины на этих кромках при деформировании могут перемещаться в срединной плоскости.

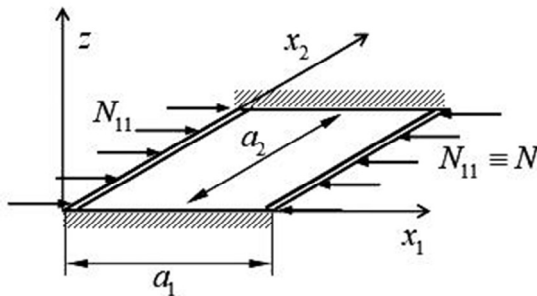


Рис. 9.6. Прямоугольная пластина с краевыми условиями Леви

Уравнение нейтрального равновесия такое же, как и (9.2)

$$D\Delta\Delta w + N \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \quad (9.6)$$

Граничные условия для данного случая будут следующими:

$$w = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1 = 0, a_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \text{ при } x_2 = 0, a_2.$$

Решение уравнения (9.6), удовлетворяющее граничным условиям на шарнирно опертых кромках, будем искать в виде

$$w(x_1, x_2) = W(x_2) \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (9.6) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $W(x_2)$

$$\frac{d^4 W}{dx_2^4} - 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 \frac{d^2 W}{dx_2^2} + \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 - \frac{N}{D} \right] \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 W = 0. \quad (9.7)$$

Решение $W(x_2)$ уравнения (9.7) должно удовлетворять граничным условиям

$$W(0) = W(a_2) = \frac{dW(0)}{dx} = \frac{dW(a_2)}{dx} = 0.$$

Решение $W(x_2)$ ищем в виде $W(x_2) = C \exp(rx_2)$. После подстановки в уравнение (9.7) для характеристических показателей r получим уравнение

$$r^4 - 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 r^2 + \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 - \frac{N}{D} \right] \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 = 0.$$

Его решение

$$r_{1,2}^2 = \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 \pm \sqrt{\frac{N}{D}} \frac{m_1 \pi}{a_1}.$$

С учетом того, что два корня – действительные, а два – чисто мнимые, представим их в виде

$$r_{1,2} = \pm \gamma_1, \quad r_{3,4} = \pm i \gamma_2,$$

где

$$r_1^2 = \gamma_1^2 = \frac{m_1 \pi}{a_1} \left(\sqrt{\frac{N}{D}} + \frac{m_1 \pi}{a_1} \right), \quad r_2^2 = -\gamma_2^2 = -\frac{m_1 \pi}{a_1} \left(\sqrt{\frac{N}{D}} - \frac{m_1 \pi}{a_1} \right).$$

Тогда решение уравнения (9.7) можно записать

$$W(x_2) = C_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + C_2 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + C_3 \cos \gamma_2 x_2 + C_4 \sin \gamma_2 x_2.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим уравнение для отыскания критического усилия. Приводя к форме, аналогичной предыдущему случаю, запишем

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} K(m_1, \alpha).$$

Минимум $K(m_1, \alpha)$ достигается при $\frac{a_1}{a_2} \frac{1}{m_1} = 0,662$ и

$$K(m_1, \alpha) = 6,97.$$

Для удлиненных пластин $a_1 \gg a_2$ $N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} 6,97$.

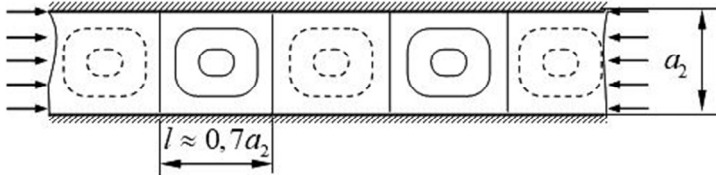


Рис. 9.7. Удлиненная пластина с защемленными кромками

9.3. Устойчивость пластины при сжатии в двух направлениях

Теперь рассмотрим устойчивость шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластины при сжатии в двух направлениях (рис. 9.8).

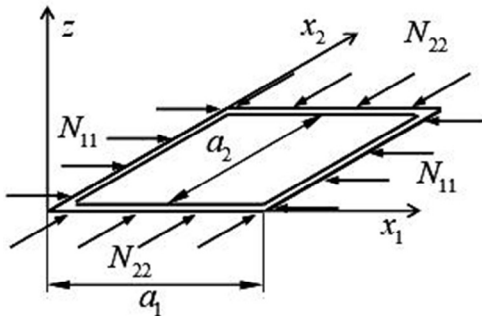


Рис. 9.8. Пластина при сжатии в двух направлениях

Уравнение нейтрального равновесия в этом случае примет следующий вид

$$D\Delta\Delta w + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad (9.8)$$

а граничные условия те же, что и в первом примере этой главы

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, a_\alpha; (\alpha = 1, 2),$$

в силу которых для решения уравнения (9.8) также примем функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$w(x_1, x_2) = f \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi x_2}{a_2}.$$

Подстановка этой функции в уравнение (9.8) дает

$$N_{11} \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 + N_{22} \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 = D \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{a_1^2} + \frac{m_2^2 \pi^2}{a_2^2} \right)^2. \quad (9.9)$$

Введем параметр α , равный соотношению сторон пластины $\alpha = a_1 / a_2$. Тогда соотношение (9.9) переписется как

$$N_{11} \frac{m_1^2}{\alpha^2} + N_{22} m_2^2 = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left(\frac{m_1^2}{\alpha^2} + m_2^2 \right)^2. \quad (9.10)$$

Для построения границы области устойчивости имеем трехмерное пространство N_{11}, N_{22}, α . Пусть $\alpha = 1$ (квадратная пластина). Вместо (9.10) имеем

$$N_{11} m_1^2 + N_{22} m_2^2 = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} (m_1^2 + m_2^2)^2. \quad (9.11)$$

При различных значениях чисел m_1 и m_2 на плоскости N_{11}, N_{22} построим прямые, отрезки которых составят границу области устойчивости.

При $m_1 = 1, m_2 = 1$ – уравнение прямой $N_{11} + N_{22} = 4 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}$,

при $m_1 = 1, m_2 = 2$ – уравнение прямой $N_{11} + 4N_{22} = 25 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}$,

при $m_1 = 2, m_2 = 1$ – уравнение прямой $4N_{11} + N_{22} = 25 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}$.

Прямые с выделенной границей области устойчивости, включающей начало координат, построены на рис. 9.9.

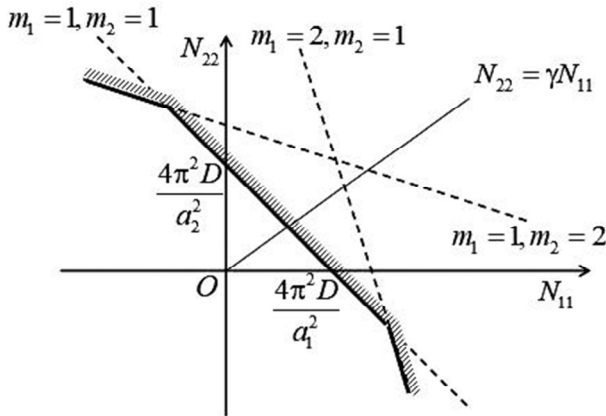


Рис. 9.9. Граница области устойчивости

Как отмечалось в главе 4, важным свойством границы области устойчивости для потенциальных нагрузок является ее выпуклость.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилия изменяются пропорционально, т.е. $N_{22} = \gamma N_{11}$. Тогда из формулы (9.11) следует

$$N_{11} = \frac{\pi^2 D \left(\frac{m_1^2}{a^2} + m_2^2 \right)^2}{a_2^2 \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \gamma m_2^2 \right)}.$$

А при заданном коэффициенте пропорциональности, например $\gamma = 1$, т.е. $N_{11} = N_{22} \equiv N$, минимум этого выражения достигается при $m_1 = 1$, $m_2 = 1$

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right).$$

9.4. Устойчивость прямоугольных пластин при сдвиге

Задача об устойчивости пластин при сдвиге является более сложной. Формы потери устойчивости значительно более сложные и существенно зависят от соотношения сторон.

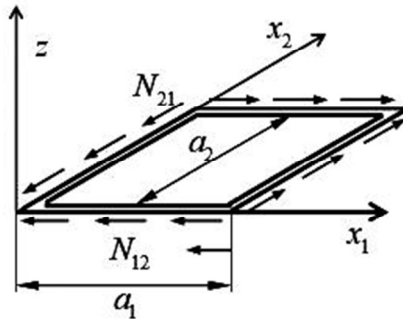


Рис. 9.10. Шарнирно опертая пластина при сдвиге

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по контуру прямоугольную пластину, нагруженную сдвигающими усилиями $N_{12} = N_{21} \equiv N$ (рис. 9.10). Уравнение статического метода или уравнение нейтрального равновесия и соответствующие граничные условия в данном случае имеют вид

$$D\Delta\Delta w + 2N \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2).$$

Для простоты ограничимся случаем удлиненной пластины $a_1 \gg a_2$ (9.11). Как показывают эксперименты, при выпучивании пластины образуются наклонные складки, близкие к прямолинейным. Применим метод Ритца, ограничиваясь одночленным приближением. Форму потерю устойчивости в пределах одной ячейки между складками аппроксимируем функцией

$$w(x_1, x_2) = f \sin \frac{\pi x_2}{a_2} \sin \frac{\pi}{l} (x_1 - \gamma x_2). \quad (9.12)$$

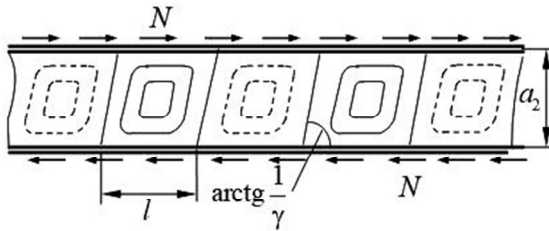


Рис. 9.11. Удлиненная пластина при сдвиге

Согласно методу Ритца

$$\delta[U_0(\varphi) - NW_0(\varphi)] = 0, \quad (9.13)$$

где потенциальная энергия, вычисленная на отклонениях от исследуемого на устойчивость положения равновесия и параметрический функционал определяются по формулам

$$U_0 = \frac{1}{2}(C\varphi, \varphi), \quad W_0 = -\frac{1}{2}(B\varphi, \varphi).$$

Для прямоугольной пластины при сдвиговой нагрузке в прямоугольной системе координат эти скалярные произведения вычисляются по формулам

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint_{\square} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2,$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \iint_{\square} 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2.$$

Используем в качестве функции $\varphi(x_1, x_2)$ выражение (9.12), а в качестве параметра нагрузки β примем интенсивность сдвиговой нагрузки. Вычисления интегралов дают

$$U_0 = D \frac{\pi^4}{8la_2} \left[\left(\frac{l}{a_2} \right)^2 + 6\gamma^2 + 2 + \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 (1 + \gamma^2)^2 \right] f^2, \quad W_0 = \frac{\pi^2 \gamma a_2}{4l} f^2.$$

Таким образом, для нагрузки N получим выражение

$$N = \frac{\pi^2 D}{2\gamma a_2^2} \left[\left(\frac{l}{a_2} \right)^2 + 6\gamma^2 + 2 + \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 (1 + \gamma^2)^2 \right].$$

А теперь учитываем, что N является функцией параметров l и γ , т.е. $N(l, \gamma)$. Смысл этих параметров ясен из рис. 9.11. Значения l , γ и соответствующее критическое значение N_* найдем из условия минимума N по этим параметрам. Из уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial l} = 0$$

найдем $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $l = 1,22a_2$. Угол наклона складок $\approx 35^\circ$, а критическое усилие $N_* = 5,64 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}$. Точное решение этой задачи

(Р.В. Саутвелл, 1924) дает следующие результаты

$$l = 1,25a_2 \quad N_* = 5,34 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}.$$

И, кроме того, складки в форме потери устойчивости – не прямые линии (рис. 9.12).

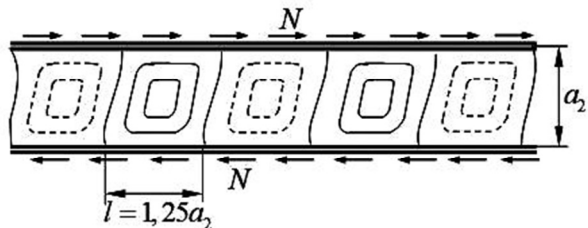


Рис. 9.12. Уточненный вид формы потери устойчивости удлиненной пластины при сдвиге

9.5. Устойчивость круговых и кольцевых пластин

Для круговых и кольцевых пластин в срединной плоскости вводится полярная система координат: полярный радиус r и полярный угол θ (рис. 9.13). Уравнение нейтрально равновесия относительно нормальных перемещений $w(r, \theta)$ в полярной системе координат запишется следующим образом

$$D\Delta\Delta w + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (9.14)$$

Здесь N_r – радиальное усилие в срединной плоскости, N_θ – окружное усилие в срединной плоскости. Оператор Лапласа Δ в полярной системе координат записывается так

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Рассмотрим устойчивость сплошной круговой пластины постоянной толщины, защемленной по контуру при действии осесимметричной сжимающей нагрузки N , приложенной к контуру пластины (рис. 9.13).

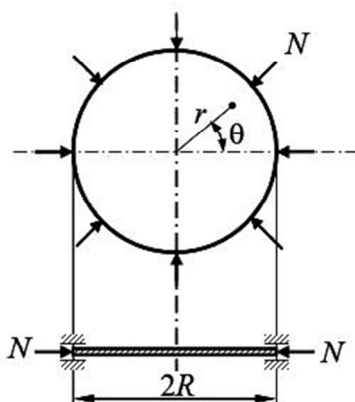


Рис. 9.13. Сжатие круговой пластины

Для сплошной пластины радиальное и окружное усилия равны N

$$N_r = N_\theta = N.$$

Решение уравнения (9.14) будем искать в виде

$$w(r, \theta) = \Phi(r) \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После подстановки этого выражения в уравнение (9.14) относительно функции $\Phi(r)$ получим

$$D\Delta_n\Delta_n\Phi + N\frac{d^2\Phi}{dr^2} + N\left(\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\Phi\right) = 0,$$

где оператор Δ_n будет иметь вид

$$\Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

С учетом этого выражения уравнение для $\Phi(r)$ примет вид

$$D\Delta_n\Delta_n\Phi + N\Delta_n\Phi = 0,$$

или

$$\Delta_n(\Delta_n + \beta^2)\Phi = 0, \quad \beta^2 = \frac{N}{D}, \quad (9.15)$$

Для решения уравнения (9.15) применим метод факторизации. Для этого оператор в левой части уравнения представим как произведение операторов Δ_n и $\Delta_n + \beta^2$, а решение для каждого значения n – в виде суммы

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{(1)}(r) + \Phi_n^{(2)}(r),$$

где $\Phi_n^{(1)}(r)$ – решение уравнения $\Delta_n\Phi_n^{(1)} = 0$, а $\Phi_n^{(2)}(r)$ – решение уравнения $(\Delta_n + \beta^2)\Phi_n^{(2)} = 0$. В случае линейной независимости функций, входящих в $\Phi_n^{(1)}(r)$ и $\Phi_n^{(2)}(r)$, решение $\Phi_n(r)$ будет общим решением уравнения (9.15).

Решение уравнения $\Delta_n\Phi_n^{(1)} = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad \Phi_0^{(1)} = C_3 \ln r + C_4, \\ n \neq 0 & \quad \Phi_n^{(1)} = C_3 r^{-n} + C_4 r^n. \end{aligned}$$

Решение уравнения $(\Delta_n + \beta^2)\Phi_n^{(2)} = 0$ или, в развернутом виде,

$$\frac{d^2\Phi_n^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_n^{(2)}}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\Phi_n^{(2)} = 0,$$

суть бесселевы функции

$$\Phi_n^{(2)} = C_1 J_n(\beta r) + C_2 Y_n(\beta r).$$

Таким образом, для общего решения уравнения (9.15) имеем:

$$n = 0$$

$$\Phi_0 = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) + C_3 \ln r + C_4,$$

$$n \neq 0$$

$$\Phi_n = C_1 J_n(\beta r) + C_2 Y_n(\beta r) + C_3 r^{-n} + C_4 r^n.$$

Для сплошной круговой пластины решение должно удовлетворять условию ограниченности решения при $r \rightarrow 0$. Учитывая это обстоятельство, получим

$$\Phi_n = C_1 J_n(\beta r) + C_4 r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Удовлетворим граничным условиям для заземленного края

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dr} = 0, \quad r = R.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} C_1 J_n(\beta R) + C_2 R^n = 0, \\ C_1 J'_n(\beta R) + C_2 n R^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Требую, как обычно, выполнения условия нетривиальности решения, приходим к уравнению относительно параметра нагрузки β

$$nR^{n-1}J_n(\beta R) - R^n J'_n(\beta R) = 0,$$

или

$$\frac{n}{R} J_n(\beta R) - J'_n(\beta R) = 0. \quad (9.16)$$

На основании свойств бesselевых функций, в частности

$$J'_n(\beta R) = \frac{n}{R} J_n(\beta R) - J_{n+1}(\beta R),$$

уравнение (9.16) упростится и примет вид

$$J_{n+1}(\beta R) = 0. \quad (9.17)$$

Если $n = 0$, то (используя таблицы бesselевых функций) $\beta R = 3,832$. Если $n = 1$, то $\beta R = 5,135$. Следовательно, критическое значение нагрузки, соответствующее минимальному значению корня уравнения (9.17) и осесимметричной форме потери устойчивости, будет равно

$$N_* = \frac{(3,832)^2}{R^2} D = 14,68 \frac{D}{R^2}.$$

Если пластина шарнирно оперта по контуру, то при $r = R$ справедливы граничные условия

$$\begin{aligned} \Phi_n(R) &= 0, \\ \Phi_n''(R) + \nu \frac{\Phi_n'(R)}{R} &= 0, \end{aligned}$$

и вычисления дают

$$N_* = K(\nu) \frac{D}{R^2},$$

где $K = 4,2$ при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$.

9.6. Послекритические деформации пластин

Если закрепления контура пластины не препятствуют ее чисто изгибным деформациям, т.е. деформациям без удлинений и сдвигов срединной плоскости (рис. 9.14), то после потери устойчивости поведение пластины будет подобно поведению стержня с подвижными опорами. Происходит быстрый рост поперечных прогибов и изгибных напряжений.

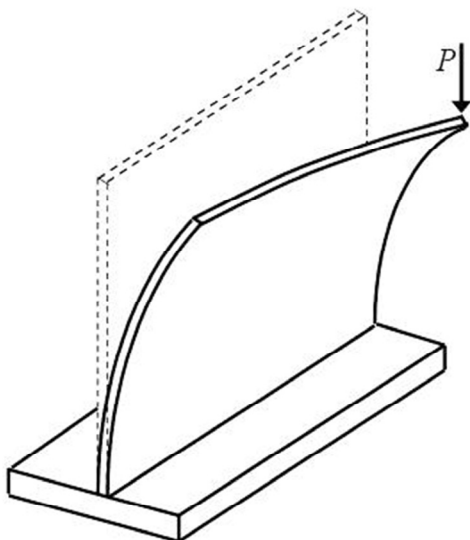


Рис. 9.14. Потеря несущей способности пластины

В этом случае потерей устойчивости плоской формы равновесия пластины практически можно считать потерю ее несущей способности. Вообще для пластин этот случай является исключительным. В случае, если пластина оперта по контуру, то при нагрузках, превышающих критические, несущая способность пластины не исчерпывается. Но в послекритической стадии:

- 1) нарушается равномерность распределения напряжений;
- 2) прогибы становятся сопоставимыми с толщиной, поэтому для расчета необходимо исходить из нелинейных уравнений (например, уравнений Кармана). Если применяются энергетические методы, то деформации следует определять из тензора конечных деформаций;
- 3) Кромки пластины искривляются в плане. Если же они подкреплены жесткими ребрами, то появляются дополнительные усилия на кромках.

Решение задачи о послекритических деформациях пластины можно получить только приближенными методами.

9.7. Понятие о редуционном коэффициенте

Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по контуру (рис. 9.15). На кромках пластины имеются ребра жесткости, вследствие чего кромки пластины остаются прямолинейными.

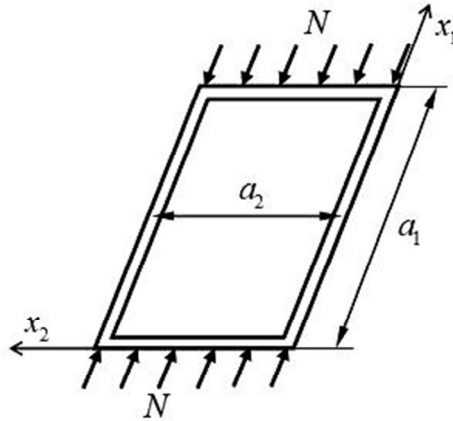


Рис. 9.15. Пластина в закритическом состоянии

Если сжимающее усилие меньше критического, т.е. $N < N_*$ $\sigma_{11} = -\frac{N}{h}$. Знак минус, так как принимаем $N > 0$. Эпюра напряжений постоянная по ширине пластины. Если сжимающее усилие $N > N_*$, то эпюра напряжений по сечению, перпендикулярному оси сжатия, будет иметь вид, представленный на рис. 9.16. Здесь максимальные напряжения $\sigma_{\text{ребр}}$ достигаются в точках на ребрах (кромках) пластины, а минимальные в середине пластины и величина этих напряжений близка к критическим напряжениям.

$$\sigma_{\text{min}} \approx \sigma_* = \frac{N_*}{h}.$$

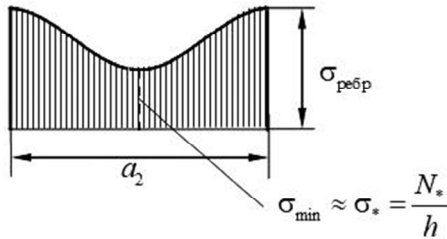


Рис. 9.16. Эпюра напряжений в пластине после потери устойчивости

Введем среднее напряжение по пластине

$$\sigma = \frac{1}{a_2} \int_0^{a_2} \sigma_{11} dx_2. \quad (9.18)$$

Отношение среднего напряжения σ к напряжению на ребре пластины $\sigma_{\text{ребр}}$ называется редуцированным коэффициентом

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{ребр}}}.$$

Тогда для сжимающего усилия можно записать $N = \sigma h = \varphi \sigma_{\text{ребр}} h$. Т. Карман и Л. Доннел (1932 г.) предложили приближенный метод определения редуцированного коэффициента.

Суть метода заключается в следующем.

1. Выделяются краевые зоны шириной по $\frac{a_{\text{пр}}}{2}$, примыкающие к кромкам, которые воспринимают всю нагрузку при постоянных напряжениях $\sigma_{\text{ребр}}$.

2. Остальная срединная часть пластины считается свободной от напряжений.

3. Пластина шириной $a_{\text{пр}}$ находится в состоянии, близком к критическому, т.е. $\sigma_{\text{ребр}}$ являются критическими напряжениями для пластины с приведенной шириной.

Тогда

$$\sigma_{\text{ребр}} = \frac{\pi^2 D}{a_{\text{пр}}^2 h} K. \quad (9.19)$$

Критические напряжения для исходной пластины равны

$$\sigma_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2 h} K. \quad (9.20)$$

Из формул (9.19) и (9.20) следует, что

$$\frac{a_{2\text{пр}}}{a_2} = \sqrt{\frac{\sigma_*}{\sigma_{\text{ребр}}}}.$$

Полное сжимающее усилие в закритической стадии определяется следующим образом

$$P = Na_2 = h\sigma_{\text{ребр}} a_{2\text{пр}} = h\sigma a_2. \quad (9.21)$$

Напомним, что σ — это среднее напряжение, определяемое по формуле (9.18). Эпюра напряжений в приведенной пластине показана на рис. 9.17.

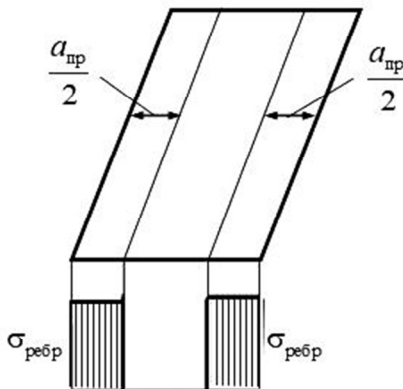


Рис. 9.17. Эпюра напряжений в приведенной пластине

Таким образом из формулы (9.20) следует

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{ребр}}} = \frac{a_{2\text{пр}}}{a_2} = \sqrt{\frac{\sigma_*}{\sigma_{\text{ребр}}}}.$$

И наконец, обозначив коэффициент неравномерности распределения напряжений $n = \frac{\sigma_{\text{ребр}}}{\sigma_*}$, окончательно получим $\varphi = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

На рисунке 9.18 представлены зависимости редуцированного коэффициента φ от показателя неравномерности распределения напряжений в закритической стадии n : нижняя кривая соответствует схеме Кармана; верхняя кривая получена из расчета по одночленному приближению закритических деформаций по методу Бубнова-Галеркина (см. пункт 9.8).

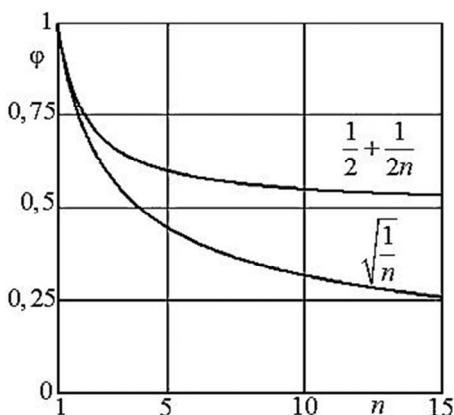


Рис. 9.18. Зависимость редуцированного коэффициента от параметра n

9.8. Расчет послекритических деформаций методом Бубнова-Галеркина

Рассмотрим шарнирно опертую прямоугольную пластину, сжатую в одном направлении (рис. 9.15). Пластина подкреплена достаточно жесткими ребрами. Вследствие этого после потери устойчивости кромки пластины остаются прямолинейными. В процессе деформирования точки пластины могут свободно смещаться вдоль ребер. Пусть стороны пластины удовлетворяют условию $\frac{a_1}{a_2} \approx 1$. Тогда форма потери устойчивости будет соот-

ветствовать образованию одной полуволны в направлении обеих осей Ox_1 и Ox_2 . Критическое усилие для данной схемы определяется

по формуле $N_* = \frac{\pi^2 D}{a_2^2} K$. Для применения вариационных методов в данном случае можно принять

$$w(x_1, x_2) = f \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}. \quad (9.22)$$

Для описания послекритических деформаций воспользуемся нелинейными уравнениями Кармана

$$D\Delta\Delta w = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (9.23)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $w(x_1, x_2)$ — нормальный прогиб, $\chi(x_1, x_2)$ — функция усилий в срединной плоскости, определяющая эти усилия следующим образом

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad N_{12} = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Как уже отмечалось, задача о закритических деформациях пластины геометрически нелинейная, поэтому для определения относительных деформаций вместо соотношений Коши следует использовать нелинейные соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2,$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

Запишем граничные условия для шарнирно опертой пластины. Условия для прогиба

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad (x_1 = 0, a_1), \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_2 = 0, a_2).$$

Тангенциальные граничные условия формулируются в среднем. Здесь могут быть различные варианты:

- 1) свободно смещающиеся кромки;
- 2) неподвижные продольные кромки;
- 3) продольные кромки упруго присоединены к основной конструкции.

Запишем условия для первого варианта

$$\begin{aligned}\bar{N}_{11} &= \frac{1}{a_2} \int_0^{a_2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} dx_2 = -N, \quad (x_1 = 0, a_1), \\ \bar{N}_{22} &= \frac{1}{a_1} \int_0^{a_1} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} dx_1 = 0, \quad (x_2 = 0, a_2), \\ \bar{N}_{12} &= -\frac{1}{a_1} \int_0^{a_1} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 = 0, \quad (x_2 = 0, a_2).\end{aligned}\tag{9.24}$$

Для решения задачи, а именно для определения связи между сжимающим усилием N и максимальным смещением центральной точки пластины f , применим метод Бубнова–Галеркина в форме Папковича. Суть метода состоит в следующем: принятая функция $w(x_1, x_2)$, аппроксимирующая форму потери устойчивости, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям, подставляется во второе уравнение Кармана. Это уравнение интегрируется, найденное выражение для $\chi(x_1, x_2)$ вместе с $w(x_1, x_2)$ подставляются в первое уравнение, и проводится ортогонализация этого уравнения функциям, аппроксимирующим форму потери устойчивости.

Итак, подстановка выражения (9.22) во второе уравнение Кармана дает

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi = \frac{f^2}{2} \frac{\pi^4}{a_1^2 a_2^2} \left(\cos \frac{2\pi x_1}{a_1} + \cos \frac{2\pi x_2}{a_2} \right).$$

Общее решение этого уравнения

$$\chi(x_1, x_2) = Eh \frac{f^2}{32} \left[\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \cos \frac{2\pi x_1}{a_1} + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \cos \frac{2\pi x_2}{a_2} \right] + N_{11}^0 \frac{x_2^2}{2} + N_{22}^0 \frac{x_1^2}{2} - N_{12}^0 x_1 x_2. \quad (9.25)$$

Здесь N_{jk}^0 — постоянные интегрирования. Получим выражения для усилий в срединной плоскости

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} = -Eh \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a_1} \right)^2 \cos \frac{2\pi x_1}{a_1} + N_{11}^0, \\ N_{22} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = -Eh \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a_2} \right)^2 \cos \frac{2\pi x_2}{a_2} + N_{22}^0, \\ N_{12} &= N_{12}^0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Перепишем первое уравнение Кармана в виде

$$D\Delta\Delta w - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

подставим в это уравнение выражение (9.22) для $w(x_1, x_2)$ и полученное в результате интегрирования выражение (9.25) для $\chi(x_1, x_2)$ и, согласно методу Бубнова–Галеркина, проведем процедуру ортогонализации, т.е. вычислим интеграл

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} L(w, \chi) \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2} dx_1 dx_2 = 0$$

и приравняем его нулю. В результате для случая $a_1 = a_2 \equiv a$, т.е. для квадратной пластины, получим

$$f \left[\frac{\pi^4 D}{a^2} + \frac{\pi^2}{4} (N_{11}^0 + N_{22}^0) \right] + Ehf^3 \frac{\pi^4}{32a^2} = 0. \quad (9.27)$$

Из граничных условий для свободно смещающихся кромок пластины несложно получить константы интегрирования, входящие в это уравнение

$$\begin{aligned}\bar{N}_{11} &= -N, \quad (x_1 = 0, a_1) \Rightarrow N_{11}^0 = -N, \\ \bar{N}_{22} &= 0, \quad (x_2 = 0, a_2) \Rightarrow N_{22}^0 = 0, \\ \bar{N}_{12} &= 0, \quad \Rightarrow N_{22}^0 = 0.\end{aligned}$$

Сдвиги по всей пластине отсутствуют. Из выражения (9.27) получим

$$N = \frac{4\pi^2 D}{a^2} + Eh \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a}\right)^2.$$

Первый член в правой части это критическая сила для шарнирно опертой квадратной пластины, сжатой в одном направлении

$$N_* = \frac{4\pi^2 D}{a^2}.$$

Критические напряжения при этом $\sigma_* = \frac{4\pi^2 D}{ha^2}$.

Согласно выражению (9.26) распределение усилия N_{11} по ширине пластины с учетом соотношения (9.27) будет следующим

$$N_{11} = -N - Eh \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi x_2}{a} = -\frac{4\pi^2 D}{a^2} - Eh \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi x_2}{a}\right).$$

Вычислим напряжения, полагая их положительными при сжатии

$$\sigma_{11} = -\frac{N_{11}}{h} = \frac{4\pi^2 D}{ha^2} + E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi x_2}{a}\right).$$

Напряжения $\sigma_{11}(x_2)$ изменяются только по ширине. На ребре (кромке) при $x_2 = 0, a$

$$\sigma_{\text{ребр}} = \sigma_* + E \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{f}{a}\right)^2.$$

Среднее напряжение равно

$$\sigma = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma_{11} dx_2 = \sigma_* + E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a} \right)^2.$$

Вычислим редуционный коэффициент

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{ребр}}} = \frac{\sigma_* + E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{a} \right)^2}{\sigma_* + E \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{f}{a} \right)^2} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_* + \sigma_{\text{ребр}})}{\sigma_{\text{ребр}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_*}{\sigma_{\text{ребр}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad (9.28)$$

и зависимость стрелы прогиба от величины сжимающего усилия

$$\frac{f}{a} = \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{8(N - N_*)}{Eh}} \quad \text{или} \quad \frac{f}{h} = \pm \sqrt{\frac{3}{8}(1 - \nu^2) \left(\frac{N}{N_*} - 1 \right)}. \quad (9.29)$$

График редуционного коэффициента φ (9.28) представлен на рис. 9.18; зависимость стрелы прогиба от усилия N (9.28) изображена на рис. 9.19.

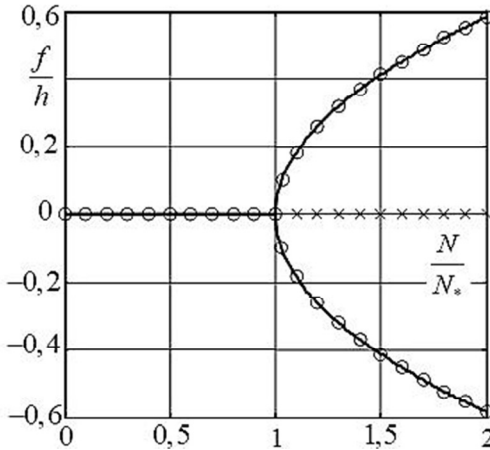


Рис. 9.19. Зависимость стрелы прогиба от сжимающего усилия

Контрольные вопросы

1. Какие предположения принимаются при описании смежной с невозмущенной формой равновесия пластины?
2. Какие факторы влияют на формы потери устойчивости шарнирно опертой пластины при сжатии в одном направлении?
3. Что собой представляет область устойчивости для квадратной шарнирно опертой пластины при сжатии в двух направлениях?
4. В каком случае потеря устойчивости пластины может не соответствовать потере ее несущей способности?
5. Как определяется редуцированный коэффициент и какую роль он может выполнять в расчетах на прочность пластины, работающей в закритической стадии?
6. Почему для описания закритических деформаций необходимо привлекать нелинейные уравнения?

10. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

10.1. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Поведение оболочек при потере устойчивости отличается от поведения стержней и пластинок. Выпучивание оболочек сопровождается появлением не только напряжений изгиба, но и дополнительных напряжений в срединной поверхности. Для стержней и пластинок при переходе в смежное состояние равновесия учитываются только деформации изгиба. Рассмотрим ряд вопросов, связанных с устойчивостью цилиндрических оболочек как наиболее часто встречающихся элементов разнообразных тонкостенных конструкций. И задачи устойчивости для них наиболее глубоко разработаны.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h с радиусом срединной поверхности R (рис. 10.1). Длина образующей l . Оболочка находится под действием постоянной распределенной по торцам оболочки сжимающей нагрузки N . Впервые эту задачу рассмотрели С.П.Тимошенко, Р. Лоренц (1910).

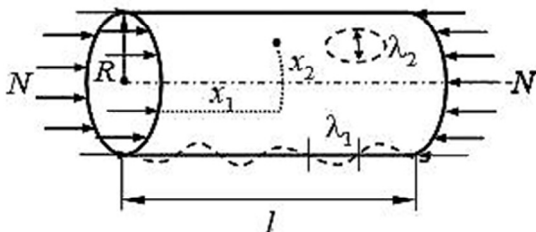


Рис. 10.1. Круговая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии

Вдоль образующей направим координату x_1 , в окружном направлении – координату x_2 . Задача осесимметричная, поэтому усилия в срединной плоскости будут следующими: $N_{11} \equiv N$, а $N_{22} = N_{12} = N_{21} = 0$. Обычно в теории устойчивости считается,

что $N > 0$ при сжатии. Невозмущенное состояние предполагается безмоментным. Предположим также, что формы потери устойчивости таковы, что для описания возмущенного состояния можно применить уравнения пологих оболочек. Действительно, по фотографии тонкостенной оболочки (рис. 10.2), потерявшей устойчивость при сжатии в осевом направлении, следует, что характерные размеры выпуклостей и впадин, как в направлении образующей λ_1 , так и в окружном направлении λ_2 , малы по сравнению с характерными размерами оболочки R, l .

В качестве уравнений пологих оболочек примем уравнения в форме Доннела–Муштари–Власова.

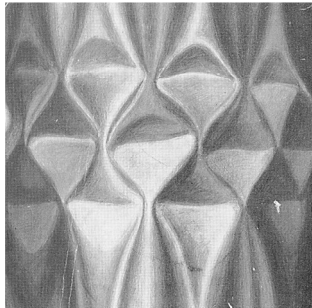


Рис. 10.2. Деформированная цилиндрическая оболочка после потери устойчивости

Учитывая, что главные радиусы кривизны в направлении образующей $R_1 = \infty$ (прямая линия), а в окружном направлении $R_2 = R$, уравнения нейтрального равновесия относительно нормального прогиба $w(x_1, x_2)$ и функции усилий $\chi(x_1, x_2)$ можно записать в виде

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Здесь $N \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$ — параметрический член, по точности согласован с точностью уравнений. Пусть закрепление на торцах оболочки таково, что реализуются граничные условия Навье, соответствующие шарнирному опиранию

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = 0, \quad (x_1 = 0, l). \quad (10.2)$$

Уравнениям (10.1) и граничным условиям (10.2) можно удовлетворить, если функции $w(x_1, x_2)$ и $\chi(x_1, x_2)$ представить в виде

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= A \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R}, \\ \chi(x_1, x_2) &= B \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Числа $m_1 = 1, 2, \dots$, и $m_2 = 0, 1, 2, \dots$ характеризуют число волн в форме потери устойчивости (рис. 10.3), причем m_1 — число волн по образующей, а m_2 — число волн в окружном направлении. Если $m_2 = 0$, то имеет место осесимметричная форма потери устойчивости, $m_2 = 1$ соответствует эйлеровой (стержневой) форма потери устойчивости, так как в этом случае имеем жесткое смещение каждого сечения оболочки.

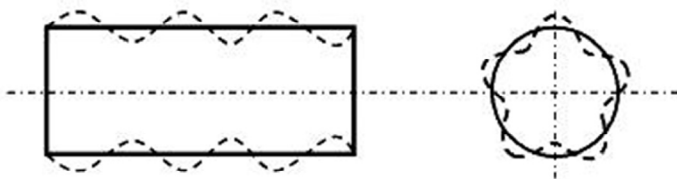


Рис. 10.3. Волнообразование при потере устойчивости ($m_1 = 3, m_2 = 5$)

Подставим выражения (10.3) для $w(x_1, x_2)$ и $\chi(x_1, x_2)$ в уравнения нейтрального равновесия (10.1) и запишем условие существования нетривиального решения системы уравнений для амплитудных коэффициентов A и B

$$\begin{vmatrix} D \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 - N \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} & -\frac{1}{R} \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} \\ \frac{Eh}{R} \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} & \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, после несложных преобразований получим выражение для сжимающего усилия, которое будем рассматривать как функцию чисел m_1 и m_2

$$N_{m_1 m_2} = \frac{Dl^2}{m_1^2 \pi^2} \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} \frac{1}{\left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2}. \quad (10.4)$$

Критическому усилию N_* соответствует минимальное значение выражения (10.4) $N_* = \min_{m_1, m_2} N_{m_1 m_2}$. Если предположить, что для тонких и не слишком длинных оболочек числа m_1 и m_2 , сообщающие минимум величине $N_{m_1 m_2}$, велики по сравнению с 1, то m_1 и m_2 можно трактовать как непрерывные аргументы. Тогда m_1 и m_2 , сообщающие минимум $N_{m_1 m_2}$ могут быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial N_{m_1 m_2}}{\partial m_1} = 0, \quad \frac{\partial N_{m_1 m_2}}{\partial m_2} = 0.$$

Однако, более удобно поступить следующим образом. Введем

$$\theta = Rh \frac{\left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2}{\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2}}. \quad (10.5)$$

Этот параметр θ можно трактовать как параметр волнообразования. Тогда формула (10.4) перепишется следующим образом

$$N_{m_1 m_2} = \frac{Eh^2}{R} \left[\frac{\theta}{12(1-v^2)} + \frac{1}{\theta} \right]. \quad (10.6)$$

Найдем минимум функции (10.6) по параметру волнообразования θ , т.е. возьмем производную, приравняем нулю и найдем корень полученного уравнения

$$\frac{\partial N_{m_1 m_2}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{1}{12(1-v^2)} - \frac{1}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta_* = \sqrt{12(1-v^2)}.$$

Подставляя полученное значение θ_* в формулу (10.6), получим формулу для критического усилия N_*

$$N_* = \frac{Eh^2}{R} \frac{1}{\sqrt{3(1-v^2)}}. \quad (10.7)$$

Если принять коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, то для критического усилия получим

$$N_* = 0,6 \frac{Eh^2}{R}, \quad (10.8)$$

а критические напряжения будут равны

$$\sigma_* = \frac{N_*}{h} = 0,6 \frac{Eh}{R}. \quad (10.9)$$

Проверим предположение о том, что форма потери устойчивости соответствует большому количеству волн в направлении образующей и в окружном направлении. Это предположение использовано при выводе критического значения усилия N_* относительно чисел m_1, m_2 и, следовательно, параметра волнообразования θ . Введем характерные длины полуволн $\lambda_1 = \frac{l}{m_1}$, $\lambda_2 = \frac{\pi R}{m_2}$ и оценим порядок величины параметра волнообразования θ . Пусть λ_1 и λ_2 имеют одинаковый порядок (эксперимент это подтверждает): $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda$. Тогда из формулы (10.5) следует, что

$\theta \sim Rh \frac{1}{\lambda^2}$. Поскольку величина θ_* , сообщающая минимум функции (10.6) $N_{m_1 m_2}$, имеет порядок единицы $\theta_* \sim 1$, то из условия $Rh \frac{1}{\lambda_*^2} \sim 1$ следует $\lambda_* \sim \sqrt{Rh}$. Таким образом, λ_* имеет порядок длины зоны статического краевого эффекта. Так как $\frac{h}{R} \ll 1$, то $\lambda_* \ll R$ и форма потери устойчивости схематично (рис. 10.4) выглядит так, как и на фото (10.2).

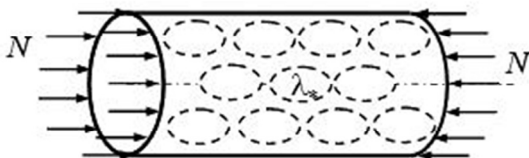


Рис. 10.4. Форма потери устойчивости короткой оболочки

Решение (10.7) задачи об устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии (как и исходные уравнения) не годится для длинных оболочек (рис. 10.5).

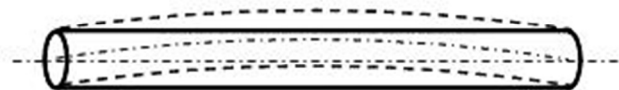


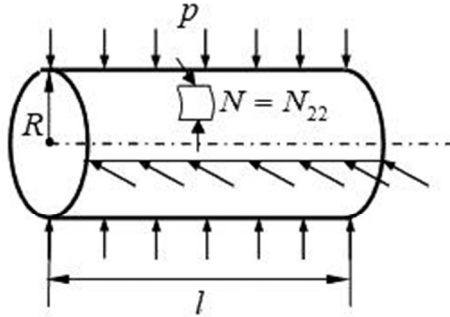
Рис. 10.5. Форма потери устойчивости длинной оболочки

Здесь необходимо исходить из уравнений Лява и более точно выписывать параметрические члены.

10.2. Случай внешнего гидростатического сжатия

Впервые эта задача была рассмотрена Р.Мизесом (1929). Круговая тонкостенная оболочка с радиусом срединной поверхности R и длиной l находится под действием равномерного сжи-

мающего давления p (рис. 10.6), приложенного к внешней поверхности. Координатные оси введем так же, как и в предыдущей задаче. Невозмущенное состояние считаем безмоментным. Из теории безмоментных оболочек несложно установить, что в окружном направлении возникает сжимающее усилие, равное $N_{22} \equiv N = pR$.



10.6. Цилиндрическая оболочка под действием внешнего давления

Как и при осевом сжатии для оболочек умеренной длины в данном случае для описания нейтральной формы равновесия примем уравнения Доннелла–Муштари–Власова, которые в рассматриваемой задаче примут вид

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

В качестве граничных условий примем краевые условия Навье:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = 0, \quad (x_1 = 0, l).$$

Согласно граничным условиям и замкнутости оболочки решения для нормального прогиба $w(x_1, x_2)$ и функции усилий $\chi(x_1, x_2)$ представим в виде

$$\chi(x_1, x_2) = B \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R}, \quad (10.11)$$

$$\chi(x_1, x_2) = B \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R}, \quad (m_1 = 1, 2, \dots, m_2 = 0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя (10.11) и требуя нетривиальности решения для постоянных A и B (т.е. существование нетривиального смежного с исходным положением равновесия) получим

$$\begin{vmatrix} D \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 - N \frac{m_2^2}{R^2} & -\frac{1}{R} \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} \\ \frac{Eh}{R} \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} & \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$N_{m_1 m_2} = \frac{DR^2}{m_2^2} \left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh}{m_2^2} \frac{\left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} \right)^2}{\left(\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_2^2}{R^2} \right)^2}. \quad (10.12)$$

Из анализа выражения (10.12) следует, что с увеличением натурального числа m_1 значение $N_{m_1 m_2}$ возрастает. Поэтому нужно положить $m_1 = 1$. В отличие от предыдущей (рис. 10.4) в этой задаче локальные формы потери устойчивости отсутствуют (рис. 10.7).



10.7. Волнообразование при $m_1 = 1$

Число вмятин в окружном направлении велико. Опыт показывает, что $m_1 = 1$, а $m_2 \gg 1$ (при других граничных условиях может быть иначе). Пусть $l \sim R$. Тогда $\frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} \ll \frac{m_2^2}{R^2}$. В этом случае оболочка находится в полубезмоментном состоянии, а выражение для N_{m_2} можно записать

$$N_{m_2} \approx \frac{Dm_2^2}{R^2} + \frac{Eh \pi^4 R^4}{m_2^6 l^4}. \quad (10.13)$$

Здесь первый член $\frac{Dm_2^2}{R^2}$ характеризует вклад изгиба в окружном направлении; второй член $\frac{Eh \pi^4 R^4}{m_2^6 l^4}$ – вклад безмоментного напряженного состояния. Преобразуем выражение к виду

$$N_{m_2} \approx \frac{Dm_2^2}{R^2} + \frac{Eh \pi^4 R^4}{m_2^6 l^4} \approx \frac{Eh^2}{R} \left[\frac{h}{R} \frac{m_2^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{\pi^4 R^4 R}{m_2^6 l^4 h} \right],$$

и минимизируем по m_2

$$\frac{\partial N_{m_2}}{\partial m_2} = 0; \quad 2 \frac{h}{R} \frac{m_2}{12(1-\nu^2)} - \frac{6\pi^4 R^4 R}{m_2^7 l^4 h} = 0.$$

Из этого выражения получим величину m_{2*} , которая с соответствующем округлением определяет минимальное, а следовательно, и критическое значение усилия N_*

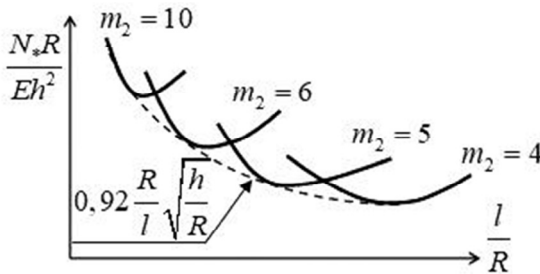
$$m_{2*} = \sqrt[8]{36(1-\nu^2) \pi^4 \frac{R^4 R^2}{l^4 h^2}}.$$

Если коэффициент Пуассона принять равным $\nu = 0,3$, то $m_{2*} = 2,7 \sqrt{\frac{R}{l}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}}$. Например, при $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ и $l = R$, $\sqrt[4]{\frac{R}{h}} \approx 3,2$, $m_{2*} \approx 2,7 \cdot 3,2 \approx 9$, т.е. в данном случае имеет место большая из-

меняемость в окружном направлении, а критическое значение усилия и напряжений равны

$$N_* \approx 0,92 \frac{Eh^2 R}{R} \frac{R}{l} \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad \sigma_* = \frac{N_*}{h} \approx 0,92 \frac{Eh R}{R} \frac{R}{l} \sqrt{\frac{h}{R}}.$$

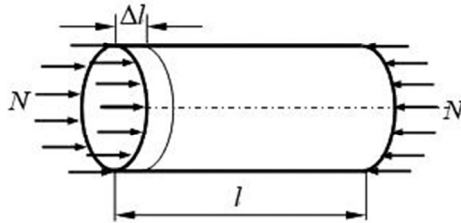
Такое выражение для N_* называется формулой Мизеса. На рисунке 10.8 приведена иллюстрация зависимости критического усилия от относительной длины цилиндрической оболочки при различных числах полуволн в окружном направлении m_2 . Штриховая линия соответствует формуле Мизеса при $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$.



10.8. Зависимость критического усилия от параметра удлиненности оболочки

10.3. Сопоставление результатов линейной теории устойчивости оболочек с экспериментом

Теоретические исследования устойчивости оболочек сопровождались обширными экспериментами. В частности, кратко отметим некоторые особенности экспериментальных результатов по осевому сжатию цилиндрических оболочек с различными параметрами (рис. 10.9). Оказалось, что имеет место систематическое расхождение между линейной теорией упругой устойчивости и экспериментом.



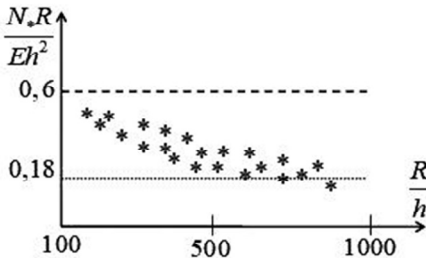
10.9. Уменьшение длины оболочки при сжатии

Ранее по линейной теории мы получили для критического значения сжимающего усилия результат (10.8)

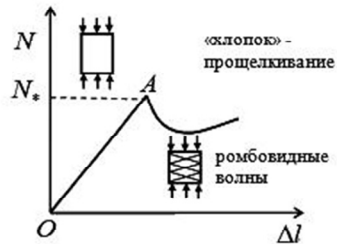
$$\frac{N_* R}{Eh^2} = 0,6.$$

Однако значительная часть опытов дают значение безразмерного сжимающего усилия, больше 0,18, но меньше чем 0,6 (рис. 10.10,а). Некоторые авторы получили значение критического сжимающего усилия для тонких оболочек от 0,06 до 0,1. Таким образом, экспериментальное определение критических нагрузок характеризуется следующими явлениями:

- 1) большим разбросом экспериментальных результатов;
- 2) экспериментальные значения критических нагрузок всегда меньше, чем теоретические значения $N_{*л}$, полученные по линейной теории;
- 3) с увеличением параметра тонкостенности R/h проявляется тенденция к уменьшению критического усилия N_* .



а)



б)

10.10. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек (а) и диаграмма сжатия (б)

Потеря устойчивости оболочек сопровождается «хлопком» – скачкообразным образованием первых вмятин ромбовидной формы (рис. 10.10,б).

Подобное явление можно объяснить следующим образом. В реальной оболочке всегда имеются неидеальности в форме (отклонения от идеальной цилиндрической формы), толщине, неоднородность упругих свойств, неоднородность граничных условий, неравномерность распределения нагрузки и т.д. Все эти возмущения малы, но конечны. Поэтому при $N < N_{*н}$ имеются моментные формы равновесия, отличные от невозмущенной и тоже устойчивые. Напомним, что при выводе теоретической формулы невозмущенное состояние предполагалось безмоментным.

При исследовании устойчивости прямолинейных стержней, сжатых силой P (рис. 10.11,а), мы получали бифуркационную диаграмму, представленную на рис. 10.11,б.

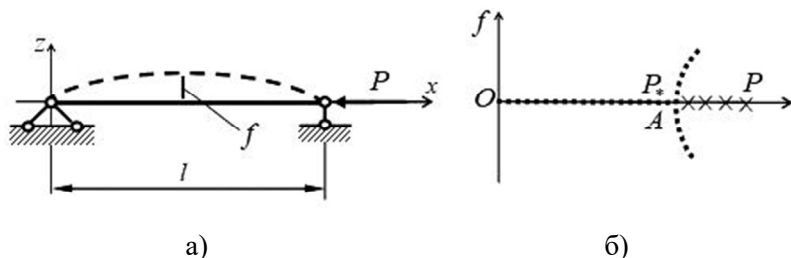


Рис. 10.11. Сжатие шарнирно опертого стержня (а) и бифуркация формы равновесия (б)

На участке OA нет форм равновесия, отличных от прямолинейной. Точка A , где $P = P_*$ является точкой бифуркации. Здесь без скачка происходит переход к смежной изогнутой форме равновесия. Совсем иначе обстоит дело, например, при исследовании устойчивости пологой арки (см. рис. 10.12,а). Штриховая линия соответствует возможной эйлеровой форме потери устойчивости при $P = P_*$. Прощелкнутая форма потери устойчивости (штрихпунктирная линия) реализуется при $P_{**} > P_*$. На рисунке изображена возможная зависимость прогиба (например, точки

приложения силы) от силы P . При $P < P_{**}$ при некоторых возмущениях возможен перескок на устойчивую часть кривой. «Хлопок» соответствует предельной точке. Подобные явления имеют место и в оболочках. Чтобы описать явление хлопка в оболочках, нужно привлечь нелинейную теорию оболочек.

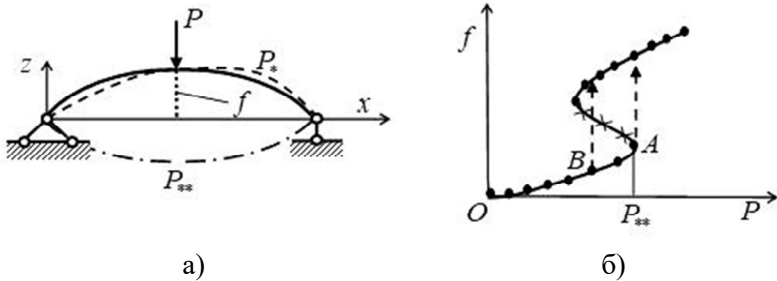


Рис. 10.12. Пологая арка под нагрузкой (а) и диаграмма нагружения (б)

10.4. Понятие о нелинейной теории устойчивости оболочек

Первые попытки решения нелинейной задачи устойчивости оболочек принадлежит Т. Карману. Он представил прогиб следующим образом

$$w(x_1, x_2) = A \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R} + \sum_k f_k \Psi_k(x_1, x_2). \quad (10.14)$$

Здесь $A \sin \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos \frac{m_2 x_2}{R}$ — линейная часть прогиба, добавочные члены имеют вид

$$\begin{cases} \Psi_1 = \sin^2 \frac{m_1 \pi x_1}{l} \cos^2 \frac{m_2 x_2}{R}, \\ \Psi_2 = 1. \end{cases} \quad (10.15)$$

Эти функции отражают тот факт, что оболочка прощелкивается внутрь. Выражения (10.14) и (10.15) подставляются в нелинейные уравнения Кармана и далее применяется метод Галеркина

в форме Папковича. Осредненное по окружности сближение торцов (укорочение) определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \left[\int_0^l \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2.$$

В рамках нелинейной теории пологих оболочек используются нелинейные соотношения для относительных деформаций, например,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \varepsilon_{11} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{1}{Eh} (N_{11} - \nu N_{22}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Вычисления приводят к зависимости сближения торцов оболочки от сжимающего усилия, изображенной на рис. 10.13. Здесь точка A – точка бифуркации. Точка B – предельная точка. Ветвь AB не реализуется. На диаграмме отмечены верхнее и нижнее значения для критического усилия $N_*^B N_*^H$.

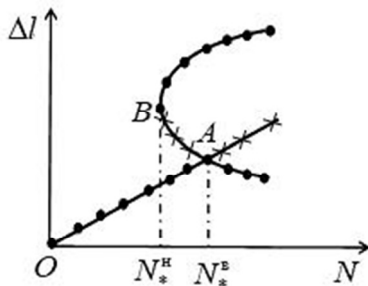


Рис. 10.13. Бифуркационная диаграмма нелинейной теории устойчивости оболочек

Верхним критическим усилием N_*^B называется верхняя грань усилий, при которых невозмущенная форма равновесия устойчива. Нижним критическим усилием N_*^H называется верхняя грань усилий, при которых невозмущенная форма равновесия является единственно устойчивой формой. Приведем некоторые численные результаты нелинейной теории оболочек.

1. Случай осевого сжатия оболочки с параметрами $l \sim R$

$$N_*^H = (0,182 - 0,334) \frac{Eh^2}{R}.$$

В справочниках для расчета рекомендуют

$$N_*^H = 0,18 \frac{Eh^2}{R}.$$

2. Случай гидростатического сжатия

$$N_*^H = (0,7 - 0,8) N_*^B.$$

Для длинных оболочек ($l \gg R$) результаты линейной и нелинейной теории, а также экспериментально полученные значения критических нагрузок близки между собой.

Контрольные вопросы

1. Какое напряженное состояние принимается для цилиндрических оболочек при исследовании устойчивости под действием осевого сжатия и равномерного внешнего давления?

2. В каком случае и почему для описания возмущенного состояния цилиндрических оболочек при осевом сжатии или при

внешнем давлении могут быть взяты уравнения Доннела–Муштари–Власова, применяемые для исследования напряженно-деформированного состояния пологих оболочек?

3. Почему для замкнутой цилиндрической оболочки прогиб для возмущенного состояния в окружном направлении при любых граничных условиях, заданных на торцах оболочки, можно складывать в ряд по функциям $\cos \frac{m_2 x_2}{R}$?

4. Чем вызвана необходимость отыскания минимальных значений нагрузок, при которых возможны смежные формы равновесия, отличные от невозмущенных форм равновесия?

5. Почему экспериментальные значения критических нагрузок всегда меньше тех, которые получены с использованием линейной теории устойчивости?

11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

11.1. Границы применимости теории упругой устойчивости

Если для невозмущенного состояния становится неприменимым закон Гука, то и теория упругой устойчивости становится неприменимой. При одномерном напряженном состоянии условие применимости теории упругой устойчивости имеет вид

$$\sigma_* < \sigma_{\text{пл}},$$

т.е. критические напряжения должны быть меньше предела пропорциональности. В случае плоского напряженного состояния использование условия текучести Мизеса дает такое условие

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2} < \sigma_{\text{пл}}.$$

Эти условия накладывают условия достаточной гибкости для исследуемого на устойчивость объекта. Например, рассмотрим сжатый силой P стержень, защемленный на одном конце и свободный на другом (рис. 11.1). Коэффициент приведения длины $\mu = 2$.

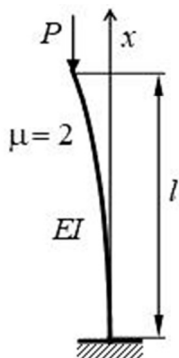


Рис. 11.1. Стержень при сжатии силой P

Критическая сила и критические напряжения определяются в данном случае следующим образом

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad \sigma_* = \frac{P_*}{F} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \frac{I}{F} = \pi^2 E \left(\frac{r}{\mu l} \right)^2. \quad (11.1)$$

В формулах (11.1) через r обозначена одна из характеристик поперечного сечения, которая называется радиус инерции и определяется как корень квадратный из отношения осевого момента инерции к площади поперечного сечения

$$r = \sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Для стержней вводится безразмерная характеристика, численно определяющая его гибкость. Она так и называется – гибкостью – и определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{r}.$$

Формулу для критических напряжений при линейно упругой потере устойчивости стержней можно выразить через гибкость

$$\sigma_* = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (11.2)$$

Из ограничения $\sigma_* < \sigma_{\text{пл}}$ следует условие применимости теории упругой устойчивости

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}} = \lambda_{\text{пред}},$$

согласно которому, гибкость стержня должна превышать предельную гибкость $\lambda_{\text{пред}}$. На рисунке 11.2 построена зависимость $\sigma_*(\lambda)$ (11.2), область определения которой при $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ соответствует теории упругой устойчивости Эйлера.

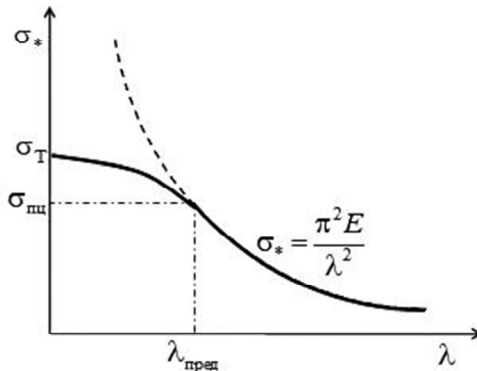


Рис. 11.2. Зависимость критических напряжений от гибкости

Возникает вопрос, а что физически для стержня означает гибкость, например, равная 100? Рассмотрим сталь марки Ст3, для которой модуль продольной упругости $E \approx 2 \cdot 10^5$ МПа, а предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}} \approx 200$ МПа, значит, предельная гибкость будет равна $\lambda_{\text{пред}} \approx 100$. Пусть поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник со сторонами b и h (рис. 11.3). Определим радиус инерции r

$$r = \sqrt{\frac{bh^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} \approx 0,29h.$$

Следовательно, при $\lambda = 100$ приведенная длина стержня (с учетом условий закрепления, т.е. при заданном коэффициенте приведения длины μ) будет равна $\mu l \approx 29h$. Значит, если приведенная длина стержня будет превышать $29h$, то теория упругой устойчивости применима, и критическую силу и напряжения можно рассчитать по формулам (11.1).

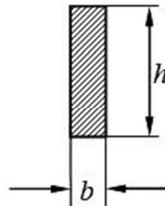


Рис. 11.3. Поперечное сечение стержня

Аналогичные рассуждения полезно проводить в любых других задачах исследования устойчивости упругих систем. Рассмотрим, например, удлиненную прямоугольную пластину (рис. 11.4) ($a_1 \gg a_2$), для которой в главе 9 получена формула для критического усилия сжатия

$$N_* = 4 \frac{\pi^2 D}{a_2^2}.$$

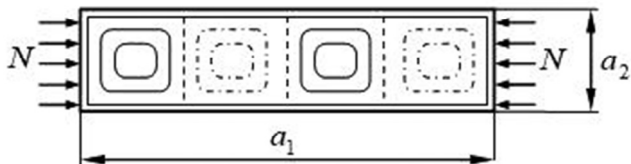


Рис. 11.4. Удлиненная прямоугольная пластина

Пусть коэффициент Пуассона равен $\nu = 0,3$. Тогда критическое значение сжимающего усилия равно $N_* \approx 3,6 \frac{Eh^3}{a_2^2}$, а критическое напряжение (невозмущенное состояние одномерное)

$$\sigma_* = \frac{N_*}{h} \approx 3,6E \left(\frac{h}{a_2} \right)^2 < \sigma_{\text{мц}}.$$

Отсюда отношение ширины пластины к ее толщине должно удовлетворять условию

$$\frac{a_2}{h} > \sqrt{\frac{3,6E}{\sigma_{\text{мц}}}} \approx 1,9 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{мц}}}}.$$

Для материала Ст3 получим

$$\left(\frac{a_2}{h} \right)_{\text{пред}} = 1,9 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} \approx 60.$$

Для цилиндрической оболочки при осевом сжатии (рис. 11.5) аналогичные рассуждения приводят к следующему результату

$$\sigma_* = 0,6 \frac{Eh}{R} < \sigma_{\text{мц}}.$$

Для оболочки, изготовленной из Ст3, отношение толщины к радиусу срединной поверхности для применения теории упругой устойчивости не должно быть больше, чем

$$\frac{h}{R} < \frac{\sigma_{\text{мц}}}{0,6E} = \frac{200}{0,6 \cdot 2 \cdot 10^5} = \frac{1}{600}.$$

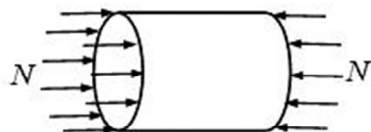


Рис. 11.5. Цилиндрическая оболочка при сжатии

Особенности задач упругопластической устойчивости заключаются в следующем:

1) точки бифуркации форм равновесия зависят от вида и величины возмущений. Точки бифуркации могут заполнять некоторые отрезки;

2) упругопластическая среда – неголономная. При упругопластическом деформировании накапливаются необратимые пластические деформации, зависящие от вида и последовательности нагружения; поверхность нагружения может быть невыпуклой и иметь точки с неоднозначным направлением нормали;

3) существуют определенные трудности распространения самого понятия устойчивости на упругопластические среды.

11.2. Касательно-модульная критическая сила

Предположим, что диаграмма $\sigma - \varepsilon$ материала, из которого изготовлен стержень, имеет вид, представленный на рис. 11.6.

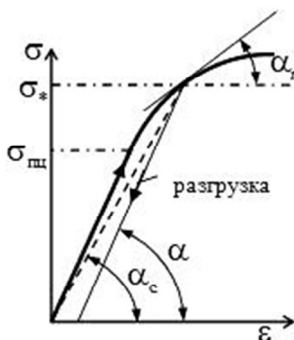


Рис. 11.6. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$

На диаграмме

$E = \operatorname{tg} \alpha$ – упругий модуль (модуль упругости);

$\alpha_t = \operatorname{arctg} E_t, E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ – касательный модуль;

$\alpha_c = \operatorname{arctg} E_c, E_c$ – секущий модуль.

Для разгрузки справедлив закон Герстнера, т.е. линия разгрузки параллельна линейному отрезку нагружения.

При отклонениях стержня от прямолинейной формы, вообще говоря, в одних точках сечения будет разгрузка, а в других – нагружение. Допустим, что возмущения и нагружение таковы, что во всех точках сечения поддерживается рост напряжений. Тогда в отношении изгибной деформации материал будет вести себя как упругий с модулем упругости E_t , т.е. касательным модулем. Таким образом, приходим к касательно-модульной критической силе

$$P_{*t} = \frac{\pi^2 E_t I}{(\mu l)^2}. \quad (11.3)$$

Такой подход к определению критической силы для стержня, работающего за пределами упругости, как бы обобщая формулу Эйлера, еще в 1889 г. предложил немецкий ученый Ф. Энгессер.

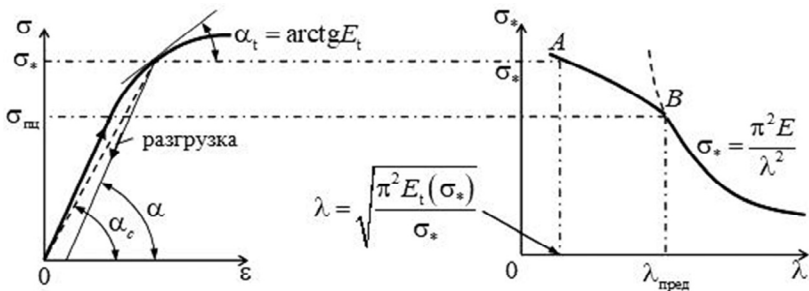


Рис. 11.7. К построению участка АВ на диаграмме $\sigma_*(\lambda)$

Алгоритм построения зависимости $\sigma_*(\lambda)$ для нелинейного участка диаграммы $\sigma - \varepsilon$ состоит в следующем: задаемся критическим напряжением σ_* , большим чем $\sigma_{\text{пл}}$; далее по диаграмме находится величина касательного модуля E_t ; по формуле

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t(\sigma_*)}{\sigma_*}}$$

вычисляется гибкость λ , соответствующая выбранным параметрам σ_* и E_t .

11.3. Приведенно-модульная критическая сила

Теория приведенно-модульной критической нагрузки была предложена Ф.С. Ясинским и Ф. Энгессером, а в дальнейшем развита и окончательно оформлена Т. Карманом. Согласно этой теории предполагается, что нагрузка P при выпучивании стержня (рис. 11.8,а) остается постоянной и что выполняется гипотеза плоских сечений. Пусть сечение симметрично относительно главных центральных осей.

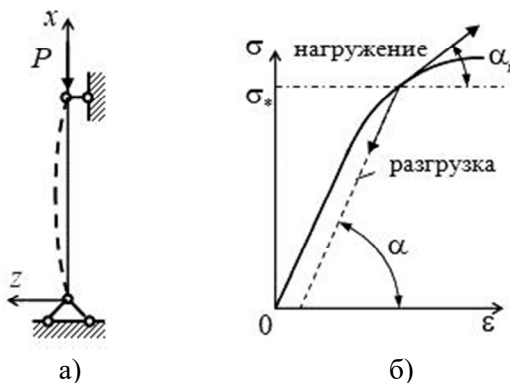


Рис. 11.8. Выпучивание стержня при постоянной нагрузке

Согласно диаграмме $\sigma - \varepsilon$ (рис. 11.8,б) волокна у стержня, лежащие на вогнутой стороне, будут испытывать дополнительную деформацию укорочения, а на выпуклой стороне – деформацию удлинения. Догружение в части поперечного сечения $F_{\text{нагр}}$ происходит с модулем E_t , а разгрузка в части поперечного сечения $F_{\text{разгр}}$ происходит с модулем упругости E . Вследствие неравенства упомянутых модулей нейтральная линия для изгибных напряжений сместится, и не будет проходить через центр тяжести поперечного сечения (рис. 11.9).

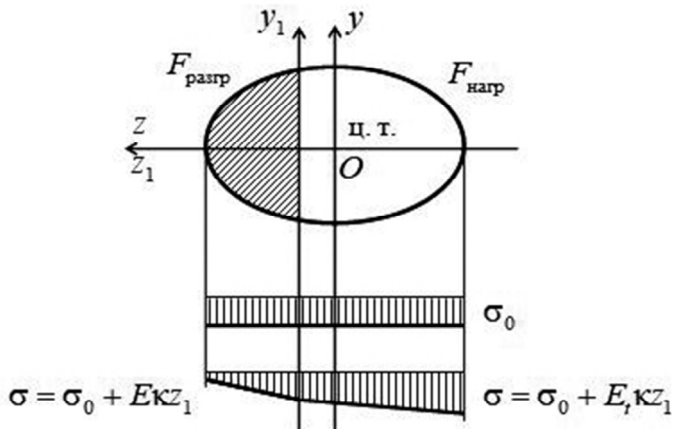


Рис. 11.9. Распределение напряжений при выпучивании

До выпучивания напряжения σ_* равномерно распределены по поперечному сечению и равны $\sigma_* = \frac{P}{F}$. Пусть κ – кривизна оси стержня в некотором сечении после выпучивания. После выпучивания напряжения для $F_{\text{разгр}}$ изменяются по закону $\sigma = \sigma_* + E\kappa z_1$, где координата z_1 отсчитывается от нового положения оси Oy_1 . Для части площади поперечного сечения $F_{\text{нагр}}$ закон изменения напряжений $\sigma = \sigma_* + E_t \kappa z_1$. Предположение о постоянстве сжимающей силы при выпучивании $\int_F \sigma dF = P$ дает возможность записать

$$\sigma_* F + E_t \kappa \int_{F_{\text{нагр}}} z_1 dF + E \kappa \int_{F_{\text{разгр}}} z_1 dF = P = \sigma_* F.$$

Отсюда получаем уравнение, определяющее новое положение нейтральной оси для изгибных напряжений Oy_1

$$E_t \int_{F_{\text{нагр}}} z_1 dF + E \int_{F_{\text{разгр}}} z_1 dF = 0 . \quad (11.4)$$

Здесь $\int_{F_{\text{нагр}}} z_1 dF$ и $\int_{F_{\text{разгр}}} z_1 dF$ – приведенные статические моменты инерции относительно оси Oy_1 .

Найдем зависимость между изгибающим моментом и кривизной

$$M = \int_F \sigma_{\text{изг}} z_1 dF = E_K \int_{F_{\text{разгр}}} z_1^2 dF + E_{tK} \int_{F_{\text{нагр}}} z_1^2 dF$$

или $M = E_r I_K$, где I – главный центральный момент инерции поперечного сечения относительно оси Oy , E_r – приведенный модуль, определяемый как

$$E_r = \frac{E \int_{F_{\text{разгр}}} z_1^2 dF + E_t \int_{F_{\text{нагр}}} z_1^2 dF}{I}$$

и критическая сила с использованием приведенного модуля равна

$$P_{*r} = \frac{\pi^2 E_r I}{(\mu l)^2} .$$

Это формула Энгессера (1895), иногда ее называют формулой Энгессера–Кармана. Рассмотрим частный случай – стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 11.10)

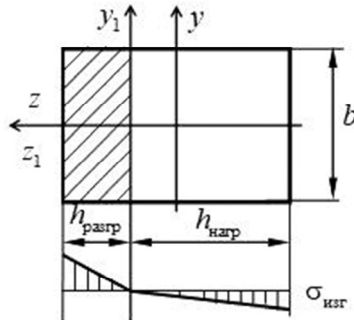


Рис. 11.10. Распределение изгибных напряжений

На рисунке 11.10 построена эпюра изгибных напряжений, демонстрирующая сдвиг нейтральной линии и показана ширина зоны разгрузки $h_{\text{разгр}}$ и зоны $h_{\text{нагр}}$, где происходит догружение сжимающими напряжениями при выпучивании стержня. Найдем положение нейтральной оси при изгибе в упругопластической стадии, используя формулу (11.4) с учетом того, что статический момент относительно некоторой оси определяется как произведение площади на расстояние от упомянутой оси до центра тяжести этой площади. В результате получим соотношение

$$E \frac{bh_{\text{разгр}}^2}{2} + E_t \frac{bh_{\text{нагр}}^2}{2} = 0. \quad (11.5)$$

Здесь $\frac{bh_{\text{разгр}}^2}{2} = S_{\text{разгр}}$ – статический момент части площади,

где имеет место разгрузка, $\frac{bh_{\text{нагр}}^2}{2} = S_{\text{нагр}}$ – статический момент части площади, где происходит догружение. Из выражения (11.5) получим

$$h_{\text{разгр}} = \sqrt{\frac{E_t}{E}} h_{\text{нагр}} = \sqrt{\frac{E_t}{E}} (h - h_{\text{разгр}}).$$

Таким образом, положение нейтральной оси определяется параметрами

$$h_{\text{разгр}} = \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} h, \quad h_{\text{нагр}} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} h.$$

Вычислим приведенный модуль E_r

$$E_r = \frac{1}{bh^3} \left(E \frac{bh_{\text{разгр}}^3}{3} + E_t \frac{bh_{\text{нагр}}^3}{3} \right) = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}. \quad (11.6)$$

Формула (11.6) называется формулой Кармана (1909). Несложно установить, что между касательным модулем, приведенным модулем и модулем продольной упругости существует соот-

ношение $E_t < E_r < E$. Кроме того, если $E_t = E$, т.е. система работает в упругой стадии, то тогда и по формуле (11.6) приведенный модуль равен упругому. Если касательный модуль равен нулю $E_t = 0$, что соответствует выходу диаграммы $\sigma - \varepsilon$ на площадку текучести, то и приведенный модуль равен нулю $E_t = 0$. В этом случае в качестве критических напряжений σ_* выступает предел текучести σ_T .

11.4. Сопоставление теорий касательного и приведенного модулей

Итак, мы рассмотрели два подхода к определению критических значений сжимающих сил для случая, когда критические напряжения σ_* превышают предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ для материалов стержней, а гибкость стержней соответственно меньше предельной $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$. При вычислении касательно-модульной нагрузки предполагается: нагружение и возмущения таковы, что во всех точках поперечного сечения происходит догружение (увеличение напряжений) пропорционально касательному модулю E_t . Приведенно-модульная нагрузка вычисляется в предположении, что стержень остается прямолинейным до некоторого момента, когда мы прикладываем пробное (боковое) нагружение и при постоянной сжимающей силе, достигшей критического значения, происходит искривление стержня (переход в смежное состояние).

На рисунке 11.11 проиллюстрирован способ построения зависимостей критических напряжений, вычисленных по касательно-модульному подходу $\sigma_{*t}(\lambda)$ и аналогичной зависимости с использованием приведенного модуля $\sigma_{*r}(\lambda)$. Естественно, эти кривые имеют место при $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$. Здесь также, как и на рис. 11.7, задаются критическим напряжением σ_* . Далее по диаграмме

$\sigma - \varepsilon$ определяют касательный модуль E_t , затем вычисляют по формуле Кармана (11.6) приведенный модуль E_r и по формулам

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{\sigma_*}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 E_r}{\sigma_*}}$$

определяют соответствующие гибкости λ_1 и λ_2 . Поскольку $E_r > E_t$, то кривая $\sigma_{*r}(\lambda)$ проходит выше $\sigma_{*t}(\lambda)$.

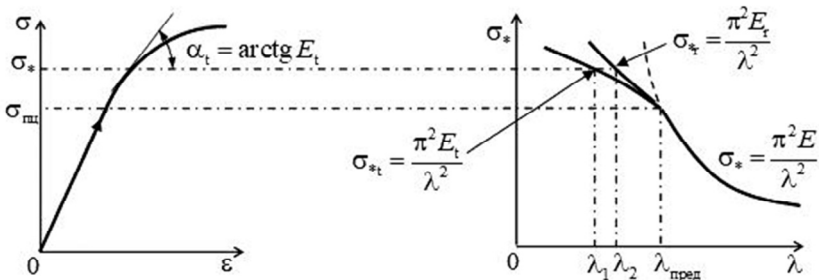


Рис. 11.11. К определению зависимостей $\sigma_{*t}(\lambda)$ $\sigma_{*r}(\lambda)$

Экспериментальные исследования по определению критических нагрузок для стержней, работающих в упругопластической стадии продемонстрировали, что опытные точки лежат ниже нижней кривой (имеется в виду диапазон $\lambda < \lambda_{пред}$). Тем не менее долгое время теория Энгессера–Кармана считалась неизменной. Однако в 1946 г. Ф. Шенли показал на простом примере, что касательно-модульная сила является нижней границей сил разветвления (см. рис. 11.12).

По-видимому, у упругопластического тела сплошной спектр собственных значений; на бифуркационной диаграмме P_{*t} – нижняя грань собственных значений, P_{*r} – верхняя грань собственных значений (рис. 11.12). И ввиду различного рода несовершенств при проведении экспериментальных исследований чаще реализуется нижняя грань собственных значений.

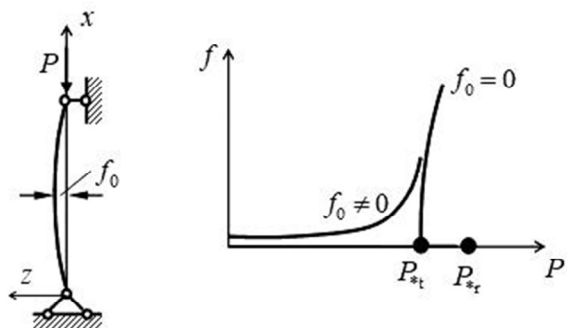


Рис. 11.12. Сжатие упругопластического стержня

Контрольные вопросы

1. Какое условие по напряжениям ограничивает область применения теории упругой устойчивости?
2. Что такое гибкость стержня и как она определяется?
3. Какие предположения закладываются в методы расчета на устойчивость стержней с гибкостью меньше предельной?
4. Чем отличаются формулы для определения критической силы по касательно-модульной и приведено-модульной нагрузке?

12. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

В этой главе дополнительно к примерам и задачам, рассмотренным в предыдущих главах, демонстрируются решения как стандартных задач на исследование устойчивости в основном стержней и стержневых систем, так и нетипичных задач, но привлекательных в смысле освоения различных подходов к решению задач устойчивости и применения доступных вычислительных систем GNU Octave, Scilab и Python.

Задача 1

Для стержня, изображенного на рис. 12.1, исследовать зависимость критического значения сжимающей силы P от жесткости пружины $c = \gamma \frac{EI}{l^3}$. В нижней опоре горизонтальный стержень AB – абсолютно жесткий.

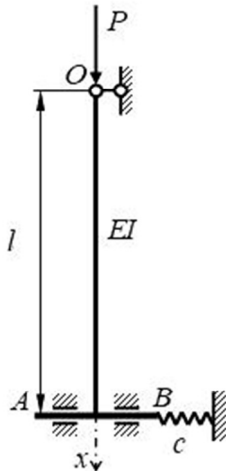


Рис. 12.1. Сжатый стержень с пружиной

После введения безразмерных параметров

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

уравнение нейтрального равновесия (уравнение статического метода исследования устойчивости) относительно прогиба стержня в плоскости чертежа $w(\xi)$ запишется как

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4$$

должно удовлетворять следующим граничным условиям (обратите внимание – начало координат выбрано на верхнем конце стержня и ось Ox направлена по оси стержня вниз)

$$\xi = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 1, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} - \gamma w = 0.$$

Удовлетворение граничных условий на верхнем конце стержня при $\xi = 0$ дает

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, \\ \beta^2 C_2 = 0. \end{cases} \quad \text{т.е. безусловно } C_2 = C_4 = 0.$$

Таким образом, выражение для $w(\xi)$ упрощается и принимает вид

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_3 \xi.$$

Удовлетворение граничных условий на нижнем конце стержня при $\xi = 1$ приводит к системе однородных уравнений относительно C_1 и C_3

$$\begin{cases} \beta C_1 \cos \beta + C_2 = 0, \\ -\beta^3 C_1 \cos \beta - \gamma C_1 \sin \beta - \gamma C_2 = 0. \end{cases}$$

Требование нетривиальности решения для постоянных интегрирования эквивалентно равенству нулю определителя системы

$$\begin{vmatrix} \beta \cos \beta & 1 \\ -\beta^3 \cos \alpha - \gamma \sin \beta & -\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия этого определителя получим трансцендентное уравнение для определения параметра критической силы β

$$\beta(\beta^2 - \gamma)\cos\beta + \gamma\sin\beta = 0, \quad \text{или} \quad \gamma(\operatorname{tg}\beta - \beta) + \beta^3 = 0.$$

Очевидны крайние случаи, когда $\gamma \rightarrow 0$ получим $\cos\beta = 0$ и критическое значение $\beta_* = \frac{\pi}{2}$, а критическая сила соответственно

$P_* = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$. Если параметр $\gamma \rightarrow \infty$, то уравнение для определения β_* будет иметь вид $\operatorname{tg}\beta = \beta$, наименьший корень которого с некоторым округлением можно записать как $\beta_* = \frac{\pi}{0,7}$. Здесь знаменатель

есть не что иное, как коэффициент приведения длины, обычно обозначаемый через μ и введенный для удобства записи критических сил для стержней с различными вариантами закрепления по концам. Нижняя опора для рассматриваемой системы в случае большой жесткости пружины выполняет роль заделки и критическая сила в этом случае равна $P_* = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}$.

Зависимость $\beta_*(\gamma)$ (в программе `b(g)`) построим с использованием вычислительной системы Scilab по программе, приведенной ниже. Диапазон изменения параметра жесткости пружины $[0,50]$ задается процедурой `linspace`. По умолчанию размер вектора g равен 100: $g(j), j = 0, \dots, 99$. Начальное приближение при

$g = 0$ естественно возьмем $\pi/2$, т.е. $\beta_*(0) = \frac{\pi}{2}$ или $b0 = \pi/2$ (в Scilab значение π реализуется как `%pi`). Для каждого значения $g(j)$ формируется функция $f(b)$, определяющая левую часть уравнения для определения параметра критической силы (строка 5). Корень уравнения отыскивается процедурой `fsolve`. Обратите внимание на то, что в этой процедуре сначала указывается начальное приближение, а потом имя функции. На каждом шаге цикла корректируется начальное приближения, в качестве которого берется предыдущее решение (строка 7). Функция `plot` строит зависимость $f(b)$ и горизонтальную линию – асимптоту для этой зависимости при $\gamma \rightarrow \infty$. Остальные операторы, включающие элементы объектно-ориентированного программирования пояснены в комментариях, отделяемых от команд двумя слешами `//`.

```

1. clear
2. g=linspace(0,50);
3. b0=%pi/2;
4. for j=1:length(g)
5.   deff('[y]=f(b)', 'y=b*(b^2-g(j))*cos(b)+g(j)*sin(b)')
6.   b(j)=fsolve(b0,f);
7.   b0=b(j);
8. end
9. plot(g',b,'k-',[g(1);g(length(g))],[%pi/0.7;%pi/0.7],'k--')
10. xgrid // Построение сетки
11. h=get("current_axes");// получение дескриптора осей
12. h.data_bounds=[0,0;50,5]; // размер координатных осей
13. h.font_size=3.5; // размер шрифта на осях
14. h.children.children(1).thickness=2;// толщина пунктирной
асимптоты
15. h.children.children(2).thickness=2.5;// толщина линии b(g)

```

Искомая зависимость $\beta_*(\gamma)$ представлена на рис. 12.2.

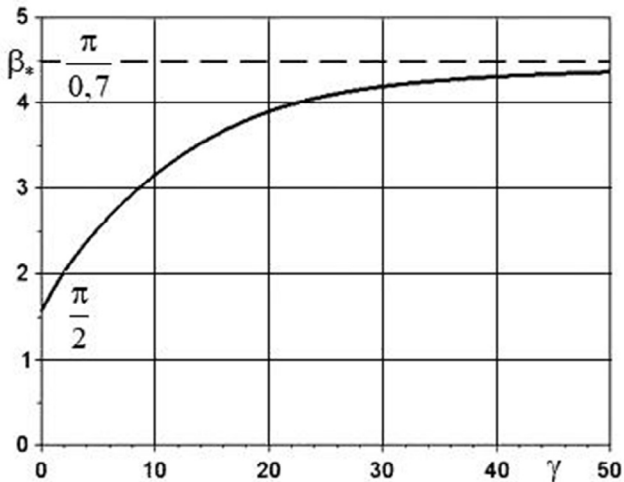


Рис. 12.2. Зависимость параметра критической силы от жесткости пружины

Задача 2

Определить критическое значение сжимающей силы P для стержня, изображенного на рис. 12.3.

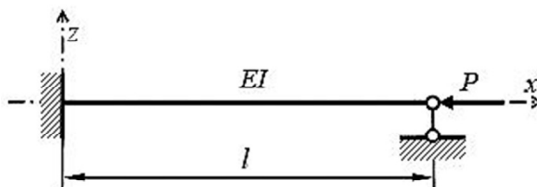


Рис. 12.3. Сжатый стержень с защемленным и опертым концами

Уравнение нейтрального равновесия имеет вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $r^4 + \beta^2 r^2 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm\beta$, $r_{3,4} = 0$. Следовательно, решение уравнения нейтрального равновесия будет иметь вид

$$w(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \xi + C_4.$$

Запишем граничные условия

$$\xi = 0, \quad w = \frac{dw}{d\xi} = 0, \quad \xi = 1, \quad w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Первая и вторая производные от нормального прогиба имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} &= \beta C_1 \cos \beta \xi - \beta C_2 \sin \beta \xi + C_3, \\ \frac{d^2 w}{d\xi^2} &= -\beta^2 C_1 \sin \beta \xi - \beta^2 C_2 \cos \beta \xi. \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{1:4}$

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 0 + C_4 &= 0, \\ \beta C_1 \cdot 1 - \beta C_2 \cdot 0 + C_3 &= 0, \\ C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta + C_3 + C_4 &= 0, \\ -\beta^2 C_1 \sin \beta - \beta^2 C_2 \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Существованию нетривиального решения уравнения нейтрального равновесия соответствует требование равенство нулю определителя этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 & 1 \\ -\beta^2 \sin \beta & -\beta^2 \cos \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения определяет критический параметр β_* . Построим зависимость $D(\beta)$. Она представлена на рис. 12.4.

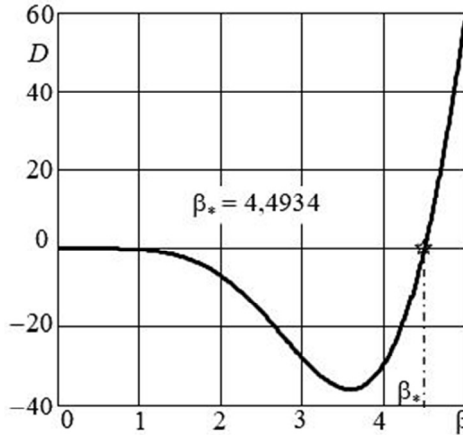


Рис. 12.4. Определение критического параметра

При известном корне $\beta_* = 4,4934$ величина критической силы определяется как

$$P_* = \frac{\beta_*^2 EI}{l^2} = \frac{20,19 EI}{l^2}.$$

В инженерной практике для однопролетных стержней вводят коэффициент приведения длины μ . Для рассматриваемого варианта закрепления стержня $\mu = 0,7$. Тогда

$$P_* = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad \text{т.к.} \quad \frac{\pi^2}{0,7^2} \approx 20,19.$$

Отыскание корней трансцендентных уравнений можно поручить процедуре `fsolve` в системе `Scilab` или `root` в системе `Python`. Соответствующие фрагменты программного кода приведены ниже. Во втором случае с целью сокращений использовалось уравнение после раскрытия определителя D . Через b обозначено β .

Scilab

1. `deff('[y]=f(b)', ..`
2. `'y=det([0,1,0,1;b,0,1,0;sin(b),cos(b),1,1;-b^2*sin(b),-b^2*cos(b),0,0])'`);
3. `b=fsolve(4.,f);`
4. `disp(b)`
5. 4.4934095

Python

1. `import numpy as np`
2. `from scipy.optimize import root`
3. `from numpy import sin,cos`
4. `def func(b):`
5. `f=sin(b)-b*cos(b)`
6. `return f`
7. `sol=root(func,4)`
8. `print(sol)`
9. 4,49340946

Задача 3

Определить оптимальное с точки зрения устойчивости подкоса AB значение угла α

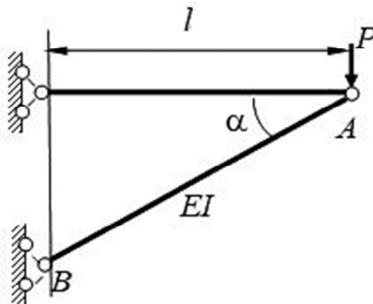


Рис. 12.5. Стержневой кронштейн

Критическому состоянию кронштейна соответствует достижение сжимающего усилия $P/\sin\alpha$ в стержне AB длиной $l/\cos\alpha$ значения, при котором он теряет устойчивость. Таким образом, имеем равенство

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{\cos\alpha}\right)^2} \quad \text{или} \quad P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Оптимальное значение угла α будет доставлять максимум функции $f(\alpha) = \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$. Вычислим производную функции $f(\alpha)$ и приравняем ее к нулю

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha) = \cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$$

Для наглядности функция $f(\alpha)$ и ее производная $f'(\alpha)$ представлены на рис. 12.6.

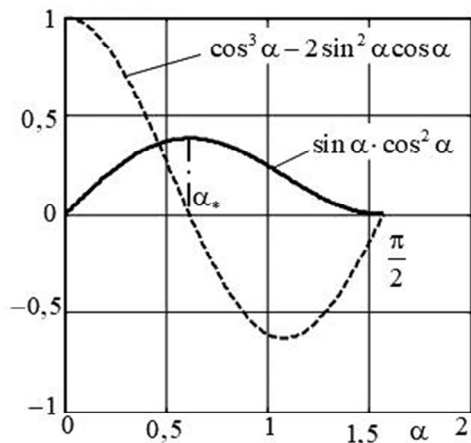


Рис. 12.6. К определению оптимального угла

Корень уравнения $f'(\alpha) = 0$ равен $\alpha_* = 0,6155$ рад или $\alpha_* = 35,26^\circ$.

Задача 4

Шарнирно опертый по концам стержень AB (рис. 12.7) находится под действием растягивающей потенциальной силы P (не меняющей своего направления) с помощью абсолютно жесткого стержня BC длиной a . В точке B стержни жестко соединены, так что при изгибе стержня AB угол поворота стержня BC равен $\frac{dw}{dx}$. Потеря устойчивости стержня здесь также, как и при сжатии связана с переходом стержня из прямолинейного состояния равновесия в смежное изогнутое состояние. Это, естественно, возможно при $a \neq 0$. Требуется построить зависимость критического значения силы P от длины a стержня BC

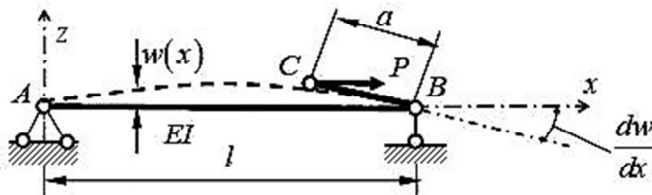


Рис. 12.7. Устойчивость стержневой системы при растяжении

Уравнение нейтрального равновесия в данном случае запишется следующим образом (обратите внимание на знак перед силой P)

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Кроме обычных безразмерных параметров – безразмерного усилия β^2 и безразмерной координаты ξ , введем параметр α , равный отношению длины стержня BC к длине стержня AB , устойчивость которого исследуется

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \alpha = \frac{a}{l}.$$

Тогда уравнение нейтрального равновесия запишется в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Его решение ищем в виде $w(\xi) = C \exp(r\xi)$. Характеристическое уравнение $r^4 - \beta^2 r^2 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm\beta$, $r_{3,4} = 0$, следовательно,

$$w(\xi) = C_1 \operatorname{sh}\beta\xi + C_2 \operatorname{ch}\beta\xi + C_3 \xi + C_4.$$

Три граничных условия неоднократно встречались и ранее

$$\xi = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \xi = 1, \quad w = 0,$$

а четвертое граничное условие для заданной системы – это равенство изгибающего момента моменту от силы P

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = aP \frac{dw}{dx},$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = \beta^2 \alpha \frac{dw}{d\xi}.$$

Вычислим первую и вторую производные от нормального прогиба $w(\xi)$

$$\frac{dw}{d\xi} = \beta C_1 \operatorname{ch}\beta\xi + \beta C_2 \operatorname{sh}\xi + C_3, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \beta^2 C_1 \operatorname{sh}\beta\xi + \beta^2 C_2 \operatorname{ch}\beta\xi.$$

Удовлетворяя первым трем граничным условиям, получим

$$\xi = 0 \quad C_2 + C_4 = 0, \quad C_2 = 0 \Rightarrow C_4 = 0;$$

$$\xi = 1 \quad C_1 \operatorname{sh}\beta + C_3 = 0, \quad \Rightarrow C_3 = -C_1 \operatorname{sh}\beta.$$

Последнее граничное условие при $\xi = 1$ преобразуется следующим образом

$$\beta^2 C_1 \operatorname{sh} \beta - \beta^2 \alpha (\beta C_1 \operatorname{ch} \beta + C_3) = 0,$$

$$C_1 \operatorname{sh} \beta - \alpha (\beta C_1 \operatorname{ch} \beta - C_1 \operatorname{sh} \beta) = 0,$$

и с учетом нетривиальности решения $C_1 \neq 0$ дает уравнение для определения критического значения параметра β_*

$$\operatorname{sh} \beta - \alpha \beta \operatorname{ch} \beta + \alpha \operatorname{sh} \beta = 0.$$

В более удобном виде для исследования предельных случаев это уравнение можно представить в виде

$$\operatorname{th} \beta = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{\alpha}} \rightarrow \beta_*, \quad P_* = \frac{\beta_*^2 EI}{l^2}.$$

Зависимость корня этого уравнения от отношения длин стержней представлена на рис. 12.8. При анализе предельных случаев в процессе решения практических задач необходимо учитывать условие прочности стержня AB при $\alpha \rightarrow 0$.

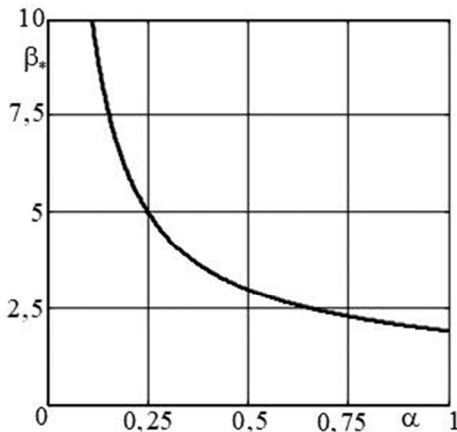


Рис. 12.8. Зависимость критического параметра от соотношения длин стержней

Задача 5

Левая опора стержня шарнирно оперта (рис. 12.9). Правая опора опирается на пружину жесткостью c . Требуется построить зависимость критической силы P от жесткости пружины.

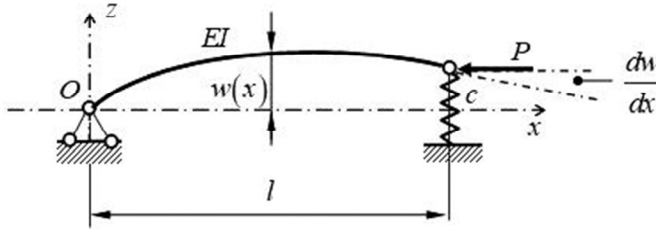


Рис. 12.9. Стержень с упругой опорой

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{cl^3}{EI}.$$

Для определения безразмерной критической силы $\beta_*^2(\gamma)$ как функции параметра жесткости опоры γ рассмотрим уравнение нейтрального равновесия стержня, которое в безразмерных параметрах запишется как

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$w(\xi) = C_1 \sin(\beta\xi) + C_2 \cos(\beta\xi) + C_3 \xi + C_4.$$

Оно должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dw}{d\xi} - \gamma w = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Из граничных условий при $\xi = 0$ следует $C_2 = C_4 = 0$, тогда выражение для $w(\xi)$ будет следующим

$$w(x) = C_1 \sin \beta\xi + C_3 \xi.$$

Подставим это решение $w(x)$ в граничные условия при $\xi = 1$

$$-C_1\beta^2\sin\beta = 0,$$

$$C_1(-\beta^3\cos\beta + \beta^3\cos\beta - \gamma\sin\beta) + C_2(\beta^2 - \gamma) = 0.$$

Отсюда для критического значения сжимающей силы α_* получим

$$\beta_*(\gamma) = \min \begin{cases} \sin\beta = 0 \\ \beta^2 = \gamma \end{cases} = \min \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \right\}.$$

Таким образом, для безразмерной критической силы в зависимости от жесткости опоры имеем

$$\beta_*^2(\gamma) = \min \begin{cases} \gamma, & \gamma \leq \pi^2, \\ \pi^2, & \gamma > \pi^2. \end{cases}$$

Зависимость β_*^2 от жесткости упругой опоры γ представлена на рис. 12.10. При значениях $\gamma \leq \pi^2$ критическое значение сжимающей силы линейным образом зависит от γ . В этом случае поведение стержня при потере устойчивости аналогично абсолютно жесткому стержню. При больших жесткостях пружины $\gamma > \pi^2$ критическое значение сжимающей силы уже не зависит от жесткости опоры и $\beta_*^2 = \pi^2$, т.е. как для шарнирно опертого по концевым сечениям стержня.

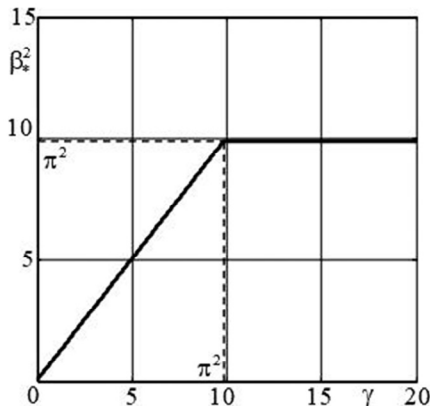


Рис. 12.10. Зависимость критической силы от жесткости пружины

Задача 6

Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей с тем только отличием, что левый конец стержня жестко зашпелен (рис. 12.11). Цель исследования также состоит в построении зависимости критической силы от жесткости упругой опоры.

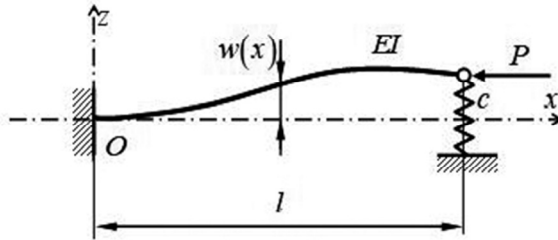


Рис. 12.11. Консоль с дополнительной упругой опорой

Для определения критической силы $\beta_*^2(\gamma) = \frac{Pl^2}{EI}$ как функции параметра жесткости дополнительной опоры $\gamma = \frac{cl^3}{EI}$ рассмотрим уравнение нейтрального равновесия панели, которое в безразмерных параметрах имеет вид

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$w(\xi) = C_1 \cos(\beta\xi) + C_2 \sin(\beta\xi) + C_3 \xi + C_4.$$

Оно должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0, \\ \text{при } \xi = 1 - \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \beta^2 \frac{dw}{d\xi} - \gamma w = 0. \end{aligned}$$

Из первых двух граничных условий следует, что $C_4 = -C_2$ и $C_3 = -\beta C_1$. Условия нетривиальности решения для C_1 и C_2 граничные условия при $\xi = 1$ дают

$$\begin{vmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\beta^2 - \gamma \sin \beta + \gamma \beta & \gamma - \gamma \cos \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим трансцендентное уравнение для определения безразмерного критического усилия β_*^2

$$\beta(\beta - \gamma)\cos\beta + \gamma\sin\beta = 0.$$

На рисунке 12.12 представлена зависимость критического значения параметра потенциальной силы β_*^2 от жесткости упругого закрепления γ , полученная из этого уравнения с помощью функции `fsolve` вычислительной системы Scilab. Критическое значение β_*^2 монотонно возрастает от значения $\pi^2/4$ (консольный стержень со свободным концом) до значения $\pi^2/(0,7)^2$ при $\gamma \rightarrow \infty$ (стержень, один конец которого жестко защемлен, а другой – шарнирно оперт).

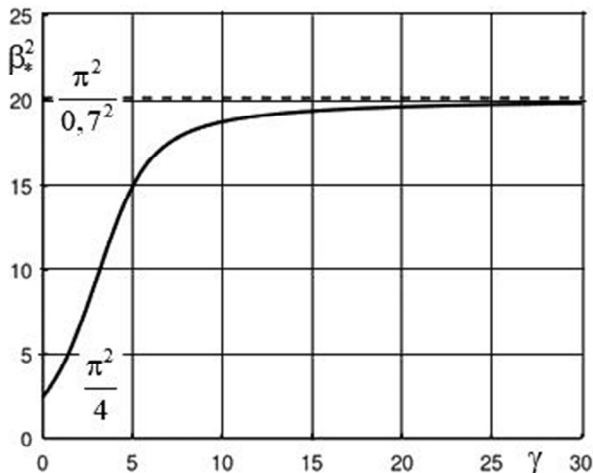


Рис. 12.12. Зависимость критической силы от жесткости пружины

Кривая на рис. 12.12 построена по программе, составленной в системе GNU Octave, где параметры β и γ обозначено b и g , b_0 – начальное приближение. В программу входит файл-функция $y=f_bg(b,g)$ и script-file $krs_g.m$. Вследствие того, что функция $fzero$ в Octave допускает только два аргумента: ссылка на файл-функцию и начальное приближения b_0 для корня трансцендентного уравнения, варьируемый параметр g объявлен как глобальная переменная.

```

1. function y=f_bg(b,g)
2. global g;
3. y=b*(b-g)*cos(b)+g*sin(b);
4. endfunction
krs_g.m
1. clear
2. global g;
3. c=linspace(0,30);
4. b0=pi/2;
5. for j=1:length(c)
6.     g=c(j)
7.     b(j)=fzero('f_bg',b0);
8.     b0=b(j)
9. endfor
10. b=b.^2;
11. figure(1);hold on;grid on;
12. plot(c,b,'k-', 'linewidth',2)
13. plot([0 c(end)],[(pi/0.7)^2 (pi/0.7)^2], 'k--', 'linewidth',1.5)
14. set(gca, 'linewidth', 1.5, 'fontsize', 12)

```

Задача 7

К правому концу шарнирно опертого стержня AB жесткостью EI и длиной l присоединен абсолютно жесткий рычаг BC длиной a , через который на стержень AB передается сжимающая сила P (рис. 12.13). Требуется вывести уравнение для определения критического значения силы P_* и описать характер поведения P_* в зависимости от длины рычага.

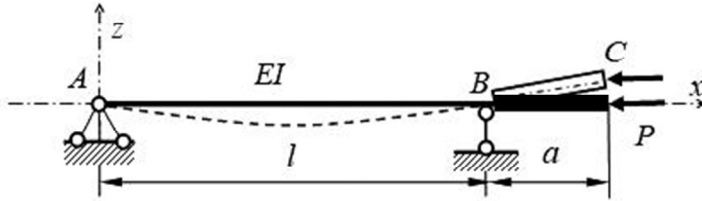


Рис. 12.13. Передача сжимающего усилия через жесткий рычаг

В общепринятых безразмерных параметрах уравнение нейтрального равновесия имеет вид

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0.$$

Кроме безразмерных параметров $\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}$ и $\xi = \frac{x}{l}$ введем

$\alpha = \frac{a}{l}$ — отношение длины абсолютно жесткого стержня BC к длине стержня AB , устойчивость которого исследуется. Тогда граничные условия на правой опоре при $x = l$

$$w(l) = 0 \quad EI \frac{d^2 w}{dx^2} = Pa \frac{dw}{dx}$$

перепишутся как

$$\xi = 1, \quad w(1) = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \alpha \beta^2 \frac{dw}{d\xi}.$$

Решение уравнения нейтрального равновесия имеет вид

$$w(\xi) = C_1 \sin(\beta\xi) + C_2 \cos(\beta\xi) + C_3 \xi + C_4.$$

Удовлетворение этого решения граничным условиям при $\xi = 0$

$$w(0) = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0,$$

в результате чего получим $C_2 = C_4 = 0$ и $w(\xi)$ примет вид

$$w(\xi) = C_1 \sin(\beta\xi) + C_3 \xi.$$

Граничные условия при $\xi = 1$ дают систему однородных уравнений относительно констант C_1 и C_3

$$C_1 \sin \beta + C_3 = 0,$$

$$-\beta^2 C_1 \sin \beta - \beta^2 \alpha (\beta C_1 \cos \beta + C_3) = 0.$$

Условие нетривиальности решения уравнения нейтрального равновесия соответствует равенству нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} \sin \beta & 1 \\ \sin \beta + \beta \alpha \cos \beta & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение для определения критического параметра β_* при заданном значении α

$$(1 - \alpha) \sin \beta + \alpha \beta \cos \beta = 0.$$

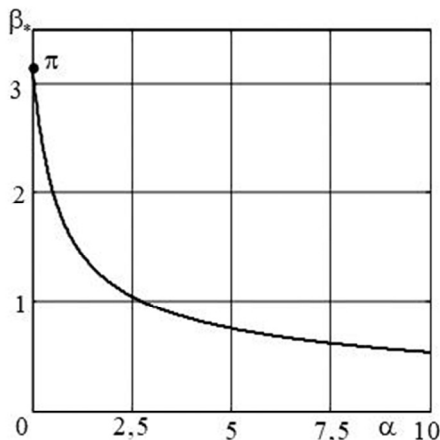


Рис. 12.14. Зависимость критического параметра от соотношения длин рычага и стержня

Зависимость $\beta_*(\alpha)$ построена на рис. 12.14. Если $\alpha = 0$, то критическое значение силы P_* определяется формулой Эйлера

$P_* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$. С ростом параметра α критическая сила стремится к нулю.

Задача 8

Удлиненная пластина с двумя разрезами жестко присоединена в верхней части к жесткому устройству (рис. 12.15,а) и нагружена силой P [12]. Предполагая, что боковые части пластины 2 и средняя часть 1 представляют собой стержни одинаковой длины l и жесткости на изгиб $EI_1 = EI_2 \equiv EI$, определить критическую силу P_* .

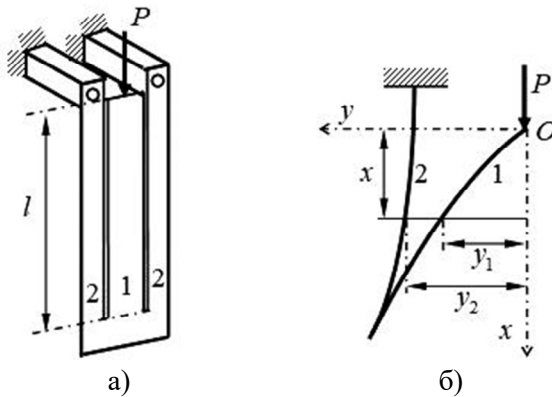


Рис. 12.15. Пластина с разрезами (а) и форма потери устойчивости (б)

Рассмотрим систему в плоскости изгиба (рис. 12.15,б), где показано, как введена система координат, и запишем уравнения нейтрального равновесия, исходя из уравнений второго порядка:

для полосы 1:
$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P y_1 = 0,$$

для полосы 2:
$$EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} - P y_2 = 0.$$

Введем обозначения $\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI}$, $\xi = \frac{x}{l}$ и перепишем уравнения для полос пластины в виде

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \beta^2 y_1 = 0, \quad \frac{d^2 y_2}{d\xi^2} - \beta^2 y_2 = 0.$$

Запишем решения этих уравнений

$$y_1 = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi, \quad y_2 = C_3 \operatorname{sh} \beta \xi + C_4 \operatorname{ch} \beta \xi.$$

Граничные условия и условия сопряжения для $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$

$$\begin{array}{lll} \xi = 0 & y_1 = 0 & \frac{dy_2}{d\xi} = 0 \\ \xi = 1 & y_1 = y_2 & \frac{dy_1}{d\xi} = \frac{dy_2}{d\xi} \end{array}$$

Нетрудно видеть, что из первых двух условий $C_2 = 0$ и $C_3 = 0$, а условия сопряжения решений при $\xi = 1$ дают систему алгебраических уравнений относительно C_1 и C_4

$$\begin{aligned} C_1 \sin \beta &= C_4 \operatorname{ch} \beta, \\ \beta C_1 \cos \beta &= \beta C_4 \operatorname{sh} \beta. \end{aligned}$$

Разделив левые и правые части этих уравнений друг на друга получим трансцендентное уравнение для определения критического значения β_* , а, следовательно, и P_*

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{th} \beta}.$$

Графическая иллюстрация решения этого уравнения представлена на рис. 12.16.

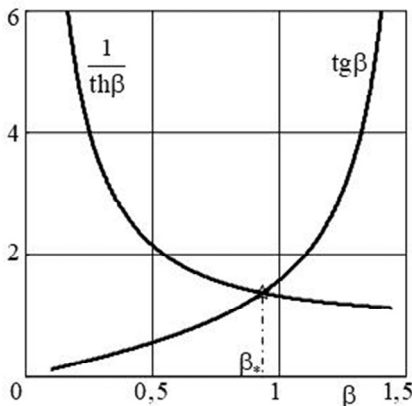


Рис. 12.16. Определение критического параметра

Критическое значение параметра $\beta_* = 0,938$. Следовательно

$$P_* = \frac{\beta_*^2 EI}{l^2} = \frac{0,88EI}{l^2}.$$

Предлагается читателю рассмотреть вариант нагружения системы, когда сила направлена вверх.

Задача 9

Стержень, защемленный на одном конце, а на другом соединенный с неподвижным основанием с помощью пружины (рис. 12.17), равномерно нагревается на $\Delta T = 50^\circ \text{C}$. Найти наибольшее значение длины l , при которой прямолинейная форма стержня будет устойчива. Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{град}^{-1}$, минимальный радиус инерции поперечного сечения $i_{\min} = 0,025 \text{ м}$. Жесткость пружины c принять равной $c = \frac{2EF}{l}$. EI, EF – жесткости стержня на изгиб и на растяжение – сжатие.

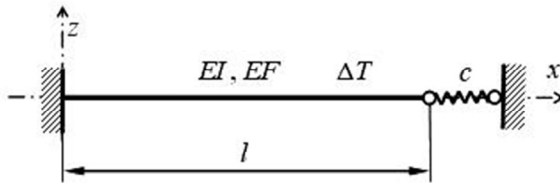


Рис. 12.17. Консольный стержень с пружиной

Определим сжимающее усилие N , возникающее в стержне при нагревании. Для этого воспользуемся уравнением совместности деформаций

$$\alpha \Delta T l = \frac{N}{c} + \frac{Nl}{EF} = \frac{Nl}{2EF} + \frac{Nl}{EF} = \frac{3}{2} \frac{Nl}{EF}.$$

Из этого уравнения следует

$$N = \frac{2}{3} \alpha \Delta T \cdot EF.$$

Для критического состояния это усилие должно равняться критической силе P_* для стержня, заземленного на одном конце, т.е.

$$N = \frac{2}{3} \alpha \Delta T \cdot EF = P_* = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Отсюда

$$l^2 = \frac{\pi^2 EI}{4} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha \Delta T EF} = \frac{3\pi^2}{8} \frac{i^2}{\alpha \Delta T},$$

где $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ – радиус инерции поперечного сечения. Таким образом, для наибольшего значения длины стержня, при которой при заданном температурном нагружении он не будет терять устойчивость, получаем

$$l = \sqrt{\frac{3\pi^2}{8} \frac{i^2}{\alpha \Delta T}} = 1,924 [м].$$

Задача 10

Стержень жесткостью EI и длиной l находится под действием продольной силы P , приложенной в середине (рис. 12.18). Требуется записать уравнение нейтрального равновесия и определить критическое значение сжимающей силы P энергетическим методом.

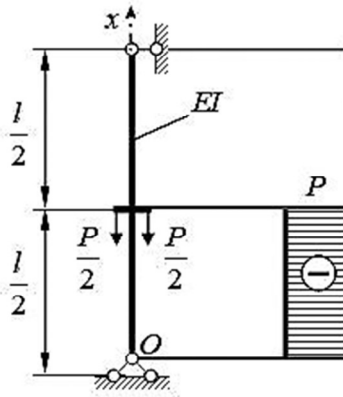


Рис. 12.18. Стержень с нагружением в среднем сечении

Уравнение нейтрального равновесия в случаях, когда продольная сила вдоль оси стержня есть кусочно постоянная функция, удобно записывать с использованием функции Хевисайда $\eta(x)$. Эта функция, выражение для которой можно записать следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

равна нулю, если ее аргумент отрицательный, и единице при положительном аргументе. В данном случае при выбранной системе координат, когда продольная сила отлична от нуля и равна $N = -P$ при $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ уравнение нейтрального равновесия можно записать в виде

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dw} \left[P \eta \left(x - \frac{l}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] = 0.$$

Для приближенного определения критического значения силы P_* воспользуемся формулой Релея, дающей оценку сверху для P_* . Для стержня продольная сила у которого пропорционально некоторому параметру β , т.е. $N(x) = \beta f(x)$, оценку критического значения параметра β_* можно получить по формуле

$$\beta_* = \frac{\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l f(x) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx},$$

где под $w(x)$ понимается функция, аппроксимирующая форму потери устойчивости. Функция $w(x)$ должна удовлетворять по крайней мере кинематическим граничным условиям. Для рассматриваемой системы в качестве параметра β можно принять силу P . Тогда формула Релея запишется следующим образом

$$P_* = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \eta \left(x - \frac{l}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}.$$

В качестве функции, аппроксимирующей форму потери устойчивости, можно взять

$$w(x) = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Интегралы, стоящие в числителе и знаменателе формулы Релея в данном случае несложно вычисляются

$$\int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = EI \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \left(-\sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = EI \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l \eta \left(x - \frac{l}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(\cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{l}{4}.$$

И для оценки критической силы окончательно получаем

$$P_* = \frac{EI \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2}}{\frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{4}} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}.$$

Задача 11

Используя формулу Релея, определить критическое значение интенсивности нагрузки N_* , равномерно сжимающей сплошную круговую пластину радиуса R , защемленную по контуру (рис. 12.19).

В главе 9 для данной системы путем интегрирования уравнения нейтрального равновесия получено значение для критической нагрузки, равное

$$N_* = K \frac{D}{R^2}, \quad (1)$$

где безразмерный коэффициент $K = 14,68$, D – цилиндрическая жесткость пластины.

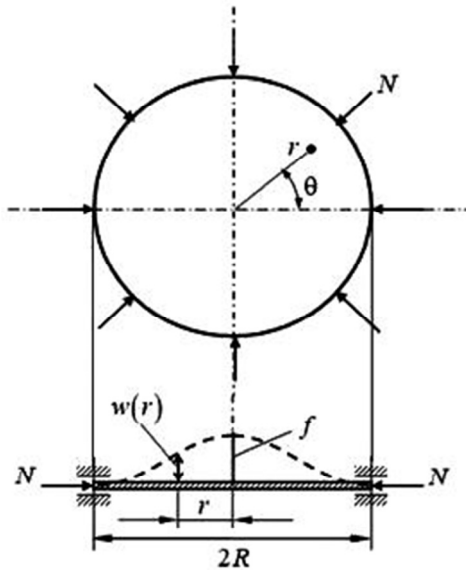


Рис. 12.19. Круговая пластина при сжатии

Формула Релея для оценки параметра нагружения N_* в случае осесимметричной формы потери устойчивости после интегрирования по угловой координате θ примет вид

$$N_* = \frac{\int_0^R D \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] 2\pi r dr}{\int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 2\pi r dr}. \quad (2)$$

В качестве функции, аппроксимирующей форму потери устойчивости и удовлетворяющую кинематическим граничным условиям, примем

$$w(r) = f \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2. \quad (3)$$

Для вычисления коэффициента K воспользуемся математической системой Python. Программа на языке Python представлена в Приложении 3. Для предполагаемой формы потери устойчивости используется безразмерный вариант формулы (3), т.е. $w(r) = (1 - r^2)^2$. Здесь под r понимается r/R . В результате работы программы с использованием модуля matplotlib системы Python строится график для $w(r)$. Он представлен на рис. 12.20.

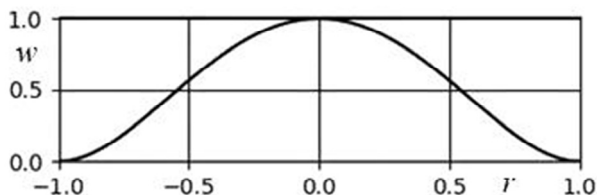


Рис. 12.20. Форма потери устойчивости

В формулу (2) входят первая и вторая производные от функции $w(r)$. Эти процедуры в программе реализуются модулем символьных вычислений sympy. Для вычисления интегралов, входящих в формулу Релея, выражение (2) представляется в виде, определяющем коэффициент K в формуле (1)

$$K = \frac{I_2 - 2(1 - \nu)I_3}{I_1}, \quad (4)$$

где интегралы, входящие в это выражение соответственно равны:

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r dr,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr,$$

$$I_3 = \int_0^1 \left(\frac{d^2w}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 r dr.$$

Эти интегралы вычисляются с помощью процедуры quad из модуля scipy.integrate. После вычисления интегралов по формуле (4) определяется коэффициент K .

После запуска программы в окне EDLE Shell 3.10.5 (числа – это версия Python) появляются выражения

```
-4*r*(1 - r**2)
12*r**2 - 4
0.6666666666666666
10.666666666666668
-1.8041124150158794e-16
16.000000000000004
```

Первые два выражения – это соответственно первая и вторая производные от функции $w(r)$.

$$\frac{dw}{dr} = -4r(1 - r^2), \quad \frac{d^2w}{dr^2} = 12r^2 - 4.$$

Следующие три числа – значения интегралов I_1 , I_2 и I_3 . Последнее число – коэффициент K . В силу того, что интеграл I_3 при множителе $2(1 - \nu)$ равен нулю, коэффициент K , как и при точном решении (глава 9) не зависит от коэффициента Пуассона ν .

Таким образом, коэффициент $K = 16$, а формула Релея при выбранной функции, аппроксимирующей форму потери устойчивости, дает оценку для критического значения нагрузки, равную

$$N_* = 16 \frac{D}{R^2}.$$

**ПРОГРАММА ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ
УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА
В СИСТЕМЕ GNU OKTAVE**

Решение задачи начинается с построения форм собственных колебаний. Для этого сначала вычислим параметры собственных частот с помощью функции $f_bet1_n(n)$, где n – принятое число членов ряда в разложении решения возмущенного движения. Эта функция с помощью процедуры $fzero$ вычисляет нули частотного уравнения

$$1 + \cos\beta \cdot \cosh\beta = 0,$$

левая часть которого определяется функцией $f_beta(\beta)$. Для каждого корня принимается свое начальное приближение. В данном случае начальные приближения даются формулой

$$\frac{\pi}{2}(2j-1), \quad j = 1 \dots n.$$

Для заданной системы частотные параметры β_k должны получаться в порядке возрастания, не повторяясь. Напомним, что собственные частоты колебаний стержня (пустого трубопровода) определяются как

$$\omega_k = \frac{\beta_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}.$$

1. function [y]=f_bet1_n(n)
2. y=zeros(1,n);
3. for j=1:n
4. y(j)=fzero('f_beta',(pi/2)*(2*j-1));
5. endfor
6. endfunction
1. function [y]=f_beta(beta)
2. y=1+cosh(beta)*cos(beta);
3. endfunction

После вычисления необходимого количества частотных параметров β_k определяются формы собственных колебаний $\varphi_k(\beta_k \xi)$ согласно формуле

$$\varphi_k(\beta_k \xi) = S_4(\beta_k \xi) - \frac{S_2(\beta_k)}{S_1(\beta_k)} S_3(\beta_k \xi),$$

где $S_{1+4}(\beta_k \xi)$ – функции Крылова – фундаментальная система решений уравнения собственных колебаний стержня. Определяются они по формулам

$$S_1(\beta_k \xi) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\beta_k \xi) + \cos(\beta_k \xi)], \quad S_2(\beta_k \xi) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\beta_k \xi) + \sin(\beta_k \xi)],$$

$$S_3(\beta_k \xi) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\beta_k \xi) - \cos(\beta_k \xi)], \quad S_4(\beta_k \xi) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(\beta_k \xi) - \sin(\beta_k \xi)],$$

и им соответствуют следующие файлы-функции

1. function [y]=S1(bet,x)
2. y=(1/2)*(cosh(bet*x)+cos(bet*x));
3. endfunction
1. function [y]=S2(bet,x)
2. y=(1/2)*(sinh(bet*x)+sin(bet*x));
3. endfunction
1. function [y]=S3(bet,x)
2. y=(1/2)*(cosh(bet*x)-cos(bet*x));
3. endfunction
1. function [y]=S4(bet,x)
2. y=(1/2)*(sinh(bet*x)-sin(bet*x));
3. endfunction

Функция $\text{form}(\text{bet},x)$, где входными параметрами кроме координаты $0 \leq \xi \leq 1$ (в качестве ξ выступает x) является вектор β , формирует вектор-столбец с n элементами, являющимися формами собственных колебаний. Аналогичные функции составлены и для первой, второй и четвертой производных, необходимых для вычисления соответствующих матриц. При записи выражений для производных использовались известные свойства функций Крылова.

```

1. function [y]=form(bet, x)
2. for j=1:length(bet)
3. y(j,:)=S4(bet(j),x)-(S2(bet(j),1)/S1(bet(j),1))*S3(bet(j),x);
4. endfor
5. endfunction
1. function [y]=form_1pr(bet,x)
2. for j=1: length(bet)
3. y(j,:)=bet(j)*(S3(bet(j),x)-(S2(bet(j),1)/S1(bet(j),1))*S2(bet(j),x));
4. endfor
5. endfunction
1. function [y]=form_2pr(bet,x)
2. for j=1: length(bet)
3. y(j,:)=bet(j)^2*(S2(bet(j),x)-(S2(bet(j),1)/S1(bet(j),1))*S1(bet(j),x));
4. endfor
5. endfunction
1.function [y]=form_4pr(bet,x)
2. for j=1: length(bet)
3. y(j,:)=bet(j)^4*(S4(bet(j),x)-(S2(bet(j),1)/S1(bet(j),1))*S3(bet(j),x));
4. endfor
5. endfunction

```

Файлы-функции $f_A(\text{bet})$, $f_B(\text{bet})$, $f_C(\text{bet})$ и $f_D(\text{bet})$ на основе формул

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, & \mathbf{B} &= \int_0^1 \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \\
\mathbf{C} &= \int_0^1 \frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, & \mathbf{D} &= \int_0^1 \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

вычисляют матрицы, порожденные процедурой метода Бубнова–Галеркина при преобразовании системы с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы. При интегрировании использовался метод трапеций и учитывалось одно из основных свойств собственных форм, в частности, свойство ортогональности. Последнее замечание отразилось на составлении функций $f_A(\text{bet})$ и $f_C(\text{bet})$.

```

1. function [y]=f_A(bet)
2. dx=0.001;
3. x=0:dx:1;
4. y=diag(dx*trapz((form(bet,x')).^2));
5. endfunction
1. function [y]=f_B(bet)
2. dx=0.005;
3. x=0:dx:1;
4. for k=1:length(x)
5.   C(:,k)=form_1pr(bet,x(k))*(form(bet,x(k)));
6. endfor
7. y=dx*trapz(C,3);
8. endfunction
1. function [y]=f_C(bet)
2. dx=0.001;
3. x=0:dx:1;
4. y=diag(dx*trapz(form_4pr(bet,x)'.*form(bet,x)'));
5. endfunction
1. function y=f_D(bet)
2. dx=0.005;
3. x=0:dx:1;
4. for k=1:length(x)
5.   C(:,k)=form_2pr(bet,x(k))*(form(bet,x(k)));
6. endfor
7. y=dx*trapz(C,3);
8. endfunction

```

Таким образом, все необходимые файлы-функции подготовлены, можно перейти к формированию scriptfile. Цель программы найти множество таких сочетаний параметров потока жидкости μ , α , при которых действительная часть хотя бы одного из характеристических показателей λ , определяемых уравнением

$$\mathbf{P}_2 \lambda^2 + \mathbf{P}_1 \lambda + \mathbf{P}_0 = 0,$$

где

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_1 = 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}, \quad \mathbf{P}_0 = (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}),$$

обратиться в нуль.

Сетка на плоскости μ, α строится с помощью процедур `linspace` с указанием минимальных и максимальных значений параметров. Число отрезков по каждой оси берется по умолчанию, равное 100. Начальные значения взяты малыми и отличными от нуля во избежание особенностей при вычислениях и построениях графиков. В узлах сетки с конструированием двойного цикла вычисляются характеристические показатели с применением процедуры `e = rolyeig(P0,P1,P2)`, и фиксируется максимальное значение из всех действительных частей характеристических показателей $rl(k,j) = \max(\text{real}(e))$. Граница областей устойчивости и флаттера строится с помощью графической процедуры `gr = contourc(mu,alpha,rl',[0 0])`, которая формирует двумерный массив `gr`, соответствующий нулевому уровню поверхности $rl(k,j)$. Искомой границе соответствует `mu=gr(1,2:end)` и `alpha=gr(2,2:end)`. Первый столбец указывает число полученных точек. В последней строке программы элементами объектно-ориентированного программирования устанавливается (`set`) толщина осей и размер шрифта осей с дескриптором (`gca`).

Scriptfile `gran_flat.m`

```

1. clear
2. n=8;% Число членов ряда
3. bet=f_bet1_n(n);% Определение частотных параметров
4. A=f_A(bet);
5. B=f_B(bet);
6. C=f_C(bet);
7. D=f_D(bet);
8. alpha=linspace(0.1,20);
9. mu=linspace(0.01,0.99);
10. for k=1:length(mu)
11.     for j=1:length(alpha)
12.         P0=(1-mu(k))*C+alpha(j)^2*D;
13.         P1=2*alpha(j)*sqrt(mu(k)*(1-mu(k)))*B;
14.         P2=A;

```



```

15.         e = polyeig(P0,P1,P2);
16.         rl(k,j)=max(real(e));
17.     endfor
18.     h=waitbar(k/length(mu));
19. endfor
20. close(h)
21. gr=contourc(mu,alpha,rl',[0 0]);
22. figure(1)
23. hold on, grid on; box on
24. plot(gr(1,2:end),gr(2,2:end),'k','linewidth',2)
25. set(gca, "linewidth", 1, "fontSize", 10)

```

В результате работы программы, за ходом которой можно наблюдать по полосе waitbar, строится граница флаттера, представленная на рис. 1.

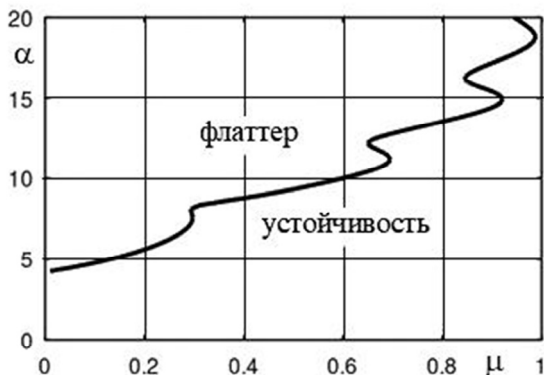


Рис. 1. Граница флаттера для трубопровода

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

Вывод уравнений возмущенного движения двойного маятника

Рассмотрим плоские колебания двухзвенного маятника с дополнительной связью, находящегося под действием потенциальной («мертвой») силы Q и следящей силы P , которая при любых отклонениях маятника направлена вдоль оси второго звена (рис. 1). Массы m звеньев длиной l сосредоточены на их концах. Шарниры A и B характеризуются жесткостью c и коэффициентом рассеяния энергии b . Дополнительный элемент в виде горизонтальной вязкоупругой связи с характеристиками c_0 и b_0 соответственно, соединяет конец второго звена C с основанием в точке D . Предполагается, что в процессе колебаний маятника точки C и D находятся на одной горизонтали. Впервые задача об устойчивости такой системы при действии только следящей силы и без дополнительной связи была поставлена швейцарским ученым Циглером в 1952 г. За обобщенные координаты примем углы отклонения звеньев маятника от вертикального положения φ_1, φ_2 . Значения $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ соответствуют положению равновесия, при котором упругие элементы в соединениях звеньев между собой и с основанием не нагружены.

Кинетическая энергия маятника при больших отклонениях от положения равновесия определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (1)$$

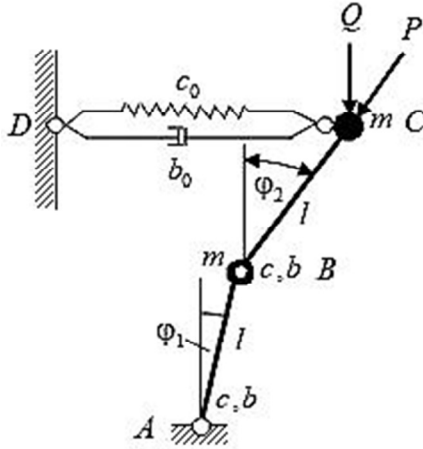


Рис. 1. Двухзвенный маятник с дополнительной связью

Здесь точкой обозначена производная по времени t . Потенциальную энергию «мертвой» силы Q и упругих элементов запишем в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}c\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_0l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2 - , \quad (2)$$

$$- Ql(2 - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Виртуальная работа следящей силы P при отклонениях звеньев маятника запишется как

$$\delta'A = -Pl \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \delta\varphi_1. \quad (3)$$

Рассеяние энергии в системе учтем введением диссипативной функцией Релея

$$R = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}b(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}b_0l(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2. \quad (4)$$

Уравнения движения системы получим с использованием уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_j} + \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \varphi_j} = Z_j, \quad (j=1,2), \quad (5)$$

где Z_j – обобщенные силы. Подставляя в (5) выражения (1)–(4) и введя вектор угловых перемещений $\Phi^T = [\varphi_1 \varphi_2]$ и безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{Ql}{c}, \quad \beta = \frac{Pl}{c}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{c}{ml^2}, \quad \gamma = \frac{c_0 l^2}{c}, \quad \varepsilon = \frac{b \omega_0}{c}, \quad \eta = \frac{b_0}{\omega_0 m}.$$

получим матричную форму уравнений движения

$$\mathbf{A}(\Phi) \ddot{\Phi} + \mathbf{D}(\Phi) \dot{\Phi}^2 + \mathbf{B}(\Phi) \dot{\Phi} + \mathbf{C}_1 \Phi - \alpha \mathbf{F}_1(\Phi) + \beta \mathbf{F}_2(\Phi) + \gamma \mathbf{F}_3(\Phi) = 0, \quad (6)$$

где обозначено

$$\mathbf{A}(\Phi) = \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\Phi) = \begin{bmatrix} 2\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_1 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & \cos^2 \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_1(\Phi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2(\Phi) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\Phi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \\ \cos \varphi_2 (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \end{bmatrix}.$$

В уравнении (6) под $\dot{\Phi}^2$ в нотации вычислительной системы Matlab, в которой были проведены дальнейшие вычисления, понимается вектор, компонентами которого являются квадраты обобщенных скоростей.

Исследование устойчивости положения равновесия

Положения равновесия маятника определяются из системы уравнений, которую можно получить, если положить в уравнениях (6) $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$

$$\begin{aligned} 2\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha \sin \varphi_1 + \beta \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \gamma [\cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)] &= 0, \\ -\varphi_1 + \varphi_2 - \alpha \sin \varphi_2 + \gamma [\cos \varphi_2 (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме решения $\varphi_1^* = \varphi_2^* = 0$ при любых значениях параметров α, β и γ система (8) имеет нетривиальные решения при определенных сочетаниях указанных параметров. Проведем вычисления положений равновесия для случая $\gamma = 1,25$ при монотонном пропорциональном возрастании параметров нагружения α и β на отрезке $[1; 2]$. Результаты вычислений представлены на рис. 2. Для данной системы наблюдается сложная картина распределения положений равновесия в пространстве параметров. До значения $\alpha = \beta = 1,38$ система имеет единственное тривиальное положение равновесия. В диапазоне $1,385 < \alpha, \beta < 1,465$ с учетом симметрии наблюдаются три положения равновесия, а при $1,465 < \alpha, \beta < 1,515$ – семь. Для значений α и β , больших чем $1,515$ система имеет три положения равновесия.

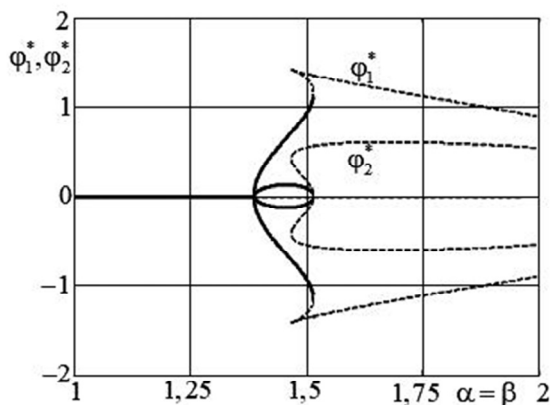


Рис. 2. Положения равновесия системы при возрастании параметров $\alpha = \beta$

Для исследования локальной устойчивости различных положений равновесия Φ^* , определяемых системой уравнений (8), нужно составить уравнения в вариациях относительно малых возмущений ξ . Для этого в уравнение (6) подставляется $\Phi^* + \xi$ и проводится линеаризация полученных уравнений. Тогда относительно малых отклонений справедливо уравнение

$$\mathbf{A}(\Phi^*)\ddot{\xi} + \mathbf{B}(\Phi^*)\dot{\xi} + \mathbf{C}(\Phi^*)\xi = 0, \quad (9)$$

где матрицы $\mathbf{A}(\Phi^*)$ и $\mathbf{B}(\Phi^*)$ определяются формулами (7), а матрица $\mathbf{C}(\Phi^*)$ дается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \cos \varphi_1^* & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2^* \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) & \cos(\varphi_2^* - \varphi_1^*) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & + \gamma \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_1^* - \sin^2 \varphi_1^* - \sin \varphi_1^* \sin \varphi_2^* & \cos \varphi_1^* \cos \varphi_2^* \\ \cos \varphi_1^* \cos \varphi_2^* & \cos^2 \varphi_2^* - \sin^2 \varphi_2^* - \sin \varphi_1^* \sin \varphi_2^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Характеристический полином для уравнения (9) имеет вид

$$\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C} = 0. \quad (10)$$

Чтобы положение равновесия Φ^* было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (10) имели отрицательные действительные части. По критерию Рауса–Гурвица для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$p_1 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0, \quad H = p_3(p_1 p_2 - p_3) - p_1^2 p_4 > 0, \quad (11)$$

где параметры p_j определяются через элементы матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} и \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} p_0 &= |\mathbf{A}|, \\ p_1 &= a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}, \\ p_2 &= |\mathbf{B}| + a_{22}c_{11} + a_{11}c_{22} - a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}, \\ p_3 &= b_{22}c_{11} + b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12} - b_{12}c_{21}, \\ p_4 &= |\mathbf{C}|. \end{aligned}$$

Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия $\varphi = 0$. В этом случае матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} в уравнении (10) будут следующими

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \varepsilon \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Границе области дивергенции соответствует выход характеристического показателя λ в правую полуплоскость через начало координат. При этом граница области дивергенции в пространстве параметров α, β, γ определится уравнением $p_4 = \det \mathbf{C} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 - \alpha - \beta + \gamma & -1 + \beta + \gamma \\ -1 + \gamma & 1 - \alpha + \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде $\alpha^2 - 3\alpha + \alpha\beta + 1 + 5\gamma - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = 0$.

Это уравнение удобно разрешить относительно жесткости упругой связи

$$\gamma = \frac{\alpha^2 - 3\alpha + \alpha\beta + 1}{2\alpha + 2\beta - 5}. \quad (12)$$

Если положить в формуле (12) $\beta = 0$, то критические значения параметра потенциальной силы α определяются из уравнения

$$\alpha^2 - (3 + 2\gamma)\alpha + 1 + 5\gamma = 0. \quad (13)$$

Граница области флаттера определяется условием $H = 0$. При фиксированном значении γ область устойчивости тривиального положения равновесия маятника на плоскости α, β отделяется

от области неустойчивости границей, являющейся совокупностью линий $p_4 = 0$ и $H = 0$. Для случая $\gamma = 1,25$ граница области устойчивости на плоскости параметров нагружения α, β построена на рис. 3. Здесь линии AB и CD соответствуют границе дивергенции, а линия BMC – границе флаттера. По штриховой линии MN на этом рисунке были проведены вычисления положений равновесия системы, результаты которых представлены на рис. 2.

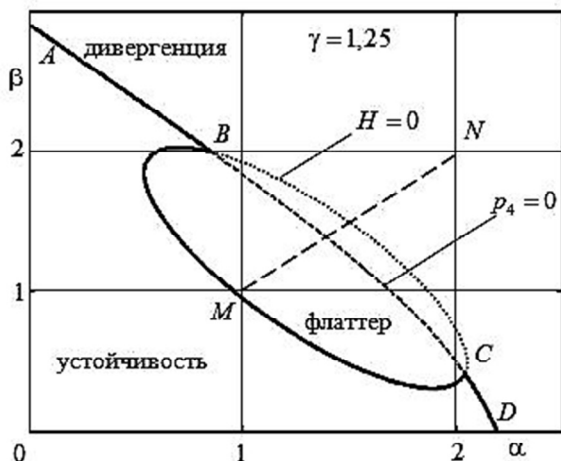


Рис. 3. Границы области устойчивости при $\gamma = 1,25$

Варьирование жесткости связи γ приводит к существенному изменению границы области устойчивости. Увеличение жесткости связи приводит к тому, что границы области дивергенции AB и CD увеличиваются и при $\gamma = 1,55$ смыкаются, а граница области флаттера эллиптической формы ограничивает изолированную область неустойчивости. Тип потери устойчивости в этой области – флаттер.

Для $\gamma = 1,6$ границы области устойчивости представлены на рис. 4. Область неустойчивости для рассматриваемого квадранта плоскости нагружения ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$) здесь является двусвязной:

область флаттера эллиптической формы и область дивергенции. Напомним, что вычисления проводились при условии, что дополнительная связь кроме упругих свойств, обладает и демпфирующими свойствами. Рассмотренный случай соответствует значению $\eta = 0,05$. Если положить $\eta = 0$, т.е. дополнительная связь обладает только упругостью, то область неустойчивости будет односвязной с границей $ABCD$, где граница флаттера отмечена штриховой линией BC . В этом проявляется известное дестабилизирующее влияние трения на неконсервативные системы.

С дальнейшим увеличением жесткости связи изолированная область флаттера стягивается в точку и исчезает при $\gamma = 1,77$. Граница области дивергенции при $\gamma \rightarrow \infty$ приближается к прямой, отсекающей от осей α и β отрезки, равные 2,5.

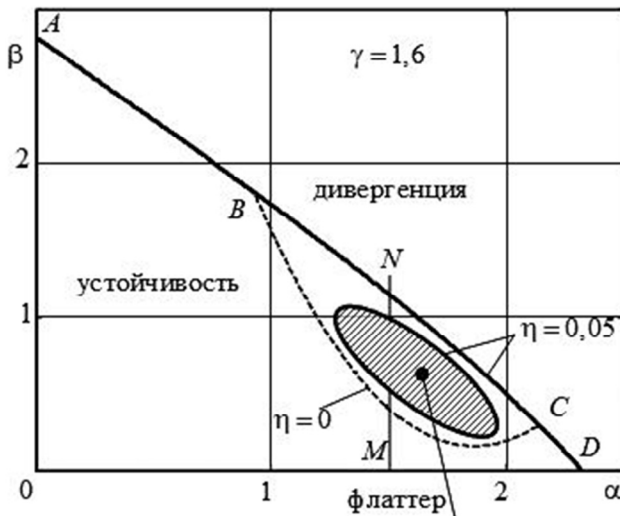


Рис. 4. Неодносвязная область неустойчивости

Анализ закритического поведения системы

Для исследования закритического поведения системы в окрестности нулевого положения равновесия численно проинтегрируем нелинейное уравнение (6). Для этого приведем его к нормальной форме Коши

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}\dot{\phi}^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_2 \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Здесь введен вектор $y^T = [\phi^T; \dot{\phi}^T]$, компонентами которого являются компоненты вектора обобщенных координат ϕ и обобщенных скоростей $\dot{\phi}$. Результаты интегрирования уравнений (14) для $\gamma = 1,25$ и параметров нагружения, соответствующих некоторым точкам прямой MN на рис. 7, приведены на рис. 5–14.

Значения жесткости связи и параметров нагружения, для которых проводился вычислительный эксперимент, указаны на рисунках. На рисунке 5 представлена зависимость $\phi_1(\tau)$ при потере устойчивости по типу флаттер. Здесь с течением времени в системе устанавливается устойчивый предельный цикл.

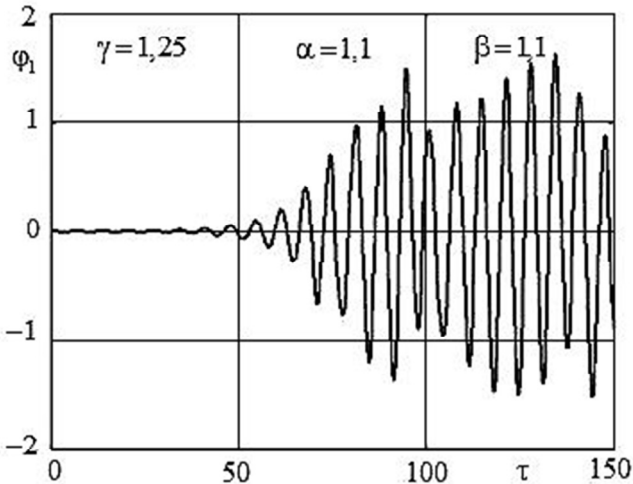


Рис. 5. Потеря устойчивости по типу флаттер

Рисунок 6 иллюстрирует вторичный флаттер. При потере устойчивости по типу дивергенция в системе наступает флаттер в окрестности некоторого нового положения равновесия. Однако существенной особенностью закритического поведения при указанных значениях параметров в данном случае является то, что происходит переход флаттера в хаотические движения.

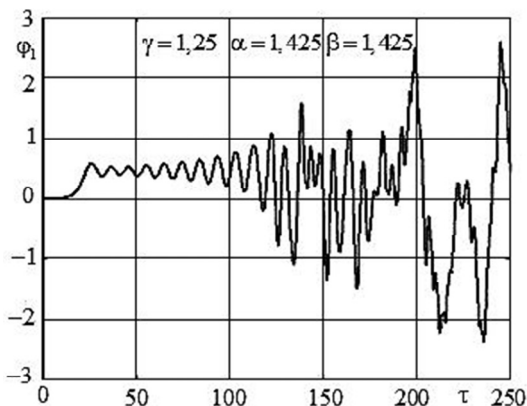


Рис. 6. Потеря устойчивости по типу вторичный флаттер

В достаточно далекой закритической стадии между кривыми $p_4 = 0$ и $H = 0$ (см. рис. 4) при наличии не смежных с тривиальным положений равновесия возможна потеря устойчивости по типу дивергенция. Закон движения в этом случае для $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ представлен на рис. 7.

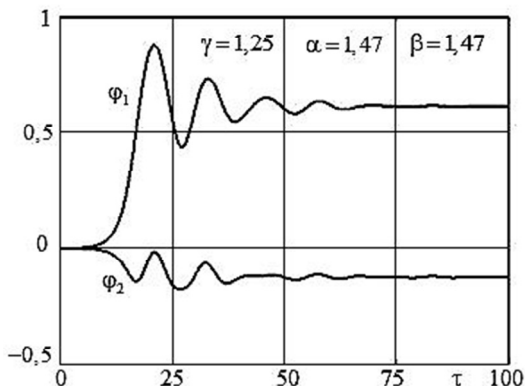


Рис. 7. Потеря устойчивости по типу дивергенция

Изучение характера динамического поведения системы в закритической области проведем также с помощью сечений (отображений) Пуанкаре. Для многомерного фазового пространства (в рассматриваемой системе оно равно четырем) имеются определенные трудности в представлении фазового портрета. Пуанкаре предложил удобный прием, позволяющий свести изучение геометрии траекторий в многомерном фазовом пространстве к изучению их пересечений с двумерным трансверсальным, т.е. поперечным фазовому потоку, сечением. Начиная со значений параметров $\alpha = \beta \approx 1,5$ и более в системе наблюдаются хаотические движения. Доказательством тому может служить сечение Пуанкаре, построенное на рис. 8. Уравнение (15) интегрировалось на достаточно продолжительном отрезке времени ($\tau = 100000$) и фиксировались моменты времени τ_k , в которые вторая обобщенная координата обращалась в нуль, т.е. $\varphi_2(\tau_k) = 0$. На фазовой плоскости $\varphi_1, \dot{\varphi}_1$ откладывались точки с координатами $\varphi_1(\tau_k), \dot{\varphi}_1(\tau_k)$. Если при этом получается конечный набор изолированных точек, то имеет место периодическое движение. Для замкнутой кривой на фазовой плоскости имеем квазипериодическое движение. Для хаотических движений сечение Пуанкаре представляет собой фрактальный набор точек (рис. 8).

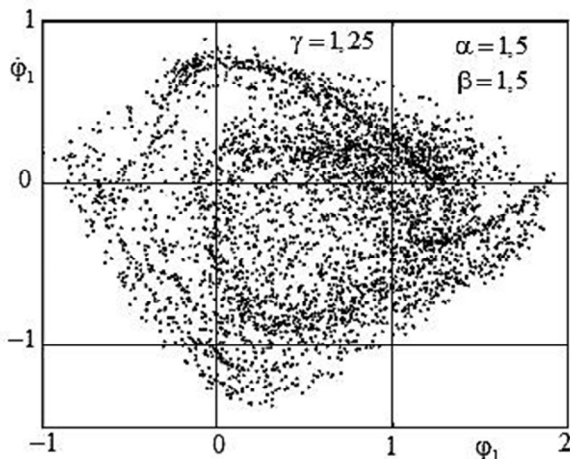


Рис. 8. Сечение Пуанкаре для хаотических движений

Интересная особенность поведения системы обнаруживается в области флаттера в случае двухсвязной области неустойчивости, представленной на рис. 4. Рисунок 9 иллюстрирует закон движения $\varphi_1(\tau)$ для значений параметров $\gamma = 1,6$, $\alpha = 1,5$ и $\beta = 0,6$, т.е. параметры системы соответствуют изолированной области флаттера на рис. 4. По аналогии с термином «вторичный флаттер», характер зависимости $\varphi_1(\tau)$ позволяет назвать такой тип движения «вторичная дивергенция». Сначала в системе развивается флаттер с нарастающей амплитудой. Затем устанавливаются затухающие колебания в окрестности нового положения равновесия.

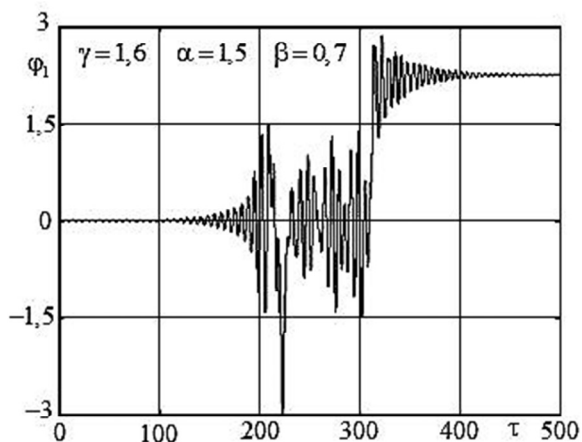


Рис. 9. Потеря устойчивости по типу вторичная дивергенция

**ПРОГРАММА НА ЯЗЫКЕ PYTHON
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ
ДЛЯ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ**

```

1.import numpy as np
2.import sympy as sym
3.import matplotlib.pyplot as plt
4.from sympy import sin, cos, Function, diff
5.from scipy.integrate import quad
6.from sympy.abc import r
7.f=Function('f')
8.f=(1-r**2)**2
9.f1=diff(f)
10.print(f1)
12.f2=diff(f1)
13.print(f2)
14.nu=0.3
14.def fun1(r):
15.    return (-4*r*(1 - r**2))**2*r
16.I1=quad(fun1,0,1)
17.print(I1[0])
18.def fun2(r):
19.    return ((12*r**2 - 4)+(-4*r*(1 - r**2)/r))**2*r
20.I2=quad(fun2,0,1)
21.print(I2[0])
22.def fun3(r):
23.    return ((12*r**2 - 4)*(-4*r*(1 - r**2)/r))*r
24.I3=quad(fun3,0,1)
25.print(I3[0])
26.K=(I2[0]-2*(1-nu)*I3[0])/I1[0]
27.print(K)

```

```
28.tnrfont = {'fontname':'Times New Roman'}
29.r=np.linspace(-1,1,51)
30.w=(1-r**2)**2
31.plt.subplot(211)
32.plt.title('Предполагаемая форма потери
33.устойчивости',**tnrfont,fontsize=16)
34.plt.grid(True)
35.plt.ylim(0,1.0)
36.plt.xlim(-1,1)
37.plt.text(0.87,-0.13,'r',**tnrfont,style='italic',fontsize=16)
38.plt.text(-0.95,0.9,'w(r)',**tnrfont,style='italic',fontsize=16)
39.plt.plot(r,w,'k-')
40.plt.show()
```

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – 2-ое изд., перераб. и доп. / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1991.
2. Алфутов, Н.А. Устойчивость движения и равновесия / Н.А. Алфутов, К.С. Колесников. – (Серия «Механика в техническом университете»). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967.

Дополнительный

4. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: Физматгиз, 1961.
5. Гуськов, А.М. Особенности динамики механических систем под действием неконсервативных (циркуляционных) сил / А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.
6. Kirilov, O.N. Nonconservative Stability Problems of Modern Physics / O.N. Kirillov – Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021, 548 p. https://books.google.ee/books?id=4kkfEAAAQBAJ&lr=&source=gbs_navlinks_s
7. Лампси, Б.Б. Сборник задач и упражнений по устойчивости стержневых систем / Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, П.А. Хазов. – Н. Новгород, ННГАСУ, 2020.
8. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987.

9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т., Т.3. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
10. Радин, В.П. Решение неконсервативных задач теории устойчивости / В.П. Радин, Ю.Н. Самогин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев. – М.: Физматлит, 2017.
11. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971.
12. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973.

Учебное издание

Радин Владимир Павлович
Позняк Елена Викторовна
Новикова Ольга Валерьевна

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебник

Редактор Т.А. Феокистова
Компьютерная верстка А.В. Худяковой

Подписано в печать	20.02.23.	Печать офсетная	Формат 60х90 1/16
Печ. л. 16,25	Тираж 120 экз.	Изд. № 23уК-004	Заказ

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.

ДЛЯ ЗАМЕТОК