

MOИ



КНИГА-ПОБЕДИТЕЛЬ
конкурса рукописей учебников
по направлениям
подготовки в МЭИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

ОСНОВЫ СВЕТОТЕХНИКИ

Учебник

по курсу «Основы светотехники»
для студентов, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров

11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Москва
Издательство МЭИ
2023

УДК 628.9
ББК 31.294
О 753

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре светотехники

Рецензенты: А.В. Лубенченко, докт. техн. наук, проф. ;
А.А. Шехонин, докт. техн. наук, проф.

Авторы: В.П. Будак, А.А. Григорьев, П.А. Смирнов, В.Ю. Снетков

О 753 Основы светотехники: учебник / В.П. Будак, А.А. Григорьев,
П.А. Смирнов и др. – М.: Издательство МЭИ, 2023. – 532 с.

ISBN 978-5-7046-2807-1

В учебнике изложены базовые законы светотехники, законы преобразования энергии излучения в другие виды энергии, что позволяет освоить современное представление о свойствах излучения. Приведены основные элементы и характеристики глаза, а также ключевые законы и параметры цвета.

Главными задачами при изучении курса «Основы светотехники» являются: изучение теории светового поля и законов распространения света, освоение энергетической и эффективных систем величин и единиц, овладение теоретическими и эмпирическими положениями физиологической оптики, цветоведения, а также колориметрическими системами, основными идеями и понятиями моделей пороговой чувствительности зрительной системы.

Для подготовки студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника» (образовательная программа: «Светотехника и источники света»).

УДК 628.9
ББК 31.294

ISBN 978-5-7046-2807-1

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	9
1. СВЕТОВОЕ ПОЛЕ.....	11
1.1. История формирования и развития основных лучевых и волновых представлений о свете.....	11
1.2. История формирования и развития основных идей светового поля.....	24
1.3. Основные понятия и законы теории светового поля...	39
1.4. Интегральные характеристики светового поля.....	50
1.5. Статистико-волновое содержание фотометрии.....	64
1.6. Фотометрическое описание поляризации света.....	82
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	92
2. ПРИЕМНИКИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРЫ.....	95
2.1. Классификация приемников излучения и характеристика их чувствительности.....	95
2.2. Временные параметры фотоприемников.....	100
2.3. Принцип действия термоэлемента, болометра и пироэлектрического приемника.....	104
2.4. Законы внешнего фотоэффекта.....	124
2.5. Характеристики фотоэлементов и ФЭУ.....	129
2.6. Электронно-оптические преобразователи (ЭОП).....	135
2.7. Принцип работы фотодиодов, фоторезисторов и приборов с зарядовой связью.....	139
2.8. Законы распределения случайных величин и их моменты.....	153
2.9. Закон равномерной плотности, биномиальный, нормальный и закон распределения Пуассона.....	161
2.10. Анализ случайных процессов в частотной области...	167
2.11. Тепловой и температурный шум фотоприемников...	170
2.12. Дробовой, фотонный, генерационно-рекомбинационный и избыточный шум.....	177
2.13. Пороговые характеристики фотоприемников. Характеристики идеального теплового приемника...	185

2.14. Пороговые характеристики термоэлемента, болметра и пироэлектрического приемников.....	188
2.15. Пороговые характеристики фотоэлемента и фотоэлектронного умножителя.....	194
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	196
3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ И ЭФФЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕЛИЧИН И ЕДИНИЦ.....	197
3.1. Энергия и поток излучения.....	197
3.2. Телесный угол. Сила излучения, энергетическое освечивание.....	198
3.3. Облученность, энергетическая экспозиция и закон обратных квадратов расстояния.....	203
3.4. Энергетическая светимость, энергетическая яркость. Расчет облученности в фокальной плоскости идеальной оптической системы.....	206
3.5. Спектральные и эффективные характеристики излучения.....	211
3.6. Световая система величин и единиц. Эквивалентная яркость.....	219
3.7. Фотонная, эритемная и бактерицидная системы величин.....	231
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	238
4. ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ.....	240
4.1. Основные законы геометрической оптики.....	240
4.2. Оптическая система.....	251
4.3. Ограничение пучков в оптической системе.....	257
4.4. Аберрации в оптических системах.....	261
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	267
5. СВЕТОВОЕ ПОЛЕ В МУТНОЙ СРЕДЕ.....	269
5.1. Уравнение переноса излучения.....	269
5.2. Структура светового поля в мутной среде.....	276
5.3. Отражение и пропускание света слоем мутной среды	287
5.4. Коэффициент яркости поверхности объектов.....	292
5.5. Рассеяние света малыми частицами.....	298

5.6. Теория Ми.....	302
5.7. Уравнение глобального освещения.....	314
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	319
6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ.....	321
6.1. Кинетическая теория электромагнитных процессов...	321
6.2. Квантовая теория переноса.....	336
6.3. Уширение спектральной линии.....	344
6.4. Кинетическая теория переноса излучения в плазме....	353
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	355
7. ОПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.....	358
7.1. Оптическая схема глаза, назначение основных элементов.....	358
7.2. Редуцированный глаз по В.К. Вербицкому.....	366
7.3. Зрачок. Освещённость на сетчатке.....	376
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	380
8. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ВОСПРИЯТИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ.....	382
8.1. Световоспринимающая система глаза.....	382
8.2. Этапы преобразования зрительной информации.....	386
8.3. Нарушения цветового восприятия.....	388
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	393
9. МОДЕЛИ ПОРОГОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА.....	395
9.1. История исследований контрастной чувствительности зрительной системы.....	395
9.2. Модели пороговой чувствительности Блэкуэлла, Люса	403
9.3. Методы измерения порогов.....	407
9.4. Статистический подход к обнаружению сигналов. Структурная схема статистической модели зрительной системы.....	415
9.5. Расчет вероятности обнаружения объекта.....	419
9.6. Определение величины порогового отношения правдоподобия и поправки на случайное угадывание...	424

9.7. Пороговые характеристики зрительной системы, полученные из статистической модели.....	431
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	437
10. ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О ЦВЕТЕ.....	439
10.1. Основные понятия колориметрии.....	439
10.2. Законы Грассмана и цветовое пространство.....	443
10.3. Международные цветовые системы RGB, XYZ, стандартные излучения и цветовая система (КЗС) _{физ} ...	445
10.4. Принцип построения математической модели зрительной системы для пороговых наблюдений цветных объектов на цветных фонах.....	455
10.5. Пороговое обнаружение монохроматического объекта на цветном фоне.....	460
10.6. Определение удельных координат цвета трихроматов на основе ММПЦЗ.....	466
10.7. Цветовая физиологическая система (LMS) _{phys}	474
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	479
11. УСТАНОВИВШИЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ЗРИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	482
11.1. Спектральная чувствительность глаза.....	482
11.2. Абсолютная световая чувствительность.....	486
11.3. Контрастная чувствительность.....	490
11.4. Острота зрения.....	495
11.5. Адаптация.....	499
11.6. Инерция зрения.....	500
11.7. Индукция.....	505
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	508
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	508
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	512

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является попыткой развития традиций преподавания дисциплины «Основы светотехники», заложенных в известном учебном пособии В.В. Мешкова, которое на протяжении века было практически настольной книгой специалистов различных направлений при решении светотехнических и фотометрических задач. Однако прошедшие после последнего издания учебного пособия 40 лет были поистине революционными в теории и технологии света.

Светотехника зародилась в конце девятнадцатого века как прикладная область, посвященная внедрению электрического освещения в жизнь человека. Роль электрического освещения в развитии человечества сложно переоценить. Победа света над тьмой позволила людям распоряжаться своим временем для работы, отдыха и учебы, что, в свою очередь, создало условия для поразительного прогресса науки и техники в двадцатом веке. Однако повсеместное распространение освещения было настолько доминирующим, что светотехника стала рассматриваться как простое освещение, несмотря на ее применение в других направлениях, например, связанных с восприятием человеком цветных средств отображения информации.

Во второй половине XX века появился принципиально новый источник света – лазер, который создает когерентное монохроматическое мононаправленное излучение, но на практике в основном используется как источник некогерентного излучения, что потребовало точного определения областей применимости фотометрического приближения. Лазеры открыли новые возможности применения света: связь, локацию и обработку материалов. Развитие статистической и квантовой оптики изменили наши представления о природе света. В конце XX в. создание светоизлучающих диодов, цифровых систем управления и компьютерных программ позволило использовать системы во многих областях жизни. Примеры невидимых светотехнических приложений включают:

- облучение животных, птиц и растений в сельском хозяйстве для повышения их продуктивности;

- дистанционное зондирование состояния атмосферы и поверхности Земли;
- солнечная энергетика и прежде всего преобразование дневного света в электроэнергию;
- лечение многих заболеваний;
- системы связи;
- обеззараживание воды, воздуха и изделий разного применения;
- и многое другое.

Многие применения невидимого освещения были разработаны на основе систем освещения, поэтому методы измерения, расчета и проектирования основаны на процессах, аналогичных тем, которые используются для освещения. Сегодня невидимые для освещения применения света стремительно развиваются и занимают значительную часть рынка. Соответственно, также смещается фокус научных исследований.

В настоящее время человечество, численность которого постоянно увеличивается, сталкивается с тремя основными проблемами: обеспечением водой, едой и энергией. Светотехника будет играть решающую роль в преодолении этих проблем. Более того, световые решения этих проблем являются экологически безопасными, поскольку они основаны не на химических веществах и редактировании генома, а на природных технологиях.

Главы 1, 4, 5, 6 написаны в соавторстве Будаком В.П. и Смирновым П.А, главы 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11 – Григорьевым А.А. и Снетковым В.Ю. Содержание глав во многом связано с полувекowymi научными исследованиями авторов по соответствующим направлениям. Построение всего курса создавалось на основе принципов инженерного образования: фундаментальное физико-математическое обоснование с выходом на решение практических задач. Однако в тех случаях, где обоснование выходило за рамки дисциплин инженерной подготовки, авторы стремились выполнять все теоретические построения на физическом уровне строгости. Рукопись книги обсуждалась на кафедре светотехники НИУ «МЭИ». Считаю своим долгом выразить благодарность коллективу кафедры, принявшему участие в ее обсуждении.

1. СВЕТОВОЕ ПОЛЕ

1.1. История формирования и развития основных лучевых и волновых представлений о свете

Перед тем как обратиться к изложению современных теорий светового поля рассмотрим историю формирования основных понятий и законов в соответствии с открытыми и исследованными экспериментальными фактами. Созданию любой теории предшествует феноменология – формулировка закономерностей, определяющих взаимосвязь между различными наблюдениями явлений (феноменов) без рассмотрения их внутренних механизмов, когда рассматриваются переходы из одного состояния в другое без детального рассмотрения механизма этих переходов. Возникающие теории, объясняющие внутренние механизмы явлений, не должны противоречить феноменологической теории, а должны последовательно и логично их объяснять. В этом смысле особенно наглядно известное изречение Георга Вильгельма Фридриха Гегеля, что логическое есть отражение исторического: теория строится для объяснения накопленных экспериментальных данных. Дальнейшее развитие теории возможно только с появлением новых фактов, в чем-то противоречащих существующей теории.

Археологические исследования, сохранившиеся документы и история подтверждают наличие исследований природы в пределах первого тысячелетия до нашей эры. Многие труды были утрачены и известны только в переизложении. Возникновение науки связано с общим духовным скачком, который переживала Греция в VII–VI вв. до н.э., и который получил название «греческого чуда», суть которого в необычайном расцвете греческой культуры: философии, театра, скульптуры и пр. Очень быстро Греция стала культурным лидером Древнего мира, опередив более старые цивилизации Египта и Вавилона.

Греческая наука не являлась наукой в современном смысле этого слова, потому что все ее представления получены методом рефлексии без экспериментальных исследований. Однако использование эксперимента возможно только при некотором развитии

наук, при выделении объектов исследования из общей природы, появлении каких-то их моделей и математического описания. Предметом греческой натурфилософии являлось восприятие человеком окружающего мира. В этом смысле вызывают восхищение, возможно, наивные с позиций сегодняшней науки, но удивительно прозорливые результаты этой натурфилософии.

Пифагор сформулировал теорию света, согласно которой зрительное ощущение как одно из органов чувств является результатом того, что прямолинейные видимые лучи испускаются глазом и ощупывают объект. Великий александрийский математик Евклид подвёл итог предшествующему развитию древнегреческой математики в планиметрии, стереометрии и ряде вопросов теории чисел и создал четкую геометрическую теорию зрения. Евклид в своём труде, посвящённом зрительному восприятию – оптика (*ὀπτική* – зрительный, зрение), обосновывает восприятие конусом исходящих из глаз прямых зрительных лучей, которые распространяются прямолинейно и расходятся в бесконечность, а основание конуса – на поверхности видимых предметов. Размер объекта определяется его угловыми размерами. В сохранившихся элементах труда Евклида о зеркальных отражениях – катоптрика (*κατοπτρική* – зеркало), сформулирован закон отражения от плоского зеркала.

Трактаты с названием «Катоптрика» принадлежат множеству древнегреческих и древнеримских учёных, однако сохранились из них весьма немногие. Труд Архимеда, посвященный отражению, не сохранился, однако есть ссылки на его существование. Судя по известному факту о сжигании флота с помощью отражённых от щитов воинов солнечных лучей по идее Архимеда при осаде Сиракуз, положение о прямолинейном распространении света, отражении света, энергетике отражённого излучения и о сложении энергии световых лучей (законе аддитивности) такие представления должны были существовать.

Римский философ Клавдий Птолемей спустя 400 лет издал пятитомную *Ὀπτικὴ πραγματεία* («Работа по оптике»), где повторил и обобщил теорию Евклида. Главное отличие их теорий в том, что у Евклида число лучей в конусе счетное, а у Птолемея непрерыв-

ное. Он исследовал цвет, отражение и преломление света. Наличие развитой геометрической теории зрения позволило Птолемию сконструировать приборы и экспериментально исследовать формирование изображения в вогнутых и выпуклых зеркалах.

Параллельно с исследованием зрительного восприятия на основе визуального опыта происходило развитие медицины. Известный римский врач Гален исследовал анатомию и строение глаза, представил логичное согласование строения системы глаза и мозга, и предложил концепцию зрительного восприятия. По Галену основная функция зрительного восприятия происходит в мозгу. Однако в период первого тысячелетия нашей эры в христианской Европе было запрещено исследование анатомии человека путем разрезания тела и его частей, поэтому дальнейшие исследования этого периода происходили в арабском и восточном мире.

Новый этап в оптике начался с работ арабского ученого Ибн аль-Хайсама. Опираясь на геометрическую модель зрения Эвклида–Птолемея, Альгазен в своей «Книге оптики» экспериментально на основе опытов с камерой-обскурой (рис. 1.1) и набором диафрагм обратил ход лучей от источника к глазу, ввел понятие диффузно отраженного света (прямой свет источника и рассеянный от поверхности), объяснил формирование изображения в камере-обскуре перспективной проекцией. На основании анатомии глаза Галена и своей теории перспективы объяснил видение на основе формирования изображения объектов зрачком на сетчатке глаза. Тем самым Альгазен отделил свет от зрения, что сделало его объектом самостоятельного исследования. К сожалению, работы Альгазена не были сразу полностью переведены на латынь, что задержало освоение его теории в Европе на 400 лет.

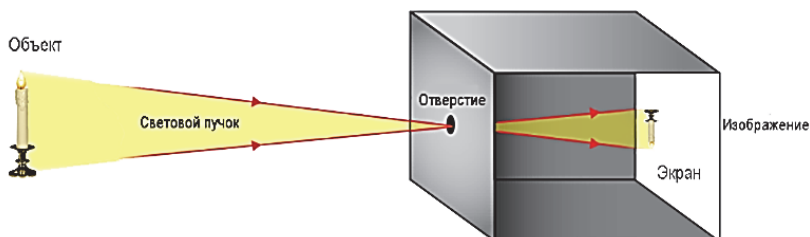


Рис. 1.1. Камера-обскура

Позднее польский учёный Эразм Циолек Витело написал 10-томный трактат «Перспектива» (*Perspectiva*), представляющий строго структурированное изложение работы Альгазена. Вителло проанализировал работу Альгазена, дополнил её и изложил в логично развитой последовательности. Экспериментальное искусство в области оптики достигает у Витело весьма высокого уровня. Трактат Витело, оказавший заметное влияние на развитие оптики в Европе, состоит из 10 книг.

1-я книга представляет изложение основных геометрических положений и методов во взаимосвязи с оптикой – это своего рода методологический базис, который будет применяться далее.

2-я книга посвящена анализу физики света, вопросам пропускания и тенеобразования.

3-я книга описывает вопросы анатомии глаза, световые эффекты и взаимосвязи с особенностями зрительного восприятия.

4-я книга более конкретно рассматривает способы анализа визуальных образов зрительной системой человека и объясняет зрительные иллюзии.

5-я книга посвящена вопросам зеркального отражения, вопросам представления и восприятия изображений в плоских зеркалах.

6-я книга рассматривает вопросы изображений в выпуклых сферических зеркалах.

7-я книга затрагивает вопросы изображений в выпуклых цилиндрических и конических зеркалах.

8-я и 9-я книги имеют структуру аналогичную книгам 6 и 7, но посвящены вогнутым зеркалам, среди которых рассматриваются и параболические.

10-я книга рассматривает вопросы преломления, формирования цветов радуги.

Книга Витело «Перспектива» была очень популярна в Европе, все образованные люди прочли ее, например Леонардо да Винчи, который очень высоко ценил ее, а многие художники открыли и поняли перспективу, используя камеру обскуру (в то время они изготавливались величиной с комнату).

Изобретение телескопа и микроскопа позволило расширить ранее неизвестные горизонты в оптике. История называет сразу несколько авторов с разными датами изобретения этих приборов, но первым, кто применил телескоп для астрономических наблюдений, был в 1609 г. Галилео Галилей. Он же одним из первых продемонстрировал в 1612 г. и микроскоп: оккиолино, по-итальянски *occhiolino* – глазок. Мода на создание новых оптических приборов охватило всю Европу: даже монаршие фамилии занимались полировкой линз, созданием и совершенствованием приборов, наблюдениями через них.

В 1604 г. Иоганн Кеплер написал оптический трактат «Дополнения к Вителло» (*Paralipomena to Witelo*), а в 1611 г. ещё одну книгу «Диоптрика» (*Dioptrice*). Кеплер первым базирует свои расчёты на основе распространения пучков лучей, расходящихся в пределах заданных углов, вводит понятие фокус в геометрическую оптику, даёт объяснение квадратичной зависимости уровней освещения в зависимости от расстояния до точечного источника – закон обратных квадратов расстояния. Лучи света являются фундаментальными и важными идеями работы Кеплера в оптике. Он предполагает, что они являются основными компонентами света, распространяются по прямым линиям в однородной среде, испускаются независимо от всех точек светящегося объекта, отражаются и преломляются на поверхности тел, а поскольку они являются прямолинейными, то поддаются геометрическому анализу.

На основе своей методики расчёта Кеплер анализирует телескоп Галилея и создаёт новую схему телескопа на основе двух выпуклых (собирающих) линз, телескопы Кеплера нашли широкое распространение в астрономии, и в итоге вытеснили телескопы Галилея, несмотря на перевёрнутое изображение, они давали более широкое поле наблюдения и позволяли добиться большего увеличения, чем схема Галилея на основе выпуклой и вогнутой (рассеивающей) линзы.

Совершенствование телескопов наталкивалось на преодоление хроматической аберрации, что приводило к исследованию явления разложения белого цвета на радугу цветов при преломлении. Йоханнес Маркус (Ян Марек) Марци первым в 1648 г. опу-

ликовал свои открытия в оптике. В 1648 г. вышла «Ирис – книга небесной радуги» (*Thaumantias liber de arcu cfelesti*, Ирис – богиня радуги, иначе Таумантиас – дочь морского Бога Таумаса), а в 1650 г. была опубликована «Беседа о природе радуги» (*Dissertatio de natura iridis*), где он описывает свои эксперименты с призмой по разделению белого света на цвета разной преломляемости.

Гримальди Франческо Мария в 1665 г. опубликовал труд «Физико-математический трактат о свете, цветах и радуге» (*Physico mathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis libri duo*), где он впервые сделал точные наблюдения за дифракцией света и придумал слово «дифракция» (от лат. *DiffRACTUS* – сломанный, огибание). Это было сделано с помощью экспериментов, в которых яркий солнечный свет, проходя через небольшое отверстие, попадал внутрь совершенно темной комнаты на экран. Помещая в световой пучок различные маленькие предметы, например тонкий прутик, Гримальди установил: свет огибает препятствия, отклоняясь за ними, а прохождение света не может быть согласовано с идеей, что он движется по прямолинейному пути. Скорее, свет, проходя через отверстие, принимает форму конуса. Обнаруженное явление он попытался сравнить с волнами, расходящимися по воде от брошенного камня или плывущего корабля. Впервые такое предположение высказал чешский физик Ян Марци в 1648 г. Гримальди в своем труде дал описание солнечного спектра, полученного им с помощью призмы. При этом Гримальди выдвинул важный тезис, что любой цвет – лишь одна из модификаций белого света.

В 1665 г. Роберт Гук опубликовал монографию «Микрография» (*Micrographia*), где описал исследования с помощью микроскопа клетки растений, глаз мухи, комара и его личинки, детально описал строение крыла пчелы, плесени, мха. Гук объяснил окраску насекомых отражением света от верхней и нижней границ тонких слоёв. Для анализа этого предположения он провел наблюдения радужных пятен в тонких слоях слюды. При этом он определил, что окраска периодически изменяется при изменении расстояния между слоями сжатием их пальцами или заполнения пространства между ними какой-либо жидкостью. Это привело его к мысли, что свет обладает свойством периодичности, а потому он

есть быстрые колебательные движения, которые в однородной среде передаются с равной скоростью во всех направлениях. Гук вводит идею о фронте волны и утверждает, что это сфера, центр которой находится в этой точке, а радиусы являются лучами света, исходящими из этой точки. По мнению Гука преломление фронта волны является источником цветов, которые получаются при прохождении света через призму, что цвет образуется в результате искажения, которому подвергается это возмущение в процессе преломления. Цвет определяется углом падения света.

Исаак Ньютон выдвинул теорию цветов, совершенно противоположную теории цветов Гука: цвета не являются характеристиками света, полученными путем преломления или отражениями естественных тел, как это всегда считалось, а цвета – это свойства, которые присущи свету изначально. В своих экспериментах Ньютон вторично пропустил через призму лучи одного цвета и увидел, что они преломляются, но не разлагаются. Поэтому он определил их как однородные цвета, причем у разных лучей они различны. Каждой степени преломляемости соответствует свой цвет, и каждому цвету соответствует своя степень преломляемости. Более того, Ньютон исследовал сложение различных однородных цветов, определил, что это приводит к возникновению новых цветов, и установил законы сложения цветов – *Newton wheels* (круг Ньютона).

Статья на эту тему была представлена Ньютоном в 1671 г. Публикация новой теории стала причиной жарких споров. Основным оппонентом стал Гук, который довольно резко раскритиковал новую теорию. В то время Ньютон только начинал свою карьеру, а Гук имел уже солидную репутацию, и такая резкость привела к тому, что Ньютон в 1689 г. прекратил публикации в области оптики, хотя продолжал исследования – по легенде, поклялся ничего не печатать в этой области при жизни Гука.

Большое внимание Ньютон уделял цветам тонких пластинок. Гук проводил наблюдения в белом свете, что делало явления слишком многообразным и сложным. Ньютон приступил к этим опытам, считая, что здесь можно обнаружить новые свойства однородного

света. В однородном свете явления упрощаются, и Ньютону удалось найти те количественные закономерности, которые оказались типичными для всех интерференционных явлений.

Количественные исследования в этой области трудны, так как толщина слоев порядка 0,001 мм. Соответствующих устройств измерять такие малые толщины тогда не было. Ньютон обходит трудность этого измерения, расположив на плоской стеклянной поверхности выпуклой стороной плоско-выпуклую линзу – объектив телескопа с очень большим радиусом кривизны (рис. 1.2). Между нижней плоской и верхней выпуклой поверхностями образуется чрезвычайно тонкий слой воздуха, в котором видны цветные кольца в белом свете и чередование одноцветных светлых и темных колец в однородном – кольца Ньютона.

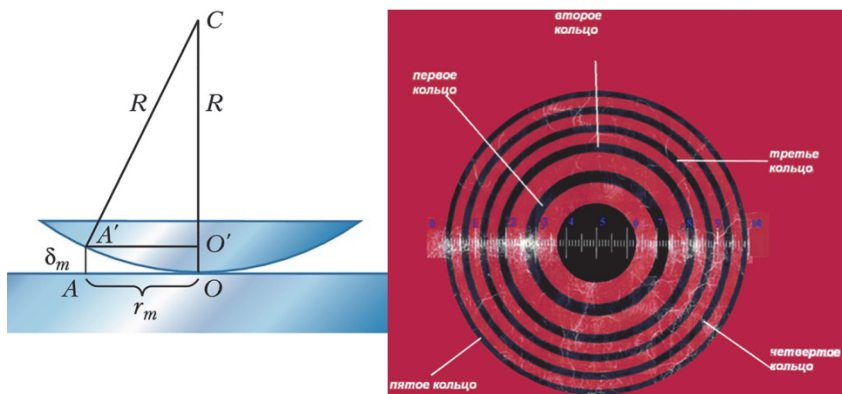


Рис. 1.2. Кольца Ньютона

Суть устройства в том, что, во-первых, толщина слоя различна в различных местах, т.е. мы имеем здесь как бы набор слоев различной величины, а главное – в такой геометрии расстояние от центра до данного места в несколько сот раз больше толщины слоя в этом месте. Через это расстояние определяется расчетным путем толщина, которая по малости не поддается непосредственному измерению. Ньютон определил, что слой воздуха не отражает, если его толщина кратна некоторой величине d . Наоборот, слой сильно отражает, если толщина его равна $0,5d, 1,5d, 2,5d, \dots$

Ньютон экспериментально определил эту толщину d для цвета на границе между красным и жёлтым: она оказалась равной $1/89\ 000$ дюйма. С позиций современной оптики ньютоновская толщина d в волновой концепции равна половине длины волны середины видимого спектра.

Для объяснения колец Ньютон предположил, что каждый луч света, проходя через любую поверхность преломления, переходит в некоторое промежуточное состояние. При дальнейшем следовании луча это состояние появляется через равные интервалы времени. При каждом появлении оно помогает лучу легко проходить через следующую поверхность преломления, а в моменты отсутствия этого состояния луч отражается этой поверхностью. Он обнаружил, что интервал или «длина приступа» между двумя последовательными возможностями «легкого прохождения» изменяется в зависимости от цвета. Наибольшая длина приступа соответствует красному свету, наименьшая – фиолетовому. Тогда, если луч однородного света попадает на тонкую пластинку, то его прохождение и отражение от двух поверхностей будет зависеть от отношения длины приступа к толщине пластинки. Важнейший результат исследований Ньютона преломления света в тонких пленках в том, что однородный свет по своей природе *периодичен*, и каждому периоду соответствует свой цвет.

В 1676 г. в обсерватории Парижа датский астроном О. Рёмер проводил наблюдения затмений спутника одного из 4 спутников Юпитера – Ио, открытых в 1610 г. Г. Галилеем. Проводя наблюдения затмений, Рёмер заметил, что моменты затмений сдвигаются во времени в зависимости от положения Земли на орбите: когда Земля находится ближе к Юпитеру, моменты затмений наступают ранее, чем когда Земля находится дальше от Юпитера. Для объяснения этих колебаний Рёмер предположил, что скорость света конечна, а разница во времени наблюдения затмений вызвана изменяющимся расстоянием между планетами. Его расчёт, основанный на знаниях того времени, довольно неточных, об орбитах планет и доступных ему способах изменения времени, дал для скорости света величину $230\ 000$ км/с, что примерно на четверть ниже реального значения ($c \approx 300\ 000$ км/с).

Размышления над этим фактом приводят Христиана Гюйгенса ван Зёйлихема к справедливой мысли: материальные тела не могут перемещаться с такой скоростью, что это волновое движение, когда материальные частицы колеблются со значительно меньшей скоростью на месте, а скорость света – это скорость распространения волны в коллективе (ансамбле) частиц. Свою волновую теорию он опубликовал в 1678 г. в монографии «Трактат о свете» (*Traité de la lumière*). Кроме того, он отмечает, что когда свет приходит из различных мест, лучи его проходят один через другой, не мешая друг другу. Это не может происходить вследствие переноса материи, которая доходит до нас от этого предмета наподобие пули или стрелы, пересекающей воздух. Значит, свет распространяется другим образом, наподобие распространения звука в воздухе.

Для объяснения прямолинейного распространения света Гюйгенс ввел принцип: каждая точка фронта волны (поверхности, достигнутой волной) является вторичным (т.е. новым) источником сферических волн. Огибающая фронтов волн всех вторичных источников становится фронтом волны в следующий момент времени, что объясняет распространение волн, согласующееся с законами лучевой оптики. По-видимому, Гюйгенс был незнаком с явлением дифракции света, описанной Гримальди, поскольку замечает, что если на пути световой волны встречается отверстие, то сколь бы малым ни было оно, тем не менее всегда достаточно велико, чтобы заключать большое количество непостижимо малых частиц колебаний, и свет распространяется по прямой. На основе этого принципа Гюйгенс с успехом объясняет явления преломления и отражения света на границе раздела тел.

В 1669 г. Расмус Бартолин опубликовал работу «Эксперименты с кристаллом исландского шпата, обнаружившие изумительное и странное преломления света» (*Experimenta crystalli islandici disdiaclastici quibus mira & infolita refractio detegitur*), содержащую открытия эффекта расщепления луча света после преломления в кристалле исландского шпата на две составляющие, известного теперь как двойное лучепреломление (рис. 1.3). Один

из этих лучей подчиняется обыкновенному закону преломления, а второй, названный необыкновенным лучом, подчиняется совершенно иному закону, который Бартолин так и не смог определить.



Рис. 1.3. Двойное лучепреломление в кристалле исландского шпата

Гюйгенс применяет свой волновой принцип к описанию двойного лучепреломления. Поскольку в его понимании каждый луч света соответствует распространению фронта волны, то два луча в исландском шпате должны соответствовать двум разным фронтам волны, которые распространяются одновременно. Поэтому он решил, что возмущение света, вызванное в любой точке внутри кристалла исландского шпата, распространяется в форме волновой поверхности, состоящей из сферы и сфероида (эллипсоид вращения) с центром в источнике возмущения. Сферический фронт волны соответствует обыкновенному лучу, а сфероидный – необыкновенному. В своей работе «Трактат о свете» Гюйгенс не делал попыток дать физическое объяснение сфероидной волны.

В опытах с исландским шпатом Гюйгенс заметил, что два луча, образующиеся при двойном лучепреломлении, впоследствии ведут себя отлично от обыкновенного света, который не подвергался двойному лучепреломлению: когда один из этих лучей падает на второй кристалл исландского шпата, то при некоторых обстоятельствах он образует два преломленных луча, а при других – всего один. Поведение луча при втором преломлении можно изменить простым вращением второго кристалла вокруг луча, взятого в качестве оси.

В 1704 г., на следующий год после смерти Гука, выходит в свет монография Ньютона «Оптика», где он приводит полностью все свои исследования по оптике. Исследуя двойное лучепрелом-

ление в исландском шпате, Ньютон приходит к выводу, что каждый из двух, выходящих из кристалла лучей, обладает интересным свойством: в то время как обычный луч имеет осевую симметрию, оба эти луча её лишены, что делает не все проходящие через луч плоскости равноправными между собой.

Ньютон исследует явление дифракции Гримальди. Он не может определить однозначно причины этого явления, составляет план дальнейших исследований, но больше придерживается версии, что при малом размере отверстия на распространение света влияют частицы вещества, что приводит его отклонению от прямолинейного распространения.

Ньютон хотел изложить оптику как теорию, свободную от размышлений о скрытом механизме света. Поэтому его взгляды не были однозначно связаны с лучевыми или волновыми представлениями о свете. Ньютон владел волновыми представлениями, доступными тому времени, лучше, чем все другие, в том числе Гук и Гюйгенс, лучше понимал те непреодолимые препятствия, которые стояли в то время на пути волновой теории.

1. Если свет – волновое движение, то ему должна сопутствовать механическая среда – жидкость или газ, в которой распространяются волны, и которая должна заполнять всё мировое пространство. Но тогда движение светил должно встречать сопротивление, которое, однако (согласно законам механики), фактически отсутствует.

2. Отсутствие осевой симметрии в прошедших лучах при двойном лучепреломлении противоречит волновому движению, поскольку в те годы другие волны, кроме продольных, по аналогии со звуком были неизвестны.

3. Если свет – волновое движение, то он должен огибать, подобно звуку, препятствие, а это никогда, по мнению Ньютона, не наблюдалось. Планета, проходя мимо звезды, её закрывает.

На том периоде истории обе теории – корпускулярная и волновая, – объясняли наиболее общеизвестные явления. Большинство современников считали, стоило уж придерживаться корпускулярной теории, которая представлялась оптикой здравого смысла, поскольку она непосредственно объясняла простейшее оптическое явление – прямолинейное распространение света.

Однако оставалась невыясненной количественная оценка света. Трудности формулировки такого рода понятий в XVII в. определялись отсутствием представлений о силе, энергии, мощности, законе сохранения и преобразования энергии, который был открыт Юлиусом Робертом фон Майером только в 1842 г. Поэтому в количественной оценке света преобладали неопределенные термины типа «сила света», «интенсивность» (от латинского *intensio* – напряжение, усиление). Революционное решение проблемы предложил Пьер Бугер, который по праву считается первооткрывателем метрики света, основателем фотометрии.

Сущность идеи Бугера, изложенной в его монографии «Оптический трактат о градации света» (*Traité d'optique sur la gradation de la lumière*), 1749 г., сводится к тому, что глаз, способный лишь приблизительно оценивать количественную характеристику света, позволяет очень точно устанавливать равенство освещения от двух световых пучков при их одновременном наблюдении. Это позволяет, даже строго не определяя саму характеристику излучения «сила света», проводить ее измерение. Тем самым Бугер сформулировал принцип визуальной фотометрии: одновременное наблюдение двух соприкасающихся световых полей, одно из которых освещается эталонным источником, а второе исследуемым (рис. 1.4). При этом проводится изменение одного из полей до уравнивания – принцип градации света. Простейшими способами изменения освещенности поля являются изменение числа расположенных рядом одинаковых эталонных источников (откуда берет начало единица «свеча») или расстояния до точечного источника света на основе закона обратных квадратов, сформулированного И. Кеплером. В трактате предлагается ряд лабораторных фотометрических установок для сравнения сил света источников, измерения коэффициентов пропускания и отражения различных тел, не потерявших свое значение по настоящее время.

Трактат Бугера состоит из трех книг. Первая определяет способы сравнения пучков лучей. Вторая книга посвящена исследованию отражения света поверхностями как гладкими, так и шероховатыми. Вводится понятие о доле отраженного света по отношению к упавшему, экспериментально исследуется зависи-

мость отражения от угла падения. Третья книга трактата посвящена исследованиям прозрачности тел. Бугер экспериментально устанавливает, что свет, проходя одинаковые слои прозрачного вещества, уменьшается подобно членам геометрической прогрессии. Это позволяет ему установить, что количества света, прошедшие через различные толщи тела, выражаются ординатами логарифмической кривой.

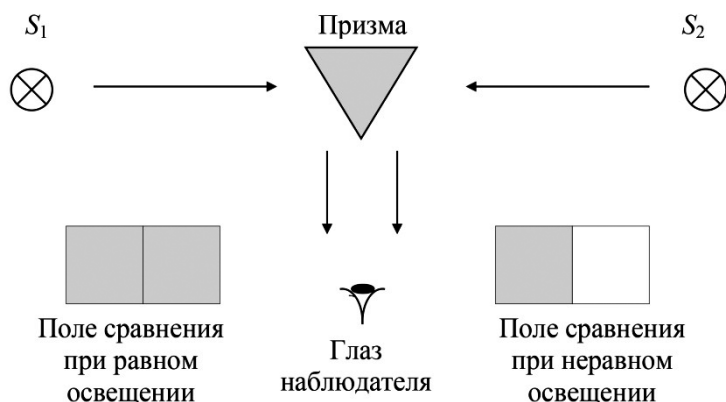


Рис. 1.4. Схема измерения Бугером

1.2. История формирования и развития основных идей светового поля

Существенное развитие идей Бугера было сделано Иоганом Ламбертом в его монографии «Фотометрия, или об измерениях и сравнениях света, цветов и тени» (*Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*), 1760 г., во многом определившей дальнейшее развитие фотометрии. Ламберт отмечает, что отсутствует общая физическая теория природы света, из которой можно получить все основные фотометрические соотношения. В основу своего изложения он положил лучи света и основные результаты работ Бугера. Далее он последовательно формулирует и доказывает ряд теорем о количестве света (*Lichtmenge*) для пуч-

ков в различных схемах наблюдения. Совокупность исследованных им положений можно свести к трем основным принципам фотометрии.

1. Количества света от двух одинаковых близко расположенных свечей в два раза больше, чем от одной – независимость и аддитивность световых пучков, проходящих в исследуемую точку с различных направлений.

2. Количество света, излучаемого с одной площадки на другую, обратно пропорционально квадрату расстояния l_{12} между ними (рис. 1.5).

3. Количество света при тех же условиях пропорционально площадям площадок ds_1 , ds_2 и косинусам углов излучения $\cos\theta_1$ и падения $\cos\theta_2$, определяемых нормалью к каждой площадке и осью, соединяющей их условные центры.

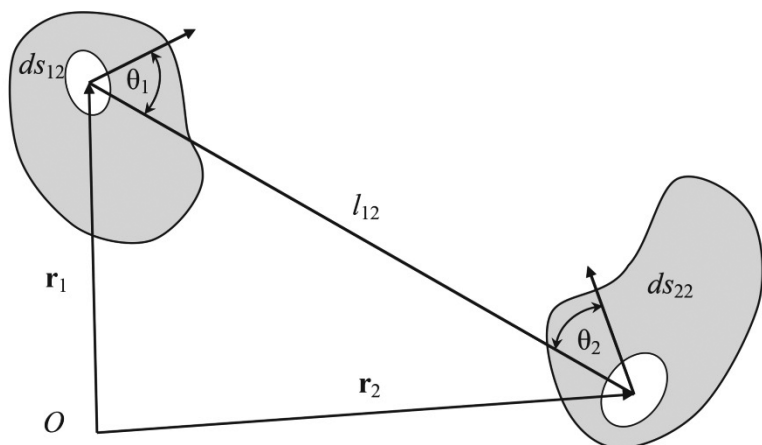


Рис. 1.5. Перенос излучения с одной площадки на другую

Принципы 2 и 3 выполняются при условии, когда лучи света, приходящие в данную точку приемной площадки, выходят из каждой излучающей точки.

В третьей части монографии Ламберт исследует отражение света различными зеркальными и матовыми поверхностями и вводит понятие альбедо (лат., *albedo* – белизна) как отношение

яркости отраженного образцом света к яркости идеально отражающей поверхности (отраженная яркость которой равна яркости источника). Понятие альбедо играет важнейшую роль в фотометрии материалов. Однако равномерному распределению света от матовых поверхностей Ламберт придал абсолютный характер, в отличие от Бугера, который рассматривал его как частный случай. В настоящее время поверхность, отражающая свет равномерно диффузно, принято называть диффузной или ламбертовской.

Ламберт также анализирует ослабления параллельного пучка излучения в слое мутной среды при нормальном падении. Он ссылается на Бугера, но придает его закону математическую формулировку. Пусть интенсивность излучения на глубине x равна v , тогда изменение интенсивности dv на элементе глубины dx будет определяться уравнением (сохранены обозначения Ламберта):

$$-dv = \delta v dx, \quad (1.1)$$

где δ – плотность препятствий в этом слое на единицу длины.

Откуда изменение интенсивности с глубиной примет вид

$$\ln \frac{1}{v} = -\int \delta dx. \quad (1.2)$$

Если непрозрачные частицы распределены в слое равномерно, то последнее выражение сводится к формуле

$$\ln \frac{1}{v} = -\delta x, \quad (1.3)$$

то есть к логарифмической кривой, установленной Бугером.

Экспериментальные идеи Бугера, которые Ламберт облек в ясную и логичную форму, стали хорошей основой для быстрого развития фотометрии. К тому же он явился одним из создателей Баварской академии наук в 1759 г., а с 1764 г. являлся активным членом Прусской академии наук, что определило создание в Германии очень мощной школы фотометрии. Нет смысла здесь упоминать работы всех исследователей, внесших вклад в развитие

теории, укажем лишь на монографию «Основы фотометрических расчетов» (*Grundriss des photometrischen Calcüles*), 1854 г. Августа Бэра, которая явилась известным обобщением этих работ и также оказала решающее влияние на развитие фотометрии.

Прежде всего, в этой работе Август Бэр дает строгую математическую формулировку основного соотношения фотометрии, описывающего количество света $d\Phi$, переносимого с одного элемента ds_1 излучающей (отражающей) ламбертовской поверхности на другой ds_2 :

$$d\Phi = L \frac{ds_1 \cos \theta_1 ds_2 \cos \theta_2}{l_{12}^2} \equiv L \frac{d^2 r_1 (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_1), \hat{\mathbf{i}}) d^2 r_2 (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_2), \hat{\mathbf{i}})}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}, \quad (1.4)$$

где L есть некоторая характеристика лучей, характеризующая их плотность в пучке: *Leuchtkraft* – сила света, что на сегодня соответствует яркости пучка лучей; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-векторы центров элементов ds_1 и ds_2 ; $l_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ – расстояние между этими элементами; $\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{l_{12}}$ – единичный вектор направления из элемента ds_1 к ds_2 .

Здесь и далее единичные вектора будем обозначать символом крышечка «^» над символом. $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_1), \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_2)$ – единичные вектора нормалей к элементам в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Остальные обозначения понятны из рис. 1.5. В круглые скобки заключено скалярное произведение.

В анализе взаимодействия излучения с веществом Бэр всегда предполагает его линейным относительно яркости и вводит соответствующие коэффициенты пропускания, поглощения. В частности, он предполагает линейной зависимость ослабления от толщины ds вещества, что приводит его к выражению:

$$\frac{dL}{L} = -kds, \quad (1.5)$$

где k есть коэффициент ослабления интенсивности (*der Extinktionskoeffizienten der Intensität in Bezug auf den Raum*), что приводит к закону

$$L(s) = L(0)e^{-ks}. \quad (1.6)$$

Здесь следует указать, что за два года до выхода монографии Бэр в 1852 г. опубликовал экспериментальные исследования зависимости пропускания растворов от массы растворенного вещества, где получил экспоненциальную зависимость (1.6). С этих позиций нам представляется несправедливым называть закон ослабления законом Ламберта-Бэра. Правильным является название либо закон Бугера, либо указывать всех трех – Бугер-Ламберт-Бэр: первый его открыл, второй дал математическую формулировку, а третий придал ему современный экспоненциальный вид. Мы в дальнейшем будем его использовать как закон Бугера.

Большинство физиков XVIII в. принимали корпускулярную теорию, однако и у волновой теории были свои сторонники. Томас Юнг в 1799 г. в статье «Очерки экспериментов и исследований звука и света» (*Outlines of Experiments and Inquiries respecting Sound and Light*) заметил, что в соответствии с корпускулярной теорией скорость испускания корпускулы должна быть одинаковой во всех случаях, независимо от того, отбрасывает ли ее слабая искра или сильная энергия самого Солнца, что практически невероятно. Этой сложности не существует в волновой теории, поскольку известно, что все возмущения передаются через упругую жидкость с одной и той же скоростью. Далее Юнг отмечает, что волновая теория проще объясняет явления отражения и преломления света: в корпускулярной теории трудно понять, почему одна часть луча света должна отражаться, а другая часть этого же луча – преломляться, а в волновой теории света проблем с этим не возникает.

В 1801 г. Юнг объяснил кольца Ньютона в соответствии с принципами волновой теории. Он считал, что все наблюдаемые цвета присутствуют в падающем свете, и эти цвета можно получить из света с помощью процесса, аналогичного сложению морских волн в заливе, и назвал это общим законом интерференции

света. Это позволило Юнгу объяснить цвета тонких пластинок, видимые при отражении, тем, что падающий свет порождает два луча, которые достигают глаза: один из этих лучей отразился от первой поверхности пластинки, а второй луч – от второй поверхности, и эти два луча, интерферируя, производят цвета.

Этьенн Луи Малюс обнаружил, что свет, преломленный от поверхности любого прозрачного вещества, тоже в некоторой степени обладает свойством, которое приобретается при двойном лучепреломлении, которое он назвал поляризацией. Так случилось, что из двух конкурирующих теорий первичной природы света этот труд поддержал корпускулярную, выдвинув на первый план явления поляризации, которым приверженцы волновой теории, до сих пор ошибочно полагавшие, что свет аналогичен звуку, не могли дать никакого объяснения.

В 1800 г. английский астроном Уильям Гершель, оптик и композитор немецкого происхождения, открыл инфракрасное излучение. Занимаясь исследованием Солнца, он искал способ уменьшения нагрева инструмента, с помощью которого велись наблюдения. Определяя с помощью термометров действие разных участков видимого спектра, Гершель обнаружил, что «максимум тепла» лежит за насыщенным красным цветом и, возможно, «за видимым преломлением». После того, как было обнаружено инфракрасное излучение, немецкий физик Иоганн Вильгельм Риттер начал поиски излучения у противоположного конца видимого спектра, с длинами волн короче, чем у излучения фиолетового цвета. В 1801 г. он обнаружил, что хлорид серебра, разлагающийся под действием света, быстрее разлагается под действием невидимого излучения за пределами фиолетовой области спектра. Тогда многие учёные, включая Риттера, пришли к соглашению, что свет состоит из трёх отдельных компонентов: окислительного или теплового (инфракрасного) компонента, осветительного компонента (видимого света), и восстановительного (ультрафиолетового) компонента. Идеи о единстве трёх различных частей спектра впервые появились лишь в 1842 г. в трудах Мачедонио Меллони.

Огюстен Жан Френель 15 июля 1816 г. представил Академии наук научный труд, в котором дифракционные эффекты были впервые соотнесены с взаимной интерференцией вторичных волн, испускаемых теми частями исходного фронта волны, которые не загромождают экран. В своем методе вычисления Френель применил принципы Гюйгенса и Юнга, он обобщил эффекты, возникающие из-за разных частей одного и того же первичного фронта волны. Симеон Дени Пуассон, читая рукопись, заметил, что точно также можно проанализировать и другие случаи, и в частности, это означает, что в центре тени от круглого экрана должно наблюдаться световое пятно. Он предложил Френелю на опыте проверить этот и еще некоторые другие выводы, что и было сделано. Полученные результаты подтверждали новую теорию. Согласованность наблюдения и вычисления была столь замечательна во всех случаях, где сравнение было возможно, что без дальнейших колебаний премию Академии 1818 г. за объяснение дифракции вручили Френелю.

Самой большой проблемой волновой теории было объяснение явлений поляризации в соответствии с ее принципами. Юнг уже очень давно размышлял над этим, но по-прежнему не мог найти выход. В 1816 г. его посетил Доминик Франсуа Жан Араго и рассказал ему о новом экспериментальном результате, полученном недавно совместно с Френелем: два сходящихся пучка света, поляризованных в плоскостях под прямым углом, не интерферируют друг с другом при тех условиях, когда обыкновенный свет демонстрирует явления интерференции, но при их повторном объединении всегда дают одну и ту же интенсивность света, независимо от разности их хода. Вскоре Юнг нашел разгадку этой тайны, которую так долго искали: колебания света происходят перпендикулярно направлению его распространения, поэтому светонесущая среда обладает способностью сопротивляться попыткам вызвать ее деформацию и ведет себя как упругое твердое тело. На основе этого представления Френель в январе 1823 г. представил на рассмотрение Академии теорию, где рассмотрел отражение и преломление как динамические свойства светонесущей среды. После смерти Френеля эта концепция была развита в ряде научных трудов.

В этом же году Клод-Луи-Мари-Анри Навье сформулировал основное уравнение гидродинамики, известное сейчас как уравнение Навье–Стокса. В этом научном труде впервые были даны правильные уравнения колебательного движения упругого твердого тела определенного типа. Среди рецензентов одного из трудов Навье был Огюстен Луи Коши, один из величайших аналитиков девятнадцатого века, который, заинтересовавшись данным вопросом, в 1828 г. опубликовал работу, где он рассматривал эту тему с совершенно иной точки зрения. Вместо того, чтобы допустить, как это сделал Навье, что среда является скоплением точечных центров силы, тем самым связывая себя с сомнительными молекулярными гипотезами, он изобрел метод прямого изучения объемных упругих свойств материи.

В том же самом году Пуассон вывел из уравнения Коши для поперечной составляющей смещения волновое уравнение и успешно решил его, показав тем самым, что оно определяет волновые движения, которые могут распространяться в упругом твердом теле. В 1839 г. Мак Куллаг, развивая эти идеи, действительно создал модель среды, колебания которой, вычисленные по правильным законам динамики, должны обладать теми же свойствами, что и колебания света.

Вообще структура и строение среды, через которую передается взаимодействие, всегда были в центре внимания исследователей. Однако малость представлений о природе приводили к тому, что большинство ранних воззрений носили в основном спекулятивный характер. Примерно в середине девятнадцатого века это размышление приняло определенную форму и вылилось в рациональную теорию, которая явилась следствием развития идей Рене Декарта, выдвинутых также спекулятивно, но критика которых определяла развитие физики нового времени. Как последователь Иоганна Кеплера, который отрицал дальное действие, Декарт считал, что между телами возможны только два типа действия: давление и удар, т.е. тела могут воздействовать друг на друга только тогда, когда находятся в непосредственном контакте. Другими словами, все пространство в целом не может быть пустым.

По мнению Декарта, пространство заполнено средой, которая (хотя мы и не можем ощутить ее) способна передавать силу и воздействовать на материальные тела, погруженные в нее. Эту среду Декарт назвал эфиром. Изначально это слово означало голубое небо или верхние слои атмосферы (в отличие от нижних, которые находятся у поверхности Земли) и было заимствовано латинскими авторами из греческого языка, а уже от них в средние века это слово перешло во французский и английский языки.

К концу XVIII в. электричество и магнетизм были достаточно развитыми, но независимыми разделами физики. В 1820 г. Ханс Кристиан Эрстед наблюдает действие проводника с током на стрелку компаса, тем самым впервые экспериментально обнаруживает связь между электрическими и магнитными явлениями, о чем пишет в статье «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку» (*Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam*). Эрстед не определял количественные законы действия. Он удовольствовался формулировкой качественного эффекта и некоторыми замечаниями относительно его причины.

Следующий шаг сделал Андре-Мари Ампер, который ровно через неделю после появления известия об открытии Эрстеда показал, что два параллельных проводника с током притягиваются, если токи идут в одном направлении, и отталкиваются при противоположном направлении токов. Он начал разрабатывать математическую и физическую теории, чтобы понять взаимосвязь между электричеством и магнетизмом. Ампер предположил существование «электродинамической молекулы» (предшественника идеи электрона), которая служила составным элементом как электричества, так и магнетизма. На этой основе он дал физическое объяснение электромагнитных явлений. Результаты своих исследований Ампер опубликовал 1827 г. в работе «Мемуары о математической теории электродинамических явлений, уникально выведенные из опыта» (*Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*), в которой предложил название новой науки – электродинамика.

Майкл Фарадей продолжил исследования связей электричества и магнетизма. Рассуждения Фарадея были следующими: если в опыте Эрстеда электрический ток обладает магнитной силой, то и движение магнита должно возбуждать электрический ток. Первые опыты были неудачны. Главной причиной неудач было незнание того факта, что электрический ток порождается только переменным магнитным полем, причём достаточно сильным, иначе ток будет слишком слаб для регистрации. Для усиления эффекта следовало магнит (или проводник) быстро двигать, а проводник свернуть в катушку. Только десять лет спустя, в 1831 г., Фарадей нашёл решение проблемы, обнаружив электромагнитную индукцию. В период с 1831 по 1840 гг. Фарадей публикует серию статей «Экспериментальные исследования по электричеству» в журнале *Philosophical Transactions*. Сообщение об опытах Фарадея вызвало сенсацию в научном мире Европы, массовые газеты и журналы также уделяли им внимания. С этого момента произошел синтез электричества и магнетизма в единую теорию электромагнетизма.

Уильям Томсон, барон Кельвин (Келвин), ещё студентом применил динамическую модель эфира Мак Куллага к явлениям электромагнетизма. В 1842 г. он опубликовал исследование «Равномерное движение тепла в однородном твердом теле и его связь с математической теорией электричества» (*The uniform motion of heat in homogeneous solid and its connection with the mathematical theory of electricity*), где провёл аналогию между явлениями распространения теплоты и электрического тока. Здесь существенно то, что формулы электрического поля, справедливые для действия на расстоянии, оказались идентичны формулам, связанным с теорией тепла, которые были выведены из гипотез о действии между соседними частицами.

Важно, что эти идеи вдохновили другого молодого студента Кембриджа – Джеймса Клерка Максвелла, который через несколько лет занялся этим вопросом и в конце концов решил его. Одной из первых его работ была «Динамическая теория электромагнитного поля» (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*), 1865 г.,

а свое завершение теория получила в 1873 г. в его фундаментальной работе «Трактат об электричестве и магнетизме» (*Treatise on Electricity and Magnetism*). Теория Максвелла основывается на концепции, заложенной главным образом Фарадеем и Томсоном, что магнитная энергия – это кинетическая энергия среды, занимающей все пространство, а электрическая энергия – это энергия натяжения той же самой среды, что привело электромагнитную теорию в близкую параллель с теориями эфира как упругого твердого тела.

В «Трактате» содержались основные уравнения электромагнитного поля, известные ныне как уравнения Максвелла. Однако они были представлены в не слишком удобной форме, в записи через скалярный и векторный потенциалы, и их было довольно много – двенадцать. Вся векторная алгебра и анализ создавались в это время. Впоследствии Генрих Рудольф Герц и Оливер Хевисайд переписали их через векторы электрического и магнитного поля, получив в итоге четыре уравнения в современной форме. Хевисайд также впервые отметил симметрию уравнений Максвелла. Непосредственным следствием этих уравнений стало предсказание существования электромагнитных волн, скорость распространения которых была равна скорости света. Такое совпадение случайным быть не могло, и означало, что свет есть электромагнитные волны. В 1887–1888 гг. Герц экспериментально открыл электромагнитные волны. В качестве излучателя он использовал дипольную антенну, состоящую из двух коллинеарных проводов с искровым зазором между их концами. Приемником в этих экспериментах являлась резонансная одноконтурная антенна с микрометровым искровым зазором между концами. Герцу удалось не только обнаружить волны, в том числе и стоячие, но и исследовать скорость их распространения, отражение, преломление и даже поляризацию. Все это очень напоминало оптику, с тем только отличием, что длины волн были почти в миллион раз больше.

В конце XIX в. в теории эфира возникли непреодолимые трудности, вынудившие физиков отказаться от понятия эфира и признать электромагнитное поле самодостаточным физическим

объектом, не нуждающимся в дополнительном носителе. Для объяснения явлений стремительно развивающейся физики эфиру приписывались новые, противоречивые атрибуты: неощутимость для вещества, поперечная упругость, немислимая по сравнению с газами или жидкостями скорость распространения колебаний и др. Важнейшим аргументом стало доказательство дискретной (квантовой) природы электромагнитного поля, несовместимое с гипотезой непрерывного эфира.

Термин «поле» был введен Фарадеем в 1845 г. в ходе исследований явления диамагнетизма – обнаруженного ученым эффекта слабого отталкивания магнитом ряда веществ. Первоначально поле рассматривалось Фарадеем, по сути, как координатная сетка, образованная магнитными силовыми линиями для описания характера движения тел вблизи магнитов. Поле как физическую реальность определил Максвелл. В своем «Трактате об электричестве и магнетизме» Максвелл определяет электрическое поле как часть пространства в окрестности электрического заряда Q , рассматриваемая с точки зрения электрических явлений. Она может быть занята воздухом или другими телами, либо это может быть так называемый вакуум. Если другой заряд q поместить в какой-либо части электрического поля, то оно, вообще говоря, вызовет заметное возмущение в электризации других тел. Но если это тело очень маленькое и заряд его очень мал (принято называть пробный заряд), то возмущение электризации других тел незначительно, а положение тела можно считать определяемым его центром масс.

По его реакции (в случае электростатического поля – сила \mathbf{F} , действующая на пробный заряд) каждой точке пространства придается некоторая величина, которая и образует поле. При этом отметим, что сама сила \mathbf{F} зависит как от точки поля, так и от величины пробного заряда q . Поэтому за характеристику поля принимается напряженность поля $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ и утверждается, что пробный заряд мы всегда можем сделать столь малым, что его влиянием на пространство можно пренебречь, и напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в точке будет характеризовать само поле в точке \mathbf{r} .

Целью создания теории эфира было объяснение всех явлений поведением дискретных тел – их положениями, скоростями и взаимодействиями, зависящими от положений и скоростей и определяющими положения и скорости тел. В классической теории поля центр тяжести переносится с идентификации (та же скорость, то же ускорение, та же масса и т.д.) на нетождественность, на то особенное, что отличает данную точку пространства от других и тем самым превращает пространство в поле.

Как отмечает Максвелл в своем «Трактате», при излучении света светящееся тело расходует определенное количество энергии, и если свет поглощается другим телом, это тело нагревается, показывая, что оно получило энергию извне. Поскольку скорость света конечна, то в течение промежутка времени после того, как свет покинул первое тело, но еще не достиг второго, она должна существовать в виде энергии в промежуточном пространстве. К концу XIX в. сэр Джозеф Лармор одним из первых указал, что эфир не состоит из опознаваемых элементов, имеющих определенное положение в абсолютном пространстве, и не стоит объяснять простые экспериментальные отношения, рассматривая их как механические следствия скрытой в этой среде структуры. Теории следует удовлетвориться получением точных динамических соотношений, так же как в геометрии при исследовании метрических свойства пространства, нет необходимости их объяснять. Как подчеркнул У. Томсон, если решить невозможно, то размышлять об этом, наверное, бесполезно, учитывая современное состояние науки.

Надо просто принять физическую реальность поля как экспериментально установленный факт и научиться работать с уравнениями, описывающими поведение этого объекта. В физике долгое время пытались объяснить электромагнитное поле при помощи различных механических моделей, но потом оставили эту затею и сочли, что физический смысл имеет лишь описывающая поле система знаменитых уравнений Максвелла.

Во второй половине XIX в. в Европе и США произошла вторая промышленная революция, в которой решающую роль играла электрификация производства, транспорта, быта. Важнейшей

стороной электрификации было создание и самое широкое распространение электрического освещения, что позволило людям планировать свое время на работу, образование, отдых и развлечения независимо от времени суток. Это стало величайшим достижением человечества, несомненно определившим великий научно-технический прогресс в XX в. Широкое распространение электрического освещения потребовало разработки не только источников света, светильников, систем электрического питания, но и стандартов на единицы и методы измерения светотехнических величин. На Всемирном электротехническом конгрессе 1896 г. в Женеве была принята современная система фотометрических величин и единиц. Ее автор Андре-Эжен Блондель в своем докладе на конгрессе «О единицах фотометрических величин» (*Sur les unités photométriques*) указал, что в основу такой системы должна быть положена яркость, но ее концепция была совершенно непонятна с точки зрения электродинамики. Поэтому он предложил основать фотометрическую систему на физически ясной концепции энергии и мощности (потока), что позволит связать фотометрию с общей физикой более непосредственно. В своей работе «Фотометрические единицы и термины» (*Photometric units and nomenclature*), 1910 г. глава отделения электрических исследований Американского бюро стандартов Эдвард Беннетт Роса пошел еще дальше в этом направлении и предложил по аналогии с механикой, что определение фотометрии должно основываться на точечном источнике с силой света в качестве его основной характеристики.

Созданная система величин блестяще послужила распространению электрического освещения во всех сферах жизни человека. Однако позднее границы использования светотехники начинают значительно выходить за рамки освещения, и требуется точное определение системы, чтобы охватить все концепции и значения фотометрии с точки зрения современной физики. В 1887 г. Герцем был открыт внешний фотоэффект, что позволило в 1888 г. Столетову собрать первый приемник оптического излучения и провести исследования его свойств. Глаз перестал быть единственным приемником света, и стало очевидным, что количество

света есть мощность, переносимая световым пучком. Обобщая развитие фотометрии в XIX в., Ш.Фабри в монографии «Общее введение в фотометрию, 1927 г.» (*Introduction générale à la photométrie*) определил фотометрию как раздел оптики, посвященный энергетике излучений.

В 1936 г. А.А. Гершун в монографии «Теория светового проля» сформулировал концепцию светового поля как область пространства, изучаемую с точки зрения происходящего в ней переноса энергии излучения. Изучение светового поля есть фотометрическое исследование пространства, исследование пространственного распределения световых потоков. В соответствии с определением светового поля необходимо построить его как поле реакций оптического приемника в произвольной точке пространства.

Радикальный пересмотр взглядов на поле внесло создание квантовой механики. В 1901 г. Макс Планк в работе «О законе распределения энергии в нормальном спектре» (*Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*) сформулировал совпадающий с опытом закон распределения энергии в спектре излучения черного тела, находящегося в тепловом равновесии. В его основе лежало допущение о прерывном характере испускания и поглощения света веществом, об испускании и поглощении света конечными порциями – квантами света. Энергия такого кванта света ε пропорциональна частоте колебаний света ω и выражается равенством $\varepsilon = \hbar\omega$. Согласно волновой теории, энергия волнового поля определяется не частотой волн ω , а амплитудами волн, образующих это поле.

Это представление о квантах света получило законченную форму после того, как Альберт Эйнштейн в статье «Об эвристической точке зрения, касающейся создания и преобразования света» (*Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*), 1905 г. показал необходимость помимо энергии ε приписать кванту света еще и импульс $p = \varepsilon/c$, направление которого совпадает с направлением распространения света. Глубокий смысл квантовой теории света заключается не в том, что мы представляем себе свет как газ, состоящий из частиц –

такое представление полезно ввиду наглядности, но односторонне, – а в том, что обмен энергией и импульсом между микросистемами (электрон, атом, молекула и т.п.) и светом происходит путем порождения одних и уничтожения других квантов света.

С позиций квантовой теории неправильно рассматривать микрочастицы по образу и подобию макроскопических тел. Материальная точка классической механики есть абстрактный, идеализированный образ вовсе не микрочастицы, а макроскопического тела, размеры которого малы в сравнении с расстояниями, встречающимися в проблеме. Движение микрочастиц во многих отношениях более родственно движению волн, нежели движению материальной точки по траектории. Это приводит к статистической трактовке движения микрочастиц в квантовой механике. Аналогичные представления определяются в статистической механике, но между квантовой механикой и классической статистической механикой существует принципиальное различие. Квантовая теория исследует статистические ансамбли микрочастиц по отношению к макроскопическим измерительным аппаратам.

Влияние пробного заряда (приемника) невозможно принципиально сделать бесконечно малым, поэтому всегда исследуется феномен взаимодействия объекта с приемником. При этом существуют физические пределы – постоянная Планка \hbar , длина волны λ , которые ограничивают возможность пренебрежения приемником. Поэтому в зависимости от приемника мы имеем, по сути, и разные объекты: при линейном приемнике (сигнал пропорционален силе) имеет место волновое поле, при квадратичном (сигнал пропорционален энергии, квадратичной относительно силы) – световое поле.

1.3. Основные понятия и законы теории светового поля

Изложенная диалектика развития понятий представления о свете позволяет нам сформулировать основные положения теории светового поля. А.А. Гершун сформулировал концепцию светового поля как область пространства, изучаемую с точки зрения про-

исходящего в ней процесса переноса энергии излучения. Соответственно, предметом теории светового поля должно стать описание реакции оптического приемника в произвольной точке пространства. В оптическом диапазоне спектра существуют только приемники, реагирующие на мощность падающего света, среди которых долгое время оставался единственным – глаз человека.

В основу анализа реакции приемника положим основное соотношение фотометрии А. Бэра, математически обобщившее законы И. Ламберта, основанные на экспериментах П. Бугер (1.4). Для этого несколько преобразуем это соотношение. Обратим внимание, что

$$d\omega_1(\hat{\mathbf{i}}) = \frac{ds_1 \cos \theta_1}{l_{12}^2} \quad (1.7)$$

есть телесный угол, под которым видна площадка ds_1 со стороны площадки ds_2 , а

$$d\sigma_2(\mathbf{r}) = ds_2 \cos \theta_2, \quad (1.8)$$

есть проекция ds_2 на направление оси, соединяющей эти две площадки, где для упрощения записи положено $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$.

Соответственно, получим новое представление основного фотометрического соотношения:

$$d\Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = L d\omega_1(\hat{\mathbf{i}}) d\sigma_2(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

Если перейти от бесконечно малых площадок к площадкам конечных размеров, то последнее выражение можно переписать в более физическом виде

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = L \Delta\omega_1(\hat{\mathbf{i}}) \Delta\sigma_2(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Как видно из (1.10), реакция приемника на поток на поверхность зависит от площади проекции приемной площадки $\Delta\sigma_2(\mathbf{r})$ на направление падения излучения $\hat{\mathbf{i}}$ и телесного угла $\Delta\omega_1(\hat{\mathbf{i}})$, в котором падает излучение. Коэффициент пропорциональности L

не зависит от параметров приемника и характеризует световое поле в точке расположения приемника \mathbf{r} по направлению оси цилиндра $\hat{\mathbf{I}}$. Тогда яркостью светового поля в точке \mathbf{r} по направлению $\hat{\mathbf{I}}$ назовем величину

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \lim_{\Delta\sigma, \Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})}{\Delta\sigma(\mathbf{r})\Delta\omega(\hat{\mathbf{I}})}. \quad (1.11)$$

Соответственно, за пробный заряд при определении светового поля необходимо взять так называемую «трубку Гершуна» (рис. 1.6), реакция приемника, ограниченного ею, пропорциональна потоку (мощности) $\Delta\Phi$. Тубус на приемнике излучений преграждает доступ к приемнику лучей, не укладывающихся в пределах телесного угла $\Delta\omega$, ось которого перпендикулярна его поверхности. Если длина тубуса заметно превосходит диаметр фотоэлемента, то телесный угол $\Delta\omega$ достаточно мал и световой поток $\Delta\Phi$ может считаться пропорциональным среднему значению яркости в пределах телесного угла $\Delta\omega$.

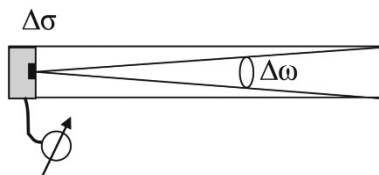


Рис. 1.6. Трубка Гершуна А.А.

Реакция любого реального оптического приемника в световом поле выражается через яркость поля. Существуют две разновидности оптических приемников: реагирующие на поток световой мощности через приемное окно (тепловые приемники) и на световую мощность во всем объеме активного вещества (полупроводниковые приемники). Для описания реакции первых удобно определить облученность – поверхностную плотность излучения в точке:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{d\Phi(\mathbf{r})}{ds}, \quad (1.12)$$

что позволяет записать поток, попавший на приемник, в виде:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{(S)} E(\mathbf{r}) d^2 r, \quad (1.13)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ – поток на площадке приемника в малой окрестности точки \mathbf{r} площадью ds ; S – площадь приемного окна.

Сопоставляя выражения (1.12) с выражением (1.10), можно записать выражение для облученности через яркость светового поля:

$$E(\mathbf{r}) = \int_{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) > 0} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}, \quad (1.14)$$

где $\hat{\mathbf{N}}$ – нормаль к поверхности приемника.

В прикладных задачах часто представляет интерес поток мощности излучения через некоторую единичную площадку с нормалью $\hat{\mathbf{N}}$. Поток световой энергии через такую площадку равен разности ее облученностей с двух противоположных сторон:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}) &= \int_{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) > 0} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} + \int_{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) < 0} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \\ &= \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = (\hat{\mathbf{N}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \hat{\mathbf{I}} d\hat{\mathbf{I}}$ – световой вектор в точке поля \mathbf{r} .

Для определения реакции приемников, поглощающих излучение всем своим объемом, рассмотрим количество световой энергии в объеме среды ΔV . Если выделить в полном объеме цилиндр объёмом dV и длиной l , расположенный между границами объема ΔV , то полная световая энергия, выходящая через его основание dS в направлении оси $\hat{\mathbf{I}}$ (рис. 1.7)

$$dW = L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) dS d\Omega(\hat{\mathbf{I}}) \frac{l}{c},$$

где c – скорость света.

Нетрудно видеть из построений на рис. 1.7, что

$$(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) dSl = dV.$$

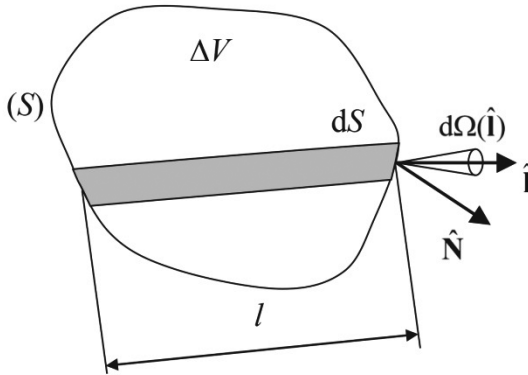


Рис. 1.7. Плотность световой энергии

Тогда, интегрируя по всем направлениям $\hat{\mathbf{l}}$, получим полную энергию ΔW во всем объеме ΔV :

$$\Delta W(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}} \Delta V,$$

а плотность световой энергии

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\Delta W(\mathbf{r})}{\Delta V} = \frac{1}{c} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}. \quad (1.16)$$

В соответствии с полученным выражением (1.16) определим характеристику светового поля в точке – пространственную облученность:

$$E_0(\mathbf{r}) \equiv cu(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}, \quad (1.17)$$

которая позволяет оценить реакцию объемного приемника.

Чувствительность оптических приемников различна к различным длинам волн λ . Поскольку приемник при классическом построении фотометрии используется как индикатор нуля для фиксации равенства полей сравнения, то использование конкретного приемника порождает определенную систему фотометрических величин. Из всевозможных приемников были выделены некоторые типовые приемники, которым соответствует, как принято говорить, своя система эффективных величин.

Среди эффективных величин совершенно особое место занимают световые величины, где в качестве типового приемника берется глаз человека. Соответственно, количество света является мощностью, взвешенной по кривой чувствительности приемника, а потому эту величину принято называть поток. Строго говоря, фотометрия относится лишь к эффективным величинам, порожденным глазом человека в качестве приемника излучения. Система понятий и величин, соответствующая переносу энергии излучения, называется радиометрия. В рамках данной главы все соотношения для обеих систем эквивалентны, мы не будем подчеркивать их различий и везде используем термин фотометрия.

Очевидно, что оптический приемник может измерять непосредственно мощность излучения, однако для единообразия общую мощность Φ , переносимую через площадку, принято называть потоком излучения. Распределение потока излучения по длине волны λ будем характеризовать с помощью спектральной плотности потока излучения:

$$\Phi_{e\lambda}(\lambda) = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}, \quad \Phi_e = \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) d\lambda. \quad (1.18)$$

Соответственно, можно ввести спектральные плотности всех характеристик светового поля. При этом все соотношения между ними сохраняются. Для удобства системы записи мы будем опускать индекс длины волны λ явно везде, кроме случаев, где это невозможно. Везде будет использоваться только энергетическая система величин.

Яркость $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ является функцией точки пространства \mathbf{r} и направления визирования $\hat{\mathbf{i}}$, т.е. световое поле задается в пятимерном фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$, и каждой точке пространства \mathbf{r} всегда задается угловое распределение, которое наглядно можно представить как тело распределения яркости – поверхность, образованную точками на расстоянии, пропорциональном значению яркости по направлению $\hat{\mathbf{i}}$. Процесс измерения тела яркости можно представить как закрепление трубки Гершуна в некоторой точке пространства \mathbf{r} и замеры значений яркости при ее повороте.

Значение яркости графически можно изобразить приложенным к данной точке направленным отрезком. Однако отсюда не следует, что яркость есть вектор. Не всякая величина, требующая для своего определения указания числа и направления, является вектором. Понятие вектора определяется правилом параллелограмма сложения двух векторов, так как складывать яркости, «имеющие» разное направление, бессмысленно.

Это существенно отличает световое поле от силовых полей, у которых каждой точке пространства ставится в соответствие вектор (рис. 1.8). Световое поле представляет собой пространственно-угловое распределение яркости. Такое поле естественно называть диффузным световым полем, а его теорию – фотометрической в отличие от электромагнитной.

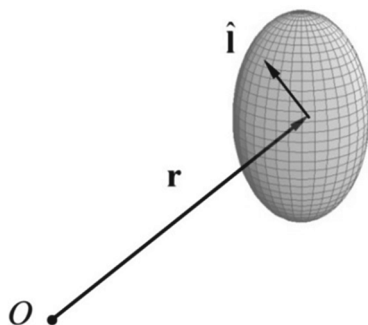


Рис. 1.8. Пространственно-угловое распределение яркости

В следующем параграфе мы из волновой теории света докажем выражение

$$\operatorname{div}(\omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}}) = 0, \quad (1.19)$$

где $\omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ берется на световой трубке (рис. 1.9).

Из (1.19) следует, что для любого сечения s вдоль световой трубки, образованной всеми лучами, выходящими из Δs_1 в каждую точку Δs_2 , сохраняется величина

$$N = \int_{(s)} \Delta \omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})) d^2 r,$$

где все обозначения приведены на рис. 1.9.

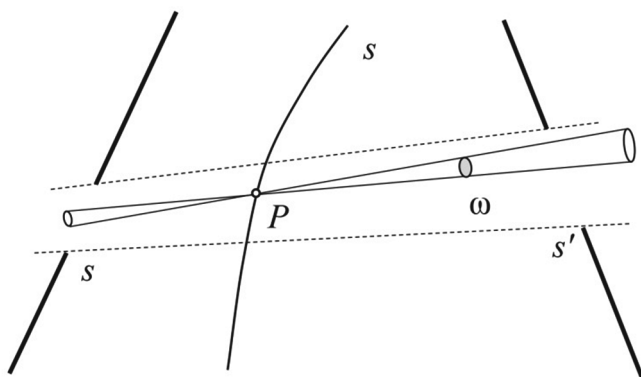


Рис. 1.9. Световая трубка

С этой точки зрения N можно определить как меру множества лучей в световой трубке, тогда как яркость $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ будет являться плотностью потока (мощности) лучей в пучке. Тем самым мы сформулировали физическую модель светового поля: через каждую точку пространства проходят световые лучи, по которым переносится поток (мощность) с плотностью $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ в точке \mathbf{r} по направлению $\hat{\mathbf{i}}$. При этом все лучи, приходящие в одну точку, не зависят друг от друга, и при их наложении результат их воздействия на приемник складывается, что определяет аддитивность лучей в соответствии с формулами (1.14), (1.15).

Если пространство заполнено средой с поглощением, то яркость изменяется вдоль луча по закону Бугера (1.6), которому удобнее для дальнейшего изложения придать вид, не зависящий от положения луча в пространстве. Известно, что производная по произвольному направлению вдоль луча с направлением $\hat{\mathbf{i}}$ выражается соотношением

$$\frac{d}{ds} = (\hat{\mathbf{i}}, \nabla), \quad (1.20)$$

где ∇ – оператор градиента.

Тем самым уравнение (1.20) перепишется в виде

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\kappa(\mathbf{r}) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (1.21)$$

что является уравнением переноса излучения (УПИ) для поглощающей среды, которое определяет изменение яркости вдоль луча при наличии поглощения в среде.

Для решения уравнения (1.21) зафиксируем точку \mathbf{r}_0 на луче с направлением $\hat{\mathbf{l}}$. Тогда произвольная точка \mathbf{r} на луче будет удовлетворять соотношению:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \quad (1.22)$$

где ζ – расстояние от точки \mathbf{r}_0 до \mathbf{r} по лучу.

Выражение (1.22) представляет собой уравнение прямой в пространстве, записанное в векторной форме. Если записать его в декартовой системе координат для проекций

$$x = x_0 + \zeta l_x, \quad y = y_0 + \zeta l_y, \quad z = z_0 + \zeta l_z, \quad (1.23)$$

где $\mathbf{r} = [x, y, z]$, $\hat{\mathbf{l}} = [l_x, l_y, l_z]$, и исключить из полученных уравнений ζ , то получим каноническое уравнение прямой линии в пространстве

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} = \frac{z - z_0}{l_z}. \quad (1.24)$$

Соответственно УПИ (1.21) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\zeta} L(\mathbf{r}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = -\kappa(\mathbf{r}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}) L(\mathbf{r}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (1.25)$$

что является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$L(\mathbf{r}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{l}}) \exp\left(-\int_0^\zeta \kappa(\mathbf{r}_0 + \xi \hat{\mathbf{l}}) d\xi\right),$$

или в более удобном для анализа поля представлении для точки \mathbf{r} с учетом (1.22)

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) \exp\left(-\int_0^{\zeta} \kappa(\mathbf{r} - \xi \hat{\mathbf{l}}) d\xi\right), \quad (1.26)$$

что представляет собой запись закона Бугера для неоднородных сред. Величину

$$\tau = \int_0^{\zeta} \kappa(\mathbf{r} - \xi \hat{\mathbf{l}}) d\xi \quad (1.27)$$

принято называть оптическим расстоянием (толщиной) вдоль луча.

Особенно простое решение УПИ (1.21) имеет для однородной среды без поглощения (вакуума, $\kappa = 0$):

$$\forall \xi : L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (1.28)$$

что эквивалентно постоянству яркости вдоль луча – известного еще в средние века закона, позволяющего ограничиться в теории техники электрического освещения только яркостью поверхности.

Типичная задача техники электрического освещения – расчет облученности от выпуклой (без самозатенений) поверхности Σ конечных размеров в точке \mathbf{r}_o на площадке, заданной нормалью $\hat{\mathbf{N}}$, при заданном распределении яркости $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ по Σ (рис. 1.10).

С учетом (1.14) можно записать

$$E(\mathbf{r}_o) = \int_{(\Omega)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}, \quad (1.29)$$

где Ω – телесный угол, под которым видна поверхность Σ из точки \mathbf{r}_o .

С учетом независимости яркости вдоль луча в вакууме (1.28) и связи телесного угла с элементом поверхности Σ в точке \mathbf{r}

$$d\hat{\mathbf{l}} = \frac{(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{l}}) d^2 r}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)^2},$$

где $\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}$ – нормаль к элементу $d^2 r$ поверхности Σ , можно в (1.29) перейти от интеграла по телесному углу к интегралу по поверхности

$$E(\mathbf{r}_o) = \int_{(\Sigma)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \frac{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{l}})}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)^2} d^2 r. \quad (1.30)$$

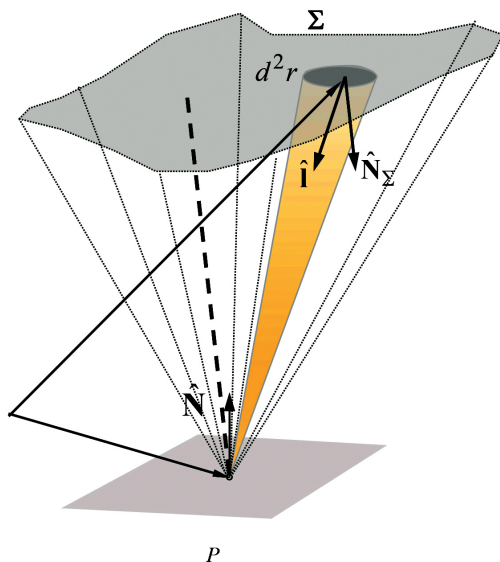


Рис. 1.10. Рисунок к определению облученности в точке – определение силы света

Если среднее расстояние между Σ и точкой \mathbf{r}_o достаточно велико или, что эквивалентно, телесный угол Ω мал, то по теореме о среднем (1.30) можно приближенно преобразовать к виду

$$E(\mathbf{r}_o) \approx \frac{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \int_{(\Sigma)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{R}})(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2r \equiv \frac{I(\hat{\mathbf{R}})}{R^2} (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{R}}), \quad (1.31)$$

где \mathbf{R} – средний вектор от Σ к точке \mathbf{r}_o , а величина $I(\hat{\mathbf{R}})$ – сила излучения поверхности Σ в направлении $\hat{\mathbf{R}}$:

$$I(\hat{\mathbf{R}}) = \int_{(\Sigma)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{R}})(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2r. \quad (1.32)$$

Выражения (1.31), (1.32) вводят понятие силы излучения для приближенного описания источников света и позволяют вычислять облученность в точке на поверхности от точечного источника – закон обратных квадратов расстояния (И. Кеплер).

1.4. Интегральные характеристики светового поля

Мы определили световое поле как пространственно-угловое распределение яркости $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$. Введенные величины: облученность $E(\mathbf{r})$, световой вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и пространственная облученность $E_0(\mathbf{r})$ определяются интегралами от углового распределения яркости $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ по телесному углу с некоторой весовой функцией направления визирования и их принято называть интегральными характеристиками светового поля. Каждая из этих характеристик образует скалярные и векторные поля соответственно. Полная информация о световом поле содержится в пространственно-угловом распределении яркости $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$, однако практически количественная оценка каждой точки поля не одной, а многими значениями яркости мало пригодна. Альтернативным подходом является представление углового распределения яркости в виде ряда по системе ортогональных функций. Если в точке \mathbf{r} определить сферическую систему координат, то направление визирования $\hat{\mathbf{i}}$ будет задаваться зенитным ϑ и азимутальным φ углами (рис. 1.11). Полной ортогональной системой функций на сфере значений (ϑ, φ) являются сферические функции (сферические гармоники)

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{i}}) = Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (1.33)$$

где l, m – зенитный и азимутальный целые индексы, $l \in \overline{[0, \infty]}$, $m \in \overline{[-l, +l]}$; i – мнимая единица; $Q_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\mu)$ – полунормированные полиномы Шмидта; $\forall m > 0: P_l^m(\mu) = \sqrt{(1-\mu^2)^m} \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m}$; $P_l^{-m}(\mu) = (-1)^m P_l^m(\mu)$ – присоединенные

полиномы Лежандра; $(l+1)P_{l+1}(\mu) = (2l+1)\mu P_l(\mu) - lP_{l-1}(\mu)$,
 $P_0(\mu) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$ – полиномы Лежандра.

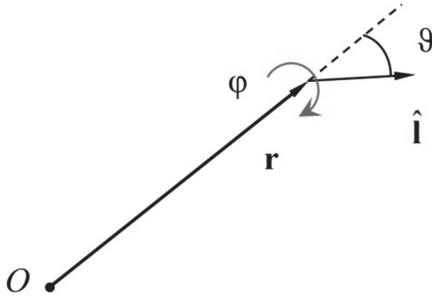


Рис. 1.11. К разложению углового распределения яркости по сферическим функциям – локальная сферическая система координат

Сферические функции ортогональны

$$\oint Y_l^m(\hat{\mathbf{i}}) Y_k^n(\hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} = \delta_{kl} \delta_{mn}, \quad (1.34)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера.

Тогда угловое распределение яркости в точке представимо в виде

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m(\mathbf{r}) Y_l^m(\hat{\mathbf{i}}), \quad (1.35)$$

где $C_l^m(\mathbf{r})$ – коэффициенты разложения или угловой спектр яркости в точке \mathbf{r} , выражение для которых с учетом условия ортогональности (1.34) будет иметь вид:

$$C_l^m(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}}. \quad (1.36)$$

Рассмотрим применение углового спектра для анализа распределения яркости. Определим сферическую систему с нормалью к поверхности $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ в качестве зенитной оси. Нетрудно видеть, что в этом случае первые два коэффициента

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\hat{\mathbf{I}}) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} : C_0^0(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) Y_0^0(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E_0(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^0(\hat{\mathbf{I}}) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) : C_1^0(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) Y_1^0(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\mathcal{E}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{N}})
\end{aligned} \tag{1.38}$$

определяются введенными интегральными характеристиками поля.

Допустим, что поле симметрично относительно оси $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})$, и для оценки углового распределения можно ограничиться в спектре членами с $l \leq 1$ – диффузионное приближение:

$$\begin{aligned}
L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= C_0^0(\tau) Y_0^0(\hat{\mathbf{I}}) + C_1^0(\tau) Y_1^0(\hat{\mathbf{I}}) = \\
&= \frac{1}{4\pi} E_0(\tau) + \frac{3}{4\pi} \mathcal{E}(\tau) \hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{4\pi} (E_0(\tau) + 3 \mathcal{E}(\tau) \hat{\mathbf{I}})
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Тем самым видим, что пространственная освещенность определяет плотность мощности поля в \mathbf{r} , а световой вектор позволяет оценить различия в освещенности сверху и снизу по нормали. Если поле не симметрично относительно оси $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})$, то необходимо учесть следующие члены ряда. Введем обозначения $(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) = \cos \vartheta$, $(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{I}}) = \cos \vartheta_0$, φ – азимутальный угол вокруг оси $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})$. Для сферических функций по выражениям (1.33) имеем

$$Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\varphi} \sin \vartheta, \quad Y_1^1(\hat{\mathbf{I}}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\varphi} \sin \vartheta.$$

Поскольку угловое распределение яркости вещественное, то интегралы от мнимых частей должны равняться 0, что приведет к определению вещественной сферической функции

$$p_1^1(\hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{I}}) - Y_1^1(\hat{\mathbf{I}})) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Это приведет к появлению в (1.39) дополнительного члена, характеризующего нарушение осевой симметрии относительно $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})$. Для описания осевой симметрии вводится еще одна интегральная характеристика светового поля – цилиндрическая освещенность:

$$E_y(\hat{\mathbf{I}}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) \sin \vartheta d\hat{\mathbf{I}}. \quad (1.40)$$

Обобщая полученные выражения, можно определить общее выражение для интегральной характеристики светового поля

$$C(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) f(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}, \quad (1.41)$$

где $f(\hat{\mathbf{I}})$ – функция, определяющая ценность излучения в данном направлении $\hat{\mathbf{I}}(\vartheta, \varphi)$ для данного типа приемников.

Среди всех полей интегральных характеристик особое место занимает поле светового вектора $\mathcal{E}(\mathbf{r})$, для которого из УПИ можно получить уравнение. Запишем УПИ для среды без поглощения $\kappa(\mathbf{r}) = 0$:

$$(\hat{\mathbf{I}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = 0. \quad (1.42)$$

Проинтегрируем обе части уравнения по телесному углу:

$$\oint (\hat{\mathbf{I}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \nabla \oint \hat{\mathbf{I}}L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

что преобразует (1.42) к виду

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.43)$$

К сожалению, только дивергенции вектора недостаточно для нахождения самого вектора. Для этого необходимо иметь уравнение для ротора от него, которое найти не получилось. Однако уравнение (1.43) определяет поле светового вектора $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ как соленоидальное. Поэтому мы можем ввести векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.44)$$

Для определения векторного потенциала рассмотрим световой вектор $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ на поверхность P_2 с поверхности P_1 (рис. 1.12). Для простоты расчета допустим поверхность ламбертовской

$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = L$, когда яркость P_1 постоянна по поверхности и не зависит от направления визирования. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}_2) &= \oint L(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{i}} d\hat{\mathbf{i}} = L \int_{P_1} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_2), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^4} d^2 r_1 = \\ &= L \int_{P_1} \frac{\mathbf{r}(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r})}{r^4} d^2 r, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где $\hat{\mathbf{i}} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, и для упрощения преобразований определим $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, что равносильно расположить начало отсчета на P_1 .

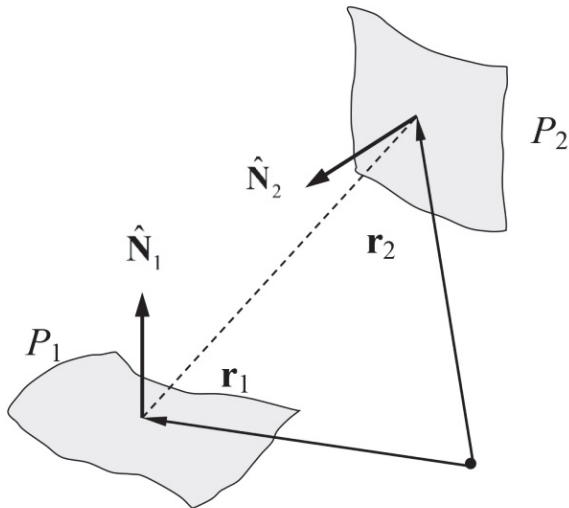


Рис. 1.12. К расчету переноса светового потока с одной поверхности на другую

Проведем тождественные преобразования подынтегрального выражения

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r})}{r^4} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{r^4} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r}) - \frac{\hat{\mathbf{N}}}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{N}}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[-(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r}) \nabla \frac{1}{r^2} - \frac{\nabla(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r})}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{N}}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{N}}}{r^2} - \nabla \frac{(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r})}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Отметим некоторые соотношения

$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} = \nabla \ln r, \quad (\nabla, \nabla \ln r) = \frac{1}{r^2}, \quad (1.47)$$

что позволит переписать (1.46) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{r})}{r^4} &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{N}}(\nabla, \nabla \ln r) - \nabla(\hat{\mathbf{N}}, \nabla \ln r) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \nabla) \cdot \nabla \ln r, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где мы воспользовались известным свойством двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (1.49)$$

Соответственно, получим для выражения (1.45) для светового вектора

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \int_{P_1} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \nabla) \cdot \nabla \ln r \, d^2 r. \quad (1.50)$$

На основе теоремы Стокса выражение (1.50) можно переписать в форме

$$\mathcal{E} = \frac{L}{2} \oint_{C_1} \mathbf{dr} \cdot \nabla \ln r, \quad (1.51)$$

где C_1 – контур, охватывающий грань P_1 .

Заметим, что

$$\text{rot}(\ln r \, \mathbf{dr}) = \ln r \, \text{rot} \, \mathbf{dr} - \mathbf{dr} \cdot \nabla \ln r, \quad (1.52)$$

и

$$\text{rot} \, \mathbf{dr} \equiv 0.$$

Это позволит преобразовать (1.50) к виду

$$\mathcal{E} = -\frac{L}{2} \oint_{C_1} \text{rot} \, \hat{\phi} \ln r \, \mathbf{dr}. \quad (1.53)$$

Откуда получаем выражение для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = -\frac{L}{2} \oint_{C_1} \hat{\phi} \ln r \, \mathbf{dr}. \quad (1.54)$$

Полученные выражения позволяют перейти к решению фундаментальной задачи переноса светового потока с P_1 на P_2 (рис. 1.12). Выражение для потока, переносимого с P_1 на P_2 , можно записать по определению светового вектора

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \iint_{P_2} (\mathcal{E}(\mathbf{r}_2), \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_2)) d^2 r_2 = \\ &= -\frac{L}{2} \iint_{P_2} \left(\text{rot} \oint_{C_1} \hat{\phi} \ln |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| d\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_2) \right) d^2 r_2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Воспользуемся вновь теоремой Стокса и получим

$$\Phi_{12} = \frac{L}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \hat{\phi} \ln |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (1.56)$$

Аналитический расчет по выражению (1.56) возможен только для случая двух прямоугольных граней. Тогда уравнения двух произвольных ребер прямоугольных граней будут иметь вид

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{01} + \xi_1 \hat{\mathbf{l}}_1, \quad \xi_1 \in [0, l_1]; \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{02} + \xi_2 \hat{\mathbf{l}}_2, \quad \xi_2 \in [0, l_2], \quad (1.57)$$

где $\mathbf{r}_{0\{1,2\}}$ – радиус-вектор вершины прямоугольника грани; $\hat{\mathbf{l}}_{\{1,2\}}$ – направляющий вектор ребра, выходящего из этой вершины.

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{r}_0 = |\mathbf{r}_{01} - \mathbf{r}_{02}|, \Delta_1 = (\hat{\mathbf{l}}_1, \mathbf{r}_0), \Delta_2 = (\hat{\mathbf{l}}_2, \mathbf{r}_0), \mu = (\hat{\mathbf{l}}_1, \hat{\mathbf{l}}_2).$$

Запишем выражение для расстояния между точками на ребрах граней

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_{01} - \mathbf{r}_{02} + \xi_1 \hat{\mathbf{l}}_1 - \xi_2 \hat{\mathbf{l}}_2)^2} = \\ &= \sqrt{r_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2(\xi_1 \Delta_1 - \xi_2 \Delta_2 - \xi_1 \xi_2 \mu)}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

что позволит записать выражение для части контурного интеграла на этих двух ребрах

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{\mu}{4} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \ln \left[(\xi_1 + \Delta_1 - \mu \xi_2)^2 + r_0^2 - \Delta_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu^2) + 2\xi_2 (\Delta_1 \mu - \Delta_2) \right] d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Последнее выражение позволяет легко рассчитать частные, но практически важные случаи:

• два одинаковых прямоугольника со сторонами $a \times b$, лежащих в параллельных плоскостях на расстоянии h друг от друга ($X = a/h$, $Y = b/h$):

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= 2Lab \left[\frac{\sqrt{1+X^2}}{X} \operatorname{arctg} \frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}} + \frac{\sqrt{1+Y^2}}{Y} \operatorname{arctg} \frac{X}{\sqrt{1+X^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{X} \operatorname{arctg} Y - \frac{1}{Y} \operatorname{arctg} X + \frac{1}{XY} \ln \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]; \end{aligned} \quad (1.60)$$

• два прямоугольника со сторонами $a \times b$ и $b \times c$, лежащих в перпендикулярных плоскостях и имеющих общую сторону b ($X = a/b$, $Y = c/b$, $A = (1+X^2)(1+Y^2)$, $B = 1+X^2+Y^2$):

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \frac{Lab}{X} \left\{ \left[X \operatorname{arctg} \frac{1}{X} + Y \operatorname{arctg} \frac{1}{Y} - \sqrt{X^2+Y^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left[\ln \frac{A}{B} + X^2 \ln \frac{X^2 B}{A} + Y^2 \ln \frac{Y^2 B}{A} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Вывод полученных выражений проводился многими исследователями, но наиболее строго на основе векторного потенциала был выполнен известным советским физиком Владимиром Александровичем Фоком. В общем случае произвольного положения прямоугольников выражения сильно усложняются, и возможен только численный расчет.

Воспользуемся выражением (1.60) и рассмотрим применимость понятия точечного источника и силы света (1.31), (1.32) в случае двух одинаковых квадратов с $a = b = 1$, а h будем измерять в единицах a и b . В этом случае средняя освещенность на приемной площадке будет равна потоку (1.60), деленному на площадь приемной площадки $S_2 = ab$:

$$E_{Fock}(h) = \frac{\Phi_{12}}{ab}. \quad (1.62)$$

Сила излучения «точечного» равнояркого диффузного квадрата 1 в соответствии с (1.32) примет вид:

$$I_1 = \int_{(\Sigma)} L(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2 r = Lab, \quad (1.63)$$

а закон обратных квадратов (1.31) в этом случае

$$E_{Kepler}(h) = \frac{Lab}{h^2}. \quad (1.64)$$

На рисунке 1.13 представлено сравнение расчетов по выражениям (1.62) с учетом (1.60) и по (1.64). Из рисунков видно, что при расстоянии h , в 2,5 раза превышающем размеры источника, погрешность составит менее 10%, а для $h = 5$ погрешность уже будет менее 2%, при $h > 10$ погрешность становится менее 1%. Отметим, что для задач расчета осветительных установок не требуется точность более 20%, поскольку не представляется возможным точнее задать все светотехнические характеристики установки и освещаемого помещения, что и определило распространение понятия точечного источника света.

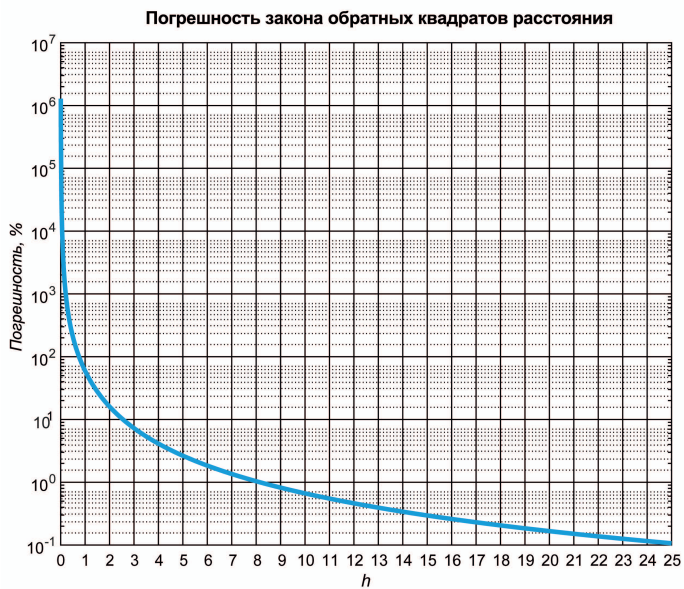
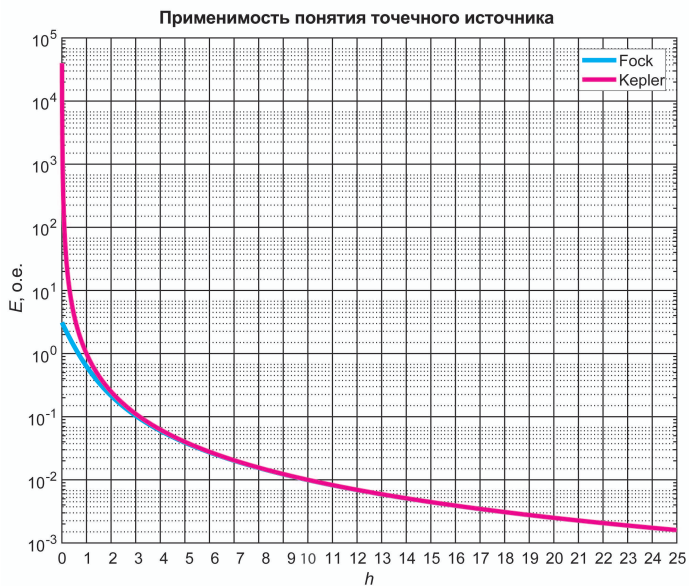


Рис. 1.13. Границы применимости понятия точечного источника (а) и закона обратных квадратов расстояния (б)

Приближение точечного источника, когда возможно определение силы света (1.32) и закона обратных квадратов (1.31), существенно упрощает светотехнические расчеты. Часто возможно допущение равномерного свечения поверхности источника, что приводит к выражению для силы света

$$I(\mathbf{r}) = \int_{(\Sigma)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2 r = L \int_{(\Sigma)} (\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2 r = L\sigma, \quad (1.65)$$

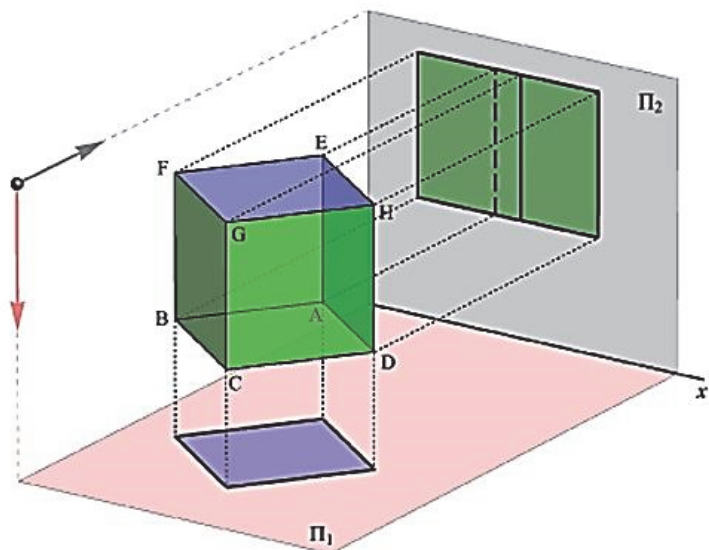
где $\sigma = \int_{(\Sigma)} (\hat{\mathbf{N}}_{\Sigma}, \hat{\mathbf{R}}) d^2 r$ есть проекция поверхности Σ на направление свечения $\hat{\mathbf{R}}$, что эквивалентно ее ортогональной проекции на плоскость, перпендикулярную $\hat{\mathbf{R}}$ (рис. 1.14).

Рассмотрим поле облученности равномерного шара радиуса R , потоком Φ_0 . В этом случае полный поток выражается через яркость поверхности

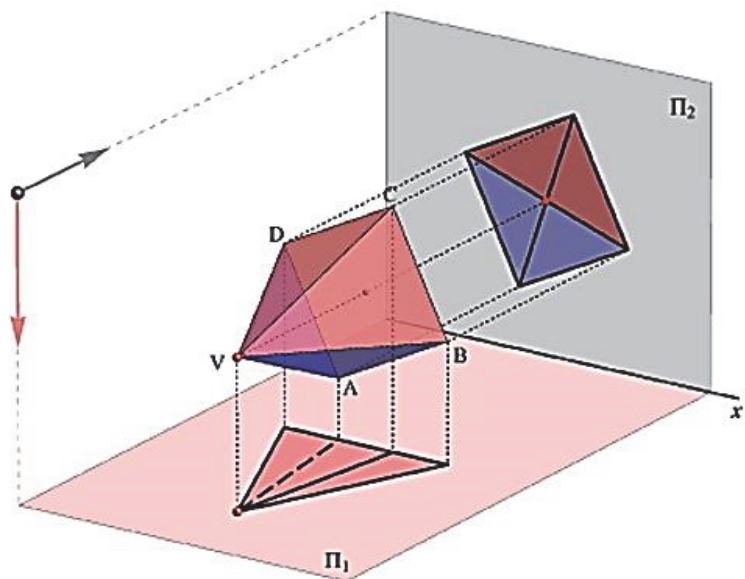
$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \iint_{\text{Сфере}} \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{R}}) d\hat{\mathbf{I}} d^2 r = \\ &= L \iint_{\text{Сфере}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d^2 r = 4\pi^2 R^2 L. \end{aligned}$$

Откуда $L = \Phi_0 / (4\pi^2 R^2)$. Ортогональная проекция сферы на любую плоскость есть круг радиуса R , площадь которого $\sigma = \pi R^2$. Следовательно, сила света сферы $I = L\sigma = \Phi_0 / (4\pi)$, а облученность от нее плоскости по нормали к направлению на источник на расстоянии r :

$$E(r) = \frac{I}{r^2} = \frac{\Phi_0}{4\pi r^2}. \quad (1.66)$$



а) куб



б) пирамида

Рис. 1.14. Ортогональная проекция трехмерной фигуры на плоскость

Рассмотрим нормальную облученность в точке P от равнояркой сферы C на близком расстоянии, когда ее нельзя считать точечным источником (рис. 1.15):

$$E(\mathbf{r}_p) = \int_{(\Omega)} L(\mathbf{r}_p, \hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{N}}_p, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}. \quad (1.67)$$

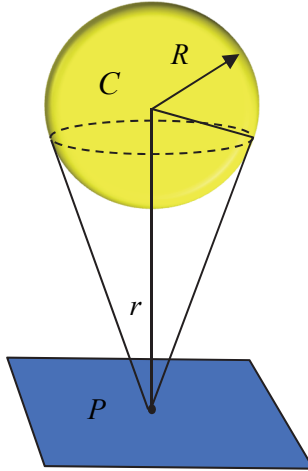


Рис. 1.15. Нормальная облученность от равнояркой сферы на конечном расстоянии

Если определить сферическую систему координат с зенитной осью CP , то интеграл (1.67) представим в виде:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_{\max}} L(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= 2\pi L \int_0^{\vartheta_{\max}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \pi L \sin^2 \vartheta_{\max} = \pi L \frac{R^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Связь яркости с потоком сохраняется и для сферы конечных размеров, поэтому

$$E(\mathbf{r}_p) = \frac{\Phi_0}{4\pi r^2}, \quad (1.69)$$

то есть выражение закона обратных квадратов для сферы сохраняет свою справедливость и на малых расстояниях.

Рассмотрим силу света сферы Σ в случае, когда яркость ее поверхности изменяется по косинусу угла направления свечения $\hat{\mathbf{I}}$ с нормалью $\hat{\mathbf{N}}$:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})\big|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = L_0(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}).$$

В соответствии с чертежом на рис. 1.16, можно записать выражение для силы света сферы

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= \int_{(\Sigma)} L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}}) d^2r = L_0 \int_{(\Sigma)} (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{I}})^2 d^2r = \\ &= 2\pi L_0 R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi}{3} L_0 R^2. \end{aligned} \quad (1.70)$$

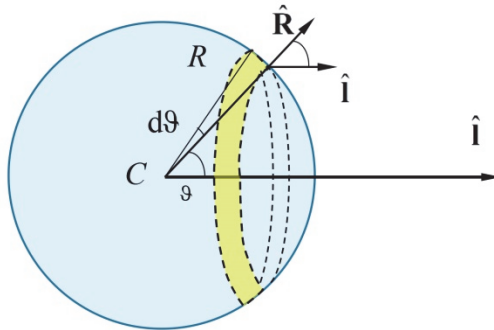


Рис. 1.16. Сила света сферы с не диффузно-излучающей поверхностью

Широкое распространение точечных и равномерных источников позволяют определить ее важную характеристику – светимость:

$$M(\mathbf{r}) = \frac{d\Phi(\mathbf{r})}{dS}, \quad (1.71)$$

где Φ есть поток ее излучения; S – площадь излучающей поверхности. Нетрудно видеть, что $M(\mathbf{r})$ является пространственной плотностью излучаемой поверхностью мощности.

1.5. Статистико-волновое содержание фотометрии

Как было указано в подразделе 1.2, теория светового поля и теория электромагнитного (волнового) поля – самостоятельные теории, образующие иерархию. Причем электромагнитная теория относится к верхнему уровню, и, соответственно, все положения теории светового поля могут быть получены из нее. Однако объяснение любого эксперимента возможно только в терминах теории светового поля, что определяет ее место и значение. Теория светового поля в границах своей справедливости является строгой и ни в каких уточнениях не нуждается, однако с позиций теории волнового поля можно определить границы применимости фотометрических законов и представлений.

Впервые условия описания распространения электромагнитной волны в терминах лучей были определены Густавом Кирхгофом в его лекциях по дифракционной теории оптических явлений «Лекции по математической физике» (*Vorlesungen über mathematische Physik*), 1891 г.. Для объяснения образования геометрической тени Кирхгоф в дифракционном интеграле совершил переход к пределу малых длин волн $\lambda \rightarrow 0$. Данный прием приближенного вычисления интегралов в настоящее время получил название метода стационарной фазы. В работе идея перехода $\lambda \rightarrow 0$ была использована Арнольдом Зоммерфельдом в статье «Применение векторного исчисления к основам геометрической оптики» (*Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik*), 1911 г.. На основе этих идей мы проанализируем связь теории светового поля с волновой оптикой.

За основу нашего анализа положим волновое уравнение:

$$\Delta V(\mathbf{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.72)$$

где $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon\mu}$ – показатель преломления вещества среды; ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; c – скорость света в вакууме.

Волновое уравнение следует из уравнений Максвелла для однородной, стационарной, изотропной среды без токов и зарядов. Если пренебречь поляризационными эффектами, то получим уравнение (1.72). В этом смысле под $V(\mathbf{r}, t)$ можно понимать проекцию вектора напряженности электрического или магнитного полей в выбранной системе координат в точке \mathbf{r} в момент времени t . В области однородного пространства, где отсутствуют токи и заряды, величина V соответствует модулю вектора электрической или магнитной напряженности. Общий метод решения линейных дифференциальных уравнений типа (1.72) – метод преобразования Фурье, т.е. представление поля в разложении по монохроматическим составляющим (гармоникам): i – мнимая единица

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.73)$$

Подобная процедура устраняет в уравнении (1.72) временную зависимость и оно приобретает вид уравнения Гельмгольца

$$\Delta U(\mathbf{r}, \omega) + n^2 k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.74)$$

где $U(\mathbf{r}, \omega)$ принято называть комплексной амплитудой скалярного

волнового поля в точке \mathbf{r} ; $k = \frac{\omega}{\lambda}$ – волновое число; ω, λ – циклическая частота и длина волны в вакууме. Очевидную переменную ω

будем опускать везде, где это не вызывает недоразумений.

В уравнении Гельмгольца мы исследуем распространение монохроматического излучения в пространстве. Несомненно, свет является электромагнитной, т.е. векторной поперечной волной, что определяет его поляризационные свойства, поэтому волновое уравнение должно быть записано для вектора, например напряженности электрического поля. Однако исторически теория развивалась первоначально из-за сложностей математического плана как скалярное приближение, когда под U можно понимать модуль напряженности поля. Несмотря на очевидно приближенный характер такого подхода, он позволяет установить основные закономерности световой волны. Представляется, что на сегодняшний день он сохраняет свое методическое значение в изучении электромагнитного поля.

Сделаем переход к пределу $\lambda \rightarrow 0$ или, что эквивалентно, $k \rightarrow \infty$ непосредственно в волновом уравнении (1.74). Представим его решение в виде

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ik\phi(\mathbf{r})}, \quad (1.75)$$

где функции $A(\mathbf{r})$ и $\phi(\mathbf{r})$ являются медленными и плавными в масштабе длины волны.

Представление (1.75) следует из анализа дифракции волны: если любые неоднородности существенно меньше длины волны, то имеет место геометрическая оптика (ГО), что и подтверждается повседневным опытом. При этом в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля волна в масштабе длины волны близка к плоской (1.75). Тем самым длина волны λ задает естественный масштаб, определяющий поведение волны.

Однако при непосредственной подстановке (1.75) в дифференциальное уравнение (1.74) в пределе $\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) оно вырождается. Для того чтобы, несмотря на это, из него можно было бы сделать количественные выводы разложим поле $A(\mathbf{r})$ в ряд по степеням λ или, что эквивалентно, по степеням k^{-1} :

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik)^m} \Rightarrow U(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik)^m} e^{ik\phi(\mathbf{r})}, \quad (1.76)$$

где множитель мнимой единицы i введен для удобства дальнейших преобразований.

Подставим выражения для поля в виде (1.76) в волновое уравнение (1.74). Для этого проведем последовательные преобразования:

$$\nabla U = ik \nabla \phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} e^{ik\phi} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nabla A_m}{(ik)^m} e^{ik\phi},$$

$$\Delta U = \left[ik \Delta \phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} + (ik \nabla \phi)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} + 2ik \nabla \phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nabla A_m}{(ik)^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta A_m}{(ik)^m} \right] e^{ik\phi}.$$

Тогда волновое уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
 ik\Delta\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} + (ik\nabla\phi)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} + 2ik\nabla\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nabla A_m}{(ik)^m} + \\
 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta A_m}{(ik)^m} - (ikn)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.77}$$

Равенство ряда 0 при произвольных значениях его коэффициентов, выражающихся через A_m и ϕ_m , означает равенство всех коэффициентов нулю. Собирая члены при одинаковых степенях k^m , получим:

$$m = 2: \quad A_0 \left((\nabla\phi)^2 - n^2 \right) = 0, \tag{1.78}$$

$$m = 1: \quad A_0\Delta\phi + A_1 \left((\nabla\phi)^2 - n^2 \right) + 2\nabla\phi\nabla A_0 = 0, \tag{1.79}$$

$$m \leq 0: \quad A_{m+1}\Delta\phi + A_{m+2} \left((\nabla\phi)^2 - n^2 \right) + 2\nabla\phi\nabla A_{m+1} + \Delta A_m = 0. \tag{1.80}$$

При условии отличия поля от нуля из (1.78) получим уравнение

$$(\nabla\phi)^2 = n^2. \tag{1.81}$$

Из (1.75) видно, что функция $\phi(\mathbf{r})$ описывает фазу волны и, тем самым, позволяет определять фронт волны в пространстве в приближении ГО. Одновременно эта одна скалярная функция $\phi(\mathbf{r})$ определяет траектории всех возможных лучей в данном пространстве с заданным законом $n(\mathbf{r})$ лучей. Введем единичный вектор $\hat{\mathbf{s}}$, перпендикулярный в каждой точке пространства поверхностям равной фазы $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$, которые представляют фронт волны. По определению градиента как вектора, по модулю равного максимальной скорости увеличения функции и направленного

в сторону максимального ее увеличения, т.е. перпендикулярно поверхности равных значений, имеем

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad (1.82)$$

что позволяет переписать уравнение (1.81) в виде

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{s}}n. \quad (1.83)$$

В приближении ГО совершенно несущественно значение фазы волны в точке, описываемой функцией $\phi(\mathbf{r})$, а куда важнее форма траектории луча. Для определения уравнения луча введем естественную систему координат s вдоль луча от начала отсчета O . В этой системе координат для единичного вектора, касательного к лучу, по соотношениям дифференциальной геометрии можно записать выражение

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки луча с координатой s .

Перепишем в соответствии с этим определением уравнение (1.83):

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi,$$

и продифференцируем его вдоль луча:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla\phi. \quad (1.84)$$

Отметим следующие соотношения:

$$\frac{d}{ds} \nabla\phi = (\hat{\mathbf{s}}, \nabla) \nabla\phi = \left(\frac{\nabla\phi}{n}, \nabla \right) \nabla\phi = \frac{1}{2n} \nabla(\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n,$$

что позволяет записать (1.84) в виде

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1.85)$$

что представляет собой уравнение луча в пространстве с заданным коэффициентом преломления.

Идея наличия скалярной функции, определяющей свойства всех лучей в пространстве, впервые была высказана в 1828 г. У. Гамильтоном задолго до формулировки электромагнитной теории света. Он ввел так называемые характеристические функции среды, аналогичные $\phi(\mathbf{r})$. Много лет спустя в 1895 г. Э. Брунс независимо от Гамильтона уже ввел непосредственно функцию $\phi(\mathbf{r})$, получившую название эйконал (немецкое слово *das Eikonal* от греческого εικων – изображение). Соответственно, уравнение (1.81) называется уравнением эйконала.

Теперь обратимся ко второму уравнению системы (1.79) для коэффициентов A_m . С учетом уравнения эйконала оно принимает вид:

$$A_0 \Delta \phi + 2 \nabla \phi \nabla A_0 = 0.$$

Умножим последнее выражение на A_0 и получим

$$A_0^2 \Delta \phi + 2 A_0 \nabla \phi \nabla A_0 = 0. \quad (1.86)$$

Нетрудно заметить, что левая часть (1.86) представляет собой дивергенцию от произведения двух функций:

$$\operatorname{div} \left(A_0^2 \nabla \phi \right) = 0. \quad (1.87)$$

В соответствии с уравнением эйконала последнему выражению можно придать форму

$$\operatorname{div} (A_0^2 n \hat{\mathbf{s}}) = 0. \quad (1.88)$$

Заметим, что в соответствии с теорией электромагнитного поля плотность потока энергии электромагнитного поля в точке определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (1.89)$$

а объемная плотность энергии поля равна

$$w = \frac{\varepsilon}{4\pi} E^2 = \frac{\mu}{4\pi} H^2, \quad (1.90)$$

где E, H – напряженности электрического и магнитного полей соответственно; квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Для плоской волны, которая является основой в представлении (1.75), справедливо соотношение для векторов напряженности

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{E}]. \quad (1.91)$$

Откуда для вектора Пойнтинга получим

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{E}, [\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \hat{\mathbf{s}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} w \hat{\mathbf{s}} = v w \hat{\mathbf{s}}. \quad (1.92)$$

Тогда из сравнения с (1.92) можно определить для скалярной волны плотность энергии как

$$I = nA_0^2,$$

что позволяет переписать (1.88) в форме

$$\operatorname{div}(I\hat{\mathbf{s}}) = 0, \quad (1.93)$$

или

$$(\hat{\mathbf{s}}, \nabla)I = 0. \quad (1.94)$$

Уравнение (1.94) получило название уравнения переноса излучения (УПИ) и показывает распространение энергии волны в приближении ГО. Нетрудно видеть, что выражение (1.94) соответствует закону Бугера в вакууме. При наличии поглощения в среде показатель преломления становится комплексным $\tilde{n} = n + ik$, что приводит к появлению в правой части УПИ поглощения и формулировке полного закона ослабления Бугера.

Проанализируем физический смысл УПИ, для чего проинтегрируем его в форме (1.94) по некоторому специальному цилиндрическому объему V (рис. 1.17), основаниями которого явля-

ются части двух волновых фронтов σ_1 и σ_2 , а боковые поверхности построены так, чтобы в каждой их точке вектор \hat{s} был к ним касательным. В этом случае имеем выражение

$$\int_{(V)} \operatorname{div}(I\hat{s})dv = 0,$$

которое на основе теоремы Гаусса переписывается в виде

$$\int_{(\sigma_1)} I(\hat{s}, \hat{N})d\sigma + \int_{(\sigma_2)} I(\hat{s}, \hat{N})d\sigma + \int_{(\text{боковая поверхность})} I(\hat{s}, \hat{N})d\sigma = 0, \quad (1.95)$$

где \hat{N} – внутренняя нормаль к поверхности.

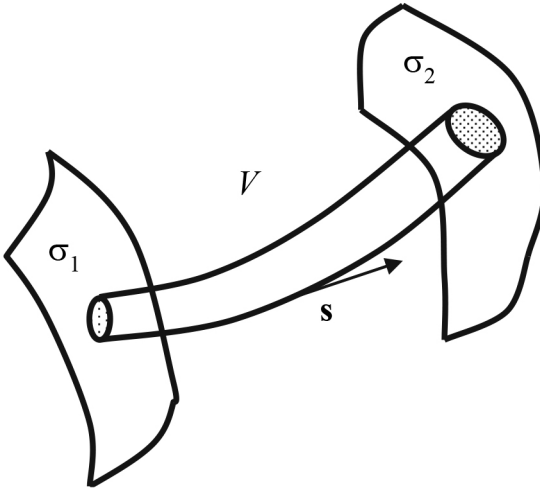


Рис. 1.17. К анализу УПИ

Нетрудно видеть, что по построению объема интегрирования на боковой поверхности нормаль перпендикулярна вектору \hat{s} , что делает интеграл по боковой поверхности в (1.95) равным нулю. Возьмем основания нашего объема столь малыми, что оставшиеся интегралы можно заменить по теореме о среднем:

$$(\hat{s}_1, \hat{N}_1)\sigma_1 I_1 + (\hat{s}_2, \hat{N}_2)\sigma_2 I_2 = 0,$$

или, с учетом соотношения между нормальными на 1-м и 2-м основаниях, получим

$$\hat{N}_1 = -\hat{N}_2 \equiv \hat{N}: (\hat{s}_1, \hat{N})\sigma_1 I_1 = (\hat{s}_2, \hat{N})\sigma_2 I_2. \quad (1.96)$$

Построенный нами объем V представляет собой некоторую бесконечно тонкую «трубку», в каждой точке направленную по вектору \hat{s} и перпендикулярную волновому фронту, причем выражение (1.96) устанавливает равенство потока энергии по ней. Назовем построенную «трубку» лучевой трубкой или просто лучом. Нетрудно видеть, что в приближении ГО волновое поле заменяется лучами, по которым течет световая энергия.

Тем самым мы получили модель теории светового поля, которая и лежит в основе фотометрии. При этом введенную величину I можно сопоставить с яркостью L .

Однако построенная теория является неполной и не объясняет независимость световых лучей светового поля, приходящих в одну точку, что обеспечивает аддитивность их яркостей. Принципиальным отличием волн является явление интерференции при их наложении, т.е. не сложение, а перераспределение энергии в пространстве. Первоначально в обосновании фотометрии просто считали лучи независимыми, однако это допущение сильно упрощает картину и отбрасывает многие реальные ситуации. Реальное обоснование всех аксиом светового поля возможно только в рамках статистической оптики.

Рассмотрим сложение волн на примере классического опыта Томаса Юнга с двумя отверстиями, освещаемыми одним и тем же источником (рис. 1.18). Вместо суммирования интенсивностей в плоскости анализа в опыте Юнга происходит перераспределение энергии излучения (рис. 1.19), называемое интерференцией (термин предложен Юнгом). Пусть в точке P_1 волна имеет комплексную амплитуду U_1 , а в точке P_2 — U_2 . В пределах малых углов отклонения точек в плоскости анализа от оптической оси, излучение каждого из отверстий можно считать плоскими волнами:

$$U(Q) = U_1 + U_2. \quad (1.97)$$

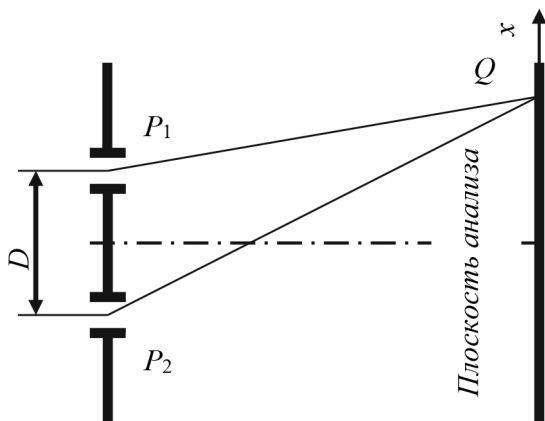


Рис. 1.18. Опыт Юнга

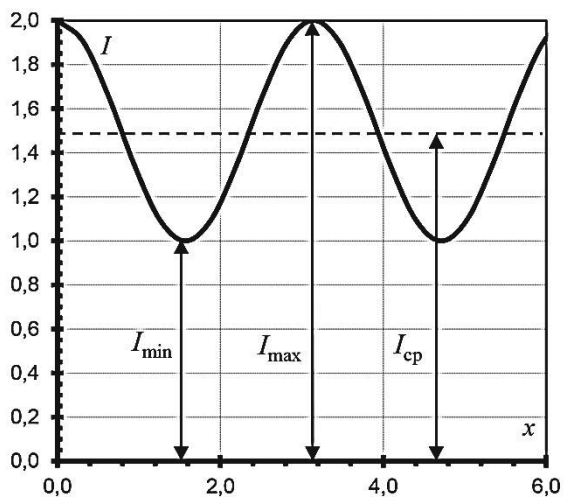


Рис. 1.19. График перераспределения энергии при интерференции

Будем исследовать распределение интенсивности поля в плоскости анализа с помощью оптического приемника, характеризующегося квадратичностью измеряемой относительно поля

величиной реакции, а также с постоянной времени τ , много большей периода волны T , и характерным размером l , существенно большим длины волны λ . Тогда распределение интенсивности в плоскости анализа имеет вид:

$$I(Q) = \langle U(Q)U^*(Q) \rangle = \langle (U_1 + U^*_2)(U^*_1 + U_2) \rangle = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\Gamma_{12}, \quad (1.98)$$

где $I_1 = \langle U_1U^*_1 \rangle$, $I_2 = \langle U_2U^*_2 \rangle$ – интенсивности волны от первого и второго отверстия; $\Gamma_{12} = \langle U_1U^*_2 \rangle$ – функция когерентности поля в точках 1 и 2. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени и пространству.

Величины интенсивностей принимают только действительные значения, в то время как функция когерентности в общем случае комплексная величина. Определим коэффициент когерентности поля в двух точках

$$\gamma_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{I_1I_2}} = |\gamma_{12}| \exp\{i\alpha_{12}\}, \quad \text{где } \alpha_{12} = \arg \gamma_{12}. \quad (1.99)$$

Тогда выражение (1.98) переписывается в виде

$$I(Q) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} |\gamma_{12}| \cos \alpha_{12}. \quad (1.100)$$

В опыте можно определить контраст интерференционной картины

$$\mathbf{v} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{(I_{\max} - I_{\min}) / 2}{(I_{\max} + I_{\min}) / 2} = \frac{\Delta I}{\bar{I}}, \quad (1.101)$$

который в теории когерентности принято называть *видностью интерференционных полос* (все обозначения видны на рис. 1.19).

Сопоставляя выражения (1.100) и (1.101), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{(I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1I_2}) - (I_1 + I_2 - 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1I_2})}{(I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1I_2}) + (I_1 + I_2 - 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1I_2})} = \\ &= \frac{2\sqrt{I_1I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Последнее выражение особенно наглядно, если в опыте сделать совершенно одинаковые отверстия:

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \mathbf{V} = |\gamma_{12}|, \quad (1.103)$$

то есть степень когерентности определяет видность интерференционной картины.

В соответствии с определением (1.99) модуль степени когерентности изменяется от 0 до 1. Причем если $\gamma_{12} = 0$, то интенсивности складываются в соответствии с положениями ГО. Такой случай принято называть некогерентное освещение. В случае $\gamma_{12} = 1$ энергия в пространстве полностью перераспределяется: в некоторых точках она в четыре раза превышает значения интенсивности в плоскости анализа при одном открытом отверстии, а в других точках равна нулю, что естественно не нарушает закона сохранения энергии. Такой случай называется когерентным освещением. Отсюда видно, что понятие независимости для реальных частично-когерентных пучков света имеет сугубо статистический характер и определяется корреляционной функцией $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. При этом заметим, что в соответствии с определением корреляционной функции реакция оптического приемника в точке \mathbf{r} выражается через корреляционную функцию поля

$$I(\mathbf{r}) = \langle U(\mathbf{r})U^*(\mathbf{r}) \rangle \equiv \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad (1.104)$$

что позволяет переписать (1.98) в виде

$$I(\mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) + 2\text{Re}\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.105)$$

В случае произвольного электромагнитного поля энергия в данную точку поля поступает от всех точек пространства. Поэтому необходимо знать распределение функции когерентности для всего пространства, а интенсивность определяется в соответствии с выражением (1.105). В отличие от интенсивности $I(\mathbf{r})$, являющейся функцией точки поля \mathbf{r} , функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является двухточечной характеристикой поля, характеризующей взаимосвязь полей в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Для анализа потоков энергии в

пространстве, заполненном электромагнитным полем, необходимо сформулировать уравнение распространения функции когерентности. Запишем уравнения Гельмгольца для двух произвольных точек пространства \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2

$$\begin{cases} \Delta_1 U_1 + k^2 U_1 = 0, \\ \Delta_2 U_2 + k^2 U_2 = 0, \end{cases} \quad (1.106)$$

где $U_i = U(\mathbf{r}_i)$, а оператор Δ_i действует по переменной \mathbf{r}_i .

Умножим первое уравнение (1.106) на U_2^* , а комплексно сопряженное второе уравнение на U_1 , результат усредним по всем возможным реализациям поля в пространстве. В результате в соответствии с определением функции когерентности получим

$$\begin{cases} \Delta_1 \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0, \\ \Delta_2 \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0, \end{cases} \quad (1.107)$$

где $\Gamma_{12} \equiv \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Отметим, что (1.107) не та же система уравнений (1.106), записанная для двух точек пространства, а система уравнений, определяющая распространение функции когерентности в пространстве. Это становится более очевидным, если перейти к новой системе уравнений, получаемой из (1.107) вычитанием и сложением ее уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_{12} = 0, \\ \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

Для удобства дальнейшего анализа перейдем в системе уравнений (1.108) к новым переменным

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (1.109)$$

называемым координатой центра тяжести и разностной координатой.

Подставляя последние соотношения в (1.108), получим

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0, \\ \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) + (\Delta_{\boldsymbol{\rho}} + k^2) \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0, \end{cases} \quad (1.110)$$

где индексы \mathbf{R} и $\boldsymbol{\rho}$ у дифференциальных операторов означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Введем в рассмотрение Фурье-трансформанту

$$\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} d^3\boldsymbol{\kappa}, \quad (1.111)$$

и после преобразования Фурье системы (1.110), получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{\kappa} \nabla_{\mathbf{R}} F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = 0, \\ \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) + (k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2) F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = 0. \end{cases} \quad (1.112)$$

Первое уравнение совершенно аналогично УПИ (1.94), что позволяет его проинтегрировать вдоль луча, параллельного $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \zeta \hat{\mathbf{I}}, \quad (1.113)$$

где \mathbf{R}_0 – некоторая произвольная точка на луче, $\hat{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\kappa}/\kappa$, что приводит к решению:

$$F(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\kappa}) = F(\mathbf{R}_0 + \zeta \hat{\mathbf{I}}, \boldsymbol{\kappa}),$$

то есть функция когерентности вдоль луча не меняется.

Луч распространения функции когерентности и луч приближения геометрической оптики в общем случае не совпадают, поскольку один направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\kappa}$, а другой по \mathbf{k} .

Проанализируем второе уравнение системы (1.112). Это уравнение в общем случае аналитически неразрешимо. Найдем его приближенное решение, соответствующее приближению ГО. Для этого оценим члены, входящие в уравнение, по порядку величины и отбросим малые.

Определим характерный масштаб L_R изменения F по \mathbf{R} , такой что

$$\Delta_{\mathbf{R}} F \sim \frac{F}{L_R^2}.$$

Поскольку уравнение однородное, то необходимо оценить сомножители у искомой функции $F(\mathbf{R}, \kappa)$:

$$\frac{1}{L_R^2} \sim k^2 - \kappa^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{L_R^2} \sim (k - \kappa)(k + \kappa). \quad (1.114)$$

Допустим, что поле такое, что $\kappa \approx k$, т.е. поле близко к состоянию в приближении ГО. Тогда соотношение примет вид

$$\frac{1}{L_R^2} \sim k \Delta k \Rightarrow \frac{1}{k^2 L_R^2} \sim \frac{\Delta k}{k},$$

где $\Delta k = k - \kappa$.

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, то окончательно получим

$$\frac{\lambda^2}{L_R^2} \sim \frac{\Delta k}{k}.$$

В соответствии с допущением применимости приближения ГО характерный масштаб изменения поля по координате центра тяжести $L_R \gg \lambda$ – квазиоднородная волна. Соответственно, для квазиоднородной волны выполняется неравенство

$$(k^2 - \kappa^2)F \gg \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} F. \quad (1.115)$$

Тем самым, для квазиоднородной волны характерно быстрое изменение по разностной координате и медленное по координате центра тяжести, т.е. амплитуда волны меняется медленно в

масштабе длины волны. В координатной форме условие квазиоднородности можно записать в виде

$$\left| \nabla_{\mathbf{R}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \right| \ll \left| \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \right|. \quad (1.116)$$

Физически означает, что всегда можно выделить область пространства, где квазиоднородная волна ведет себя приблизительно подобно плоской волне. Условие квазиоднородности близко условию применимости приближения геометрической оптики.

Для квазиоднородной волны наше уравнение принимает вид

$$(k^2 - \kappa^2)F = 0,$$

единственным нетривиальным решением которого является функция

$$F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})}{k^2} \delta(k - \kappa), \quad (1.117)$$

где $L()$ – произвольная функция; множитель k^2 введен для удобства дальнейших преобразований.

С учетом (1.117) связь Фурье-трансформанты с корреляционной функцией (1.111) можно переписать в форме:

$$\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} d^3\boldsymbol{\kappa} = \oint \int_0^\infty \frac{L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})}{k^2} \delta(k - \kappa) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} k^2 dk d\hat{\mathbf{l}}.$$

Откуда, используя свойства δ -функции, получим

$$\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \oint L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) e^{i\boldsymbol{\rho}\hat{\mathbf{l}}} d\hat{\mathbf{l}}. \quad (1.118)$$

Первое уравнение системы (1.112) в этом случае примет вид

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) = 0, \quad (1.119)$$

решение которого имеет вид

$$L(\mathbf{R} + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (1.120)$$

причем луч в этом случае квазиоднородной волны совпадает с лучом ГО.

Поскольку известна функция когерентности, то можно определить плотность:

$$I(\mathbf{r}) = \Gamma_{12}(\mathbf{R} = \mathbf{r}, \rho = 0) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}, \quad (1.121)$$

и поток электромагнитной волны в точке \mathbf{r} :

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{ik} \nabla \Gamma_{12}(\mathbf{r}, \rho = 0) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \hat{\mathbf{l}} d\hat{\mathbf{l}}. \quad (1.122)$$

В полученном приближении квазиоднородных волн частично-когерентное электромагнитное поле представляется совокупностью лучей, траектория которых соответствует приближению геометрической оптики, по каждому из которых течет энергия, плотность которой определяется функцией $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$, а плотность и поток энергии поля в точке интегралами (1.121) и (1.122) от нее.

Аналогичное представление об электромагнитных полях лежит в основе фотометрии, где функция $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ является яркостью пучка лучей, а интегралы от нее по телесному углу определяют пространственную освещенность

$$E_0(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}, \quad (1.123)$$

и световой вектор

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \hat{\mathbf{l}} d\hat{\mathbf{l}}. \quad (1.124)$$

Отличим полученного приближения (его будем называть приближением лучевой оптики) от фотометрии считается то, что яркость является плотностью энергии, а потому величина всегда положительная, а введенная функция $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ (будем называть ее обобщенной яркостью) может принимать и отрицательные значения. Это связано с тем, что связь между функцией корреляции и обобщенной яркостью (1.117) из-за δ -функции в определении $F()$ не является полным *Fourier* преобразованием. Этот же факт за-

трудняет написания обратного преобразования для выражения обобщенной яркости через функцию корреляции. Не останавливаясь подробно, укажем, что такое выражение получено из анализа излучения плоскости – точного решения задачи дифракции в полупространство

$$L(\mathbf{R}_\perp, \hat{\mathbf{i}}) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 I_{\parallel} \int \Gamma_{12}(\mathbf{R}_\perp, \boldsymbol{\rho}_\perp) \exp(-ik\hat{\mathbf{i}}\boldsymbol{\rho}_\perp) d^2\rho_\perp, \quad (1.125)$$

где индексы \perp и \parallel означают проекции на плоскость и нормаль к ней соответственно.

Спектр от функции когерентности только по разностной переменной носит название спектра Вигнера и отличается от полного Фурье-преобразования тем, что может принимать и отрицательные значения, хотя интегралы (1.123) и (1.124) будут всегда положительными. Отрицательные значения обобщенной яркости несут информацию о фазе волны и корреляции точек, что позволяет на основе обобщенной яркости описывать дифракцию и интерференцию квазиоднородной волны. Яркость и обобщенная яркость переносятся по одинаковым лучам и отличаются друг от друга только граничными условиями, которые для обобщенной яркости имеют вид связи с функцией когерентности (1.125).

Для квазиоднородных полей лучевое и волновое описания эквивалентны друг другу: луч и волна в каждой точке пространства перпендикулярны друг другу, а процесс распространения световой энергии представим в виде переноса по лучевой трубке., т.е. справедливо фотометрическое описание. Если волна становится существенно неоднородной, когда масштаб ее изменения близок к длине волны (например, непрозрачный экран с отверстием радиусом порядка длины волны – дифракция), то лучевое (фотометрическое) описание становится невозможным. Впервые связь яркости с корреляционной функцией поля (1.118) получена Долиным Львом Сергеевичем. Обобщая все сказанное, границы применимости светового поля и фотометрического приближения сводятся к следующему.

1. Для применимости понятий статистической теории волнового поля (корреляционная функция) необходимо, чтобы оптический приемник имел размеры и постоянную времени существенно превышающие длину и период волны, на что впервые указал Планк М.

2. Фотометрические понятия светового поля применимы только к квазиоднородным волновым полям. Если выполняются условия квазиоднородности, то выполняются требования лучевой оптики.

Вместо эвристического представления о некогерентной суперпозиции лучевых пучков, на которое опирается фотометрия, волновая теория использует представление о квазиоднородных случайных полях.

Условия квазиоднородности поля, вообще говоря, не требуют квазиоднородности самих источников. В случае существенно неоднородных источников поле вблизи них также будет существенно неоднородно, и, следовательно, в этой области оно не допускает фотометрического описания. В то же время условия квазиоднородности могут выполняться вдали от источников, где становится правомерным и фотометрический подход.

1.6. Фотометрическое описание поляризации света

Анализ, проведенный в предыдущих разделах, показал, что фотометрическое приближение охватывает все случаи, когда имеется возможность придать достаточную определенность понятию светового пучка и проследить его судьбу в актах взаимодействия излучения с веществом. Однако введенные нами представления не являются завершенными: у светового луча отсутствует осевая симметрия, что проявляется при нарушении симметрии в пространстве – поляризация света.

Впервые экспериментально явление, в котором проявляется поляризация света – двойное преломление, обнаружил в 1669 г. Расмус Бартолин. Двадцать лет спустя Х. Гюйгенс подробно ис-

следовал это явление и описал его закономерности. Само явление состоит в том, что в кристаллах наклонный луч света, преломляясь, расщепляется на два луча: обыкновенный, который преломляется по обычному закону Снеллиуса, а другой – необыкновенный, у которого показатель преломления зависит от угла падения. Однако к пониманию того, что здесь проявляется принципиально новое свойство света, Гюйгенс прийти не смог. Мысль об этом впервые высказал И. Ньютон, который обратил внимание, что если преломленные лучи вновь пустить на кристалл, то обыкновенный луч будет преломляться по обыкновенному правилу, а необыкновенный – по необыкновенному. Отсюда он делает вывод, что световые лучи имеют две противоположные стороны, связанные со свойством, от которого зависит необычное преломление.

Нарушение симметрии пространства наблюдается также и при отражении – имеется выделенная в пространстве плоскость отражения. На поляризацию при отражении впервые обратил внимание Малюс: в 1808 г. он наблюдал сквозь кусок исландского шпата отражение заходящего солнца в окнах Люксембургского дворца в Париже и обнаружил различную яркость изображений, меняющуюся при вращении кристалла. Вскоре наступила ночь, и он продолжил опыты с пламенем свечи, которое отражалось от поверхности воды и стекла. В результате исследований он показал полную общность явлений при отражении и двойном лучепреломлении. Малюс под влиянием идей Ньютона стал рассматривать эти стороны светового луча как полюсы. Лучи, у которых проявляется подобное различие сторон, назвал поляризованными, а все явление в целом – поляризацией света.

Малюс провел исследование отражения пучка, отраженного от диэлектрической пластины, от другой пластины. Он отметил, что яркость вторично отраженного зависит от угла между плоскостями отражения пластин. Это позволило ему ввести понятие плоскости поляризации луча, положение которой он определил плоскостью отражения. При этом вторую пластину можно заменить

и на кристалл с тем же результатом. При произвольном положении плоскости поляризации под углом φ с осью кристалла яркость прошедшего луча L определяется законом Малюса:

$$L = \tau_a L_0 \cos^2 \varphi, \quad (1.126)$$

где τ_a – пропускание кристалла (анализатора), L_0 – яркость падающего луча.

Это определило два «полюса» поляризации – поляризации в двух перпендикулярных плоскостях. Устройство, выделяющее поляризованное излучение, получило название поляризатор, а устройство, определяющее положение плоскости поляризации, – анализатор. Очевидно, что это одинаковые устройства, различающиеся только своим положением в эксперименте. Био, современник Малюса, открывает поворот плоскости поляризации при прохождении поляризованного света через некоторые кристаллы. Он же впервые наблюдает возникновение постоянного вращения плоскости поляризации – круговая поляризация. Кристаллическую пластинку, которая преобразует линейно поляризованный свет в круговой, принято называть фазовой пластинкой.

Дальнейшее исследование поляризации было уже не столько экспериментальным, как рациональным построением теории света. Френель показал, что пучки, поляризованные в перпендикулярных плоскостях, не интерферируют. Это позволило сначала Т. Юнгу выдвинуть идею о том, что свет есть поперечная волна, а плоскость колебаний определяет плоскость поляризации. Далее и сам Френель стал развивать эту теорию: объяснил круговую поляризацию сдвигом фаз в 90° между двумя перпендикулярными компонентами пучка, ввел термины линейной, круговой и в общем случае эллиптической поляризации. Все эти идеи воспринимались с трудом современниками – настолько новой казалась идея поперечных волн. Она, по сути, не закончилась даже с выходом знаменитой работы Дж.К. Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме». Однако для нас здесь более существенно, что, обобщая все эксперименты на основе представлений о свете как о поперечной волне, Стокс показал, что любое измерение поляризационного пучка можно определить по реакциям J_i , $i \in \overline{0,3}$, со-

ответствующих 4 квадратичных оптических приемников с различными поляризационными фильтрами:

J_0 – нейтральный фильтр с пропусканием $\tau = 0,5$;

J_1 – анализатор, оптическая ось которого и направление распространения излучения определяют систему отсчета – плоскость референции;

J_2 – анализатор с осью под углом 45° к плоскости референции;

J_3 – комплексный фильтр, состоящий из четвертьволновой пластины и анализатора под углом 45° к плоскости референции.

Это позволило ему сформулировать обобщенный закон Малюса для реакции J произвольного приемника, снабженного произвольным поляризационным фильтром с анализатором, оптическая ось которого направлена под углом φ к плоскости референции, и фазовой пластиной, оптическая ось которой совпадает с плоскостью референции, а вносимый ею сдвиг фаз равен δ :

$$J = 0,5\tau(L_0 + L_1 \cos 2\varphi + \sin 2\varphi(L_2 \cos \delta + L_3 \sin \delta)), \quad (1.127)$$

где величины

$$\begin{aligned} L_0 &= 2J_0, & L_1 &= 2(J_0 - J_1), \\ L_2 &= 2(J_2 - J_0), & L_3 &= 2(J_3 - J_0) \end{aligned} \quad (1.128)$$

называются параметрами Стокса. В своей статье сам Стокс обозначил параметры A, B, C, D . Чандрасекар в своих основополагающих исследованиях по теории переноса излучения использовал I, Q, U, V . Мы будем использовать в основном обозначения (1.128), хотя в некоторых специально обговоренных случаях и обозначения Чандрасекара.

Последнему выражению (1.128) можно придать другой, более наглядный векторный вид:

$$J = 0,5\tau\vec{\mathbf{D}}\vec{\mathbf{L}}, \quad (1.129)$$

где $\vec{\mathbf{D}} = [1, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi \cos \delta, \sin 2\varphi \sin \delta]$ – вектор-строка, характеризующая поляризационные свойства приемника с поляризационным фильтром; $\vec{\mathbf{L}} = [L_0; L_1; L_2; L_3]$ – вектор-параметр Стокса.

При падении на квадратичный оптический приемник двух независимых пучков (интерференция отсутствует) с вектор-параметрами \vec{L}' и \vec{L}'' его реакция равна сумме реакций:

$$J = J' + J'' = 0,5\tau\vec{D}\vec{L}' + 0,5\tau\vec{D}\vec{L}'' = 0,5\tau\vec{D}(\vec{L}' + \vec{L}''), \quad (1.130)$$

что соответствует аддитивности параметров Стокса для независимых пучков:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}'' . \quad (1.131)$$

Последнее равенство выражает принцип оптической эквивалентности: лучи, имеющие одинаковый набор параметров Стокса \vec{L} , оптически (по реакциям приемников) неразличимы. Принцип оптической эквивалентности позволяет непротиворечиво обобщить световое поле на случай поляризации (векторная теория переноса): поле состоит из световых лучей, каждому из которых соответствует свой набор аддитивных параметров Стокса.

Эти четыре параметра всегда вещественны, имеют размерность яркости, позволяют описывать как полную яркость (энергетику) луча, так и его поляризацию. При этом пучок может быть поляризован полностью, частично или совсем неполяризован. Если определить компоненты вектора электрической напряженности луча в точке, лежащие в плоскости референции и перпендикулярно ей как E_{\parallel} и E_{\perp} , то для параметров Стокса можно получить соотношения в соответствии с введенным определением

$$\begin{aligned} L_0 &= c_{\mathbf{k}} \langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle, \quad L_1 = c_{\mathbf{k}} \langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* - E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle, \\ L_2 &= c_{\mathbf{k}} \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* + E_{\perp}^* E_{\parallel} \rangle, \quad L_3 = -ic_{\mathbf{k}} \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* - E_{\perp}^* E_{\parallel} \rangle, \end{aligned} \quad (1.132)$$

где угловые скобки означают усреднение; $c_{\mathbf{k}}$ – коэффициент размерности аналогично коэффициентам связи яркости с корреляционной функцией из (1.117); \mathbf{k} – волновой вектор. В литературе при обсуждении свойств параметров Стокса этот коэффициент обычно полагают равным единице.

Из сравнения с (1.118) нетрудно видеть, что параметр L_0 полностью эквивалентен яркости луча. Остальные три параметра характеризуют состояние поляризации. Для полностью поляризованного излучения усреднение в (1.132) можно опустить, и непосредственным вычислением убедиться в соотношении:

$$L_0^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (1.133)$$

Также непосредственными вычислениями можно получить выражения для характеристик в общем случае эллиптически поляризованного излучения:

$$L_1 = L_0 \cos 2\beta \cos 2\chi, \quad L_2 = L_0 \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad L_3 = L_0 \sin 2\beta, \quad (1.134)$$

где углы χ и β определяют положение и форму эллипса поляризации в соответствии с рис. 1.20:

$$\tan 2\chi = \frac{L_2}{L_1}, \quad \sin 2\beta = \frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}}. \quad (1.135)$$

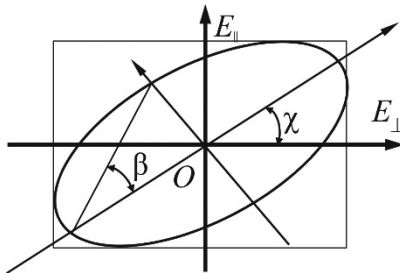


Рис. 1.20. Эллипс поляризации

Отсюда видно, что L_3 характеризует циркулярную компоненту поляризации: $\beta = \pm\pi/4$, так что $L_3 = L_0$, а $L_1 = L_2 = 0$. Параметр L_1 описывает линейную поляризацию вдоль осей OX ($\chi = \beta = 0$, $L_1 = L_0$, $L_2 = L_3 = 0$) или OY ($\chi = 0$, $\beta = \pi/2$, $L_1 = -L_0$, $L_2 = L_3 = 0$), а L_2 линейную поляризацию вдоль осей, составляющих угол $\chi = \pm\pi/4$ осью OX ($\beta = 0$, $L_2 = \pm L_0$, $L_1 = L_3 = 0$).

В общем случае частично-когерентного (частично поляризованного) света

$$L_0^2 \geq L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad (1.136)$$

это определяет, что частично поляризованный свет представим в виде суммы естественного или неполяризованного света ($L_1 = L_2 = L_3 = 0$).

При этом можно определить параметры:

$$p = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_0} \text{ — степень линейной поляризации;}$$

$$q = \frac{L_3}{L_0} \text{ — степень круговой поляризации (эллиптичность);}$$

$$r = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}}{L_0} = \sqrt{p^2 + q^2} \text{ — степень поляризации}$$

или однородности.

Как видим, четыре энергетических параметра Стокса позволяют определить все 4 экспериментально определяемых параметра поляризации: яркость, степени линейной и циркулярной поляризации и наклон эллипса поляризации к плоскости референции.

Нетрудно видеть из (1.127) и (1.128), что вектор-параметр зависит от положения плоскости референции. Выразим реакцию приемника после поворота плоскости референции на угол ψ в соответствии с (1.127) через вектор-параметр \vec{L}' после поворота:

$$J = 0,5\tau(L_0 + L_1 \cos 2\varphi' + \sin 2\varphi'(L_2 \cos \delta + L_3 \sin \varphi')), \quad (1.137)$$

$$\varphi' = \varphi + \psi$$

и, так как реакция приемника излучения от положения плоскости референции не зависит, то, приравнявая последнее выражение и (1.127), получим

$$\begin{cases} L'_0 = L_0, \\ L'_1 = L_1 \cos 2\psi + L_2 \sin 2\psi, \\ L'_2 = -L_1 \sin 2\psi + L_2 \cos 2\psi, \\ L'_3 = L_3. \end{cases} \quad (1.138)$$

Следовательно, при повороте плоскости референции параметры Стокса преобразуются по правилу

$$\mathbf{L} = \vec{\mathbf{R}}\mathbf{L}', \quad (1.139)$$

где матрица поворота (ротатор) имеет вид:

$$\vec{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.140)$$

В соответствии с (1.132) представление поляризации с помощью вектор-параметра Стокса $\vec{\mathbf{L}}$ эквивалентно представлению ее в виде 2×2 матрицы когерентности $\vec{\mathbf{\Gamma}}$:

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* \rangle & \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* \rangle \\ \langle E_{\parallel}^* E_{\perp} \rangle & \langle E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle \end{bmatrix}, \quad (1.141)$$

что можно переписать с учетом (1.132) в виде:

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 & L_2 + iL_3 \\ L_2 - iL_3 & L_0 - L_1 \end{bmatrix}. \quad (1.142)$$

Поскольку поляризация света экспериментально исследуется посредством пропускания света через поляризационный фильтр с последующим измерением интенсивности квадратичным по полю оптическим приемником, то с математической точки зрения это означает, что о поляризационных свойствах света делают заключения, исходя из усредненных квадратичных функций поля, т.е. элементов матрицы когерентности $\vec{\mathbf{\Gamma}}$. При произвольной поляризации частично-когерентного света амплитуда и фаза подвержены нерегулярным изменениям, однако корреляция между этими величинами может осуществляться, что и определяет поляризацию.

Выражению (1.141) можно придать изящную и очень удобную для анализа форму прямого произведения Кронекера столбца и строки вектора напряженности электромагнитного поля:

$$\vec{\Gamma} = \langle \vec{\mathbf{E}} \otimes \vec{\mathbf{E}}^+ \rangle, \quad (1.143)$$

где $\vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{bmatrix}$ – столбец компонент вектора напряженности электромагнитной волны $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Символ « \otimes » обозначает прямое произведение Кронекера; « $+$ » – эрмитово сопряжение; $\langle \dots \rangle$ – усреднение по ансамблю реализаций.

При взаимодействии со средой для линейных систем вследствие линейности уравнений Максвелла имеем для напряженности поля:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{E}}', \quad (1.144)$$

где $\vec{\mathbf{L}}$ – матрица преобразования Джонса.

Отсюда на основании (1.143) имеем выражение для преобразования матрицы когерентности

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathbf{L}} \vec{\Gamma}' \vec{\mathbf{L}}^+,$$

или в вектор-параметрическом представлении

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{M}} \vec{\mathbf{L}}', \quad (1.145)$$

где $\vec{\mathbf{M}}$ – матрица преобразований Мюллера.

При анализе локального преобразования луча часто удобно задавать три различных плоскости (рис. 1.21): плоскость референции падающего излучения, плоскость преобразования (отражения, преломления или рассеяния) и плоскость референции выходящего излучения. В этом случае вместо (1.145), используя ротатор, получим

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{i}}) = \vec{\mathbf{R}}(-\chi)\vec{\mathbf{M}}(\vartheta)\vec{\mathbf{R}}(\chi')\mathbf{L}(\hat{\mathbf{i}}') = \vec{\mathbf{M}}_{\Sigma}\mathbf{L}(\hat{\mathbf{i}}'), \quad (1.146)$$

где обозначения приведены на рис. 1.21.

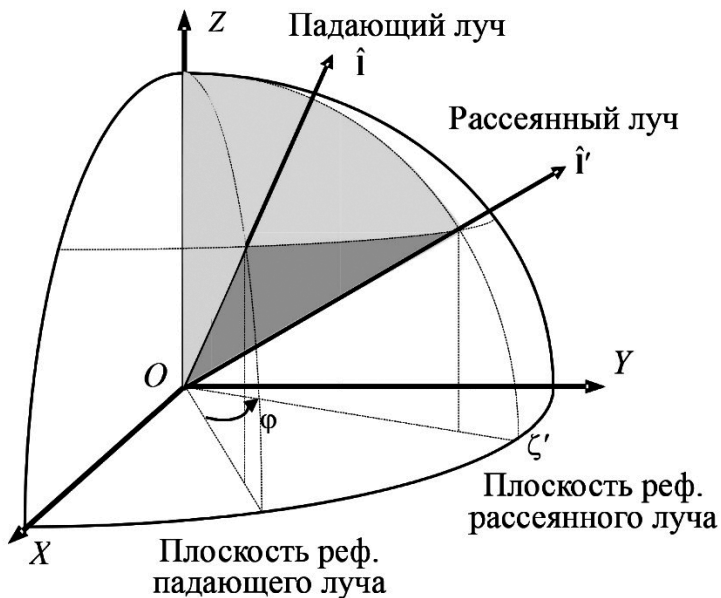


Рис. 1.21. Поворот плоскости референции при рассеянии

Параметры Стокса позволяют обобщить фотометрическое приближение на случай поляризации: все законы сохраняют свой вид, но приобретают матричный характер.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апресян, Л.А. Теория переноса излучения: статистические и волновые эффекты / Л.А. Апресян, Ю.А. Кравцов. – М.: Наука, 1983. – 216с.

В книге изложена теория переноса излучения как следствие теории многократного рассеяния статистически квазиоднородного волнового поля. Такой подход позволяет выявить зависимость яркости от корреляционных характеристик излучения, связать параметры уравнения переноса излучения со статистическими свойствами рассеивающей среды, уточнить и в некоторых случаях расширить границы применимости фотометрического описания. Книга написана лаконичным языком и позволяет глубже понять физическое содержание и статистический смысл фотометрии и теории переноса излучения.

2. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Мир, 1973. – 720С.

Наиболее полный и авторитетный труд по оптике в мировой литературе, учитывающий все последние достижения классической теории. Излагаются макроскопические уравнения Максвелла с формально введенными константами и подробно разбираются вопросы распространения электромагнитных волн в среде, а также связь этих констант с поляризацией и намагничиванием. Уравнения геометрической оптики последовательно выводятся из уравнений Максвелла и затем применяются к теории оптического изображения и к расчету аберраций. Рассматриваются интерференция, элементарная и строгая теория дифракции, дифракционная теория аберраций и дифракция света на ультразвуковых волнах. Подробно излагаются вопросы распространения, интерференции и дифракции частично когерентного света; основное внимание уделяется случаю квазимонохроматического излучения, причем общее рассмотрение строится на использовании метода корреляционных функций. Излагаются вопросы металлооптики и кристаллооптики. В книге много внимания уделяется изложению математического аппарата.

3. Бугер, П. Оптический трактат о градации света. Серия «Классики науки» / П. Бугер: перевод Н.А. Толстого, П.П. Теофилова; под ред. А.А. Гершуна. – М.: АН СССР, 1950. – 478с.

Сочинение основателя фотометрии П.Бугера. По очень верному замечанию А.Эйнштейна, науку надо изучать не по учебникам, а трудам основоположников, где содержится подлинная живая мысль, которая в последствии приглаживается и становится скучной в учебниках.

4. Гершун, А.А. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. Теория светового поля / А.А. Гершун. – М.: Физматгиз, 1958. – 548 с.

Первое определение и изложение теории светового поля, попытка построить теорию фотометрического расчета как частный случай общей теории физического поля. В монографии изложены основы фотометрического расчета как приложение законов теории светового поля.

5. Розенберг, Г.В. Луч света. К теории светового поля / Г.В. Розенберг // УФН. – 1977. – Т.121. – №1. – С.97–138.

Монографическая статья в журнале «Успехи физических наук», впервые поставившая цель строгого физического обоснования понятий фотометрии, долгое время представлявшихся феноменологическими, сугубо приближенными. Автор попытался дать ответы на самые фундаментальные вопросы фотометрии: что такое луч света? что значит «измерение света»? каково электродинамическое содержание и каковы границы применимости лучевых и фотополяриметрических представлений? Статья сама оказалась лучом света, озарившим целое поколение оптиков.

6. Уиттекер, Э. История теории эфира и электричества. Классическая теория / Э. Уиттекер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 512с.

Фундаментальное сочинение выдающегося английского математика и механика, направленное на последовательное историческое изложение развития основных понятий и идей теории электричества и магнетизма. Его соображения по поводу

фундаментальных физических принципов и понятий – поле, сила, энергия – представляют большой интерес для современной науки.

7. Фабри, Ш. Общее введение в фотометрию / Ш. Фабри. – М.–Л.: ОНТИ, 1934. – 200с.

Книга написана одним из наиболее блестящих ученых начала XX в. Шарлем Фабри, когда были открыты приемники оптического излучения, отличные от глаза. Фабри, точно почувствовавший задачи и потребности новой технической дисциплины – светотехники, в своей книге, впервые в мировой литературе, очень ясно и просто изложил все физические основы фотометрии. Изложение непрерывно иллюстрируется примерами, имеющими практическое значение.

2. ПРИЕМНИКИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

2.1. Классификация приемников излучения и характеристика их чувствительности

Устройство, предназначенное для преобразования энергии оптического излучения в другие виды энергии, называют приемником оптического излучения (фотоприемником). Приемники можно разделить на две большие группы: биологические (глаз, кожный покров, растительность и др.) и физические, к которым относят устройства, преобразующие видимое, инфракрасное (ИК) или ультрафиолетовое (УФ) излучение в электрический сигнал (термоэлементы, болометры, фотоэлементы и фотоумножители, фотодиоды, фоторезисторы и некоторые другие), электронно-оптические преобразователи, фотопленки различных видов и другие фоточувствительные материалы. Основные биологические приемники излучения будут рассмотрены в гл. 3, 8. В данном разделе мы остановимся на физических приемниках излучения. Одна из классификаций физических приемников излучения (в дальнейшем – приемников излучения (ПИ)) представлена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Классификация физических приемников излучения

Приемники оптического излучения			
Фотонные (фотоэлектрические)			Тепловые
С внешним фотоэффектом	С внутренним фотоэффектом	Фотохимические	Термоэлемент
Вакуумные фотоэлементы	Фоторезисторы	Глаз человека	Болометр
Фотоэлектронные умножители (ФЭУ); электронно-оптические преобразователи (ЭОП)	Фотодиоды	Фотопленка	Пироэлектрический приемник

Физические приемники излучения разделяются на два основных класса – фотонные (фотоэлектрические) и тепловые. Принцип действия фотоэлектрических ПИ основан на внешнем (фотоэлементы, фотоэлектронные умножители и др.) или внутреннем (фоторезисторы, фотодиоды, фототранзисторы и др.) фотоэффекте.

В фотоэлектрических приемниках поглощение электронами квантов излучения приводит к изменению концентрации свободных носителей заряда, что вызывает изменение его реакции. Все фотоэлектрические приемники являются селективными, т.е. их реакция зависит от частоты (или длины волны) излучения, падающего на приемник.

В тепловых ПИ энергия оптического излучения, поглощенная электронами, сначала преобразуется в тепловую энергию, а лишь затем происходят изменения свойств приемника: возникает термо-ЭДС (термоэлементы), изменяется проводимость (болометры) или плотность поверхностных зарядов (пироэлектрические ПИ) и т.д. Тепловые приемники неселективны в широкой области спектра.

Параметрами ПИ обычно называют величины, характеризующие свойства приемника при работе его в определенных условиях и служащие критериями оценки его качества. Рассмотрим основные параметры ПИ.

Чувствительность ПИ – это отношение реакции приемника излучения к величине входного воздействия, вызвавшего эту реакцию:

$$S = \frac{\text{Реакция}}{\text{Входное воздействие, вызвавшее реакцию}}. \quad (2.1)$$

Спектральная чувствительность фотоприемника – это отношение реакции приемника излучения (R) к величине монохроматического потока излучения ($\Phi_e(\lambda)$), вызвавшего эту реакцию:

$$S_e(\lambda) = \frac{R}{\Phi_e(\lambda)}, \quad (2.2)$$

где $S_{ei}(\lambda) = \frac{i}{\Phi_e(\lambda)}$, А / Вт; $S_{eu}(\lambda) = \frac{u}{\Phi_e(\lambda)}$, В / Вт.

В большинстве случаев спектральные чувствительности ПИ имеют вид плавных кривых с одним максимумом на длине волны λ_m . Измерить абсолютную спектральную характеристику на практике достаточно трудно, так как она изменяется не только от серии к серии приемников, но зависит от каждого отдельного приемника внутри серии. Между тем, безразмерная относительная спектральная чувствительность фотоприемника

$$S_0(\lambda) = \frac{S_e(\lambda)}{S_e(\lambda_m)} = \frac{S_e(\lambda)}{S_{\max}}, \quad (2.3)$$

то есть отношение спектральной чувствительности к ее максимальному значению (S_{\max}), практически не меняется от приемника к приемнику одного и того же типа, а зависит только от материала чувствительного слоя. Именно значение $S_0(\lambda)$ приводится в справочниках.

При реакции ПИ на излучение сложного спектрального состава различают *интегральную чувствительность приемника* к потоку излучения $S_{\Phi e}$, *чувствительность* к световому потоку $S_{\Phi v}$, *чувствительность* к облученности S_{Ee} или к освещенности S_{Ev} .

Токовой чувствительностью S_i называется чувствительность ПИ, у которого выходным сигналом является сила фототока, а *вольтовой* S_v – чувствительность ПИ, у которого выходным сигналом фотоприемника является напряжение. Ниже представлены примеры интегральных чувствительностей и их размерности:

$$S_{\Phi vi} = \frac{i}{\Phi_v}, \text{ А / лм ; } S_{Evi} = \frac{i}{E_v}, \text{ А / лк ;}$$

$$S_{\Phi vu} = \frac{u}{\Phi_v}, \text{ В / лм ; } S_{Evu} = \frac{u}{E_v}, \text{ В / лк .}$$

В паспорте на приемник оговаривают температуру, тип источника, частоту модуляции потока излучения и полосу пропус-

кания усилительного тракта, к которой отнесен данный параметр. Часто эти факторы приводят в таблицах параметров как подстрочный индекс или в скобках около значения параметра. Например, $S_{\Phi_{ei}(2865,800,1)}$ означает, что измерение интегральной токовой чувствительности к потоку излучения велось по черному телу с температурой 2856 К (стандартный источник типа «А»), при частоте модуляции 800 Гц и полосе пропускания усилителя 1 Гц.

Выражения (2.2) и (2.3) позволяют рассчитать реакцию приемника излучения (R) на поток излучения сложного спектрально-го состава:

$$R = \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S(\lambda) d\lambda \rightarrow R = S_{\max} \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda, \quad (2.4)$$

где $\Phi_{e\lambda}(\lambda) = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}$ – спектральная плотность потока излучения, вызвавшего реакцию фотоприемника.

Тогда *интегральная чувствительность ПИ к потоку излучения* определится выражением:

$$S_{\Phi_e} = \frac{R}{\Phi_e} = \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_e(\lambda) d\lambda} = S_{\max} \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_e(\lambda) d\lambda}. \quad (2.5)$$

В выражение (2.4) входит $\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda$, который имеет размерность Вт и называется *эффективным потоком излучения*:

$$\Phi_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda. \quad (2.6)$$

Словарь МКО определяет системы различных эффективных величин и единиц в соответствии с выражением (2.6). При этом за $S_0(\lambda)$ принимаются различные функции с максимальным значением 1, которые называются спектрами действия, спектральны-

ми весовыми функциями или функциями спектрального взвешивания.

Из выражений (2.4) и (2.6) следует выражение:

$$R = S_{\max} \cdot \Phi_{\text{эф}}. \quad (2.7)$$

Анализ выражения (2.7) позволяет сделать следующий вывод: *излучения разного спектрального состава, имеющие равные эффективные потоки, будут создавать на выходе ПИ равные реакции.*

Выражение (2.7) позволяет следующим образом интерпретировать понятие эффективного потока излучения – это такой монохроматический поток, который имеет длину волны излучения, совпадающую с длиной волны максимума чувствительности приемника излучения и создающий на выходе реакцию, равную реакции приемника на излучение сложного спектрального состава.

Из выражений (2.2) и (2.3) следует, что спектральная чувствительность приемника излучения является характеристикой только приемника излучения, а интегральная чувствительность зависит как от спектральной чувствительности приемника, так и от спектра падающего излучения. В паспорте на ПИ приводится значение его интегральной чувствительности для одного из эталонных источников излучения, при этом часто возникает необходимость использовать данный приемник при регистрации излучения со спектром, отличным от эталонного.

Расчет интегральной чувствительности ПИ к излучению произвольного спектрального состава (S_{Φ_e}) по значению интегральной чувствительности к излучению эталонного источника ($S_{\Phi_e}^{\text{эт}}$).

При решении данной задачи известны относительные спектры

$$\Phi_{e\lambda 0}(\lambda) = \frac{\Phi_{e\lambda}(\lambda)}{\Phi_{\max}} \text{ источника излучения и } \Phi_{e\lambda 0}^{\text{эт}}(\lambda) = \frac{\Phi_{e\lambda}^{\text{эт}}(\lambda)}{\Phi_{\max}^{\text{эт}}}$$

эталона. Запишем выражения для S_{Φ_v} и $S_{\Phi_v}^{\text{ЭТ}}$, используя выражение (2.5):

$$S_{\Phi_e} = \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) S(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_e(\lambda) d\lambda} = S_{\text{max}} \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{e0}(\lambda) d\lambda}. \quad (2.8)$$

$$S_{\Phi_e}^{\text{ЭТ}} = \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) S(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) d\lambda} = S_{\text{max}} \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) d\lambda}. \quad (2.9)$$

Поделив (2.8) на (2.9), получим:

$$S_{\Phi_e} = a S_{\Phi_e}^{\text{ЭТ}}, \quad (2.10)$$

где $a = \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{e0}(\lambda) d\lambda} \frac{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda 0}^{\text{ЭТ}}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda}$ – относительная ак-

тиничность излучения, которая может быть вычислена при известной относительной спектральной чувствительности $S_0(\lambda)$.

2.2. Временные параметры фотоприемников

Инерционность фотоприемника приводит к тому, что его реакция на постоянное входное воздействие не сразу достигает максимального значения, а зависит от времени, которое прошло от начала воздействия оптического излучения на ПИ. Меру инерционности ПИ удобно характеризовать величиной постоянной времени τ .

Собственные *постоянные времени* ПИ – $\tau_{\text{сп}}$ и $\tau_{\text{н}}$ (рис. 2.1): $\tau_{\text{н}}$ – время после начала воздействия излучения, по истечении которого нарастающий сигнал достигает доли $1 - 1/e = 0,63$ от свое-

го максимального значения; $\tau_{сп}$ – интервал времени после прекращения воздействия излучения, по истечении которого спадающий выходной сигнал уменьшается в e раз. У некоторых приемников, например у фоторезисторов, $\tau_{сп} \neq \tau_{н}$, так как процесс рекомбинации носителей у них зависит от квадрата их концентрации (или определяется более сложной зависимостью). У фоторезисторов в первом приближении τ определяется временем жизни носителей; у фотодиодов – временем пролета носителей от места их образования до p – n -перехода; у фотоэлементов и ФЭУ – временем пролета носителей от фотокатода до анода с учетом их неодновременного прилета на анод, что дает задержку по времени; у тепловых приемников – временем тепловых процессов и т. д. Следует отметить, что на постоянную времени ПИ также влияет входное сопротивление и емкость элементов схемы его включения в электронный тракт.

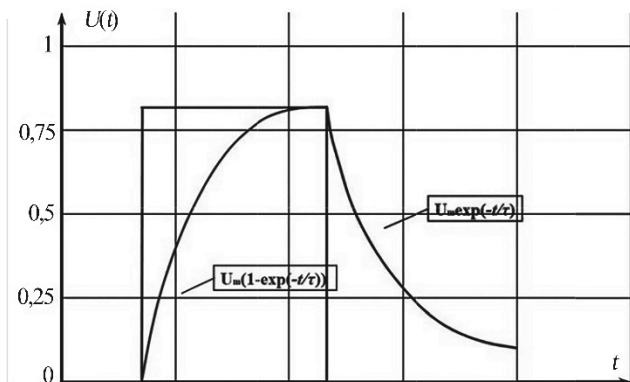


Рис. 2.1. Зависимость сигнала фотоприемника от времени

Постоянная времени фотоприемника определяет его *импульсную реакцию* (характеристику) $h(t)$, т.е. реакцию приемника на поток излучения в виде δ -функции Дирака, а также его частотную характеристику $S(\omega)$, т.е. его реакцию на синусоидально модулированный сигнал единичной амплитуды с циклической частотой ω . Важные для последующего изложения свойства δ -функции Дирака приведены в табл. 2.2.

Свойства δ – функции Дирака

№	Свойство	Примечание
1	$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \text{стремится к } \infty & \text{при } t = t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0 \end{cases}$	Определение
2	$\delta(t - t_0) = \delta(-(t - t_0))$	Четность функции
3	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$	Условие нормировки
4	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$	Фильтрующее свойство

Для линейных систем связь выходного и входного воздействий определяется интегралом свертки:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (2.11)$$

Если подставить в качестве $U_{\text{ВХ}}(\tau)$ дельта функцию, то с учетом ее фильтрующего свойства получим: $U_{\text{ВЫХ}}(t) = h(t)$, что и было сформулировано выше. Поскольку спектр от $\delta(t)$ (преобразование Фурье) не зависит от частоты, то частотная характеристика и импульсная реакция связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt - \text{прямое преобразование Фурье} \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega - \text{обратное преобразование Фурье} \end{aligned} \right\}. \quad (2.12)$$

Если аппроксимировать импульсную характеристику выражением:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (2.13)$$

то согласно (2.12) частотная характеристика (рис. 2.2) определится выражением:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right] dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $S(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$, а ее модуль выражением $|S(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$.

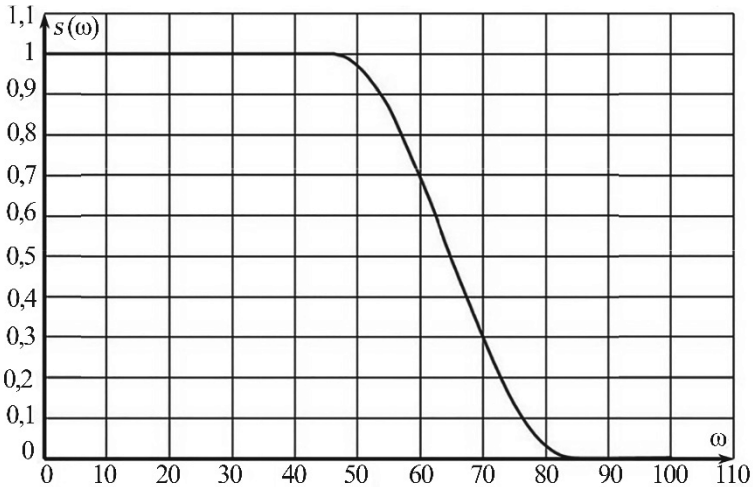


Рис. 2.2. Частотная характеристика фотоприемника

2.3. Принцип действия термоэлемента, болометра и пирозлектрического приемника

Согласно приведенной в табл. 2.1 классификации, рассмотрим принципы работы и характеристики ПИ.

Сигнал на выходе *термоэлемента* возникает за счет эффекта Зеебека.

В 1921 г. им было установлено, что при возникновении разности температур между двумя спаями разнородных металлов в электрической цепи возникает ЭДС, а при замыкании цепи протекает ток (рис. 2.3):

$$V = s(T_1 - T_2) \rightarrow V = s\Delta T, \quad (2.15)$$

где s – коэффициент Зеебека (термоэлектрический коэффициент); ΔT – перепад температур между горячим и холодными спаями.

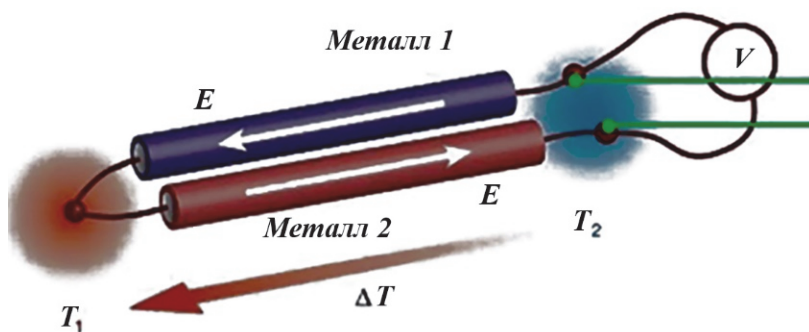


Рис. 2.3. Возникновение термоЭДС

Согласно современным представлениям термоЭДС возникает за счет диффузии электронов под действием градиента температуры. Кроме этого, при создании в образце градиента температуры возникает поток фононов, которые, рассеиваясь на элек-

тронах, передают им часть своего квазиимпульса и создают их поток от горячего к холодному краю образца. Все это создает контактную разность потенциалов в месте каждого из контактов:

$$U_{12} = \frac{Q_{e2} - Q_{e1}}{e} + \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}, \quad (2.16)$$

где Q_{e1} , Q_{e2} – работы выхода металлов; e – заряд электрона, а n_1 , n_2 – их концентрации.

$$U_{21} = \frac{Q_{e1} - Q_{e2}}{e} + \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.17)$$

где T_1 , T_2 – температуры горячего и холодного спаев.

Если записать закон Ома для полной цепи, то получим:

$$\Delta U = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} (T_1 - T_2) = s \Delta T. \quad (2.18)$$

Для определения чувствительности термоэлемента необходимо рассмотреть *тепловое действие излучения*:

Рассмотрим случай облучения внешним источником участка A_0 площадки A (рис. 2.4). Уравнение теплового баланса для этой задачи можно записать в следующем виде:

$$\underbrace{\alpha_{e0} E_e A_0 dt}_{\text{поглощенная энергия}} = \underbrace{c m dt}_{\text{энергия затраченная на нагрев}} + \underbrace{a_k (T - T_B) A dt}_{\text{отведенная за счет конвекции энергия}} + \underbrace{\sigma (T_{\text{то}}^4 \eta_{\text{то}} \alpha_{e0} - T_{\text{от}}^4 \eta_{\text{от}} \alpha_{\text{от}}) A dt}_{\text{изменение энергии за счет теплообмена излучением}} + \underbrace{\phi A dt}_{\text{энергия, затраченная на испарение (сушку)}}, \quad (2.19)$$

где α_{e0} , $\alpha_{\text{от}}$ – коэффициенты поглощения тела и окружающих предметов; E_e – облученность площадки A_0 ; A_0 – облучаемая площадь; A – полная площадь тела; c – удельная теплоемкость тела; m – плотность тела; a_k – коэффициент теплопередачи конвекцией;

T – текущая температура тела; T_b – температура воздуха; T_T – средняя температура окружающих тел; $\eta_{то}$ – коэффициент использования потока тела окружающими телами; $\eta_{от}$ – коэффициент использования потока окружающих тел; φ – удельная теплота испарения; u – скорость испарения.

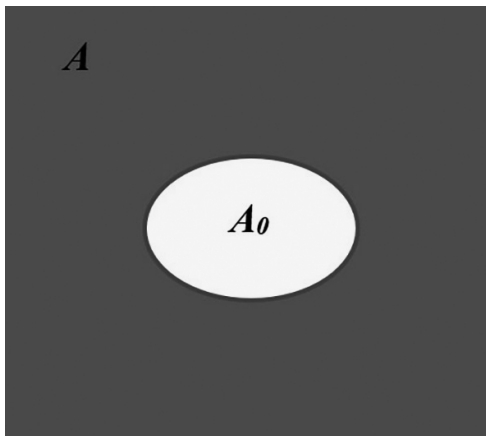


Рис. 2.4. К тепловому действию излучения

Выражение (2.19) упрощается, если учесть, что при $T < 700\text{ K}$ суммарные расходы энергии на конвекцию и лучеиспускание линейно связаны между собой, т.е.

$$\sigma(T^4 \eta_{то} \alpha_{e0} - T_T^4 \eta_{от} \alpha_{eT}) A dt + a_k (T - T_b) A dt \approx a_T (T - T_b),$$

где a_T – суммарный коэффициент теплопередачи. Если ввести обозначения $a_A = A/A_0$; $a_V = A/V$; γ – плотность тела, то получим уравнение теплового баланса в виде:

$$\alpha_{e0} E_e A_0 dt = \frac{c\gamma}{a_V} a_A dT + a_T a_A (T - T_b) dt + \varphi u a_A dt. \quad (2.20)$$

Решение уравнения (2.20) при граничных условиях $T(0) = T_H$ имеет вид:

$$T = T_H + \frac{\alpha_{e0} E_e - \varphi u a_A}{a_T a_A} \left(1 - \exp \left(- \frac{a_T a_V}{c\gamma} t \right) \right). \quad (2.21)$$

При $t > 3 \frac{a_T a_V}{c\gamma}$ температура достигает установившегося значения T_y :

$$T_y = T_H + \frac{\alpha_{e0} E_e - \varphi u a_A}{a_T a_A}. \quad (2.22)$$

Для термоэлемента параметр $u = 0$, $a_A = 1$, так как поверхность приемника сухая и облучается вся его площадь. Таким образом, постоянная времени τ термоэлемента равна $\frac{c\gamma}{a_T a_V}$, а его импульсная реакция описывается выражением (2.13).

При $t > 3 \frac{a_T a_V}{c\gamma}$ температура термоэлемента достигает установившегося значения:

$$T_y = T_H + \frac{\alpha_{e0} E_e}{a_T} \rightarrow \Delta T = \frac{\alpha_{e0} E_e}{a_T}.$$

Полученный результат позволяет определить чувствительность термоэлемента:

$$S_{uEe} = \frac{\Delta U}{E_e} = \frac{s \Delta T}{E_e} = s \frac{\alpha_{e0} E_e}{E_e a_T} \rightarrow S_{uEe} = s \frac{\alpha_{e0}}{a_T}. \quad (2.23)$$

Поскольку $E_e = \frac{\Phi_e}{A}$, то для $S_{u\Phi_e}$ получается выражение:

$$S_{u\Phi_e} = s \frac{\alpha_e \Phi_e}{a_T A}. \quad (2.24)$$

Для определения частотной характеристики термоэлемента необходимо решить систему уравнений, состоящую из уравнения теплового баланса и закона Ома:

$$\left. \begin{array}{l} C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \underbrace{g_T \Delta T(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{в окружающую} \\ \text{среду}}} + \underbrace{sTi(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{за счет} \\ \text{эффекта} \\ \text{Пельтье}}} = \underbrace{\alpha_e \Phi_e \exp(j\omega t)}_{\substack{\text{синусоидально} \\ \text{модулированная} \\ \text{поглощенная} \\ \text{мощность}}} \end{array} \right\}, \quad (2.25)$$

$$i(t) = \frac{s\Delta T(t)}{r}$$

где C_T – теплоемкость термоэлемента; $g_T = \frac{dP_0}{dT}$ – тепловая проводимость между термоэлементом и окружающей средой; dP_0 – мощность, отводимая от приемника в окружающую среду при перепаде температур dT ; α_e – коэффициент поглощения чувствительной площадки; r – полное сопротивление схемы включения термоэлемента.

В (2.25), в дополнение к (2.19), учитывается мощность, отводимая от места спая за счет эффекта Пельтье. Поскольку оба уравнения системы линейны и входное воздействие синусоидальное, ищем решение как и раньше в виде комплексных синусоид:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta T(t) = \Delta T(\omega) \exp(j\omega t) \\ i(t) = i(\omega) \exp(j\omega t) \end{array} \right\}. \quad (2.26)$$

Несложные преобразования позволяют получить решение:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T(\omega) &= \frac{\alpha_e \Phi_e}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) + j\omega C_T} \\ i(\omega) &= \frac{\frac{s}{r} \alpha_e \Phi_e}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) + j\omega C_T} \end{aligned} \right\}. \quad (2.27)$$

Переходя к действующим значениям, получаем выражения для зависимости чувствительности термоэлемента от циклической частоты:

$$S_{i\Phi_e}(\omega) = \frac{S_{oi\Phi_e}}{\sqrt{1 + (\omega\tau_{TM})^2}}, \quad (2.28)$$

$$\text{где } S_{oi\Phi_e} = \frac{\frac{s}{r} \alpha_e}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right)}, \quad \tau_{TM} = \frac{C_T}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right)}.$$

Для работы термоэлементов не требуется источника питания. В качестве материалов для металлических термоэлементов используют сурьмяно-висмутовые сплавы, серебро, железо, теллур, константан, хромель и различные сплавы этих веществ, а для полупроводниковых – сурьму, кремний, теллур, селен. К недостаткам термоэлементов следует также отнести их большую инерционность (постоянная времени составляет десятки и сотни миллисекунд). На рисунке 2.5 приведены конструкции одноэлементных термоэлементов ТД-505 и ТЭМ-5. К недостаткам одноэлементных

термоэлементов относится зависимость их реакции от температуры окружающей среды. Для устранения этого недостатка выпускаются компенсированные термоэлементы (тип ТК), в корпусе которых находятся два чувствительных элемента, включенных навстречу друг другу. При этом один из элементов является рабочим, а второй затемнен. Схема включения таких термоэлементов приведена на рис. 2.6. При идентичности двух чувствительных элементов выходной сигнал ТК не зависит от температуры окружающей среды. В таблицах 2.3, 2.4 приведены основные параметры некоторых термоэлементов.

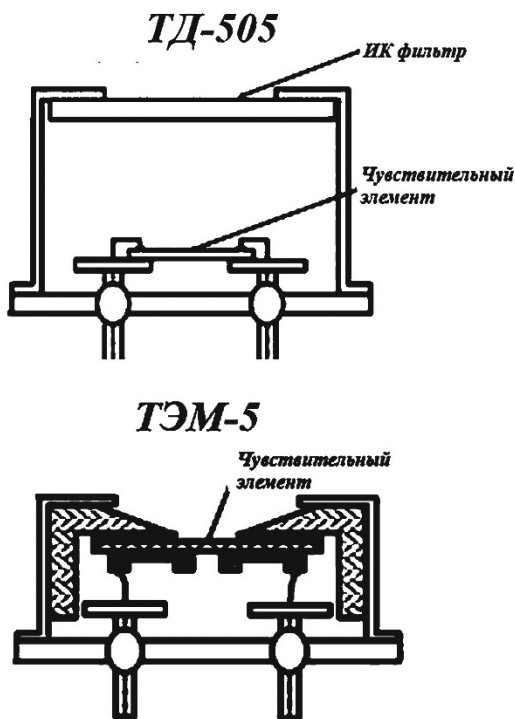


Рис. 2.5. Устройство термоэлементов

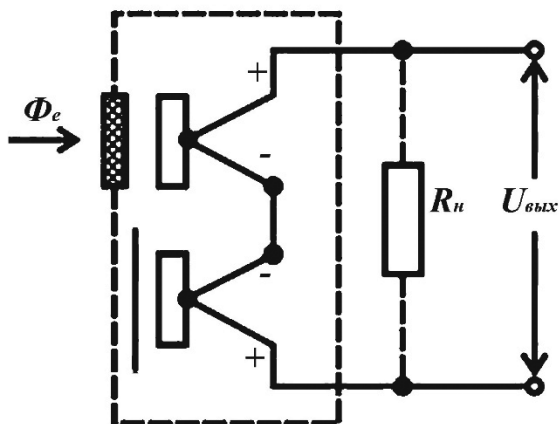


Рис. 2.6. Схема включения термоэлемента типа ТК

Таблица 2.3

Основные параметры радиационных термоэлементов

Тип термоэлемента	Размеры призмной площадки, мм	Область спектральной чувствительности, мкм	Сопротивление элемента, Ом	Вольтовая чувствительность, В/Вт (573 К, 9 Гц)	Постоянная времени, с	Диапазон регистрируемых мощностей, Вт	Максимально допустимая облученность, Вт/мм ²	Габаритные размеры, мм
РТН-1	3×1,5	0,17–5,5	20	0,5–1	0,1	$5 \cdot 10^{-10}$ – $1,3 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	Ø 24×105
РТН-2	12×1,5	0,25–2,5	100	0,5–1	0,2	$8 \cdot 10^{-10}$ – $5,4 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	Ø 32×110
РТН-10	1,5×3	0,4–6	20	0,5–2	0,1	–	$0,3 \cdot 10^{-3}$	–

Таблица 2.4

Основные параметры термоэлементов ТПИ

Наименование параметра. Единица измерения	Тип прибора/Норма параметра					
	ТПИ-1-5	ТПИ-2-5	ТПИ-5	ТПИ-8	ТПИ-10	ТПИ-14
Область спектральной чувствительности, мкм	0,5–11					
Диаметр приемной площадки, мм	30	–	50	50	200	60
Пределы измерений мощности или энергии	до $1 \cdot 10^5$ Вт/см ²	0,5–30 Дж	1–50 Вт	50–500 Вт	50–500 Вт	100–1500 Вт
Интегральная вольтовая чувствительность, мкВ/Вт	250 мкВ/ Дж	130	100	15	25	35
Постоянная времени, с	–	–	70	50	100	70
Максимальная плотность мощности, Вт/см ²	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	50	50	50	75
Основная относительная погрешность, %	15	15	12	15	15	15

Болометр – пассивный тепловой приемник, у которого изменяется сопротивление за счет изменения его температуры под действием энергии падающего излучения. Для получения сигнала болометру нужен внешний источник питания со схемой включе-

ния. Чувствительность болометра во многом зависит от *температурного коэффициента сопротивления* его материала (α):

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}, \quad (2.29)$$

где R – сопротивление чувствительного элемента болометра.

Для металлов сопротивление линейно связано с его температурой ($R_M = c_1 T$), поэтому:

$$\alpha_M = \frac{1}{T}, \quad (2.30)$$

где $\alpha_M \approx 0,00333$ при $T = 300$ К. Поиск более эффективных материалов позволил выявить полупроводники с примесной и собственной проводимостью. Для полупроводников с примесной проводимостью зависимость сопротивления от температуры можно аппроксимировать степенной зависимостью ($R_{II} = c_2 T^\gamma$), где $\gamma = 2 \div 2,5$.

Для них

$$\alpha_{II} = \frac{\gamma}{T}, \quad (2.31)$$

то есть в $2 \div 2,5$ раза больше, чем у металлических болометров.

Зависимость сопротивления собственных полупроводников от температуры носит экспоненциальный характер:

$$R_c = c_3 \exp\left(\frac{eE_g}{kT}\right), \quad (2.32)$$

поэтому α_c отрицательно и определяется выражением:

$$\alpha_c = -\frac{eE_g}{kT^2}, \quad (2.33)$$

где E_g – ширина запрещенной зоны материала. Для Si при $T = 300$ К, $\alpha_{Si} = -0,045$, т.е. по модулю более чем в 10 раз больше, чем у металлов.

Уравнение теплового баланса для болометра:

$$\underbrace{C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt}}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{идущая на} \\ \text{нагрев} \\ \text{приемника}}} + \underbrace{g_T \Delta T(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{в окружающую} \\ \text{среду}}} = \underbrace{\alpha_e \Phi_e \exp(j\omega t)}_{\substack{\text{синусоидально} \\ \text{модулированная} \\ \text{поглощенная} \\ \text{мощность}}} + \underbrace{\Delta(i^2(t)R(t))}_{\substack{\text{изменение мощности} \\ \text{потребляемой от} \\ \text{источника питания}}}. \quad (2.34)$$

Поскольку для болометра величина $\Delta R \ll R_0$ ($R_0 = R_i$ – темновое сопротивление болометра), то мало изменяющийся ток $i(t)$ в выражении (2.34) можно заменить его темновым значением I_0 . Из (2.29) следует, что

$$\Delta R(t) = \alpha R_0 \Delta T(t), \quad (2.35)$$

поэтому (2.34) преобразуется к виду:

$$C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + (g_T - \alpha P_1) \Delta T(t) = \varepsilon_T \Phi_e \exp(j\omega t), \quad (2.36)$$

где $P_1 = I_0^2 R_0$ – мощность, с которой источник питания нагревает болометр.

Запишем сигнал на выходе схемы включения, приведенной на рис. 2.7:

$$u(t) = I_0 \Delta R(t). \quad (2.37)$$

С учетом (2.35) получим сигнал на выходе схемы включения болометра:

$$u(t) = \alpha I_0 R_0 \Delta T(t) = \alpha U_0 \Delta T(t), \quad (2.38)$$

где U_0 – постоянное напряжение на болометре, создаваемое источником питания E_n .

Решая систему уравнений (2.36), (2.38) методом, изложенным ранее для термоэлемента, получим:

$$u(\omega) = \frac{\alpha \varepsilon_T U_0 \Phi_e}{(g_T - \alpha P_1) + j\omega C_T}. \quad (2.39)$$

Переходя к действующим значениям, получим следующее выражение для частотной характеристики болометра:

$$S_{u\Phi_e} = \frac{\alpha\varepsilon_T U_0}{\sqrt{(g_T - \alpha P_1)^2 + (\omega C_T)^2}} = \frac{S_{ou\Phi_e}}{\sqrt{1 + (\omega\tau_\delta)^2}}, \quad (2.40)$$

$$\text{где } S_{ou\Phi_e} = \frac{\alpha\varepsilon_T U_0}{g_T - \alpha P_1}, \quad \tau_\delta = \frac{C_T}{(g_T - \alpha P_1)}.$$

Болометры бывают металлические (никелевые, висмутовые, золотые, платиновые), полупроводниковые (германиевые, кремниевые, оксидные на основе никеля, кобальта и марганца), диэлектрические. Постоянная времени полупроводниковых болометров составляет единицы миллисекунд, а металлических болометров – десятки миллисекунд. Сигнал на выходе болометра зависит от величины сопротивления нагрузки. Анализ схемы включения (рис. 2.7) показывает, что при $R_n \rightarrow 0$ и $R_n \rightarrow \infty$ $u_{\text{вых}}(t) \rightarrow 0$, поэтому по теореме Ролля (теореме о среднем) существует такое значение R_n , при котором $u_{\text{вых}}(t)$ достигает максимума. Запишем выражение для $u_{\text{вых}}(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{u(t) \cdot R_n}{R_i + R_n} = \frac{E_n \cdot \Delta R \cdot R_n}{(R_i + R_n)^2}. \quad (2.41)$$

В точке максимума сигнала $\frac{du_{\text{вых}}}{dR_n} = 0$, откуда следует, что

$$R_n = R_i, \quad (2.42)$$

то есть максимальный сигнал на выходе болометра достигается, если сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению болометра. Такая нагрузка получила название *согласованной нагрузки*.

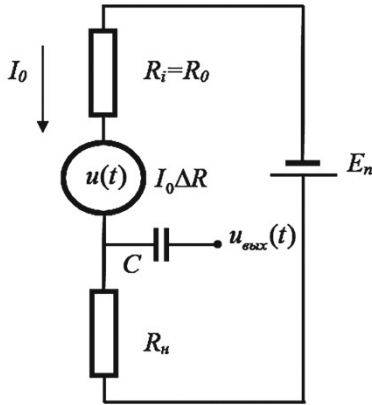


Рис. 2.7. Схема включения болометра при регистрации переменного сигнала

При регистрации постоянных (или медленно изменяющихся) излучений используется мостовая схема включения болометра (рис. 2.8). При отсутствии внешнего излучения и выполнении условия $\frac{R_i}{R_2} = \frac{R_1}{R_0}$ сигнал на выходе схемы равен нулю. Под воздействием Φ_e изменяется сопротивление R_i и на выходе схемы появляется сигнал $u_{\text{вых}}$.

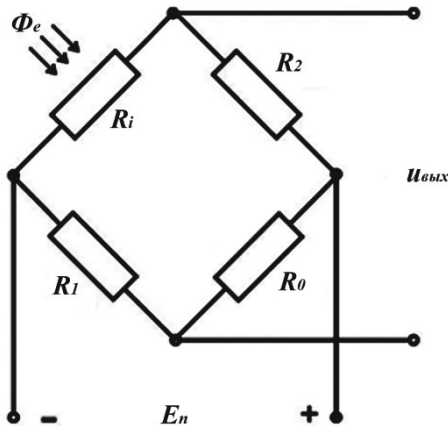


Рис. 2.8. Мостовая схема включения болометра

В таблицах 2.5 и 2.6 приведены основные характеристики некоторых болометров.

Таблица 2.5

Основные параметры металлических болометров

Тип болометра	Размеры чувствительного элемента, мм (элементов)	Область спектральной чувствительности, мкм	Материал входного окна	Сопротивление чувствительного и компенсирующего элементов, Ом	Интегральная вольтовая чувствительность, В/Вт	Постоянная времени, с	Габаритные размеры корпуса, мм, не более [масса, г, не более]
Болометр никелевый БН-1	1×0,3	0,17–25	KBr	150–200	200 (373°K, 0 Гц)	0,1	Ø 24×105
Висмутовый вакуумный ФМ-А	0,3×3,3	0,2–38	KBr	300	25 (373°K, 9 Гц)	2·10 ⁻²	Ø 20×120 [50]
Вакуумный БМК-3	1,9×0,4	0,3–25	KBr	120–300	11 (373°K, 9 Гц)	2·10 ⁻²	Ø 28×940 [50]
БМИ-1	1,9×0,4	0,3–25	KBr	120–300	–	(1–2)·10 ⁻²	н/д
БМ6-К1	1,9×0,4	0,3–25	KBr	90–400	–		н/д

Таблица 2.6

Основные параметры полупроводниковых болометров

Тип болометра	Размеры чувствительного элемента, мм, (элементов)	Область спектральной чувствительности, мкм	Материал входного окна	Сопротивление чувствительного элемента, Ом	Интегральная вольтовая чувствительность, В/Вт	Постоянная времени, с	Диапазон рабочих температур, °С	Габаритные размеры корпуса, мм, [масса г, не более]
Оксидный кобальто-марганцевый БКМ-1	2,5×0,4 (2)	2–15	KBr	(2–3)·10 ⁶	200–300 (373°К, 10 Гц)	(0,9–1,5)· 10 ⁻⁴	20±5	Ø 25×120 [30]
Оксидный кобальто-марганцевый БКМ-2	2,5×1 (2)	2–15	KBr	(0,7–2,5)·10 ⁶	70–350 (373°К, 10 Гц)	(2–3)· 10 ⁻³	20±5	Ø 25×104 [30]
Оксидный кобальто-марганцевый БКМ-4	2,2×1 (2)	2–15	KBr	(0,6–2)·10 ⁶	35–350 (373°К, 10 Гц)	(4–7)· 10 ⁻³	20±5	Ø 16×22 [20]
Болометр германиевый БГС-2	2,5×0,5	1–30	KRS-5	(1,7–2)·10 ⁶	500– 3000	2·10 ⁻²	20±5	–

В *пироэлектрических* ПИ при изменениях температуры поверхности его элемента – сегнетоэлектрика с остаточной электрической поляризацией, эта поляризация заметно изменяется, что ведет к изменению разности потенциалов на выходах приемника. Пироэлектрические ПИ являются емкостными, а не резисторными, т.е. их полное сопротивление уменьшается с ростом частоты модуляции падающего на них излучения. Поэтому они позволяют получить очень широкую и равномерную частотную характеристику. Подбором активной нагрузки R в цепи включения пироэлектрического ПИ токовую частотную характеристику можно сделать равномерной вплоть до очень высоких частот (до 10^7 Гц и выше). На рисунке 2.9 представлена структура и схема включения пироэлектрического приемника. С точки зрения электрической схемы пироприемник – это конденсатор, в котором в качестве диэлектрика используется сегнетоэлектрик. В отличие от классического диэлектрика, в котором в отсутствие внешнего поля геометрические центры положительных и отрицательных зарядов совпадают, в сегнетоэлектриках эти центры разнесены и образуют систему, которая называется *диполь*. Если температура сегнетоэлектрика ниже точки Кюри, то при кристаллизации диполи ориентированы в объеме хаотично, и поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора равна нулю. Под воздействием внешнего поля диполи приобретают ориентацию вдоль линий поля, которая сохраняется и после снятия внешнего поля. Это приводит к наличию постоянного поверхностного заряда на обкладках (P_c , рис. 2.10), который зависит от температуры у поверхности ПИ. Основной характеристикой сегнетоэлектрика является *пироэлектрический коэффициент*:

$$\gamma = -\frac{dP_c}{dT}.$$

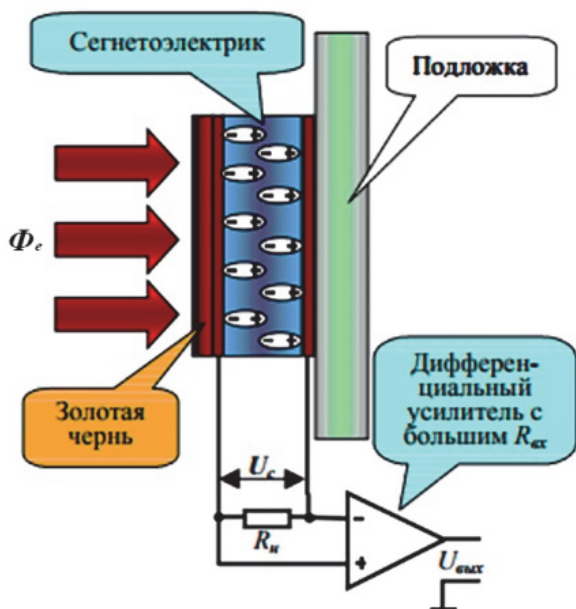


Рис. 2.9. Устройство пироприемника

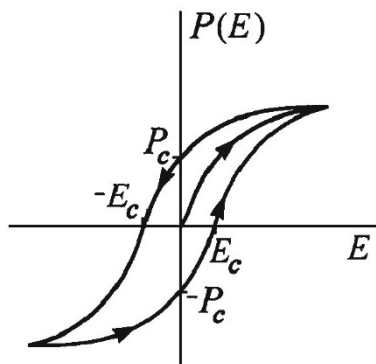


Рис. 2.10. Кривая поляризации сегнетоэлектрика (петля гистерезиса)

Уравнение теплового баланса для пироприемника имеет вид:

$$C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + g_T \Delta T(t) = \alpha_e \Phi_e \exp(j\omega t), \quad (2.43)$$

мощность, идущая на нагрев приемника
мощность, отводимая в окружающую среду
синусоидально модулированная поглощенная мощность

а его решение:

$$\Delta T(\omega) = \frac{\alpha_e \Phi_e}{g_T (1 + j\omega\tau)}, \quad (2.44)$$

где $\tau = \frac{C_T}{g_T}$. Если у термоэлементов и болометров величину τ

стараяются сделать возможно меньшей (для увеличения быстродействия приемников), то у пироприемника ее делают достаточно большой, чтобы в рабочей области частот $\omega\tau$ было много больше единицы. Учитывая, что $C_T = \tilde{c}Awd$, где \tilde{c} – удельная теплоемкость материала, d – его плотность, A – площадь приемника, а w – его толщина, выражение (2.44) примет вид:

$$\Delta T(\omega) = \frac{\alpha_e \Phi_e}{j\omega\tilde{c}Awd}. \quad (2.45)$$

Для нахождения чувствительности пироприемника найдем ток на его выходе. Из определения поверхностной плотности заряда следует: $Q(t) = A \cdot P_c(t)$. Тогда:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = A \frac{dP_c(t)}{dt} = A \frac{dP_c}{dT} \frac{dT(t)}{dt} = -A\gamma \frac{dT(t)}{dt}. \quad (2.46)$$

Поскольку $I(t) = I(\omega) \exp(j\omega t)$, а $T(t) = T_0 + \Delta T(\omega) \exp(j\omega t)$, где T_0 – средняя температура приемника, то $I(\omega) = -A\gamma j\omega \Delta T(\omega)$, и, с учетом (2.45), получим: $I(\omega) = -A\gamma j\omega \frac{\alpha_e \Phi_e}{j\omega \tilde{c} A w d}$. Тогда выражение для токовой чувствительности примет вид:

$$S_{\Phi ei} = \frac{\gamma \alpha_e}{\tilde{c} w d}. \quad (2.47)$$

Выражение (2.47) показывает, что токовая чувствительность пироприемника не зависит от частоты. Поскольку емкость плоского конденсатора определяется выражением $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{w}$, то вольтовая чувствительность пироприемника убывает обратно пропорционально частоте и определяется выражением:

$$S_{\Phi eu} = \frac{\gamma \alpha_e}{\tilde{c} A \epsilon \epsilon_0 \omega d}. \quad (2.48)$$

Из сегнетоэлектриков наиболее часто используются триглицин-сульфат $(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COOH})_3 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$, сегнетова соль $(\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O})$, титанат бария (BaTiO_3) и танталат лития (LiTaO_3) . Пироэлектрические приемники обладают высокой токовой и вольтовой чувствительностью, не требуют внешнего источника питания, но обладают большим шумом и имеют высокое выходное сопротивление. Последний недостаток устраняется созданием пироэлектрических приемных устройств, в которых приемник и первый каскад усиления на полевом транзисторе размещены в едином металло-стеклянном корпусе с окном, прозрачным в рабочем диапазоне спектра. Основные параметры приемных устройств на основе LiTaO_3 приведены в табл. 2.7. Схемы включения приведены на рис. 2.11.

Таблица 2.7

**Основные параметры приемных устройств
при температуре $20\pm 5^\circ\text{C}$**

Наименование параметра. Единица измерения	Тип прибора/Норма параметра			
	ПП-04	ПП-04 ТК	ПП-07	ИНПФ
Область спектральной чувствительности, мкм	4–300	7–14	7–14	2,5–20
Угол зрения, град	100	100	100	100
Размеры одиночной приемной площадки, мм (кол-во чувст. эл.)	$\emptyset 1,5$	2×1 (2)	2×1 (2)	1×2 (2)
Расстояние между приемными площадками, мм		1	1	1
Напряжение питания, В	2–15	2–15	2–15	2–15
Интегральная вольтовая чувствительность (373 К), В/Вт, не менее	500 (10Гц)	1500 (2Гц)	1500 (2Гц)	3800 (1Гц)
Диапазон рабочих температур, $^\circ\text{C}$	$-60\dots+60$	$-60\dots+60$	$-60\dots+60$	$-40\dots+85$
Габаритные размеры (без выводов), не более, мм	$\emptyset 9,2\times 4,6$	$\emptyset 9,2\times 4,6$	$\emptyset 9,2\times 4,6$	$\emptyset 9,2\times 4,6$

Приемники ПП-04 ТК, ПП-07 и ИНПФ обладают повышенной помехоустойчивостью в условиях быстрого изменения температуры окружающей среды, что достигается за счет компенсации помехи с рабочей площадки сигналом со второй площадки (компенсационной), дифференциально включенной по отношению к рабочей. От излучения объекта компенсационная площадка экранирована. Приемники выпускаются с различным размером чувствительной площадки, варианты: $\emptyset 1$ мм; $\emptyset 1,5$ мм; $2\times 1,5$ мм²; $2,3\times 2$ мм². Диапазон спектральной чувствительности определяется пропусканием входного окна, варианты: кварц, сапфир, кремний, германий и др.

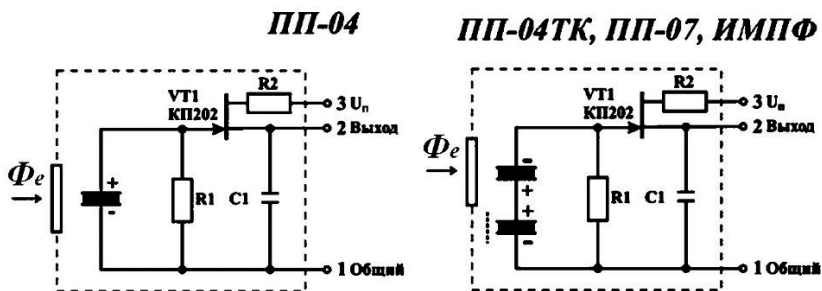


Рис. 2.11. Схемы включения приемных устройств с пироприемниками

2.4. Законы внешнего фотоэффекта

Внешний фотоэффект, или фотоэлектронная эмиссия – это испускание электронов с поверхности фоточувствительного слоя в вакуум или другое вещество под действием падающих квантов излучения (рис. 2.12).

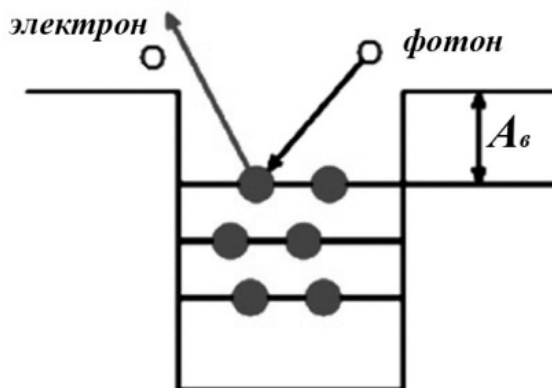


Рис. 2.12. Внешний фотоэффект

Экспериментально законы фотоэффекта исследовал российский ученый А.Г. Столетов, а его теоретическое обоснование в 1905 г. создал А. Эйнштейн, за что в 1921 г. получил Нобелевскую премию по физике. Формула Эйнштейна для внешнего фотоэффекта имеет вид:

$$h\nu = \frac{m_e V_M^2}{2} + A_B, \quad (2.49)$$

где $h\nu$ – энергия поглощенного фотона; m_e – масса электрона; V_M – максимальная скорость фотоэлектронов; A_B – работа выхода облучаемого материала.

На рисунке 2.13 представлена схема экспериментальной установки Столетова. Через входное окно на фотокатод установки (K) посылаются кванты ультрафиолетового излучения. При возникновении фотоэффекта фотоэлектроны перемещаются в вакуумной колбе от фотокатода к аноду (A). В установке имеется возможность менять величину и полярность напряжения между K и A , а также измерять величину фототока. Опыты Столетова (1889 г.), проведенные еще до создания электронной теории строения вещества, и работы Эйнштейна установили ряд законов фотоэффекта.

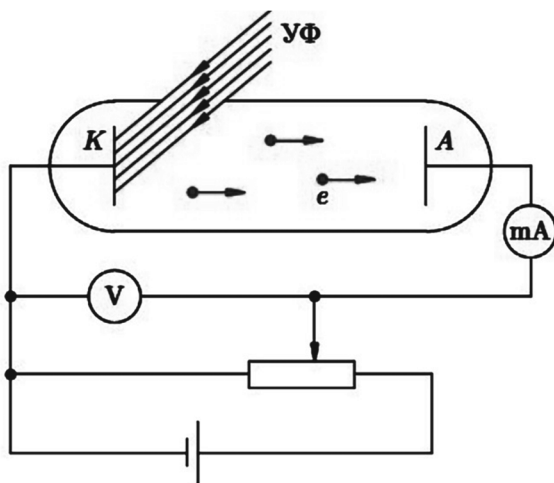


Рис. 2.13. Схема установки А.Г. Столетова

1. Фототок в режиме насыщения (I_H) (рис. 2.14) прямо пропорционален потоку излучения, поглощенного фотокатодом, при неизменном спектральном составе падающего потока излучения (закон Столетова):

$$I_H = \Phi_e \cdot S_{\Phi e i} . \quad (2.50)$$

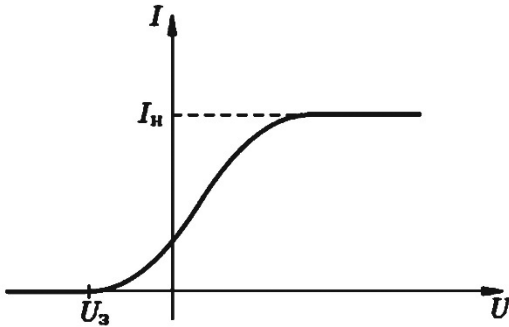


Рис. 2.14. Вольтамперная характеристика фотоэлемента

Законы Эйнштейна

2. Максимальная энергия выбиваемых фотоэлектронов пропорциональна частоте падающего на фотокатод излучения и не зависит от величины потока излучения.

3. Для каждого вещества существует длинноволновая граница (λ_k) внешнего фотоэффекта, называемая *красной границей фотоэффекта*. Из выражения (2.49) значение λ_k , получается, если в нем положить $V_M = 0$:

$$\lambda_k = \frac{hc}{A_B} . \quad (2.51)$$

Если на анод фотоэлемента подать отрицательное по отношению к фотокатоду напряжение, то возникнет поле, которое будет препятствовать движению электронов к аноду (потенциальный барьер). Если самым быстрым фотоэлектронам не хватит

энергии, чтобы его преодолеть, то такое напряжение называется *задерживающим потенциалом* (U_3 , рис. 2.14):

$$U_3 = \frac{m_e V_M^2}{2e}. \quad (2.52)$$

Из выражения (2.49) следует:

$$U_3 = \frac{h\nu - A_B}{e}. \quad (2.53)$$

Время запаздывания между поглощением кванта и появлением фотоэлектрона меньше 10^{-12} с, что позволяет на основе внешнего фотоэффекта создавать быстродействующие приемники излучения.

Спектральная чувствительность фотоприемников с внешним фотоэффектом сильно зависит от материала фотокатода. Наиболее часто встречающиеся типы фотокатодов приведены в табл. 2.8, а их относительные спектральные чувствительности – на рис. 2.15.

Таблица 2.8

Характеристика наиболее распространенных типов фотокатодов

Обозначение спектральной характеристики	Область спектральной чувствительности, мкм	Максимум спектральной характеристики, мкм	Тип фотокатода
C-1	0,4–1,2	0,75±0,1	Серебряно-кислородно-цезиевый (AgOCs)
C-2	0,35–0,7	0,45±0,05	Сурьмяно-цезиевый (SbCs) массивный
C-3	0,2–0,65	0,38±0,05	Сурьмяно-цезиевый (SbCs) с фиолетовым окном
C-4	0,32–0,65	0,44±0,04	Сурьмяно-цезиевый (SbCs) полупрозрачный

Обозначение спектральной характеристики	Область спектральной чувствительности, мкм	Максимум спектральной характеристики, мкм	Тип фотокатода
C-5	0,32–0,75	0,49±0,05	Висмутно-серебряно-цезиевый (BiAgCs)
C-6	0,32–0,62	0,39±0,05	Сурьмяно-цезиевый (SbCs) на металлической подложке
C-7	0,3–0,8	0,5±0,05	Висмутно-серебряно-цезиевый (BiAgCs)
C-8	0,3–0,8	0,44±0,04	Многощелочной (SbKNaCs)
C-9	0,160–0,650	0,34±0,05	Сурьмяно-кислородно-цезиевый [SbCs (O)] с кварцевым окном
C-10	0,16–0,65	0,225±0,01	Магниевый (Mg) с фиолетовым окном
C-11	0,3–0,85	0,43±0,05	Многощелочной (SbKNaCs) полупрозрачный
C-12	0,2–0,65	0,42±0,05	Сурьмяно-кислородно-цезиевый [SbCs (O)]
C-13	0,2–0,85	0,4±0,05	Многощелочной (SbKNaCs) фиолетовым окном
C-14	0,2–0,34	0,285±0,025	Теллурид-цезиевый (TeCs ₂)
C-15	0,16–0,65	0,39±0,05	Сурьмяно-цезиевый (SbCs) на кварцевой подложке

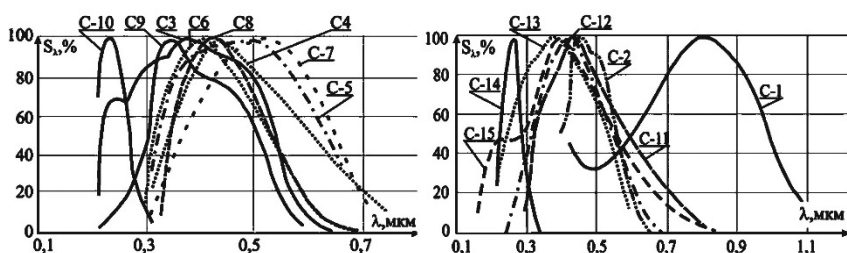


Рис. 2.15 Стандартные характеристики спектральной чувствительности фотокатодов

2.5. Характеристики фотоэлементов и ФЭУ

Схемы включения *фотоэлементов* зависят от величины регистрируемых сигналов и темнового тока (i_t). При отсутствии сигнала от анода к фотокатоду, кроме темнового тока фотокатода, связанного с тепловой эмиссией электронов, по наружной и внутренней поверхности фотоэлемента протекает ток утечки. Если его величина меньше регистрируемого сигнала и i_t (СЦВ, ЦВ, СЦГ, ЦГ), то используется схема рис. 2.16а. В противном случае в конструкции прибора вводится дополнительный элемент – охранное кольцо (фотоэлементы серии Ф и др.), и используется схема включения, представленная на рис. 2.16б. В этом случае токи утечки замыкаются на источник питания, минуя сопротивление нагрузки, и не участвуют в образовании сигнала.

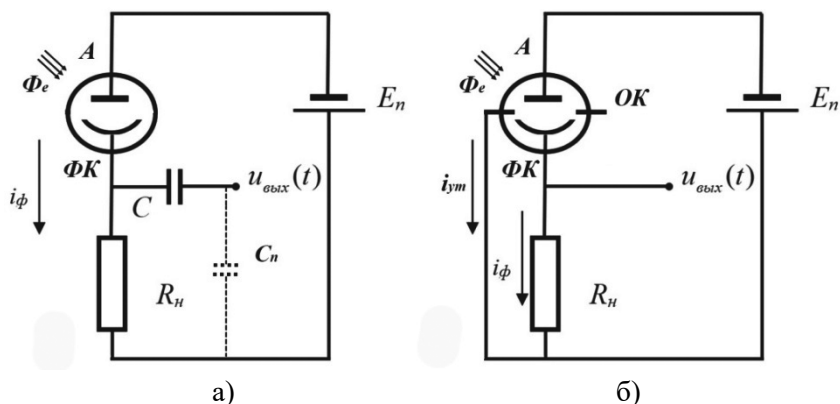


Рис. 2.16. Схемы включения фотоэлементов:
а – без охранного кольца, б – с охранным кольцом

Для фотонных приемников важной характеристикой является квантовый выход (η_k), определяемый выражением:

$$\eta_k(\lambda) = \frac{n_{\text{ФЭ}}}{n_{\text{КВ}}(\lambda)}, \quad (2.54)$$

где $n_{\text{ФЭ}}$ – число фотоэлектронов, возникших при поглощении $n_{\text{КВ}}$ излучения.

Из определения чувствительности несложно получить чувствительность фотоэлемента к постоянному потоку:

$$S_{\Phi_{ei}}(\lambda) = \frac{i_{\Phi}}{\Phi_e} = \frac{e \cdot n_{\Phi_{\text{э}}}/t}{h\nu \cdot n_{\text{кв}}(\lambda)/t} = \frac{\lambda e \cdot n_{\Phi_{\text{э}}}}{hc \cdot n_{\text{кв}}(\lambda)} = \frac{\lambda e}{hc} \eta_{\text{к}}(\lambda). \quad (2.55)$$

Для повышения чувствительности в вакуумные фотоэлементы вводят инертные газы при малом давлении, что вызывает под воздействием фотоэлектронов образование в объеме ионов газа (фотоэлементы серии ФЭ ЦГ и СЦГ). В таблицах 2.9 и 2.10 приведены примеры фотоэлементов и их параметры, а на рис. 2.17 – внешний вид и габариты приборов.

Таблица 2.9

Параметры вакуумных фотоэлементов серий СЦВ и ЦВ

Тип прибора	Размер фотокаатода, мм	Расположение входного окна	Тип спектральной характеристики	Чувствительность, SA, (при потоке), мкА/лм	Темновой ток, I _т , А, не более	Напряжение питания, U _{пит} (предельное) В, не более	Габаритные размеры, мм, не более
СЦВ-3	∅26	боковое	С-2	80 (0,05лм)	1·10 ⁻⁸	240 (300)	∅26×62
СЦВ-51	∅30	боковое	С-2	80 (0,02–0,05 лм)	1·10 ⁻⁸	240 (300)	∅30×63
СЦГ-51	∅30	боковое	С-6	150	–	180	∅30×63
ЦГ-1	∅45	боковое	С-1	75	1·10 ⁻⁷	240 (300)	66×131
ЦВ-1	∅45	боковое	С-1	20	–	–	∅55×125
ЦВ-6	Прямоугольник	боковое	С-1	н/д	5·10 ⁻¹¹	30	∅20×120

Параметры вакуумных фотоэлементов серии Ф-хх

Тип прибора	Размер фотокатода, мм	Расположение входного окна	Тип спектральной характеристики	λ макс, мкм	Чувствительность, S_{ϕ} (при потоке), мкА/лм	Темновой ток, I_{Γ} , А, не более	Габаритные размеры, мм, не более
Ф-1	10×25	боковое	С-3 (0,2–0,65)	0,38±0,05	70	$1 \cdot 10^{-14}$	40×103
Ф-2	20×12	боковое	С-6 (0,32–0,62)	0,39±0,05	20	$1 \cdot 10^{-8}$	∅20×67
Ф-3	90 мм ²	боковое	С-7 (0,3–0,8)	0,5±0,05	100	$1 \cdot 10^{-9}$	∅90×162
Ф-8	∅26	боковое	С-10 (0,16–0,65)	0,225±0,01	80	$1 \cdot 10^{-8}$	∅26×53
Ф-10	∅60	торцевое	С-11 (0,3–0,85)	0,43±0,05	100	$1 \cdot 10^{-12}$	82×100
Ф-17	2,5 см ²	торцевое	0,16–0,65	–	70	$1 \cdot 10^{-13}$	55×80

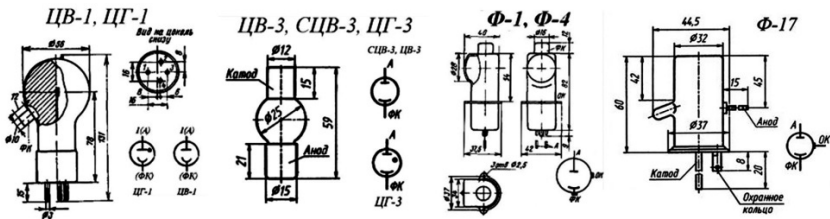


Рис. 2.17. Внешний вид и габаритные размеры фотоэлементов

Частотная характеристика фотоэлемента описывается выражением (2.14), при $\tau = \tau_{\Pi} = R_{\Pi}C_{\Pi}$, где C_{Π} – паразитная емкость схемы включения.

Согласованная нагрузка для фотоэлемента очень велика и может достигать десятков МОм, поэтому быстродействие фотоэлемента в оптимальном по чувствительности режиме невелико и составляет сотни Гц. Этот недостаток, а также малая величина сигнала, получаемая при небольшой нагрузке, устраняются в *фотоэлектронных умножителях*.

Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) – электровакуумный прибор, преобразующий энергию оптического излучения в электрические сигналы. ФЭУ состоит из фотокатода, вторично-электронного умножителя и анода (рис. 2.18). Фотокатоды ФЭУ могут работать «на просвет» и на «отражение». При освещении фотокатод (1) эмитирует первичные фотоэлектроны, которые ускоряются электрическим полем и фокусируются электронно-оптической системой (2,3) на первый динод Э₁. Для усиления сигнала ФЭУ используется вторичная электронная эмиссия (рис. 2.19). Первичные электроны (I_п), обладая необходимой энергией падая на поверхность динодов выбивают из нее вторичные электроны (I_{вт}). Эффективность этого процесса оценивается *коэффициентом вторично-электронной эмиссии*:

$$\delta = \frac{I_{\text{вт}}}{I_{\text{п}}} . \quad (2.56)$$

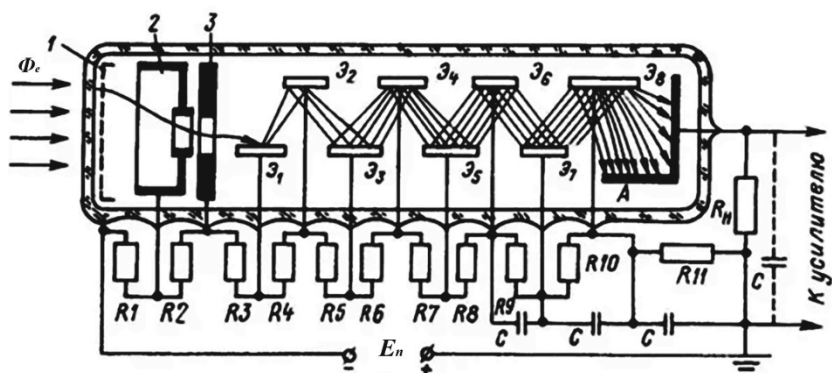


Рис. 2.18. Схема ФЭУ с динодной системой

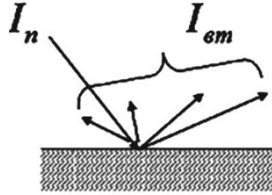


Рис. 2.19. Вторичная электронная эмиссия

Вторичные электроны с \mathcal{E}_1 ускоряются электрическим полем, попадают на \mathcal{E}_2 и т.д. После последнего динода поток электронов собирается на аноде (A). На нагрузочном резисторе R_n возникает напряжение фотосигнала. Усиление динодной системы оценивается коэффициентом усиления фотоумножителя по току M и определяется отношением тока анода (I_A) к току фотокатода ($I_{\text{фк}}$):

$$M = \frac{I_A}{I_{\text{фк}}} = \delta^m = \frac{S_{\text{ФЭи}}^A}{S_{\text{ФЭи}}^{\text{фк}}}, \quad (2.57)$$

где $S_{\text{ФЭи}}^A$ – анодная токовая чувствительность ФЭУ; $S_{\text{ФЭи}}^{\text{фк}}$ – токовая чувствительность фотокатода.

При $\delta = 4$ и числе динодов $m = 12$ коэффициент усиления ФЭУ превышает 10^6 , что достаточно для уверенной регистрации одиночных фотоэлектронов, вылетающих с фотокатода. Широкая (более 400 наименований) номенклатура ФЭУ предопределила многообразие областей их применения. К приборам, предназначенным для регистрации слабых оптических сигналов, следует отнести ФЭУ-17А, ФЭУ-18А, ФЭУ-20, ФЭУ-51, ФЭУ-111, ФЭУ-112, ФЭУ-114, ФЭУ-115 и др. В телевизионных системах нашли применение ФЭУ-84 и ФЭУ-114. В инфракрасной спектрометрии находят применение ФЭУ-22, ФЭУ-28, ФЭУ-112, ФЭУ-113, ФЭУ-114. В аппаратуре для спектрональных исследований в ультрафиолетовой области спектра находят применение ФЭУ-97, ФЭУ-99 и ФЭУ-116. Характеристики часто употребляемых ФЭУ приведены в табл. 2.11 и 2.12.

Таблица 2.11

Характеристики ФЭУ для видимой области спектра

Тип прибора	Расположение входного окна [выводы]	Размер фотокатода, мм	Тип спектральной характеристики ($\Delta\lambda$, мкм) [$\lambda_{\text{макс}}$, мкм]	Число диодов	S_d , (при U_p , В), А/лм	U пик, В, не более
ФЭУ-12а	торцевое [жесткие]	\emptyset 45	С5 (0,32–0,75) [0,47–0,51]	12	5 (1700В)	2200
ФЭУ-12б						
ФЭУ-13а	торцевое [жесткие]	\emptyset 40	С4 (0,32–0,65) [0,4–0,47]	12	20 (1700В)	2200
ФЭУ-13б						
ФЭУ-17А	торцевое [цоколь] (РШ32)	16×15	С6 (0,32–0,62) [0,38–0,4]	13	10 (900) 1000 (1400)	1400
ФЭУ-27	торцевое [гибкие] (РШ30)	\emptyset 25	С7 (0,3–0,8) [0,48–0,52]	11	10 (1200) 30 (1330)	2000
ФЭУ-49	торцевое [жесткие] (РШ34)	\emptyset 150	С8 (0,3–0,85) [0,37–0,5]	12	10 (1650) 100 (2200)	2500
ФЭУ-49б						
ФЭУ-69а	торцевые [гибкие]	\emptyset 10	С11 (0,215–0,83)	10	10 (1550)	1600
ФЭУ-122	торцевое [гибкие]	\emptyset 25	С2 (0,35–0,7) [0,4–0,5]	14	30 (1700)	2000

Характеристики ФЭУ для УФ и ИК области спектра

Тип прибора	Расположение входного окна [выводы]	Размер фотокатода, мм	Тип спектральной характеристики ($\Delta\lambda$, мкм) [λ_{\max} , мкм]	Число динодов	S_d , (при U_p, B), А/лм	U пит, В, не более
ФЭУ-28	торцевое [цоколь] (РШ30)	$\emptyset 25$	C1 (0,4–1,2) [0,76–0,82]	11	1 (1100)	1300
ФЭУ-18А	боковое [цоколь] (РШ32)	16×15	C3 (0,2–0,65) [0,38–0,4]	13	700 (900) 1000 (1100)	1100
ФЭУ-39А	торцевое [цоколь] (РШ32)	$\emptyset 34$	C15 (0,16–0,65) [0,38–0,42]	11	1000 (1800)	1800
ФЭУ-87	торцевое [жесткие] (РШ31)	$\emptyset 20$	C9 (0,16–0,65) [0,32–0,38]	11	1000	2100
ФЭУ-142	торцевое [жесткие]	$\emptyset 10$	(0,112–0,365) [0,4–0,44]	14	–	2400

Большое внутреннее усиление ФЭУ позволяет получать необходимые на выходе сигналы при R_n не превышающей сотни Ом, что расширяет частотный диапазон работы этих приемников до сотен МГц.

2.6. Электронно-оптические преобразователи (ЭОП)

ЭОП – это вакуумный фотоэлектронный прибор, предназначенный для увеличения (усиления) яркости видимого изображения, либо для преобразования невидимого глазом изображения объекта (в инфракрасных, ультрафиолетовых и рентгеновских лу-

чах) в видимое (рис. 2.20). Все элементы ЭОП заключены в вакуумную камеру 4. Изображение 1 на входе создается оптической системой и преобразуется фотокатодом 2 в электронное изображение, которое переносится электростатической линзой в плоскость люминесцентного экрана 8. Под воздействием напряжения, приложенного между фотокатодом и экраном, электроны приобретают значительную энергию и создают на экране видимое изображение с яркостью большей чем на входе. Наиболее важными характеристиками ЭОП являются:

- η_{Φ} – коэффициент преобразования ЭОП по потоку (отношение потока, излучаемого экраном во внешнюю полусферу $\Phi_{V_{\text{экр}}}$, к потоку излучения $\Phi_{V_{\text{фк}}}$, попавшему на фотокатод):

$$\eta_{\Phi} = \frac{\Phi_{V_{\text{экр}}}}{\Phi_{V_{\text{фк}}}}; \quad (2.58)$$

- $N_{\text{пр}}$ – предельная разрешающая способность ЭОП в штр/мм (определяется при наблюдении на экране штриховой миры (рис. 2.21), изображение которой с разным числом штрихов на мм проецируется на фотокатод ЭОП).

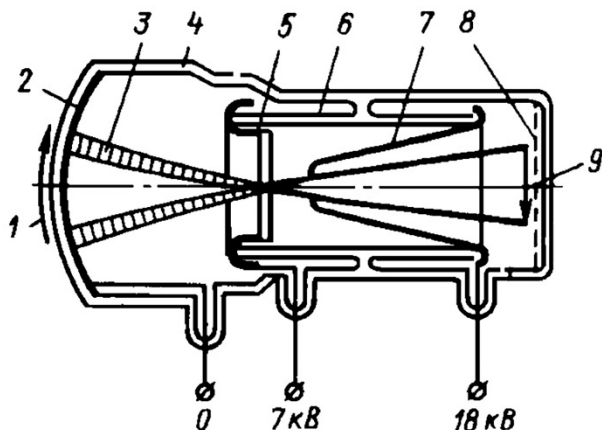


Рис. 2.20. ЭОП с электростатической фокусирующей системой:

- 1 – изображение; 2 – фотокатод; 3 – электронный пучок; 4 – баллон из стекла;
 5 – фокусирующий электрод; 6 – держатель; 7 – анод; 8 – экран;
 9 – электронное изображение

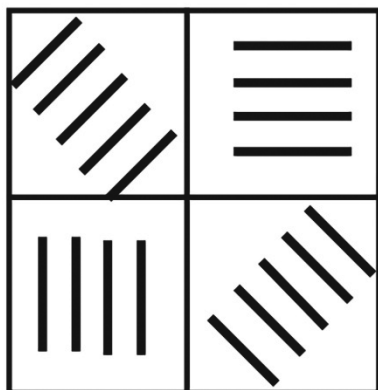


Рис. 2.21. Элемент штриховой миры

Различают ЭОП одно- и многокамерные (каскадные); последние представляют собой такое последовательное соединение двух или более однокамерных ЭОП, при котором световой поток с экрана первого ЭОП (каскада) направляется на фотокатод второго и т.д.

По принятой в мире терминологии ЭОП *классифицируются на пять поколений* – I, II, III, IV и V (с некоторыми промежуточными ступенями I+, II+).

ЭОП I поколения имеют спектральную чувствительность фотокатода 1,2–2,5 мА/Вт. Отличительная особенность данных приборов в том, что изображение в центре более четкое и имеет меньшие искажения, чем по краям. Кроме этого, если в поле зрения попадают яркие источники света, например фонари, светящиеся окна домов и др., то они могут засветить все изображение, препятствуя возможности наблюдения. При более низком освещении необходима дополнительная, чаще всего инфракрасная (ИК) подсветка.

В ЭОП поколения I+ на входе (иногда и на выходе) устанавливают вместо плоского стекла волоконно-оптическую шайбу, что позволяет значительно увеличить разрешение ЭОП, уменьшить искажение формы предмета и, кроме того, защитить изоб-

ражение от засветок боковыми точечными источниками света. Характеристика таких ЭОП – усиление света составляет 1000, чувствительность фотокатода минимум 2,8 мА/Вт, разрешение в центре минимум 35 лин/мм. Для повышения $\eta_{\text{ф}}$ до уровня, обеспечивающего наблюдение в темное время суток без внешней подсветки ($\eta_{\text{ф}} = 40\ 000 \div 100\ 000$) используют каскадное соединение ЭОП (рис. 2.22).

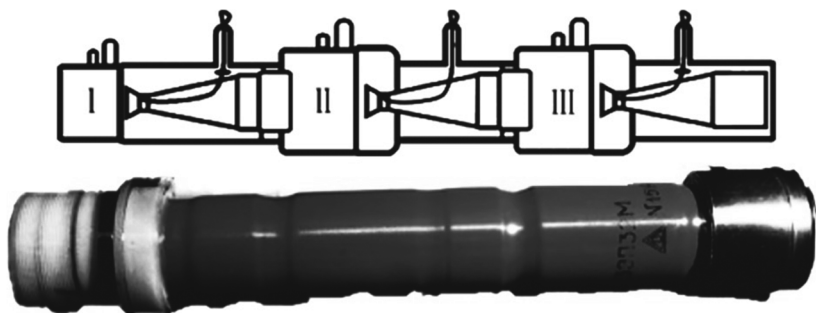


Рис. 2.22. Трехкамерный ЭОП

ЭОП II поколения отличается от I+ наличием специального усилителя электронов – микроканальной пластины (МКП). Микроканальная пластина (рис. 2.23) представляет собой стеклянную шайбу, в которой технологически образовано множество каналов, покрытых составом, обладающим большим коэффициентом вторичной эмиссии электронов. При наличии разности потенциалов между торцами шайбы электроны, ускоряясь, внутри каналов образуют лавину вторичных электронов. Все приборы II поколения имеют полезную для наблюдателя возможность – ручную регулировку яркости, позволяющую выбрать оптимальное соотношение усиления яркости и уровня собственных шумов прибора для каждой конкретной ситуации наблюдения и адаптации глаза.

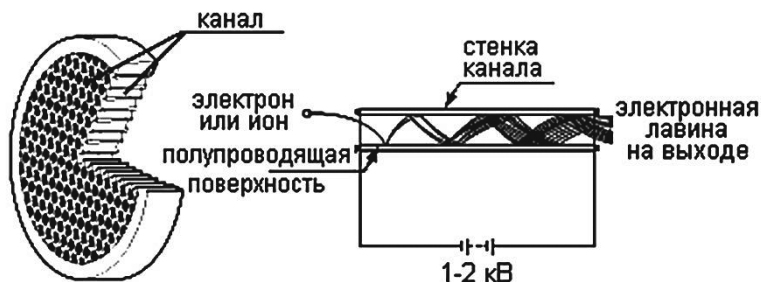


Рис. 2.23. Принцип работы микроканальной пластины

ЭОП III поколения принципиально отличается от своих предшественников высокоэффективным полупроводниковым фотокатодом на основе арсенида галлия (1980–1982 гг). На длине волны $\lambda = 830$ нм квантовый выход фотокатода составляет 30%, а на длине волны $\lambda = 600$ нм – 40%. Интегральная чувствительность фотокатода GaAs превышает 2 мА/лм, что более чем в 10 раз превышает чувствительность фотокатодов ЭОП I и II поколений.

ЭОП IV поколения отличаются использованием на выходе люминесцентного экрана многоэлементного приемника (ПЗС), что позволяет вести дистанционное наблюдение вдали от системы «оптика+ЭОП+ПЗС».

Опытные экземпляры ЭОП V поколения используют фотокатод GaAs, усиление с помощью МКП, ПЗС на выходе и микропроцессоры для обработки изображений.

2.7. Принципы работы фотодиодов, фоторезисторов и приборов с зарядовой связью

В отличие от внешнего фотоэффекта, заключающегося в полном отрыве и эмиссии электронов, возбуждаемых поглощенным светом, при внутреннем фотоэффекте происходит только изменение энергетического состояния электронов, приводящее к изменению концентрации носителей тока, их подвижности или к перераспределению внутри объема полупроводника.

Устройство фотодиода (ФД) изображено на рис. 2.24. В месте контакта двух полупроводников с разными типами проводимости происходит диффузия основных носителей заряда – электронов из n области в область p и наоборот. В результате в месте контакта возникает область пространственного заряда с напряженностью поля, которая препятствует дальнейшей диффузии. Образуется запирающий слой или p - n переход. При поглощении в этой области кванта излучения образуется пара электрон-дырка (неосновные носители заряда), которые в области пространственного заряда движутся в противоположных направлениях и образуют фототок либо фото-ЭДС. Фотодиоды могут работать в двух режимах: фотогальваническом (без внешнего источника напряжения) и фотодиодном, когда к p - n переходу через сопротивление нагрузки подключается внешний источник ЭДС, включенный в обратном направлении. Зонная диаграмма p - n перехода и схемы его включения для этих случаев приведена на рис. 2.25.

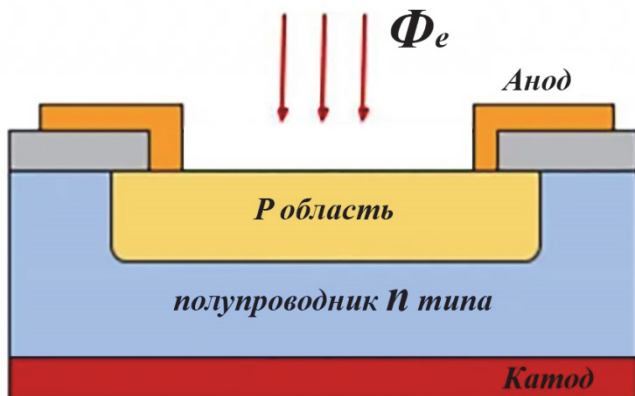


Рис. 2.24. Устройство фотодиода с p - n переходом

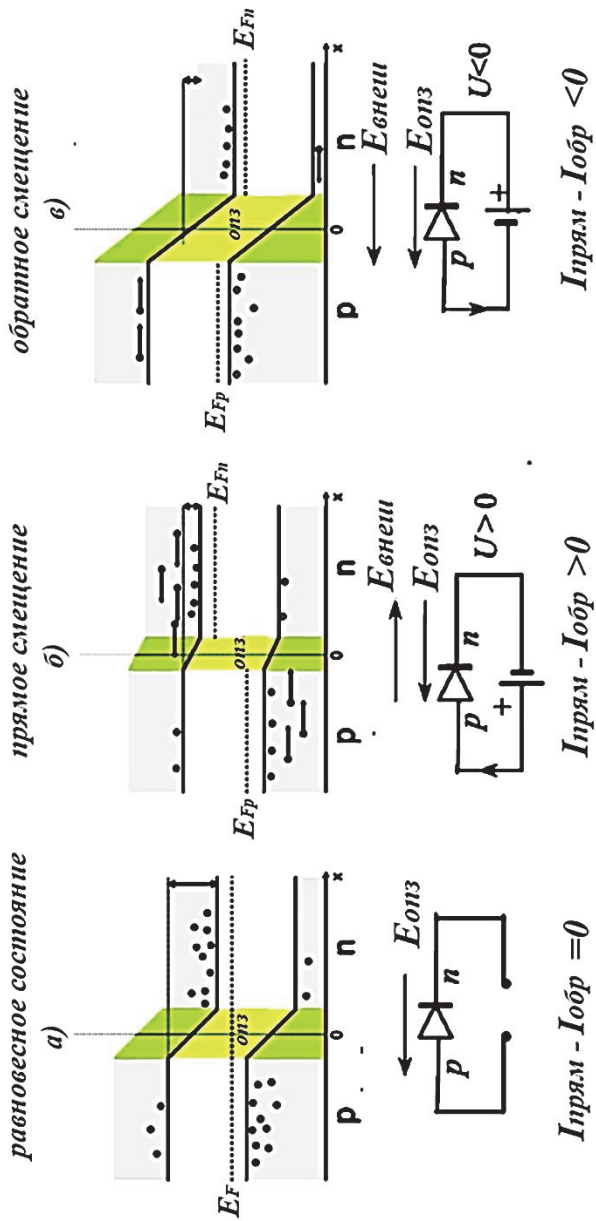


Рис. 2.25. Зонные диаграммы и схемы включения р-п перехода

Вольтамперная характеристика фотодиода имеет вид:

$$I = I_{\Phi} + I_s \left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right), \quad (2.59)$$

где $I_{\Phi} = \Phi_p \alpha \eta_k$ – сгенерированный потоком Φ_e фототок;

$\Phi_p = \frac{\Phi_e}{h\nu}$ – поток фотонов с энергией $h\nu$, упавших на ФД;

α – коэффициент поглощения; U – напряжение на p - n переходе; I – ток во внешней цепи фотодиода.

На рисунке 2.26 представлена вольтамперная характеристика фотодиода для разных значений Φ_e . Как видно из графиков внутреннее сопротивление фотодиода в фотодиодном режиме очень велико, т.е. для внешней цепи он является источником тока. В вентильном режиме его сопротивление существенно меньше и нелинейно зависит от напряжения на p - n переходе.

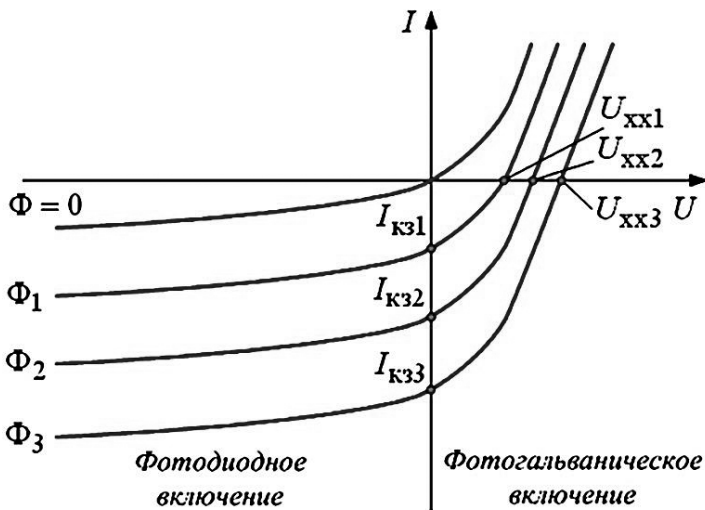


Рис. 2.26. Вольтамперная характеристика фотодиода

Поскольку в выражении (2.59)

$$I = \frac{U - E_{\text{п}}}{R_{\text{н}}},$$

где $E_{\text{п}}$ – напряжение внешнего источника; $R_{\text{н}}$ – сопротивление нагрузки, то выходные сигналы фотодиода (U и I) сильно зависят от величины этого сопротивления. На рисунке 2.27 представлены нагрузочные характеристики ФД. На рисунке 2.28 его световые характеристики, а на рис. 2.29 – схемы включения фотодиода в вентильном (а и б) и фотодиодном (в) режимах. Анализ выражения (2.59) и графиков, приведенных на рис. 2.28, показывает, что в фотодиодном режиме световые характеристики ФД (токовая и вольтовая) линейны в широком диапазоне сигналов и на них слабо влияет величина сопротивления нагрузки. Иное дело вентильный режим работы. В этом режиме токовая световая характеристика линейна только в режиме короткого замыкания ($R_{\text{н}} = 0$). В остальных случаях обе зависимости $U(\Phi_{\nu})$ и $I(\Phi_{\nu})$ нелинейны и эта нелинейность возрастает с ростом $R_{\text{н}}$.

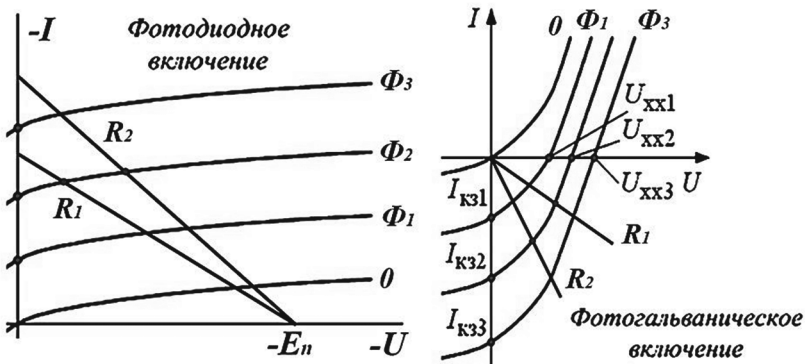
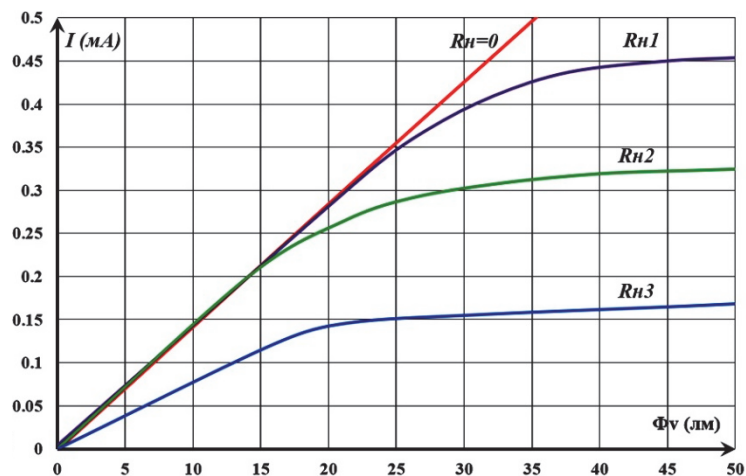
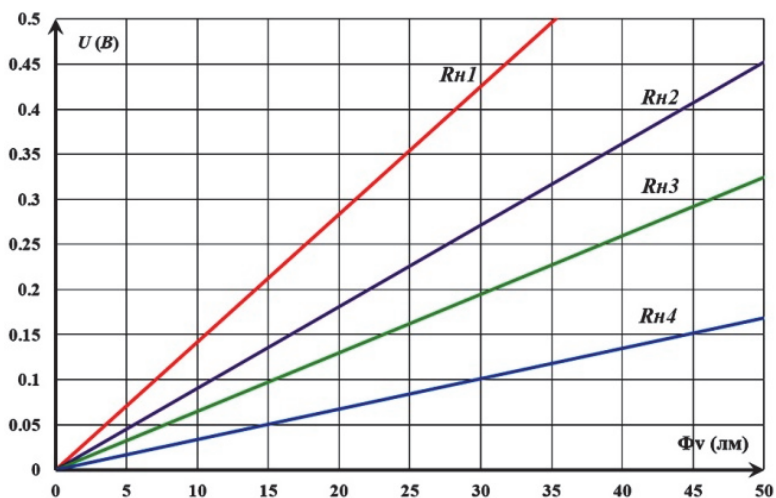


Рис. 2.27. Нагрузочные характеристики фотодиода



а)



б)

Рис. 2.28. Световые характеристики фотодиода:
а – вентиляльный режим; б – фотодиодный режим

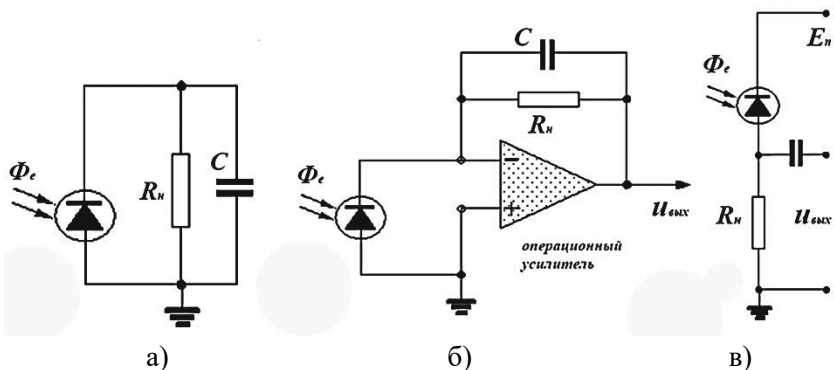


Рис. 2.29. Схемы включения фотодиода в вентильном (а) и (б) и фотодиодном (в) режимах

Частотная характеристика фотодиода определяется либо постоянной времени интегрирующей цепочки $\tau = R_n C$, либо временем жизни неосновных носителей заряда и описывается выражением (2.14). Габаритные размеры кремниевого фотодиода ФД-24К представлена на рис. 2.30.

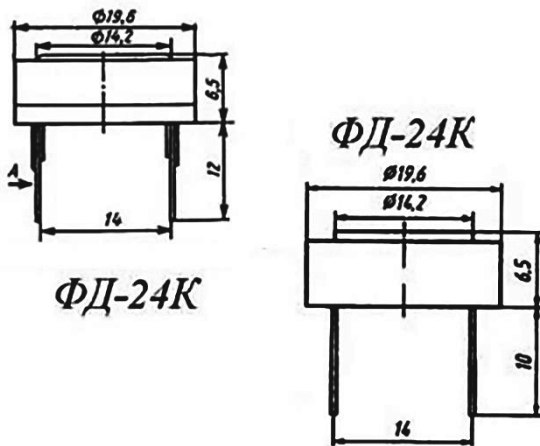


Рис. 2.30. Конструкция ФД-24К

Разновидностью фотодиода с $p-n$ переходом являются фотодиоды с pin переходом. Устройство pin фотодиода представлено на рис. 2.31. В отличие от классического $p-n$ перехода, когда в полупроводнике n типа путем легирования примеси образуют область p типа, pin переход образуется из собственного полупроводника легированием областей p и n примесями разной валентности, при этом между этими областями остается нелегированная область i . Такой фотодиод может работать только в фотодиодном режиме, но он обладает большей чувствительностью и быстродействием.

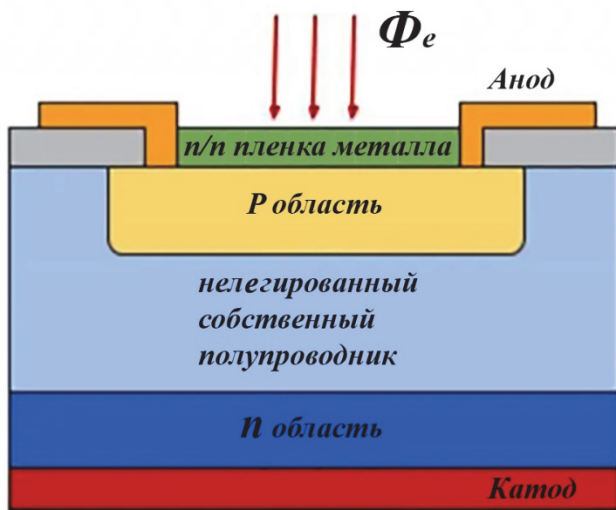


Рис. 2.31. Устройство pin фотодиода

Для измерений в фотометрических приборах наибольшее распространение получили фотодиоды на основе кремния. Отличительным свойством кремниевых фотодиодов является стабильность во времени и в процессе измерений их чувствительности. Характеристики некоторых кремниевых ФД приведены в табл. 2.13.

Характеристики кремниевых фотодиодов

Тип прибора	А фот., мм (кол-во элементов)	$\Delta\lambda$, мкм	λ макс, мкм	U_p , В	I_t , мкА, не более	S , мкА/лм, (мкА/лк), не менее	τ , с, не более	ΔT , °С
ФД-21КП	$\emptyset 1,55$	0,4–1,1	0,72–0,85	10	0,017	3,3	$6 \cdot 10^{-9}$	–60...+85
ФД-23К	1,9×1,9	0,5–1,12	0,8–0,85	20	0,1	4,4 ($3 \cdot 10^{-3}$)	$1 \cdot 10^{-5}$	–60...+85
ФД-24К	$\emptyset 10$	0,47–1,12	0,75–0,85	27	2,5	6 ($4,7 \cdot 10^{-1}$)	$1 \cdot 10^{-5}$	–60...+75
ФД-25К	1,9×1,9	0,4–1,1	0,8–0,9	20	1	($4 \cdot 10^{-3}$)	$7 \cdot 10^{-6}$	–60...+85
ФД-36 PIN	0,8×0,35	0,47–1,1	0,75	30	0,05	5,85	$1 \cdot 10^{-6}$	–60...+70

В качестве приемников, формирующих сигналы о распределении яркости по изображениям объектов или энергии в спектре фотометрических приборов, широкое распространение получили приборы с зарядовой связью или ПЗС. Базовым элементом ПЗС является структура металл–диэлектрик–полупроводник (МДП конденсатор), которая изображена на рис. 2.32. Основной структурой ПЗС является последовательность из трех МДП конденсаторов, представленная на рис. 2.32. Трехэлементная ячейка ПЗС работает в двух режимах: накопление заряда и считывание (перенос) накопленного заряда. На рисунке 2.33 приведен режим накопления заряда. В этом случае на средний электрод подается положительный потенциал относительно подложки p типа. Основные носители заряда – дырки вытесняются из области под электродом, и там образуется потенциальная яма, в которой отсутствуют свободные заряды. При облучении этой области в ней образуются p - n пары неосновных носителей. Образовавшиеся дырки, как и основные носители, вытесняются из потенциальной ямы, а электроны скапливаются под средним электродом, образуя

зарядовый пакет. Режимы накопления и переноса зарядов в ПЗС приведены на рис. 2.33. В первых образцах ПЗС накопление зарядов происходило в каждом третьем элементе. Два других элемента были затемнены.

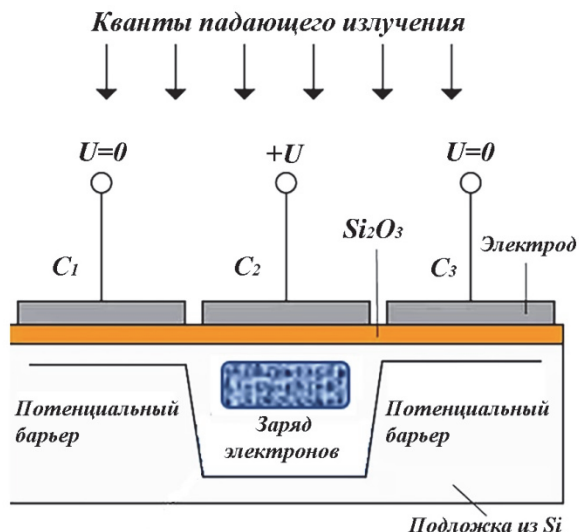


Рис. 2.32. МДП структура ПЗС

По окончании накопления зарядовых пакетов начинался процесс считывания сигналов, который состоит из трех тактов. В каждом такте высокий потенциал всех ячеек накопления подается на соседний с ним электрод, а потенциал ячеек с зарядовым пакетом обнуляется. В результате под действием возникшего поля зарядовый пакет «перетекает» в соседнюю ячейку. После трех таких тактов (рис. 2.33) все зарядовые пакеты перемещаются в соседнюю ячейку накопления (это каждая третья ячейка ПЗС) в направлении нагрузочного конденсатора C , а заряд последней ячейки переносился на конденсатор. Согласно известному закону $u = q/C$ на конденсаторе возникает напряжение. Повторение процедуры считывания приводит к последовательному возникновению на конденсаторе сигнала пропорционального накопленным

зарядовым пакетам, т.е. к возникновению видеосигнала. Основным недостатком первых ПЗС заключался в «смазе» изображения, поскольку в процессе считывания информации процесс накопления зарядовых пакетов продолжался.

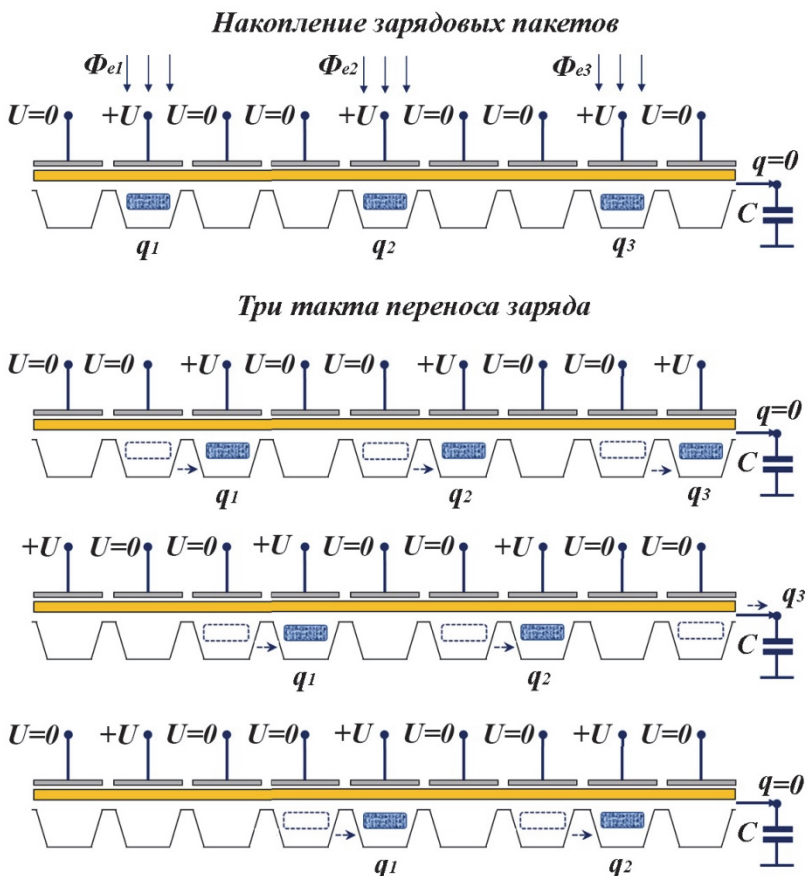


Рис. 2.33. Режимы накопления и переноса зарядов в ПЗС

В современных ПЗС секции накопления и секции считывания (переноса зарядовых пакетов) разделены. Для регистрации двумерных изображений линейки ПЗС объединяются в матрицы. В таблице 2.14 приведены примеры современных линеек и матриц ПЗС и некоторые их характеристики.

**Примеры современных линеек и матриц ПЗС
и их характеристики**

Тип прибора	$\Delta\lambda$, мкм [λ _{макс} , мкм]	Число элементов изображения	Размер элемента изображения, [шаг дискретизации], мкм	Световая чувствительность, В/лк·с	Напряжение сигнала насыщения, В, не менее	Неравномерность выходного светового и [темнового] сигнала, %	Максимальная частота выходного сигнала, МГц
ФППЗ 4700Л	0,3–1,0 [0,7–0,8]	4700×1	6,5×6,5 [6,5]	0,6	0,6	12 [0,8]	2,5
ФППЗ 12000Л	0,4–1,0	12000×1	6,5×6,5 [6,5]	2	2,5	10 [1]	0,5
ФППЗ «Кандела»	0,4–1,0 [0,74–0,8]	2048×2	13×50	400 (100) В·см ² /мкДж	3,6	5	0,15
ФПЗС1М-А	0,48–1,0 [0,7–0,8]	512×576	18 г 24	20 мВ/лк	0,1	20 [20]	–
ФПЗС4М	0,4–1,0 [0,80,9]	576×512	н/д	32 мВ/лк	0,1	20 [20]	–
ФПЗС6М-1	0,45–1,0 [0,7–0,85]	288×256	н/д	0,24	0,15	10 [10]	1 мкс

В системах управления освещением в качестве датчиков фотореле часто используются *фоторезисторы*.

В основе работы фоторезистора (ФР) лежит изменение электропроводности чувствительного слоя при освещении. На рисунке 2.34 представлена зонная структура фоторезисторов трех основных типов: с собственной проводимостью; ФР с донорными и акцепторными примесями.

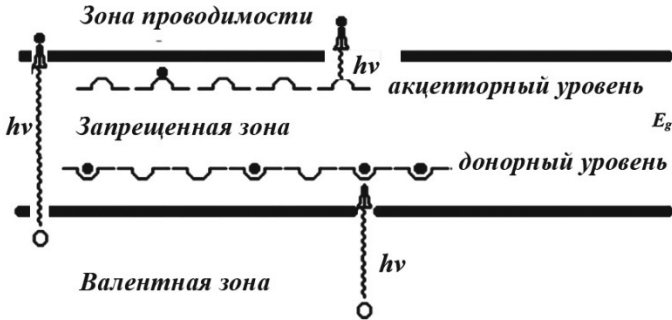


Рис. 2.34. Зонная структура фоторезисторов

В собственных полупроводниках поглощенный в валентной зоне квант излучения ($h\nu > E_g$, где E_g – ширина запрещенной зоны) образует в валентной зоне свободную дырку и переводит в зону проводимости свободный электрон. Оба носителя заряда при этом участвуют в изменении проводимости ФР. В примесном фоторезисторе электрон из валентной зоны может перейти и зафиксироваться на акцепторном уровне, оставив в валентной зоне свободную дырку, либо перейти с донорного уровня в зону проводимости (стать свободным), оставив на донорном уровне связанную с донором дырку (рис. 2.34). В этом случае в изменении проводимости участвует только один тип носителей. Поскольку для таких переходов нужна энергия квантов меньше E_g , то красная граница фотоэффекта у примесных полупроводников смещена в более длинноволновую область, чем у собственных полупроводников.

Схемы включения ФР аналогичны схемам включения болометров (рис. 2.7, 2.8), изменение фототока, связанное с изменением его проводимости под действием поглощенного потока Φ_e , определяется выражением:

$$I_\Phi = G (\tau_n \mu_n + \tau_p \mu_p) U \Phi_e, \quad (2.60)$$

где $\tau_n \mu_n$ – время жизни и подвижность электронов, а $\tau_p \mu_p$ – дырок; U – напряжение на ФР; G – параметр, зависящий от геометрии чувствительной площадки.

Достоинствами ФР являются малые размеры и масса, пониженное по сравнению с фотоэмиссионными приемниками напряжение питания, возможность работы в широком спектральном диапазоне. К недостаткам фотоприемников этого класса можно отнести повышенную инерционность, значительную зависимость характеристик и параметров от температуры, малую линейную зону световой характеристики, зависимость выходного сигнала от площади засветки чувствительного слоя. В таблице 2.15 приведены характеристики некоторых ФР видимого диапазона спектра, а на рис. 2.35 – в качестве примера конструкция ФР на основе сернистого висмута ФС-Б.

Таблица 2.15

Характеристики фоторезисторов видимого диапазона спектра

Тип прибора	$A_{\text{ФЧЭ}}$, мм (число элементов)	$\Delta\lambda$, мкм	$\lambda_{\text{макс}}$, мкм	U_p , В, не более	R_T , МОм, не менее	I_T , мкА, не более	$I_{\text{обл}}$, (при $E = 200$ лк), мА, не менее	τ , с, не более
ФСК-1	4×7,2	0,2–0,9	0,6–0,64	50	3,3	15	15	0,15
ФСК-2	4×7,5	0,2–0,9	0,6–0,64	50	3,3	15	0,3	0,14
ФСК-3	2×6	0,2–0,9	0,6–0,64	100	2,5	40	0,4	0,2
СФ2-1	0,5×1,5	0,5–0,8	0,62–0,68	15	15	1,0	0,5	0,09
СФ3-3	10 мм ²	0,4–1,1	0,76	10	10	0,3	0,3	(6–60)·10 ⁻⁶
СФ3-5	∅ 5,8	0,55–0,85	0,67–0,77	2	2	1,0	0,5	0,01
СФ3-16	0,25×1,8	0,55–0,88	0,67–0,77	10	10	1,0	0,5	0,02
ФС-Б1	22×9	0,45–1,0	0,6±0,05	50	10	5	–	1,5·10 ⁻²
ФС-Б2	11 × 11	0,5–0,8	0,7	50	0,1–10	–	103 мкА/лм·В	400 Гц

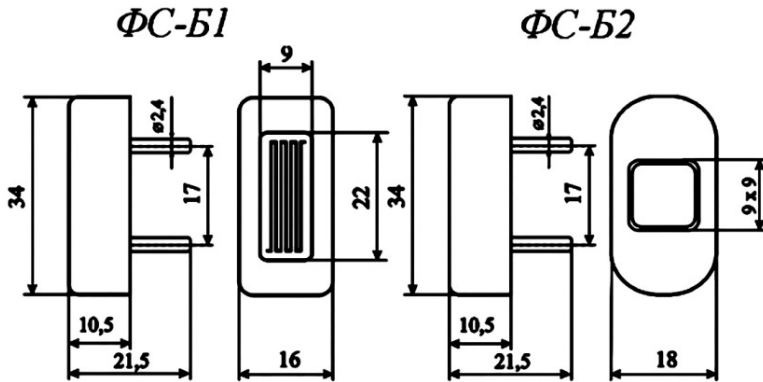


Рис. 2.35. Конструкция ФР типа ФС-Б

2.8. Законы распределения случайных величин и их моменты

Помимо полезного регулярного сигнала в выходной цепи приемника наблюдается хаотический сигнал со случайными амплитудой, частотой и фазой – шум приемника. На фоне шума становятся неразличимыми малые полезные сигналы, т. е. шум ограничивает возможности ПИ.

Ток (напряжение) шума фотоприемника возникает по внешним и внутренним причинам: воздействия тепла, тока фотоприемника, фотонного характера излучения и т.д. Так как шумы (флуктуации) – процессы случайные, то для их описания используют теорию вероятностей.

Случайным называется событие, которое в результате проведения эксперимента может произойти или не произойти.

Случайная величина – это величина, которая при повторных измерениях принимает одно из заранее неизвестных значений.

Основной характеристикой в теории вероятностей является *вероятность события* (P). Оценка (приближенное значение P) вероятности события (V) определяется выражением:

$$V = \frac{n}{N}, \quad (2.61)$$

где N – полное число случайных событий; n – число успешных событий.

Оценка частоты успешных событий V сама является случайной величиной для конечных N , но ее предел при $N \rightarrow \infty$ неслучаен и называется вероятностью успешных событий.

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}, \quad (2.62)$$

Наиболее полной характеристикой случайной величины является ее *закон распределения*.

Интегральный закон распределения (F) равен вероятности того, что случайное значение x не превысит численного значения X , являющегося аргументом F .

$$F(X) = P[x \leq X]. \quad (2.63)$$

Дифференциальный закон распределения (f) для непрерывной случайной величины (например ток, напряжение) определяется выражением:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.64)$$

Для случайной величины изменяющейся дискретно (например, число фотонов, число электронов)

$$f(x) = \sum_i f_i \delta(x - x_i), \quad (2.65)$$

где $f_i = P[x = x_i]$ являются вероятностями того, что случайное значение x равно дискретному значению x_i , которое может принимать случайная величина.

Наиболее важные *свойства законов распределения* приведены в табл. 2.16.

Свойства законов распределения

Свойства интегрального закона распределения	Свойства дифференциального закона распределения
$F(\infty) = 1 \rightarrow F(x_{\max}) = 1$	$f(x) \geq 0$
$F(-\infty) = 0 \rightarrow F(x_{\min}) = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
$F(x_1) \geq F(x_2)$ если $x_1 > x_2$	$P[x_1 < x < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

Шум на выходе ПИ чаще всего возникает при одновременном воздействии нескольких источников шумов (флуктуаций температуры, квантового характера излучения, случайного процесса испускания электронов и т.д.). Для характеристики их совместного воздействия используется *многомерный закон распределения*:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = P(x_1 \leq X_1; x_2 \leq X_2; \dots; x_n \leq X_n), \quad (2.66)$$

который равен вероятности того, что все случайные величины x_i не превысят значений X_i .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{dF(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_1 dx_2 \dots dx_n}. \quad (2.67)$$

Вместо законов распределения для характеристики случайных величин часто удобнее использовать *моменты законов распределения*.

Начальные моменты распределений:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx = M[x^s], \quad (2.68)$$

где обозначение $M[\cdot]$ означает вычисление интеграла от выражения в квадратных скобках с весовой функцией плотности вероятности; s – порядок момента.

Наиболее важен в светотехнике начальный момент первого порядка, который получил название *математическое ожидание* и имеет несколько обозначений:

$$\alpha_1 = m_x = M[x] = \langle x \rangle = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (2.69)$$

Физический смысл α_1 – это среднее значение случайной величины.

Центральные моменты распределений:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)dx = M[(x - m_x)^s]. \quad (2.70)$$

Центральный момент первого порядка для всех случайных величин равен нулю, поэтому наибольшее распространение получил центральный момент второго порядка, названный *дисперсией* и квадратный корень из нее – *среднеквадратическое (среднеквадратичное) отклонение* (σ , СКО):

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 = M[(x - m_x)^2] = D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx \\ \sigma_x = \sqrt{D_x} \end{aligned} \right\}. \quad (2.71)$$

Физический смысл СКО состоит в том, что его величине пропорционален разброс случайных значений x относительно математического ожидания.

Связь центральных и начальных моментов

Если в (2.70) разложить $(x - m_x)^s$ по биному Ньютона и учесть линейность операции вычисления математического ожидания, то для μ_s можно получить:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^s \frac{s!}{i!(s-i)!} (-1)^i m_x^i \alpha_{s-i}. \quad (2.72)$$

Для дисперсии из (2.70) следует выражение:

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - m_x^2. \quad (2.73)$$

Если случайное значение изменяется с течением времени, что характерно для сигналов на выходе фотоприемников, то такие зависимости называются *случайными процессами*. Полученные при измерениях зависимости случайных процессов от времени называются *реализациями случайного процесса*. В каждый фиксированный момент времени совокупность отсчетов реализаций случайного процесса представляет собой набор случайных величин. Для характеристики поведения случайных процессов в зависимости от времени – дисперсии и математического ожидания уже недостаточно. На рисунке 2.36 представлены реализации шумов двух процессов, имеющих одинаковые дисперсии и одинаковые зависимости математического ожидания от времени. Как видно из рисунка, эти шумы будут по-разному искажать форму измеряемого сигнала и, следовательно, по-разному влиять на результаты измерений его параметров.

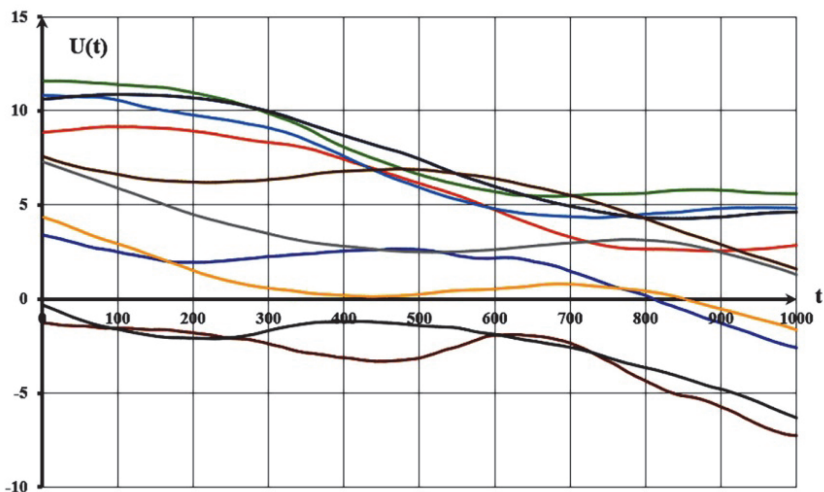
Для учета зависимости реализаций случайных процессов от времени вводится смешанный центральный момент второго порядка, получивший название *корреляционная функция*.

Корреляционная функция равна математическому ожиданию произведения двух центрированных значений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 , т.е. определяется выражениями:

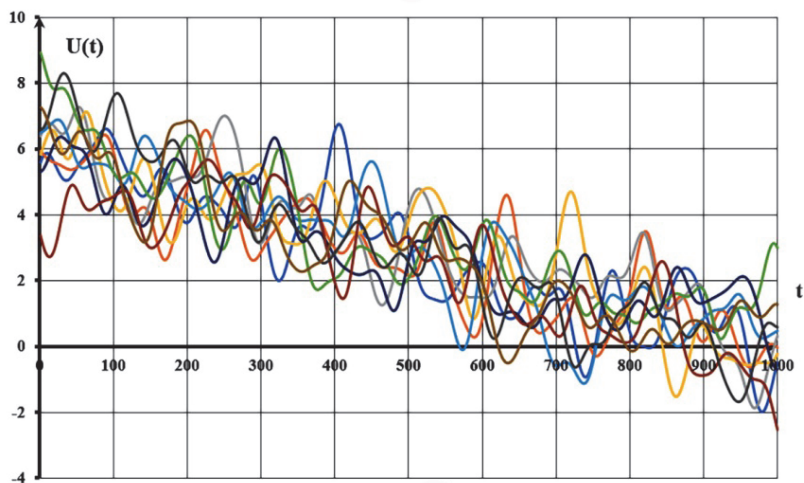
$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) \times \\ \times f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.74)$$

$$R_x(t_1, t_2) = M \left[(x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) \right],$$

где $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – двумерный закон распределения случайных величин x_1 и x_2 (значения случайного процесса x в моменты времени t_1 и t_2); $m_x(t_1)$, $m_x(t_2)$ – значения математических ожиданий x в моменты времени t_1 и t_2 .



а)



б)

Рис. 2.36. Зависимости от времени шумовых реализаций двух процессов с равными дисперсиями и математическими ожиданиями

Значение корреляционной функции позволяет в среднем предсказывать изменение случайных реализаций с течением времени. Рисунок 2.37 иллюстрирует расположение (в среднем) случайных значений реализаций случайного процесса относительно значений математического ожидания, которое следует из анализа выражения (2.74).

$R(t_1, t_2) > 0 \rightarrow x_1$ и x_2 в среднем колеблются относительно $m(t)$ в фазе.

$R(t_3, t_4) < 0 \rightarrow x_3$ и x_4 в среднем колеблются относительно $m(t)$ в противофазе.

$R(t_5, t_6) = 0 \rightarrow x_5$ и x_6 в среднем колеблются относительно $m(t)$ независимо.

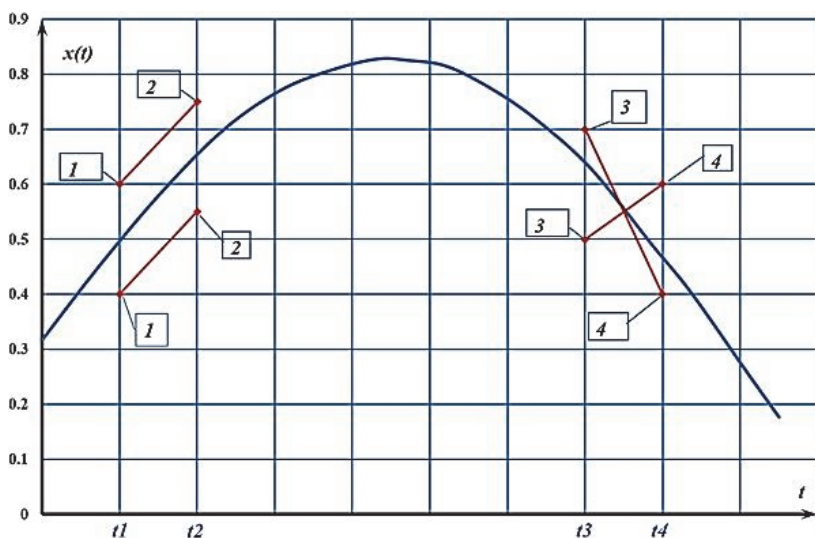


Рис. 2.37. Одно из свойств корреляционной функции

Получить аналитически выражение для корреляционной функции в большинстве случаев достаточно сложно, поэтому ее значения получают экспериментально, а затем аппроксимируют аналитическими выражениями. Оказалось, что не всякую функ-

цию можно использовать для такой аппроксимации, так как из определения (2.74) следует ряд свойств, которым она должна удовлетворять.

1. $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$ – четность корреляционной функции.

2. $R_x(t_1, t_1) = D_x(t_1)$ – значение корреляционной функции в совпадающие моменты времени (дисперсия случайного процесса в этот момент времени).

3. Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то $R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$, при добавлении к случайному процессу $X(t)$ любой неслучайной функции времени $\varphi(t)$, его корреляционная функция не изменяется.

4. $|R(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R(t_1, t_1)R(t_2, t_2)}$ – абсолютное значение корреляционной функции; всегда меньше либо равно, среднему геометрическому значению дисперсий в соответствующие моменты времени.

5. $|R(t_1, t_2)| \leq \frac{R(t_1, t_1) + R(t_2, t_2)}{2}$ – абсолютное значение

корреляционной функции; всегда меньше либо равно среднему арифметическому значению дисперсий в соответствующие моменты времени.

В светотехнике в большинстве случаев исследуются *стационарные, эргодические случайные процессы*.

Стационарными (в широком смысле) *случайными процессами* называют процессы, у которых одномерный и двумерный законы распределения не зависят от начала отсчета времени. Из определений (2.69), (2.71) и (2.74) следует, что математическое ожидание и дисперсия таких процессов не зависят от времени, а корреляционная функция $R(t_1, t_2)$, зависит от $\tau = t_2 - t_1$, т.е. становится $R(\tau)$ – функцией одного аргумента.

Стационарные процессы, у которых $R(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ называются *эргодическими процессами*, для которых вычисление статистических характеристик возможно путем усреднения отсче-

тов вдоль одной бесконечно длинной реализации $x(t)$. Операция вычисления математического ожидания (2.69) для таких процессов эквивалентна выражению:

$$M[x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt, \quad (2.75)$$

где T – длина одной из реализаций случайного процесса, а корреляционная функция определяется выражением:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (2.76)$$

Наиболее полной характеристикой случайного процесса (а для фиксированного t – случайной величины) является его закон распределения.

2.9. Закон равномерной плотности, биномиальный, нормальный и закон распределения Пуассона

Закон равномерной плотности

Этот закон описывает случайную величину, вероятность появления любого значения которой в заданном интервале $[a, b]$ одинакова (рис. 2.38). Этому закону, в частности, подчиняются фазы колебаний некогерентного электромагнитного излучения.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{если } a > x > b. \end{cases} \quad (2.77)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (2.78)$$

Моменты закона равномерной плотности, согласно определениям (2.69) и (2.71), равны:

$$m_x = \frac{a + b}{2}; \quad (2.79)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b - a)^2}{12}. \quad (2.80)$$

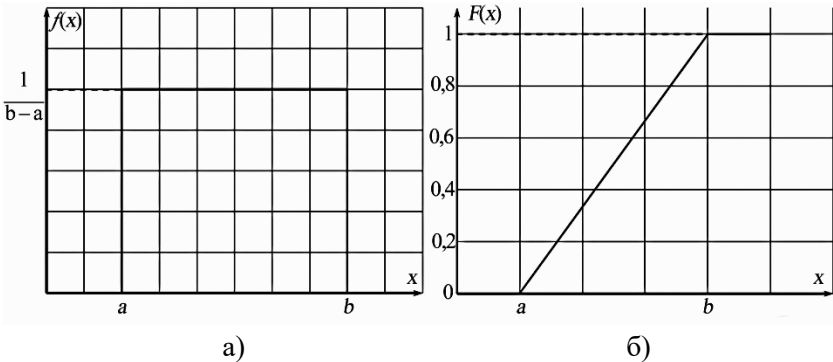


Рис. 2.38. Функция плотности вероятности (а) и интегральный закон распределения (б) закона равномерной плотности

Биномиальный закон распределения

Рассмотрим задачу, которая часто возникает при исследовании газоразрядных источников света. Рассмотрим часть объема источника излучения (рис. 2.39), в пределах которого находится m атомов (совокупность всех точек на рисунке). Известно, что любой атом может испустить квант излучения с вероятностью p . Необходимо определить, с какой вероятностью ($f_{n,m}$) n атомов (красные точки на рисунке) испустят кванты излучения; $f_{n,m}$ определится выражением:

$$f_{n,m} = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n} = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}, \quad (2.81)$$

где $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ – число перестановок из n событий в полном числе событий m .

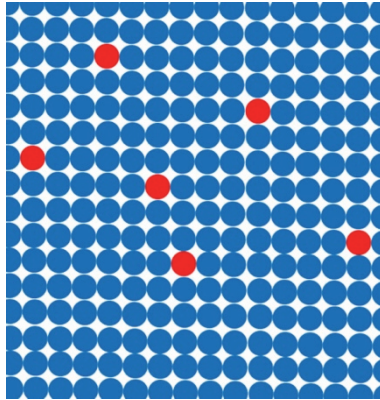


Рис. 2.39. К определению биномиального закона распределения

На рисунке 2.40 приведены коэффициенты $f_{n,m}$ функции плотности вероятности биномиального закона распределения (2.81) при разных m и $p = 0,2$.

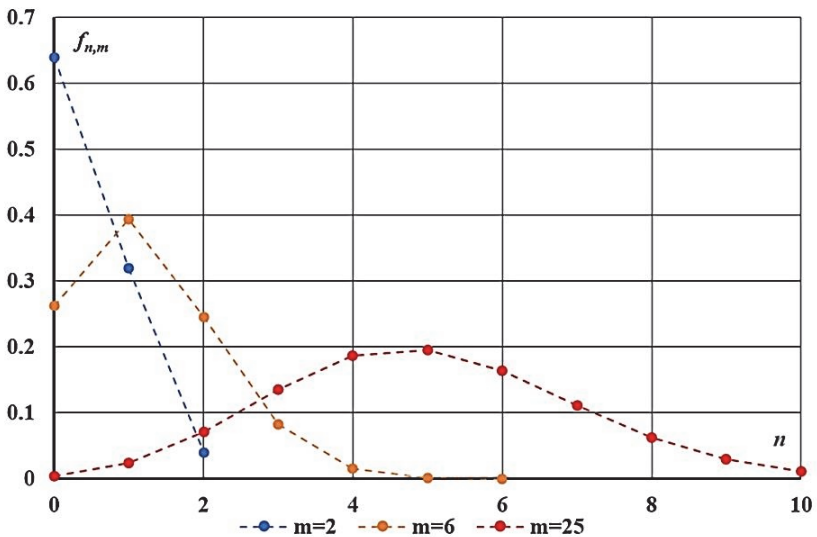


Рис. 2.40. Биномиальный закон распределения при $p = 0,2$

Используя формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^m C_m^n a^n b^{m-n} \quad (2.82)$$

и связь центральных и начальных моментов (2.73), для математического ожидания и дисперсии биномиального закона распределения можно получить выражения:

$$\left. \begin{aligned} M[n] &= m_n = mp \\ \sigma_n^2 &= mp(1-p) \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Закон распределения Пуассона

Если число излучающих атомов станет большим ($m \rightarrow \infty$), использовать биномиальный закон распределения в расчетах становится сложно. Рассмотрим предельный переход в биномиальном законе, когда $m \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, но так, что их произведение mp остается постоянным и равным некоторому параметру a . Нетрудно показать, что в этом случае $f_{n,m}$ перестает зависеть от m и определяется выражением:

$$f_n = \frac{a^n}{n!} \exp(-a). \quad (2.84)$$

Это и есть закон распределения Пуассона, которому с хорошей точностью подчиняется статистика испускания электронов нагретого тела и квантов излучения. На рисунке 2.41 приведен закон Пуассона при разных значениях математического ожидания a . Воспользовавшись предельными переходами в (2.83), можно получить выражения для моментов закона распределения Пуассона:

$$m_n = \sigma_n^2 = a. \quad (2.85)$$

Равенство дисперсии математическому ожиданию, которые в общем случае имеют разные размерности, указывает на то, что закон распределения Пуассона, как и биномиальный закон распределения, применимы только к безразмерным случайным величинам (число квантов, число фотоэлектронов и т.д.).

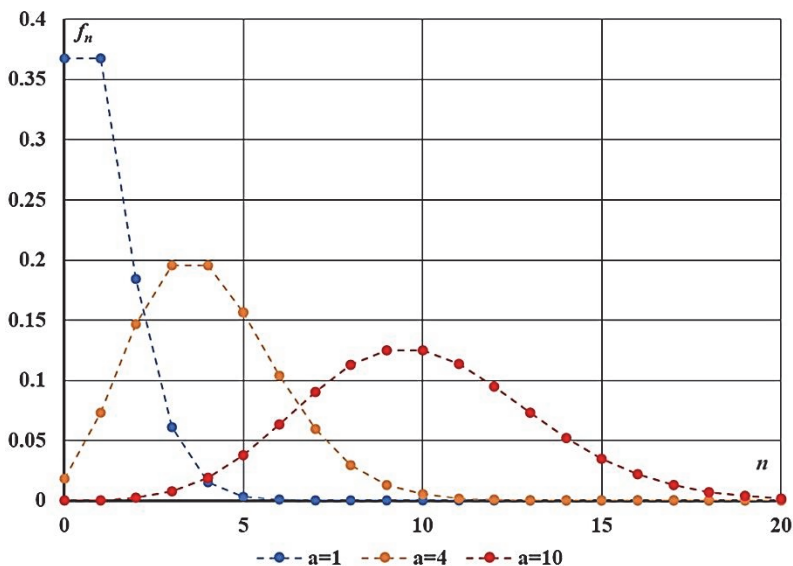


Рис. 2.41. Закон Пуассона

Нормальный закон распределения

Согласно центральной предельной теореме, закон распределения суммы большого числа одинаково значимых случайных величин стремится к функции плотности вероятности нормального закона распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (2.86)$$

Вид этой одномерной функции представлен на рис. 2.42.

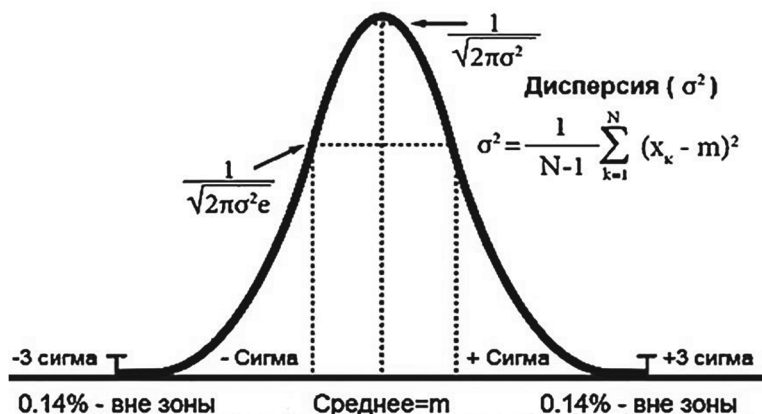


Рис. 2.42. Одномерная функция плотности вероятности нормального закона распределения

Для многих светотехнических задач приходится анализировать значения реализации случайного процесса в различные моменты времени, т.е. исследовать совокупность случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения. Для этого используется n -мерная функция плотности вероятности:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left\{ \frac{1}{2s} \begin{vmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \dots & \mathbf{R}_{1n} & (x_1 - m_{x1}) \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \dots & \mathbf{R}_{2n} & (x_2 - m_{x2}) \\ & & \dots & & \\ \mathbf{R}_{n1} & \mathbf{R}_{n2} & \dots & \mathbf{R}_{nn} & (x_n - m_{xn}) \\ (x_1 - m_{x1}) & \dots & (x_n - m_{xn}) & 0 & \end{vmatrix} \right\}, \quad (2.87)$$

где $[\mathbf{R}_{ij}]_n$ – квадратная матрица значений корреляционной функции случайного процесса (выделена *жирным шрифтом* в (2.87)), а $s = \text{Det}[\mathbf{R}_{ij}]_n$ – ее определитель. Если разложить определитель в выражении (2.87) по элементам последней строки и последнего столбца, то в двойной сумме разложения образуются элементы

матрицы \mathbf{Q}_{ij} , обратной матрице \mathbf{R}_{ij} и (2.87) преобразуется в более компактное выражение:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} (x_i - m_{xi})(x_j - m_{xj}) \right\}. \quad (2.88)$$

2.10. Анализ случайных процессов в частотной области

Из теории линейных систем следует, что для расчета зависимости сигнала от времени при пропускании его через последовательность линейных звеньев с импульсными реакциями $h_1(t)$, $h_2(t)$ и т.д. (рис. 2.43), необходимо вычислять кратные интегралы свертки.

Вычисление характеристик сигнала и шума существенно ускоряется при расчетах в частотной области. В этом случае спектр сигнала ($S_{\text{вх}}(\omega)$), после прохождения линейных звеньев ($S_{\text{вых}}(\omega)$) с частотными характеристиками $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ и т.д. определяется алгебраическим выражением:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) H_1(\omega) H_2(\omega) H_3(\omega) \cdots H_n(\omega). \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} X(t) &\rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h_1(t - \tau) d\tau \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow \\ &\rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau_1) X(\tau_2) h_1(t - \tau_1) h_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots \end{aligned}$$

Рис. 2.43. Сигнал на выходе последовательно включенных линейных звеньев

Спектральная плотность мощности эргодического случайного процесса

Для стационарного процесса его мощность оценивается по величине дисперсии, т.е. по значению корреляционной функции $R_x(0)$. Связь между мощностями случайного процесса, вычислен-

ными по его реализации в частотной и временной областях, следует из унитарности преобразования Фурье (теорема Парсеваля):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt, \quad (2.90)$$

где $x(\omega)$ – спектр реализации $x(t)$.

Используя теорему Парсеваля и определение корреляционной функции для эргодического случайного процесса можно определить *спектральную плотность мощности* (СПМ).

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi x^2(\omega)}{T} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad (2.91)$$

где $G(\omega)$ определяет распределение мощности процесса по циклическим частотам и называется *спектральной плотностью мощности*:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi x^2(\omega)}{T}. \quad (2.92)$$

Корреляционная функция и спектральная плотность мощности связаны между собой преобразованием Фурье, получившим название *теорема Хинчина–Винера*:

$$\left. \begin{aligned} G_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \end{aligned} \right\}. \quad (2.93)$$

Сложение характеристик случайных процессов

Рассмотрим случай одновременного появления на выходе фотоприемника двух случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из определения математического ожидания (2.69) для $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ получим:

$$m_x(t) = m_{x_1}(t) + m_{x_2}(t). \quad (2.94)$$

С учетом (2.74) и (2.94) для $R_x(t_1, t_2)$ получим:

$$R_x(t_1, t_2) = M \left[\begin{array}{l} \left(u_1(t_1) - m_{u_1}(t_1) + u_2(t_1) - m_{u_2}(t_1) \right) \times \\ \times \left(u_1(t_2) - m_{u_1}(t_2) + u_2(t_2) - m_{u_2}(t_2) \right) \end{array} \right]. \quad (2.95)$$

Раскрывая внутренние скобки получим:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M \left[\underbrace{\left(x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1) \right) \left(x_1(t_2) - m_{x_1}(t_2) \right)}_{R_{x_1}(t_1, t_2)} \right] + \\ &+ M \left[\underbrace{\left(x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1) \right) \left(x_2(t_2) - m_{x_2}(t_2) \right)}_{R_{x_1 x_2}(t_1, t_2)} \right] + \\ &+ M \left[\underbrace{\left(x_2(t_1) - m_{x_2}(t_1) \right) \left(x_1(t_2) - m_{x_1}(t_2) \right)}_{R_{x_2 x_1}(t_1, t_2)} \right] + \\ &+ M \left[\underbrace{\left(x_2(t_1) - m_{x_2}(t_1) \right) \left(x_2(t_2) - m_{x_2}(t_2) \right)}_{R_{x_2}(t_1, t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Для независимых источников шумов взаимные корреляционные функции $R_{x_1 x_2}(t_1, t_2)$ и $R_{x_2 x_1}(t_1, t_2)$ равны нулю, поэтому:

$$R_x(t_1, t_2) = R_{x_1}(t_1, t_2) + R_{x_2}(t_1, t_2). \quad (2.97)$$

Применив преобразование Фурье к обеим частям (2.97), получим:

$$G_x(t_1, t_2) = G_{x_1}(t_1, t_2) + G_{x_2}(t_1, t_2). \quad (2.98)$$

2.11. Тепловой и температурный шум фотоприемников

Шумы фотоприемников могут быть связаны с разными физическими процессами, которые в них происходят. Часть из шумов может быть устранена или уменьшена до допустимого уровня рациональным выбором конструкции или технологии производства ПИ, однако некоторые шумы связаны с процессами генерации сигнала на выходе, поэтому принципиально неустранимы. Рассмотрим сначала принципиально неустранимые шумы.

Возникновение *теплового шума* связано с дискретностью электрических зарядов, создающих сигнал на выходе ПИ. Рассмотрим сигнал на выходе сопротивления нагрузки (рис. 2.44), которое всегда присутствует в схемах включения ПИ. Даже в отсутствие постоянного тока, за счет теплового движения электронов, по сопротивлению R протекает заряд случайной величины и направления (флуктуации тока i), который приводит к изменению напряжения u на емкости C . Найдем мощность этого случайного процесса, т.е. дисперсию $u(t)$. Тепловое движение электронов подчиняется статистике Больцмана, поэтому закон распределения электронов по энергиям описывается выражением:

$$f(E) = A_1 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \rightarrow f(u) = A \exp\left(-\frac{Cu^2}{2kT}\right) du, \quad (2.99)$$

где $E = \frac{Cu^2}{2}$ – энергия, которую имеют электроны, накопившиеся на конденсаторе.

Из определения дисперсии (2.71) получим:

$$\overline{u^2} = A \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left[-\frac{Cu^2}{2kT}\right] du \rightarrow \overline{u^2} = A \left(\frac{kT}{C}\right) \sqrt{\frac{2\pi kT}{C}}. \quad (2.100)$$

Условие нормировки закона распределения позволяет получить выражение для константы A :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}}. \quad (2.101)$$

В итоге выражение для дисперсии, полученное исходя из статистических соображений, примет вид:

$$\overline{u^2} = \frac{kT}{C}. \quad (2.102)$$

Получим аналогичное значение из электротехнических соображений, т.е. исходя из эквивалентной электронной схемы (рис. 2.44), где шумящее сопротивление R представлено источником шумового сигнала и включенным последовательно не шумящим сопротивлением R . При этом воспользуемся понятием спектральной плотности мощности теплового шума.

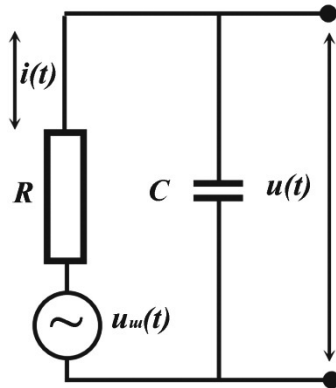


Рис. 2.44. Эквивалентная схема для пояснения теплового шума

Запишем закон Ома для полной цепи:

$$u_{\text{ш}}(t) = u_R(t) + u_C(t) \rightarrow u_{\text{ш}}(t) = RC \frac{du(t)}{dt} + u(t). \quad (2.103)$$

Решаем дифференциальное уравнение методом Фурье, т.е. подставляем в (2.103) вместо реализаций случайных функций их обратные преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(\omega) + j\omega RCu(\omega) - u_{\text{ш}}(\omega)] \exp(j\omega t) d\omega = 0. \quad (2.104)$$

Согласно свойству преобразования Фурье, оно равно нулю, если подынтегральное выражение в квадратных скобках равно нулю:

$$\left. \begin{aligned} u(\omega) + j\omega RCu(\omega) - u_{\text{ш}}(\omega) &= 0 \\ u(\omega) &= \frac{u_{\text{ш}}(\omega)}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \right\}. \quad (2.105)$$

Подставим полученные выражения для спектра флуктуаций напряжения на емкости в выражение (2.92), определяющее спектральную плотность мощности шума на емкости $G(\omega)$ и теплового шума $G_R(\omega)$ на сопротивлении R :

$$G(\omega) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u_{\text{ш}}^2(\omega)}{T}}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{G_R(\omega)}{1 + (\omega RC)^2}. \quad (2.106)$$

Интегрирование $G(\omega)$ по всей области циклических частот даст нам дисперсию напряжения шума на емкости:

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_R(\omega)}{1 + (\omega RC)^2} d\omega. \quad (2.107)$$

Поскольку электроны имеют компактные размеры и дискретный заряд, то $G_R(\omega)$ не зависит от частоты ω . Причину этого поясняет рис. 2.45. На нем изображена зависимость случайных значений напряжения на емкости (жирная кривая), которое изменяется скачками из-за дискретности заряда электрона и скорости изменения этого напряжения, которая связана с малыми размерами электрона. Изменение напряжения можно представить в виде набора $\delta(t)$ функций Дирака. Поскольку, как отмечалось ранее, спектр каждой $\delta(t)$ не зависит от частоты, то и его квадрат, а следовательно, и $G_R(\omega)$ также не зависят от ω . Это позволяет вынести $G_R(\omega)$ из-под знака интеграла (2.107):

$$\overline{u^2} = G_R(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2} \rightarrow \overline{u^2} = \frac{\pi G_R(\omega)}{RC}. \quad (2.108)$$

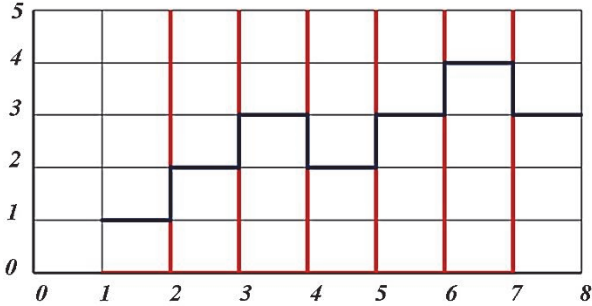


Рис. 2.45. Пояснение белого спектра теплового шума

Хотя $G_R(\omega)$ не зависит от ω , мы оставляем это обозначение, поскольку оно получено в области циклических частот изменяющихся от $-\infty$ до $+\infty$, чтобы отличить его от $G_R(f)$, где f измеряется в Гц и изменяется от 0 до ∞ . Поскольку корреляционная функция – четная функция, то и $G(\omega) = G(-\omega)$, и связь между $G_R(f)$ и $G_R(\omega)$ определится соотношением:

$$G_R(f)\Delta f = 2G_R(\omega)\Delta\omega \rightarrow G_R(f) = 4\pi G_R(\omega). \quad (2.109)$$

Из статистических соображений мы получили выражение (2.102), определяющее $\overline{u^2}$. Приравнявая правые части выражений (2.108) и (2.102) получим:

$$\frac{\pi G_R(\omega)}{RC} = \frac{kT}{C} \rightarrow G_R(\omega) = \frac{RkT}{\pi}. \quad (2.110)$$

С учетом (2.109) окончательно получаем, что СПМ теплового шума не зависит от частоты и определяется выражением (формула Найквиста):

$$G_R(f) = 4RkT. \quad (2.111)$$

Учет квантовомеханических эффектов приводит к следующей модификации формулы Найквиста для спектральной плотности теплового шума:

$$G_R(f) = 4RkT \frac{\left(\frac{hf}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}. \quad (2.112)$$

Из (2.112) следует, что тепловой шум можно считать белым до области оптических частот.

Если тепловой шум в сопротивлении нагрузки возникает во всех ПИ, то *температурный шум* характерен только для тепловых приемников. Возникновение таких шумов связано с тремя основными причинами: флуктуацией подводимой и отводимой *лучистой энергии* из окружающей среды; случайными изменениями тепловой энергии, поступающей *через контактные выводы*; отводом энергии от чувствительной площадки *за счет конвекционных потоков*. Для определения дисперсии флуктуаций температуры ($\overline{\theta^2}$) воспользуемся определением теплоемкости тела, исходя из статистических соображений:

$$C_T = \frac{d\bar{E}}{dT} \rightarrow C_T \approx \frac{E - \bar{E}}{\theta}, \quad (2.113)$$

где \bar{E} – средняя энергия чувствительной площадки. Возведя обе части уравнения в квадрат и применив к обеим частям уравнения операцию вычисления математического ожидания, получим:

$$\overline{\theta^2} = \frac{M\left[(E - \bar{E})^2\right]}{C_T^2} \rightarrow \overline{\theta^2} = \frac{\overline{E^2} - (\bar{E})^2}{C_T^2}. \quad (2.114)$$

Поскольку обмен энергии имеет квантовый характер, т.е. дискретен, воспользуемся статистикой Больцмана для систем с n степенями свободы:

$$f_i = A \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (2.115)$$

Условие нормировки для закона распределения (2.115) дает значение константы $A = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}$, тогда для \bar{E} получим

выражение:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}. \quad (2.116)$$

Продифференцировав (2.116) по температуре, для теплоемкости получим выражение:

$$C_T = \frac{\frac{1}{kT^2} \left[\sum_{i=1}^n E_i^2 \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) - \left(\sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \right)^2 \right]}{\left[\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \right]^2}$$

или

$$C_T = \frac{1}{kT^2} \left[\overline{E^2} - (\bar{E})^2 \right]. \quad (2.117)$$

Решая систему уравнений (2.117) и (2.114), получим исходя из статистики выражение для дисперсии флуктуаций температуры:

$$\overline{\theta^2} = \frac{kT^2}{C_T}. \quad (2.118)$$

Для получения взаимосвязи дисперсии со спектральной плотностью мощности флуктуаций температуры $G_H(\omega)$ запишем уравнение теплового баланса:

$$C_T \frac{d\theta(t)}{dt} + g_T \theta(t) = H_{\text{ш}}(t), \quad (2.119)$$

где $H_{\text{ш}}(t)$ – случайная реализация флуктуаций мощности, подводимой к ПИ.

Как и в случае с тепловым шумом решаем уравнение методом Фурье и получаем:

$$\theta(\omega) = \frac{H_{\text{ш}}(\omega)}{g_T + j\omega C_T}. \quad (2.120)$$

Домножив обе части на сопряженные значения и переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим:

$$G_{\theta}(\omega) = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_{\text{ш}}^2(\omega)}{t}}{g_T^2 + (\omega C_T)^2} = \frac{G_H(\omega)}{g_T^2 + (\omega C_T)^2}. \quad (2.121)$$

Учитывая, что изменение энергии тела носит квантовый характер, т.е. представляет собой сумму δ -функций с белым спектром, получим:

$$\overline{\theta^2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_H(\omega)}{g_T^2 + (\omega C_T)^2} d\omega \rightarrow \overline{\theta^2}(\omega) = \frac{\pi G_H(\omega)}{g_T C_T}. \quad (2.122)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.118) и (2.122), с учетом (2.109) получим:

$$G_H(f) = 4kT^2 g_T = \frac{4kT^2}{R_T}. \quad (2.123)$$

Тогда спектральная плотность мощности флуктуаций температуры приемника определится выражением:

$$G_{\theta}(f) = \frac{4kT^2 g_T}{g_T^2 + (2\pi f C_T)^2}. \quad (2.124)$$

2.12. Дробовой, фотонный, генерационно-рекомбинационный и избыточный шумы

Условия и причины появления *дробового шума* в ПИ: дискретность заряда электрона, наличие выделенного направления движения электронов и стохастичность инжекции электронов в выделенном направлении. Эти условия выполняются для электровакуумных ПИ и фотоприемников с *p-n* переходом. На рисунке 2.46 приведена эквивалентная схема включения таких ПИ.

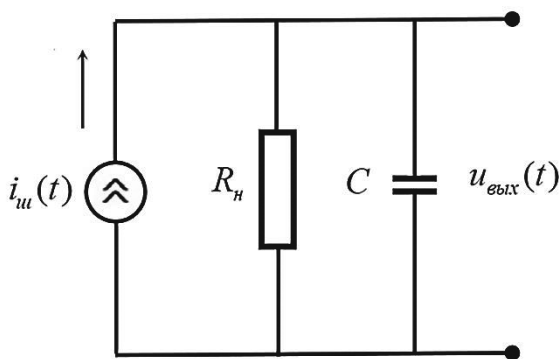


Рис. 2.46. Эквивалентная схема включения высокоомного ПИ

Закон распределения флуктуаций тока, необходимый для расчета его дисперсии, нам неизвестен, но нам известно, что испускание электронов подчиняется закону Пуассона. Выразим дис-

персию флуктуаций тока $\overline{\Delta I_t^2}$ через дисперсию числа фотоэлектронов σ_n^2 :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta I_t^2} &= \overline{(I_t - I_0)^2} = \overline{\left(e \frac{n_t}{t} - e \frac{n_0}{t} \right)^2} = \\ &= \left(\frac{e}{t} \right)^2 \overline{(n_t - n_0)^2} = \left(\frac{e}{t} \right)^2 \sigma_n^2,\end{aligned}\tag{2.125}$$

где t – время, за которое эмитируются n_t фотоэлектронов; n_0 – среднее число (математическое ожидание) эмитируемых электронов за время t ; I_0 – средний ток фотоэлектронов.

Для закона распределения Пуассона дисперсия равна математическому ожиданию, поэтому:

$$\overline{\Delta I_t^2} = \left(\frac{e}{t} \right) \frac{en_0}{t} = \frac{eI_0}{t}.\tag{2.126}$$

Если пренебречь временем пролета электронов от анода к катоду или временем разделения зарядов в p - n переходе ($\sim 10^{-8}$ с), то из-за дискретности заряда электрона изменение тока, так же как в случаях предыдущих шумов, можно считать набором

δ -функций, а значит спектр дробового шума в области $\Delta f = \frac{1}{2t}$

можно считать белым. Значение $2t$ в знаменателе связано с мононаправленностью тока и иллюстрируется рис. 2.47. Поскольку для белого в полосе Δf шума для дисперсии и спектральной плотности мощности верно соотношение $\overline{\Delta I_t^2} = G_I(f) \Delta f$, то из (2.126) следует формула Шоттки:

$$G_I(f) = 2eI_0.\tag{2.127}$$

Для установления зависимости СПМ дробового шума от частоты запишем для шумовых реализаций закон Кирхгофа в схеме изображенной на рис. 2.46:

$$i_{ш}(t) = i_C(t) + i_R(t) = C \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + \frac{u_{\text{ВЫХ}}(t)}{R}. \quad (2.128)$$

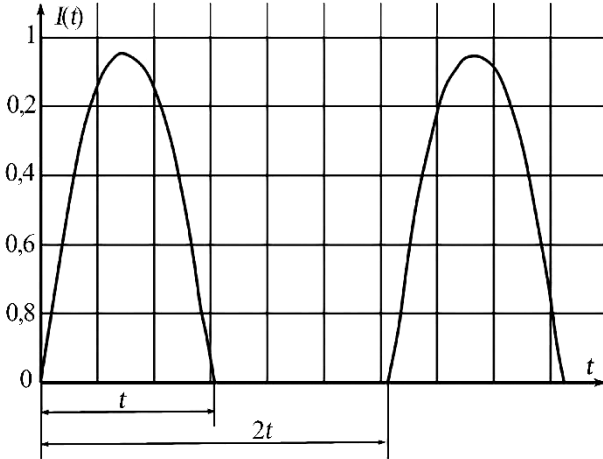


Рис. 2.47. К соотношению времени усреднения и времени, определяющему ширину спектра

Решая уравнение методом Фурье и переходя к спектральной плотности мощности, получим:

$$G_{u_{\text{ВЫХ}}}(\omega) = \frac{R^2 G_I(\omega)}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{R^2 G_I(f)}{1 + (2\pi f RC)^2} = \frac{2eI_0 R^2}{1 + (2\pi f RC)^2}. \quad (2.129)$$

Причина возникновения *фотонного шума* – дискретность квантов и случайность момента их излучения произвольным атомом или молекулой, входящих в ансамбль излучающих частиц.

Формулу Планка для спектральной плотности светимости черного тела в светотехнике обычно используют как функцию длины волны и температуры. Но она описывает только математическое ожидание результата излучения квантов. При анализе статистических характеристик излучения удобнее использовать число фотонов в зависимости от оптической частоты. Для монохро-

матического излучения поток фотонов, излучаемый площадкой A (см. гл. 3), определяется выражением:

$$\Phi_p(\lambda) = \frac{\Phi_e(\lambda)}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{c_1 \lambda^{-4}}{hc \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} A = \frac{2\pi c \lambda^{-4} A}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (2.130)$$

Число фотонов $Q_p(\lambda)$, излучаемых площадкой в спектральном интервале $\Delta\lambda$, за время Δt в телесном угле Ω определяется выражением:

$$Q_p(\lambda) = \Phi_p(\lambda) \Delta\lambda \Delta t \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2\pi c \lambda^{-4} A \Delta\lambda \Delta t \frac{\Omega}{2\pi}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (2.131)$$

При переходе от длин волн λ к оптическим частотам ν выполняется соотношение: $\Phi_p(\lambda) \Delta\lambda = \Phi_p(\nu) \Delta\nu$, где для $\Delta\lambda$ несложно получить соотношение $\Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2} \Delta\nu$. Тогда:

$$Q_p(\nu) = \Phi_p(\nu) \Delta\nu \Delta t \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2\pi \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 A \Delta\nu \Delta t \frac{\Omega}{2\pi}}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (2.132)$$

Строго процессы излучения квантов описываются статистикой Бозе–Эйнштейна, которая дает для энергии системы, состоящей из n квантов значение $Q_e(\nu) = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, однако для большинства светотехнических задач абсолютная температура источников излучения много больше абсолютного нуля, поэтому в таких системах $n \gg 1$. Пренебрегая $\frac{1}{2}$ в выражении в

скобках, мы получаем выражение, соответствующее статистике Больцмана, которой и воспользуемся для расчета дисперсии флуктуаций числа фотонов.

Для черного тела в пределах полосы частот $\Delta\nu$ может находиться огромное количество составляющих монохроматических излучений (мод излучения), которые для некогерентного излучения статистически независимы между собой, поэтому общая дисперсия числа фотонов D_N равна сумме дисперсий числа фотонов $D_n(\nu)$ в каждой моде излучения:

$$D_N = \sum_{\nu \in \Delta\nu} D_n(\nu). \quad (2.133)$$

Для определения $D_n(\nu)$ воспользуемся полученным выражением (2.73), связывающим дисперсию с начальными моментами, определениями моментов случайных величин, а также условием нормировки законов распределения:

$$D_n(\nu) = \overline{n^2} - (\bar{n})^2, \quad \bar{n} = C \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right),$$

$$\overline{n^2} = C \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right). \quad (2.134)$$

$$\sum_0^{\infty} f_n = \sum_0^{\infty} C \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right) = 1. \quad (2.135)$$

После вынесения из-под знака суммы в (2.135) константы C получаем выражение для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_0^{\infty} \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}$$

или

$$1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) = \frac{1}{\sum_0^{\infty} \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right)}. \quad (2.136)$$

Введя в (2.136) обозначение $x = \frac{h\nu}{kT}$ и продифференцировав его по x один раз, можно получить аналитическое выражение для суммы, определяющей \bar{n} , а при повторном дифференцировании – выражение для суммы, определяющей $\overline{n^2}$. Подстановка этих выражений в выражение для $D_n(\nu)$ дает:

$$D_n(\nu) = \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]^2} = \frac{\bar{n}}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} = \frac{Q_p(\nu)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}. \quad (2.137)$$

Как видно из (2.137), дисперсия флуктуаций фотонов не равна математическому ожиданию, т.е., строго говоря, фотоны не подчиняются статистике Пуассона, однако до температур 4000 К в видимом диапазоне спектра это отличие не превышает 10%. Если считать, что в пределах полосы частот $\Delta f = \frac{1}{\Delta t}$ спектральная плотность мощности фотонного шума постоянна (из-за малого времени поглощения энергии кванта), то СПМ фотонного шума определится выражением:

$$G_\Phi(f) = \frac{2\pi\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 A\Delta\nu \frac{\Omega}{2\pi}}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]}. \quad (2.138)$$

Интегрирование (1.137) по всей оптической области спектра дает выражение для дисперсии фотонного шума в полосе частот Δf для черного тела:

$$D_\Phi = 4\sigma T^5 A \frac{\Omega}{2\pi} \Delta f, \quad (2.139)$$

где $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Генерационно-рекомбинационный шум (ГРШ) наблюдается в полупроводниках и обусловлен случайностью процессов рождения и рекомбинации носителей тока.

Введем относительное значение шумовых флуктуаций $\delta N_{\text{ш}}(t) = \frac{N_{\text{ш}}(t) - N_0}{N_0}$, где N_0 – математическое ожидание сгенерированных носителей заряда в стационарном случайном процессе. Если $\delta N_{\text{ш}}(t) \ll 1$, что практически всегда выполняется, то дифференциальное уравнение для процесса генерации имеет вид:

$$\frac{d\delta N_{\text{ш}}(t)}{dt} = -\frac{\delta N_{\text{ш}}(t)}{\tau}, \quad (2.140)$$

где τ – время жизни носителей.

Решая (2.140) методом Фурье получим:

$$j\omega\delta N_{\text{ш}}(\omega) = -\frac{\delta N_{\text{ш}}(\omega)}{\tau} \rightarrow (N_{\text{ш}}(\omega) - N_0) = \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} N_0. \quad (2.141)$$

Учитывая, что генерация и рекомбинация носителей зарядов статистически независимы, так как разнесены в пространстве и во времени, а также их равенство в условиях термодинамического равновесия и четность функции $G(\omega)$ окончательно получим:

$$G_{\text{ГРШ}}(f) = \frac{4\tau^2}{1 + (2\pi f\tau)^2} N_0^2, \quad (2.142)$$

где $N_0 = N_{\text{ф}}\eta_{\text{к}}$, $N_{\text{ф}}$ – математическое ожидание числа поглощенных фотонов; $\eta_{\text{к}}$ – квантовый выход материала полупроводника.

Кроме принципиально неустранимых шумов, имеются и шумы, которые конструктивными и технологическими решениями можно исключить или довести до необходимого минимума. К таким шумам относятся избыточные шумы, контактные шумы, шумы охлаждения, микрофонный шум, поляризационный шум и т.д. Наибольшее значение при использовании фотоприемников имеют избыточные шумы.

При исследовании СПМ шума было установлено, что в области низких частот предельные значения шумов ПИ часто превышают теоретический предел, связанный с тепловым, темпера-

турным или квантовым шумом. Эти дополнительные шумы стали называть *избыточным шумом*. Детальные исследования показали, что физическая природа шумов может быть самая различная и достаточно сложная (дефекты на поверхности и в объеме материала, неравномерность концентрации, контактные явления и т.д.), однако все они описываются эмпирической зависимостью:

$$G_{\text{из}}(f) = \frac{AI^2}{f}, \quad (2.143)$$

где I – среднее значение тока фотоприемника; A – постоянная определяемая эмпирически.

Характерная зависимость этих шумов от частоты дала еще одно название этим шумам – «шумы вида $1/f$ ». На рисунке 2.48 представлен качественный ход такой зависимости. Очевидно, что дисперсия избыточных шумов в полосе частот $\Delta f = (f_{\text{в}} - f_{\text{н}})$ определяется выражением:

$$\sigma_{\text{из}}^2 = AI^2 \int_{f_{\text{н}}}^{f_{\text{в}}} \frac{df}{f} = AI^2 \ln \left(\frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{н}}} \right). \quad (2.144)$$

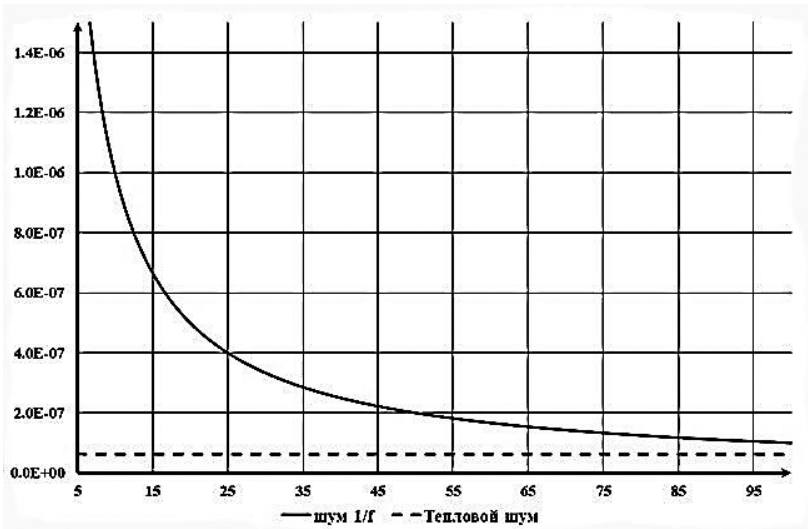


Рис. 2.48. Избыточные шумы

При производстве ПИ технологическими и конструктивными решениями стремятся свести уровень избыточных шумов в рабочей полосе частот до величины меньшей тепловых шумов на сопротивлении нагрузки фотоприемника.

2.13. Пороговые характеристики фотоприемников.

Характеристики идеального теплового приемника

Шум фотоприемника не позволяет регистрировать сколь угодно малые сигналы, которые становятся незаметными на его фоне, т.е. ограничивает предельные возможности прибора. Для оценки предельных возможностей ПИ при регистрации сигналов используются следующие характеристики.

Пороговый поток

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \frac{\sqrt{\sigma_{\text{ш}}^2(f)}}{S(f)} = \frac{\sqrt{G(f)\Delta f}}{S(f)} \rightarrow S(f)\Phi_{\text{пор}}(f) = \sqrt{\sigma_{\text{ш}}^2(f)}, \quad (2.145)$$

где $S(f)$ – чувствительность ПИ.

Физический смысл порогового потока в том, что на выходе ПИ он создает сигнал равный СКО шума фотоприемника.

У многих приемников дисперсия шума прямо пропорциональна площади чувствительной площадки и полосе частот, в которой он работает. Поскольку приемники одного типа могут иметь разную площадь $A_{\text{шн}}$ и работать в разной полосе частот Δf , то для их сравнения между собой удобно использовать *удельный пороговый поток*:

$$\Phi_{\text{пор}}^*(f) = \frac{\Phi_{\text{пор}}(f)}{\sqrt{A_{\text{шн}}\Delta f}}. \quad (2.146)$$

Чем лучше фотоприемник, тем меньшее значение порогового потока он имеет. Так как у человека понятие «лучше» чаще ассоциируется с понятием «больше», была введена *удельная обнаружительная способность*:

$$D^*(f) = \frac{1}{\Phi_{\text{пор}}^*(f)}. \quad (2.147)$$

Поскольку чувствительность ПИ в (2.145) может быть спектральной чувствительностью, то приведенные характеристики могут зависеть и от длины волны. Например:

$$D^*(\lambda, f) = \frac{S(\lambda, f)\sqrt{A_{\text{ши}}}}{\sqrt{G(f)}}. \quad (2.148)$$

В литературе по ПИ часто приводятся значения $D^*(\lambda)$, но не приводятся зависимости $S_0(\lambda)$. Из (2.148) несложно получить, что

$$S_0(\lambda) = \frac{D^*(\lambda)}{D_{\text{max}}^*(\lambda)}. \quad (2.149)$$

Под *идеальным тепловым приемником* (ИТП) понимают такой приемник, у которого преобладающим шумом является температурный шум и который имеет максимально хорошие пороговые характеристики среди тепловых ПИ.

Для определения порогового потока ИТП нам нужна полученная ранее СПМ температурного шума – выражение (2.124) и температурная чувствительность ИТП, для определения которой запишем уравнение теплового баланса:

$$\underbrace{C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt}}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{идущая на} \\ \text{нагрев} \\ \text{приемника}}} + \underbrace{g_T \Delta T(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{в окружающую} \\ \text{среду}}} = \underbrace{\alpha_e \Phi_e \exp(j\omega t)}_{\substack{\text{синусоидально} \\ \text{модулированная} \\ \text{поглощенная} \\ \text{мощность}}}. \quad (2.150)$$

Решая уравнение методом, изложенным в разделе 2.3, получим:

$$\Delta T(\omega) = \frac{\alpha_e \Phi_e}{g_T + j\omega C_T} \rightarrow S_T(f) = \frac{\alpha_e}{\sqrt{g_T^2 + (2\pi f C_T)^2}}. \quad (2.151)$$

Подставляя (2.124) и (2.151) в (2.145) получим:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \frac{\sqrt{4kT^2 g_T \Delta f}}{\alpha_e}. \quad (2.152)$$

В главах 3 и 6 будет показано, что коэффициент излучения $\varepsilon_T = \frac{M_e}{M_{es}}$ равен коэффициенту поглощения α_e , а также получен закон излучения черного тела (закон Стефана–Больцмана) $M_{es}(T) = \frac{d\Phi_e}{dA} = \sigma T^4$. Используя определение тепловой проводимости, можно получить выражение:

$$g_T = \frac{d\Phi_e}{dT} \rightarrow g_T = \frac{d}{dT}((\varepsilon_T + \varepsilon'_T)\sigma T^4 A) = 4(\varepsilon_T + \varepsilon'_T)\sigma T^3 A, \quad (2.153)$$

где $\varepsilon_T, \varepsilon'_T$ – коэффициенты излучения рабочей и нерабочей частей площади ПИ.

Тогда выражения для порогового потока и связанных с ним характеристик идеального теплового приемника примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{пор}} &= \frac{4\sqrt{(\varepsilon_T + \varepsilon'_T)k\sigma T^5 A \Delta f}}{\varepsilon_T} \\ \Phi_{\text{пор}}^* &= \frac{4\sqrt{(\varepsilon_T + \varepsilon'_T)k\sigma T^5}}{\varepsilon_T} \\ D^* &= \frac{\varepsilon_T}{4\sqrt{(\varepsilon_T + \varepsilon'_T)k\sigma T^5}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.154)$$

Анализ выражения (2.154) показывает, что для получения минимального порогового потока надо увеличивать коэффициент излучения рабочей площадки ПИ (чернить ее) и уменьшать коэффициент излучения нерабочей площади приемника (делать ее зеркальной), а также уменьшать температуру ПИ. Расчеты при $\varepsilon_T = 1, \varepsilon'_T = 0, T = 300 \text{ К}, A = 1 \text{ см}^2, \Delta f = 10 \text{ Гц}$ дают значение $\Phi_{\text{пор}} = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ Вт}$.

Как видно из полученных выражений, они не зависят от частоты. Это связано с тем, что в идеальном приемнике не учитываются тепловой шум на его сопротивлении и избыточные шумы.

В реальных приемниках излучения, которые мы рассмотрим ниже, появится зависимость $\Phi_{\text{пор}}$ от частоты за счет белого теплового шума и избыточного шума $1/f$.

2.14. Пороговые характеристики термоэлемента, болометра и пирозлектрического приемников

При определении чувствительности фотоприемников, которые мы рассматривали ранее, на ПИ подавался синусоидально модулированный сигнал, по величине много больше шумового сигнала. При определении пороговых характеристик измерения и расчеты проводятся в отсутствии оптического сигнала, а его случайную реакцию определяют внутренние и внешние источники шумов. Это приводит и изменению уравнений теплового баланса.

Запишем систему уравнений (2.25), которая определяет чувствительность *термоэлемента*, для случая расчета его *пороговых характеристик* (рис. 2.49):

$$\left. \begin{aligned} C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \underbrace{g_T \Delta T(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{в окружающую} \\ \text{среду}}} + \underbrace{sTi(t)}_{\substack{\text{мощность,} \\ \text{отводимая} \\ \text{за счет} \\ \text{эффекта} \\ \text{Пельтье}}} = \underbrace{H(t)}_{\substack{\text{случайная} \\ \text{реализация} \\ \text{мощности} \\ \text{температурного} \\ \text{шума}}} \\ i(t) = \frac{s\Delta T(t)}{r} + \frac{E(t)}{r} \end{aligned} \right\}, \quad (2.155)$$

где $\Delta T(t)$ – случайная реализация флуктуаций температуры; $E(t)$ – случайная реализация теплового шума на полном сопротивлении цепи r (рис. 2.50):

$$C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) \Delta T(t) = H(t) - \frac{sT}{r} E(t). \quad (2.156)$$

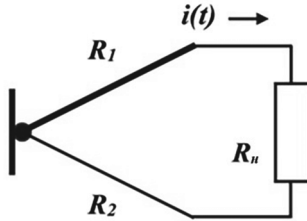


Рис. 2.49. Схема включения термоэлемента

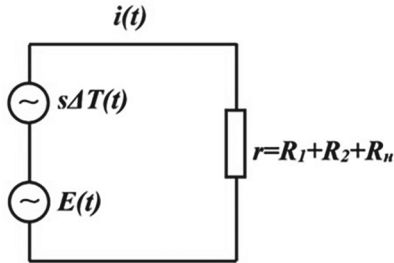


Рис. 2.50. Эквивалентная схема включения термоэлемента при вычислении шумов

Решая данную систему методом Фурье (см. раздел 2.11), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Delta T(\omega) \left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) + j\omega C_T \Delta T(\omega) + \frac{sT}{r} E(\omega) - H(\omega) \right\} \exp(j\omega t) d\omega = 0 \quad (2.157)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta T(\omega) &= \frac{H(\omega) - \frac{sT}{r} E(\omega)}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) + j\omega C_T} \\ i(\omega) &= \frac{s\Delta T(\omega)}{r} + \frac{E(\omega)}{r} \\ i(\omega) &= \frac{\frac{s}{r} H(\omega) + (g_T + j\omega C_T) \frac{E(\omega)}{r}}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r} \right) + j\omega C_T} \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

Перейдем от спектров реализаций случайных процессов к их спектральным плотностям мощности:

$$G_i(\omega) = \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi H^2(\omega)}{T} + (g_T^2 + (\omega C_T)^2) \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi E^2(\omega)}{T}}{r^2}}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r}\right)^2 + (\omega C_T)^2} \quad (2.159)$$

$$G_i(f) = \frac{4\left(\frac{s}{r}\right)^2 kT^2 g_T + (g_T^2 + (2\pi f C_T)^2) \frac{4kT}{r}}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r}\right)^2 + (2\pi f C_T)^2}$$

С учетом полученной ранее зависимости $S_i(\omega)$ для термоэлемента (формула (2.28)), для порогового потока термоэлемента получим выражение:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \sqrt{\frac{4kT^2 g_T + (g_T^2 + (2\pi f C_T)^2) \frac{4kTr}{\varepsilon_T^2 s^2}}{\varepsilon_T^2}} \Delta f \quad (2.160)$$

В области низких частот у всех ПИ наблюдается рост СПМ за счет избыточных шумов.

$$G_i(f) = \frac{4\left(\frac{s}{r}\right)^2 kT^2 g_T + (g_T^2 + (2\pi f C_T)^2) \frac{4kT}{r}}{\left(g_T + \frac{s^2 T}{r}\right)^2 + (2\pi f C_T)^2} + \frac{AI_0^2}{f} \quad (2.161)$$

На рисунке 2.51 приведена зависимость порогового потока термоэлемента от частоты. Асимптотический ход полученной зависимости имеет вид: $f \rightarrow 0 \quad \Phi_{\text{пор}}(f) \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$; $f \rightarrow \infty \quad \Phi_{\text{пор}}(f) \sim f$.

Таким образом, для термоэлемента существует оптимальная область частот, где его $\Phi_{\text{пор}}(f)$ достигает минимального значения. Пороговый поток, приведенный к полосе 1 Гц современных термоэлементов, лежит в диапазоне $10^{-9} - 10^{-10}$ Вт/Гц^{1/2}.

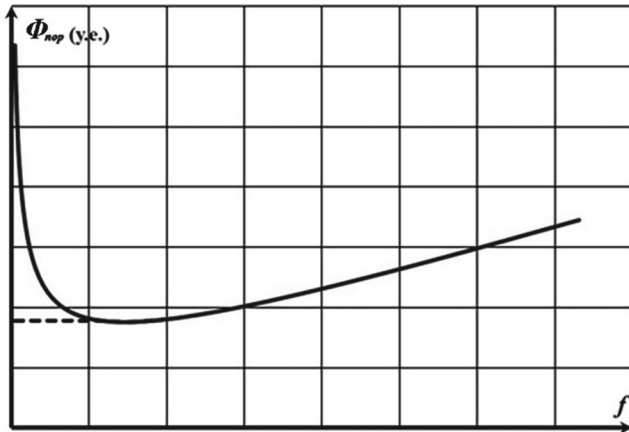


Рис. 2.51. Зависимость порогового потока термоэлемента от частоты

С учетом сказанного выше о расчете $\Phi_{\text{пор}}$ термоэлемента, для расчета *порогового потока болометра* его уравнение теплового баланса и выражение для шумовой реализации напряжения на выходе схемы включения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} C_T \frac{d\Delta T(t)}{dt} + g_T \Delta T(t) &= \Delta(I^2 R) + H(t) \\ \Delta U(t) &= \alpha U_0 \Delta T(t) + E(t) \end{aligned} \right\}. \quad (2.162)$$

Решая данную систему уравнений методом Фурье, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T(\omega) &= \frac{H(\omega)}{(g_T - \alpha P_0) + j\omega C_T} \\ \Delta U(\omega) &= \frac{\alpha U_0}{(g_T - \alpha P_0) + j\omega C_T} H(\omega) + E(\omega) \end{aligned} \right\}. \quad (2.163)$$

Определяя, как и в случае термоэлемента СПМ шума, получим:

$$G_u(\omega) = \frac{\alpha^2 U_0^2}{(g_T - \alpha P_0)^2 + (\omega C_T)^2} G_\theta(\omega) + G_T(\omega). \quad (2.164)$$

Для идеального теплового приемника, температура которого совпадает с температурой окружающих предметов (термодинамическое равновесие), СПМ температурного шума определялась выражением:

$$G_{\theta}(\omega) = 16\sigma AkT^5 = \underbrace{8\sigma AkT^5}_{\substack{\text{мощность} \\ \text{шума} \\ \text{за счет} \\ \text{излучения} \\ \text{энергии}}} + \underbrace{8\sigma AkT^5}_{\substack{\text{мощность} \\ \text{шума} \\ \text{за счет} \\ \text{поглощения} \\ \text{энергии}}}.$$

Поскольку, как отмечалось ранее, болометр и окружающие предметы имеют разные температуры (T и T_0), то выражение для $G_{\theta}(\omega)$ примет вид:

$$G_{\theta}(\omega) = 8\sigma AkT^5 + 8\sigma AkT_0^5. \quad (2.165)$$

Учитывая формулу (2.40) для чувствительности болометра, получим выражение для порогового потока болометра:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \sqrt{4k \left[2\sigma A(T^5 + T_0^5) + T \frac{(g_T - \alpha P_0)^2 + (2\pi f C_T)^2}{\alpha^2 P_0} \right]} \Delta f. \quad (2.166)$$

Если учесть избыточные шумы, зависимость $\Phi_{\text{пор}}(f)$ аналогична изображенной на рис. 2.51 зависимости для термоэлемента. Минимальные значения пороговых потоков болометров и термоэлементов имеют сопоставимые значения $10^{-9} - 10^{-10}$ Вт/Гц^{1/2}.

В электрической схеме *пироприемник* является конденсатором (рис. 2.11). Идеальный конденсатор не является источником шума, однако реальный пироприемник, наполненный сегнетоэлектриком, не является идеальным конденсатором. При изменении поляризации диполей происходит их взаимодействие с кристаллической решеткой, в результате чего часть энергии электрического поля преобразуется в тепловую энергию, что приводит к появлению теплового шума. Неидеальность конденсатора оценивают величиной $\text{tg}(\delta)$ (тангенсом угла диэлектрических потерь), равной отношению активной и реактивной составляющей его

комплексного сопротивления Z (рис. 2.52). Тепловой шум пиро-приемника вызывает только активная составляющая его полного сопротивления:

$$G_i(f) = 4kT(2\pi f)C \operatorname{tg}(\delta) \rightarrow G_i(f) = 8\pi f k T \frac{\varepsilon \varepsilon_0 A}{w} \operatorname{tg}(\delta). \quad (2.167)$$

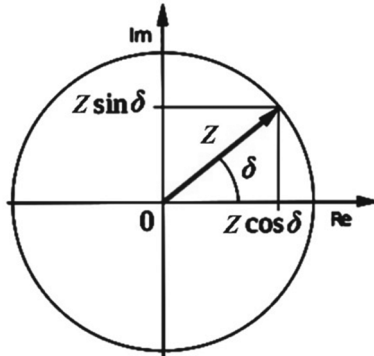


Рис. 2.52. Комплексное сопротивление пироприемника

С учетом выражения (2.47) для токовой чувствительности пироприемника получаем следующую зависимость для его порогового потока:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \frac{\tilde{c}d}{p\varepsilon} \sqrt{8\pi k T \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{tg}(\delta) w A f \Delta f}. \quad (2.168)$$

Из теории твердого тела следует, что комбинация параметров $\frac{p}{\tilde{c}d\sqrt{\operatorname{tg}(\delta)\varepsilon}}$ выражается через фундаментальные физические

постоянные (скорость света, постоянная Больцмана, постоянная Планка и т.д.) и не может изменяться, поэтому оптимизировать пороговые характеристики пироприемника можно только уменьшая его объем (wA), температуру и работая на низкой частоте, где избыточные шумы меньше его основного шума. Современные пироприемники имеют пороговые характеристики на порядок хуже, чем рассмотренные ранее тепловые ПИ. Их пороговый поток приведенный к полосе 1 Гц, лежит в диапазоне $10^{-7} - 10^{-9}$ Вт/Гц^{1/2} при частотах модуляции 20–500 Гц.

2.15. Пороговые характеристики фотоэлемента и фотоэлектронного умножителя

Выражение (2.55) определяет максимальное значение чувствительности фотоэлемента. Учитывая, что спектральная плотность мощности шума на нагрузке фотоэлемента определяется тремя источниками (дробовым шумом, избыточным шумом и тепловым шумом), можно записать:

$$G_i = 2ei_0 + \frac{Ai_0^2}{f} + \frac{4kT}{R_n}, \quad (2.169)$$

где $i_0 = i_\phi + i_T + i_{yt}$ – ток, протекающий по сопротивлению нагрузки R_n (ток сигнала, темновой ток и ток утечки). Если пренебречь избыточным шумом, то оптимальным, с точки зрения шумов, сопротивлением нагрузки считается его значение, когда дробовой шум тока, который определяет и сигнал, больше теплового шума, т.е. $2ei_0 \geq \frac{4kT}{R_n}$. Откуда следует, что

$$R_n \geq \frac{2kT}{ei_0}. \quad (2.170)$$

Если i_0 измерять в А, то при $T = 300$ К выражение (2.170) эквивалентно соотношению: $R_n \geq \frac{1}{20i_0}$. Если избавиться от токов

утечки, то оптимальное сопротивление нагрузки у хороших фотоэлементов ($i_T \sim 10^{-12} - 10^{-13}$ А) превышает 100 Мом. Постоянная времени фотоэлемента при паразитной емкости всего 1 пФ (10^{-12} Ф) равна 0,1 с, т.е. фотоэлемент сможет работать только в области низких частот (единицы Гц), а в этой области трудно избавиться от токовых шумов. Если для частотной характеристики фотоэлемента использовать выражение (2.14), при $\tau = \tau_n = R_n C_n$, где C_n – паразитная емкость схемы включения, то пороговый поток фотоэлемента определится выражением:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \frac{hv}{e\alpha_T \eta} \sqrt{\left[2ei_0 + \frac{4kT}{R_n}\right] \left[1 + (2\pi f \tau_n)^2\right]}. \quad (2.171)$$

При расчете СПМ шума ФЭУ рассмотрим схему его работы, представленную на рис. 2.18. Исходным шумом в ФЭУ является дробовой шум тока фотокатода:

$$G_{\text{фк}} = 2ei_0. \quad (2.172)$$

После первого динода его шум G_1 складывается из дробового шума тока после этого динода i_1 и усиленного первым динодом шума тока фотокатода. Из определения спектральной плотности мощности следует, что если случайную реализацию увеличить в δ раз, то СПМ шума увеличится в δ^2 раз. Аналогично и для остальных динодов, поэтому для них получаем рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= 2ei_0\delta + G_{\text{фк}}\delta^2 \rightarrow G_1 = 2ei_0\delta(1 + \delta), \\ G_2 &= 2ei_1\delta + G_1\delta^2 \rightarrow G_2 = 2ei_0\delta(1 + (1 + \delta)), \\ &\dots\dots\dots \\ G_n &= G_A = 2ei_{n-1}\delta + G_{n-1}\delta^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.173)$$

Последовательно подставляя рекуррентные соотношения в выражение для СПМ шума анодного тока G_A , получим:

$$G_A = 2ei_0\delta^{2n} \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \dots + \frac{1}{\delta^{n-1}} \right) \right] \approx 2ei_0M^2 \frac{\delta}{\delta-1}. \quad (2.174)$$

Таким образом, теоретически внутреннее усиление ФЭУ увеличивает СПМ шума тока анода, по сравнению с идеальным усилением, в $\frac{\delta}{\delta-1}$ раз. На самом деле, кроме рассмотренных причин увеличения шума существует еще автоэлектронная эмиссия с элементов конструкции ФЭУ, световая обратная связь, ионизация остаточных газов в объеме прибора и ряд других явлений. Все они увеличивают его шум, по сравнению с теоретическим выражением (2.174), поэтому шум реальных ФЭУ рассчитывают по выражению:

$$G_A = 2ei_0M^2(1 + B) + \frac{4kT}{R_n}, \quad (2.175)$$

где B – эмпирический коэффициент, который для большинства ФЭУ лежит в диапазоне 2–3. Если аналогично фотоэлементу

рассчитать величину оптимального по шумам сопротивления нагрузки ФЭУ, то получим выражение:

$$R_n \geq \frac{2kT}{ei_0 M^2 (1+B)}. \quad (2.176)$$

Расчеты показывают, что при комнатной температуре необходимое сопротивление нагрузки ФЭУ не превышает единиц Ом. Это позволяет использовать ФЭУ для работы на частотах в сотни МГц.

Полученные ранее выражения для чувствительности ФЭУ позволяют получить выражение для его порогового потока:

$$\Phi_{\text{пор}}(f) = \frac{hv}{e\alpha_r \eta} \sqrt{\left[2ei_0 M^2 (1+B) + \frac{4kT}{R_n} \right] \left[1 + (2\pi f \tau_n)^2 \right]}. \quad (2.177)$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранчиков, М.Л. Приемники и детекторы излучений: справочник / М.Л. Баранчиков. – М.: Издательство ДМК Пресс, 2012. 640 с.

В настоящем справочнике содержатся сведения о приемниках ионизирующего излучения (счетчиках Гейгера, сцинтилляторах, детекторах альфа-, бета-, гамма- и нейтронного излучений), а также о широкой номенклатуре фоточувствительных приборов – фоторезисторов, фотодиодов, фототранзисторов, фотоприемных устройств, фотоэлементов и фотоумножителей, передающих телефонных трубок (диссекторов, суперортиконов, вадиконов), электронно-оптических преобразователей, болометров, пироэлектрических приемников излучения и тепловых приемных устройств. Рассмотрено более 3 200 наименований приборов. Для инженерно-технических работников, молодых специалистов, студентов вузов и радиолюбителей, занятых разработкой и эксплуатацией аппаратуры, использующей приемники и детекторы излучений.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ И ЭФФЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕЛИЧИН И ЕДИНИЦ

3.1. Энергия и поток излучения

В главе 1 мы определили лучевую модель светового поля. Для определения системы величин, характеризующих световое поле, на V Всемирном электротехническом конгрессе, состоявшемся в конце мая 1896 г. в Женеве, за основу была принята энергия излучения, переносимая в рамках лучевой модели.

Энергия – это скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой движения различных форм материи. При распространении оптическое излучение (в дальнейшем просто излучение) переносит энергию. *Энергия излучения* (Q_e) измеряется в международной системе СИ в *джоулях*, Дж. В процессе взаимодействия излучения с атомами его энергия чаще всего передается электронам, энергия которых иногда измеряется в *электрон-вольтах*, эВ, т.е. в единицах энергии, которую приобретает электрон, прошедший участок поля с разностью потенциалов 1 В. Поскольку заряд электрона равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Результат взаимодействия излучения с веществом часто пропорционален энергии излучения, переносимой потоком фотонов в единицу времени (мощности излучения). Эту мощность, переносимую излучением, называют *потоком излучения или энергетическим потоком*. Как и энергия, поток излучения является скалярной величиной. Согласно сформулированному выше определению:

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}, \quad (3.1)$$

где Φ_e – значение потока излучения; dQ_e – энергия, переносимая излучением за время dt .

Для полной качественной и количественной характеристики потока излучения необходимо знать:

- зависимость потока излучения от времени $\Phi_e(t)$;
- распределение его в пространстве;
- распределение его по спектру.

Если $\Phi_e(t)$ изменяется в течение времени T , то энергия (Q_e), которую переносит поток за это время, определяется выражением:

$$Q_e = \int_0^T \Phi_e(t) dt . \quad (3.2)$$

Среднее значение потока за время T определится выражением:

$$\Phi_{e \text{ ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_e(t) dt , \text{ или } \Phi_{e \text{ ср}} = \frac{Q_e}{T} . \quad (3.3)$$

За единицу измерения энергетического потока принята единица мощности в системе СИ, т.е. *ватт*, Вт.

В функцию распределения потока излучения в пространстве входит понятие телесного угла, с которым необходимо познакомиться.

3.2. Телесный угол. Сила излучения, энергетическое освечивание

Телесный угол – это область пространства, ограниченная коническими поверхностями. В светотехнике для формирования телесного угла чаще всего используются одна либо две концентрические конические поверхности (рис. 3.1). Количественно телесный угол определяется отношением площади сферической поверхности, заключенной внутри конуса (либо между конусами) с вершиной в центре этой сферы, к квадрату радиуса сферы. Это отношение не зависит от радиуса сферы.

$$\Omega = \frac{A_{\text{сф}}}{r^2} . \quad (3.4)$$

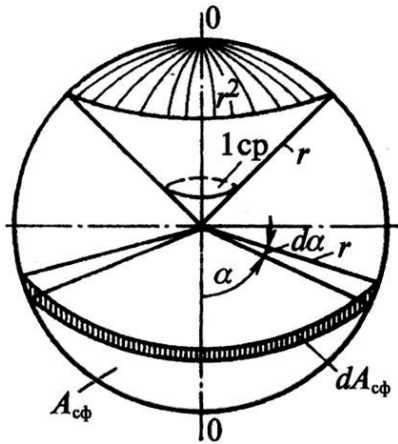


Рис. 3.1. К расчету телесных углов

Единицей измерения телесного угла принято считать *стерадиан*, ср , для которого площадь поверхности, вырезаемая образующими телесного угла на сфере, численно равна квадрату радиуса сферы. Из стереометрии известно, что для осесимметричной конической поверхности с центральным углом 2α (рис. 3.1), площадь, вырезаемая на сфере конической поверхностью, равна $2\pi r^2 [1 - \cos(\alpha)]$, поэтому значение телесного угла (Ω , ср) конической поверхности с центральным углом 2α определяется выражением:

$$\Omega = 2\pi [1 - \cos(\alpha)]. \quad (3.5)$$

Из выражения (3.4) следует, что значение максимального телесного угла, охватывающего все пространство ($2\alpha = 2\pi$ или $\alpha = \pi$), равно 4π стерадиан.

Телесный угол, заключенный между двумя осесимметричными коническими поверхностями, называют зональным телесным углом. Несложно получить, что площадь dA (рис. 3.1) части шарового «пояса» между двумя такими коническими поверхностями с центральными углами 2α и $2(\alpha + d\alpha)$ равна $2\pi r^2 \sin(\alpha) d\alpha$, поэтому выражение для элементарного зонального телесного угла имеет вид:

$$d\Omega = 2\pi \sin(\alpha) d\alpha. \quad (3.6)$$

Величина зонального телесного угла при конечной величине $d\alpha$, т.е. когда центральные углы конических поверхностей равны $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$, определяется разностью телесных углов конических поверхностей, рассчитанных по выражению (3.4):

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi[\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)]. \quad (3.7)$$

Если необходимо определить телесный угол произвольного тела (рис. 3.2), расположенного на некотором расстоянии от вершины конической поверхности, то его поверхность разбивают на элементарные участки dA , расположенные на расстоянии l от вершины конуса. Отношение площади проекции dA на сферу радиусом $r = l$ даст значение элементарного телесного угла $d\Omega$ элемента поверхности dA :

$$d\Omega = \frac{dA_{\text{сф}}}{r^2} = \frac{dA \cos(\theta)}{l^2}, \quad (3.8)$$

где θ – угол между нормалью N к поверхности dA и радиусом сферы, проходящим через элементарную площадку dA .

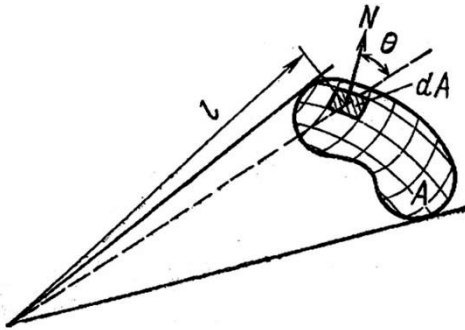


Рис. 3.2. К определению элементарного и полного телесных углов

Величина телесного угла тела (полного телесного угла) определится интегралом от $d\Omega$ по всей поверхности A :

$$\Omega = \int_A d\Omega = \int_A \frac{\cos(\theta)}{l^2} dA. \quad (3.9)$$

Российский ученый Андрей Александрович Гершун ввел понятие вектора телесного угла. Единичный вектор телесного угла направлен от вершины конической поверхности по её оси.

Пространственную плотность потока излучения называют силой излучения.

Сила излучения зависит от направления распространения излучения в пространстве. Модуль силы излучения определяется выражением:

$$I_e(\alpha, \beta) = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}, \quad (3.10)$$

где $d\Phi_e$ – бесконечно малый (элементарный) энергетический поток, распространяющийся в пространстве в пределах телесного угла $d\Omega$, направление оси которого определяется в полярной системе координат углами α и β (рис. 3.3). Единица измерения силы излучения – $\frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$.

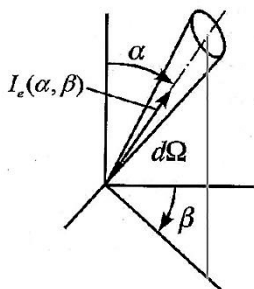


Рис. 3.3. К определению силы излучения

Из определения силы излучения следует, что эта характеристика строго применима только к точечным источникам излучения, для которых однозначно определяется положение вершины телесного угла $d\Omega$. В природе таких излучателей не существует. Является ли реальный излучатель точечным или нет определяется не его размерами, а тем, насколько его воздействие на окружающее пространство отличается от воздействия точечного излучателя. Расчеты показывают, что, при отсутствии на пути распростра-

нения излучения оптических элементов (неплоских зеркал, линз и т.д.), реальный излучатель можно считать точечным, если его максимальный линейный размер много меньше расстояния до точки, в которой оценивается его воздействие.

Распределение в пространстве потока излучения точечного источника однозначно определяется его *фотометрическим телом* – частью пространства, ограниченного поверхностью, проведенной через концы направленных отрезков силы излучения. Сечение фотометрического тела плоскостью, проходящей через начало координат и точечный источник, определяет *кривую силы излучения* (КСИ) (рис. 3.4).

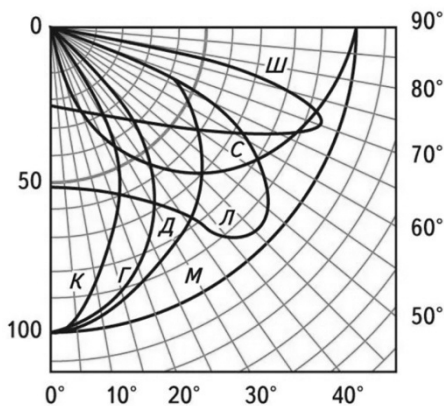


Рис. 3.4. Кривые силы излучения:

К – концентрированная; Г – глубокая; Д – косинусная; Л – полуширокая; Ш – широкая; М – равномерная; С – синусная

Сила излучения и энергетический поток импульсных источников излучения быстро изменяются с течением времени. В качестве одной из характеристик таких источников используется *энергетическое освечивание*:

$$O_e = \int_0^{\tau} I_e(t) dt, \quad (3.11)$$

где τ – длительность импульса излучения.

Единица измерения энергетического освечивания – $\frac{\text{Дж}}{\text{ср}}$.

3.3. Облученность, энергетическая экспозиция и закон обратных квадратов расстояния

Облученность определяет мощность, которую приносит излучение на единицу площади. Поскольку мощность излучения определяется его потоком, то *облученность* – это скалярная величина, равная отношению элементарного потока $d\Phi_e$, упавшего на площадку dA , к её площади:

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}. \quad (3.12)$$

Единица измерения облученности – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

В разных точках пространства значение облученности может быть различным. Кроме того, ее значение зависит от ориентации площадки в пространстве. При заданной ориентации площадки облученность – это функция координат точек на поверхности тела $E_e(x, y, z)$. Для площадки конечных размеров используют понятие средней облученности:

$$E_{e\text{ ср}} = \frac{1}{A} \int_A \int E_e(x, y) dx dy \rightarrow E_{e\text{ ср}} = \frac{\Phi_e}{A}, \quad (3.13)$$

где A – облучаемая площадь.

В разделе 1.1 показано, что эта фотометрическая характеристика излучения в случае, когда площадка dA (реальная или воображаемая) перпендикулярна направлению распространения излучения, выражается через параметры электромагнитного поля соотношением (1.90), откуда следует:

$$E_{e\perp} = v_\phi \frac{\overline{\varepsilon \varepsilon_0 E_{\text{max}}^2}}{2}.$$

Данное соотношение позволяет связать поток излучения с параметрами электромагнитного поля в виде:

$$d\Phi_e = v_\phi \frac{\epsilon\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} dA_\perp, \quad (3.14)$$

где dA_\perp – площадь проекции dA на плоскость, перпендикулярную направлению распространения излучения.

Облученность, которую создает точечный источник излучения можно рассчитать аналитически.

Из выражения (3.9) следует:

$$d\Phi_e = I_e(\alpha, \beta) d\Omega. \quad (3.15)$$

Элементарный телесный угол, в соответствии с выражением (3.8), определится соотношением (рис. 3.5):

$$d\Omega = \frac{dA_0 \cos(\theta)}{l^2}. \quad (3.16)$$

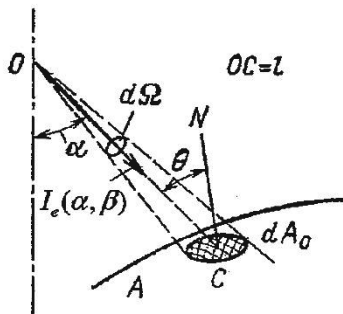


Рис. 3.5. К выводу закона обратных квадратов расстояний

Подставляя (3.16) в (3.15), получим:

$$d\Phi_e = I_e(\alpha, \beta) \frac{dA_0 \cos(\theta)}{l^2}. \quad (3.17)$$

С учетом выражения (3.12) окончательно получаем:

$$E_e = \frac{I_e(\alpha, \beta)}{l^2} \cos(\theta) = E_{e\perp} \cos(\theta). \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) показывает, что облученность изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между точечным источником (точка O) и рассматриваемой на теле точкой (точка C), поэтому закон получил название *закон обратных квадратов расстояний*. На самом деле, в полученном выражении присутствуют два закона:

1) закон обратного квадрата расстояния для значений облученности при нормальном падении излучения на площадку $E_{e\perp}$. Этот закон связан с изменением объемной плотности энергии сферической электромагнитной волны точечного источника и следует из уравнений Максвелла;

2) косинусная зависимость облученности от угла падения излучения на площадку. Эта зависимость получается за счет изменения величины телесного угла элемента dA при повороте площадки относительно направления падения излучения.

В некоторых случаях эффект от преобразования излучения (фотохимический, фотобиологический, фотографический и т.д.) зависит не от его мощности, а от энергии излучения, падающей на единицу площади поверхности тела. Для оценки эффективности излучения в таких процессах вводят скалярную величину – *энергетическую экспозицию* H_e .

Величина, определяющая энергию излучения, упавшую на единицу поверхности тела в течение всего времени облучения, называется *энергетической экспозицией*.

$$H_e = \frac{dQ_e}{dA}. \quad (3.19)$$

При известной зависимости облученности от времени ($E_e(t)$), значение энергетической экспозиции можно рассчитать:

$$H_e = \int_{t_n}^{t_k} E_e(t) dt, \quad (3.20)$$

где t_n, t_k – время начала и конца облучения.

Единица энергетической экспозиции – $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

3.4. Энергетическая светимость, энергетическая яркость.

Расчет облученности в фокальной плоскости идеальной оптической системы

Все реальные излучатели имеют конечные размеры. На них из окружающего пространства падает поток от внешних источников излучения, но и они сами излучают (отражают) в окружающее пространство поток излучения. Различные участки поверхности тела одинаковой площади могут излучать в окружающее пространство разные потоки излучения.

Для оценки распределения мощности такого излучения по поверхности тела вводят понятие энергетической светимости.

Энергетическая светимость – это скалярная величина, равная отношению потока излучения $d\Phi_e$, исходящего от площадки dA , к её площади. Величина энергетической светимости определяется выражением:

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}. \quad (3.21)$$

Единица измерения энергетической светимости – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Поскольку для разных участков поверхности тела значение энергетической светимости может быть различным, то она является функцией координат точек на его поверхности $M_e(x, y, z)$.

Если сравнить выражение (3.21) с выражением (3.12), определяющим облученность, то правые части выражений совпадают, однако их физический смысл разный. В выражении (3.21) $d\Phi_e$ – это энергетический поток излучения, *уходящий* от поверхности (испускаемый или отражаемый поверхностью) dA , в то время как в выражении (3.12) – это *падающий* на площадку dA поток излучения внешних источников.

Реакция многих приемников излучения, с которыми сталкивается светотехника, пропорциональна падающему на них энергетическому потоку. К таким приемникам относится и человеческий глаз (рис. 3.6). Глаз человека реагирует на световой поток, с которым мы познакомимся позже, однако при неизменном спектральном составе излучения световой поток пропорционален энергетическому.

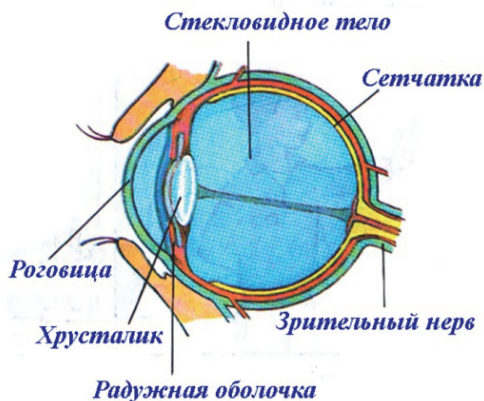


Рис. 3.6. Строение глаза человека

В первом приближении можно считать, что изображение предмета строится хрусталиком (элементом оптической системы глаза) на сетчатке (ретине), состоящей из светочувствительных приемников (рецепторов) излучения, сигналы которых передаются в мозг человека по зрительному нерву. Эти сигналы вызывают ощущение света. Реакция каждого рецептора сетчатки пропорциональна упавшему на него потоку излучения.

Из выражения (3.13) можно получить:

$$\Phi_e = E_e \text{cp} A_p, \quad (3.22)$$

где A_p – площадь рецептора.

Рассмотрим какая фотометрическая характеристика предмета определяет облученность в фокальной плоскости оптической системы.

На рисунке 3.7 представлено построение изображения dA_1 площадки dA с помощью идеальной (не искажающей и не ослабляющей излучение) оптической системы ОС, имеющей площадь входного зрачка $A_{\text{вх}}$ и фокусное расстояние f .

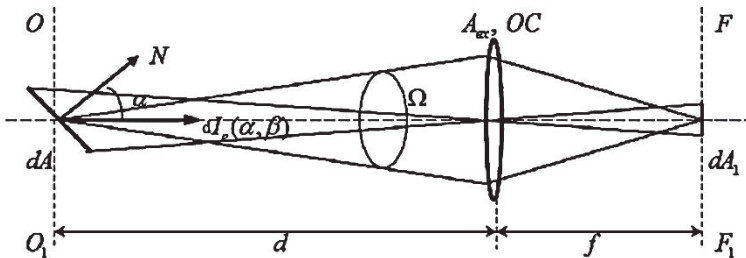


Рис. 3.7. К расчету облученности в плоскости изображения

Элемент площади dA расположим на расстоянии $d \gg f$ от оптической системы (ОС). Из курса физики известно, что в этом случае изображение dA_1 располагается в фокальной плоскости ($F - F_1$) на расстоянии f от ОС. Поток $d\Phi_e$, излучаемый площадкой dA в телесном угле Ω собирается оптической системой на её изображение, поэтому облученность (3.12) площадки dA_1 равна:

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA_1}. \quad (3.23)$$

Из определения силы излучения (3.10) следует, что:

$$d\Phi_e = dI_e(\alpha, \beta) \cdot \Omega. \quad (3.24)$$

Поскольку расстояние d много больше диаметра входного зрачка, то из (3.4) получим приближенное значение телесного угла:

$$\Omega \approx \frac{A_{\text{вх}}}{d^2}. \quad (3.25)$$

Из геометрии (рис. 3.7) следует соотношение:

$$\frac{dA \cdot \cos(\alpha)}{dA_1} = \frac{d^2}{f^2} \rightarrow dA_1 = \frac{f^2}{d^2} dA \cdot \cos(\alpha). \quad (3.26)$$

Подставляя (3.24), (3.25) и (3.26) в (3.23), получаем:

$$E_e = \frac{dI_e(\alpha, \beta) \cdot \frac{A_{\text{вх}}}{d^2}}{\frac{f^2}{d^2} dA \cdot \cos(\alpha)} = \frac{A_{\text{вх}}}{f^2} \cdot \left[\frac{dI_e(\alpha, \beta)}{dA \cdot \cos(\alpha)} \right] = \frac{A_{\text{вх}}}{f^2} \cdot L_e. \quad (3.27)$$

В средней формуле выражений (3.27) перед скобками стоят постоянные параметры оптической системы, поэтому облученность в изображении может изменяться только за счет изменения параметров излучающего тела, заключенных в квадратные скобки. Эта комбинация параметров называется энергетической яркостью объекта (L_e). Из полученного выражения следует, что:

$$L_e = \frac{dI_e(\alpha, \beta)}{dA \cdot \cos(\alpha)} = \frac{dI_e(\alpha, \beta)}{dA_{\perp}}, \quad (3.28)$$

где dA_{\perp} – площадь проекции dA на плоскость $O-O_1$, перпендикулярную направлению силы излучения.

Энергетическая яркость элемента поверхности (воображаемого или реального) равна отношению его силы излучения в выбранном направлении к площади проекции этой поверхности на плоскость, перпендикулярную выбранному направлению. Единич-

ца измерения энергетической яркости – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср}}$. Физическое содержание dA_{\perp} состоит в том, что это та светящаяся площадь, которую видит человек, когда посмотрит на площадку dA .

Как и сила излучения, яркость зависит от направления в пространстве, но поскольку в разных точках пространства значения силы излучения элементарных площадок и их ориентация могут быть различными, то яркость зависит от трех пространственных (x, y, z) и двух угловых (α, β) координат, т.е. это $L_e(x, y, z, \alpha, \beta)$. Однако существует достаточно много источников излучения: люминесцентные, тепловые (в частности, черное тело), гипс, матовые и молочные стекла и т.д., у которых яркость в широком диапазоне углов (α, β) приблизительно одинакова (выполняется закон Ламберта).

Сила излучения каждого элемента поверхности таких источников подчиняется косинусной зависимости, которая следует из выражения (3.28):

$$I_e(\alpha, \beta) = L_e(x, y, z) \cdot dA \cdot \cos(\alpha) = I_{e0} \cdot \cos(\alpha), \quad (3.29)$$

где I_{e0} – сила излучения при $\alpha = 0$.

Как видно из (3.29) сила излучения таких излучателей не зависит от угла β и подчиняется косинусной зависимости от угла α . Излучатели, яркость которых не зависит от направления в пространстве (углов α и β), называются изотропными излучателями. Если энергетическая яркость протяженных изотропных излучателей не зависит и от пространственных координат, то их называют равнояркими излучателями.

Элементарные изотропные излучатели всегда являются равнояркими излучателями, так как в их пределах пространственные координаты не изменяются. Для изотропных излучателей существует важное соотношение между их яркостью и светимостью поверхности. Рассмотрим излучение плоской изотропной поверх-

ности dA . Найдем поток $d^2\Phi_e$, который она излучает в пределах телесного угла $d\Omega$. Из определения силы излучения (3.10) получим:

$$d^2\Phi_e = dI_e(\alpha, \beta) \cdot d\Omega . \quad (3.30)$$

Для изотропной поверхности $I_e(\alpha, \beta) = I_e(\alpha)$ не зависит от β , поэтому $d\Omega$ определится выражением для зонального телесного угла (3.6):

$$d\Omega = 2\pi \sin(\alpha) d\alpha . \quad (3.31)$$

Из определения яркости (3.28) для изотропной поверхности получим:

$$I_e(\alpha) = L_e \cdot dA \cdot \cos(\alpha) . \quad (3.32)$$

Подставляя (3.31) и (3.32) в (3.30), получим:

$$d^2\Phi_e = 2\pi L_e \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha \cdot dA . \quad (3.33)$$

Поток площадки dA в полусфере определится выражением:

$$d\Phi_e = 2\pi L_e \cdot dA \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha . \quad (3.34)$$

Поскольку интеграл в выражении (3.34) равен $\frac{1}{2}$, то с учетом (3.21), получим:

$$M_e = \pi L_e . \quad (3.35)$$

3.5. Спектральные и эффективные характеристики излучения

Как уже отмечалось в разделе 1.3, каждый атом тела испускает монохроматическое излучения с узким спектром (преобразованием Фурье от отрезка синусоиды, испущенной атомом) (рис. 3.8). Поскольку атомы вещества непрерывно хаотически движутся и колеблются, то спектр совокупного излучения многих атомов за счет эффекта Доплера будет расширяться.

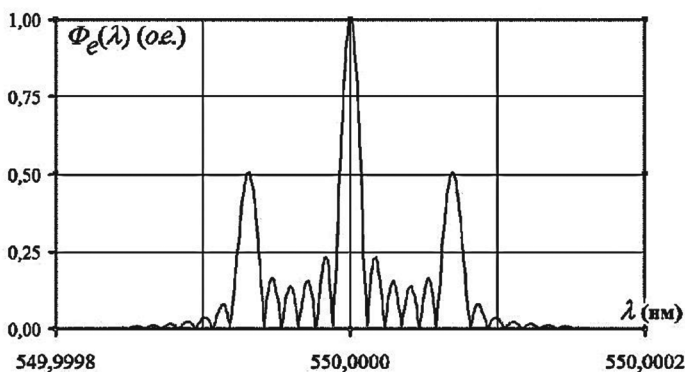


Рис. 3.8. Спектр определенной синусоиды

Происходит уширение спектральной линии излучения. Кроме отмеченной, существуют и другие причины уширения спектральных линий (собственное, лоренцевское и т.д.).

В твердом теле или при большом давлении излучающего газа это уширение настолько велико, что спектральные линии излучения разных атомов начинают перекрываться, образуя сплошной спектр излучения. На рисунках 3.9–3.11 изображены различные виды спектров.

Спектр, состоящий из набора отдельных спектральных неперекрывающихся линий (линейчатый спектр) представлен на рис. 3.9, сплошной – на рис. 3.10, смешанный – на рис. 3.11.

Линейчатый спектр излучения имеют газоразрядные источники излучения при низком давлении нагретого газа. Взаимодействие между молекулами и атомами газа в этом случае невелико и уширение спектральных линий излучения незначительно. При увеличении давления и температуры газа в разрядных источниках высокого давления отдельные спектральные линии начинают перекрываться. Это приводит к появлению смешанного спектра. Такой спектр излучения имеют люминесцентные лампы и газовые факелы низкого давления, особенно если в их объеме присутствуют твердые частицы. Сплошной спектр излучения характерен для излучения жидких и твердых тел.

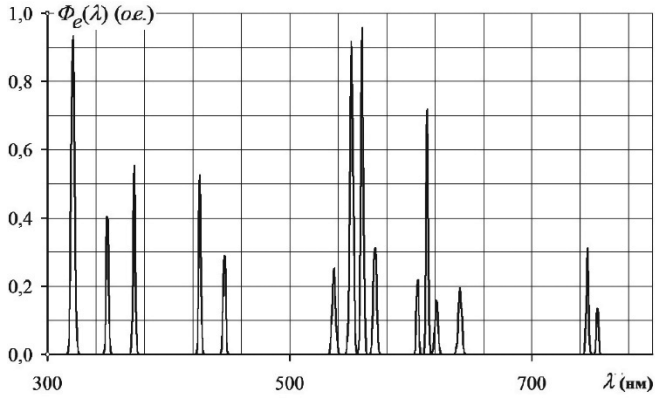


Рис. 3.9. Линейчатый спектр излучения

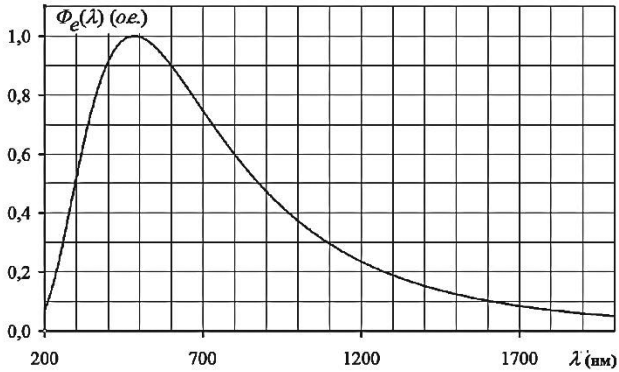


Рис. 3.10. Сплошной спектр излучения

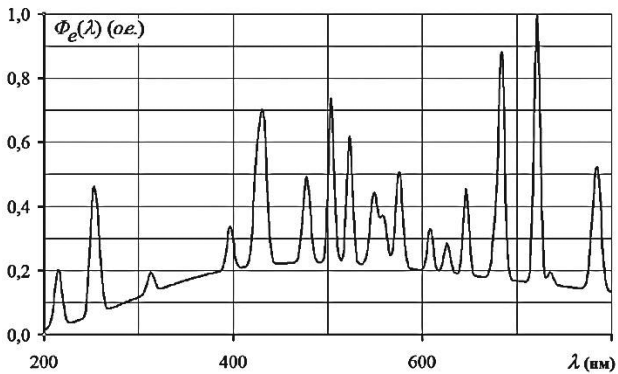


Рис. 3.11. Смешанный спектр излучения

При непрерывном спектре излучения, когда число монохроматических составляющих потока стремится к бесконечности, пользоваться значениями монохроматических потоков $\Phi_e(\lambda)$ неудобно.

В этом случае пользуются *спектральной плотностью потока излучения* $\Phi_{e\lambda}(\lambda)$:

$$\Phi_{e\lambda}(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi_e(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}, \quad (3.36)$$

где $\Phi_e(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ – поток излучения, длины волн которого лежат в диапазоне от λ до $\lambda + \Delta\lambda$.

При известной спектральной плотности потока излучения элементарный монохроматический поток можно рассчитать по выражению:

$$d\Phi_e(\lambda) = \Phi_{e\lambda}(\lambda)d\lambda . \quad (3.37)$$

МКО рекомендует для спектральной плотности мощности использовать обозначение $\Phi_{e\lambda}$. В светотехнической литературе монохроматический поток иногда обозначают $\Phi_e(\lambda, d\lambda)$.

Интеграл от спектральной плотности потока излучения по всему оптическому диапазону спектра дает значение Φ_e – *интегрального потока излучения*:

$$\Phi_e = \int_{\lambda=1 \text{ нм}}^{\lambda=1 \text{ мм}} \Phi_{e\lambda}(\lambda)d\lambda \approx \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda)d\lambda . \quad (3.38)$$

С помощью спектральной плотности потока излучения можно рассчитать поток излучения, который переносится излучением в произвольном спектральном интервале $(\lambda_1 - \lambda_2)$:

$$\Phi_e(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_{e\lambda}(\lambda)d\lambda . \quad (3.39)$$

В реальных задачах значение $\Phi_{e\lambda}(\lambda)$ вне оптической области спектра пренебрежимо мало, поэтому формально область интегрирования в (3.38) можно расширить от нуля до бесконечности.

Размерность спектральной плотности потока излучения – $\frac{\text{Вт}}{\text{м}}$, однако в светотехнике чаще используют внесистемные единицы измерения $\frac{\text{Вт}}{\text{мкм}}$ и $\frac{\text{Вт}}{\text{нм}}$.

Спектральную плотность можно записать для любой энергетической характеристики излучения. В таблице 3.1 приведены характеристики энергетической системы величин и их размерности.

Таблица 3.1

Энергетическая система величин и единиц

Интегральная характеристика	Размерность	Спектральная плотность	Размерность
Энергия излучения $Q_e = \int_0^{\tau} \Phi_e(t) dt$	Дж	$Q_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dQ_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{мкм}}$
Поток излучения $\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt};$ $\Phi_e = \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	Вт	$\Phi_{e\lambda}(\lambda) = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{мкм}}$
Сила излучения $I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega};$ $I_e = \int_0^{\infty} I_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$	$I_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dI_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{ср} \cdot \text{мкм}}$
Облученность $E_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \quad E_e = \int_0^{\infty} E_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	$E_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dE_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{мкм}}$

Окончание табл. 3.1

Интегральная характеристика	Размерность	Спектральная плотность	Размерность
<p>Энергетическая светимость</p> $M_e = \frac{d\Phi_e}{dA};$ $M_e = \int_0^{\infty} M_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	$M_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dM_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{мкм}}$
<p>Энергетическая яркость</p> $L_e = \frac{dI_e}{dA_{\perp}} \rightarrow L_e = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega dA_{\perp}};$ $L_e = \int_0^{\infty} L_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср}}$	$L_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dL_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{мкм}}$
<p>Энергетическая экспозиция</p> $H_e = \int_0^{\tau} E_e(t) dt;$ $H_e = \int_0^{\infty} H_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$	$H_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dH_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{мкм}}$
<p>Энергетическое освечивание</p> $O_e = \int_0^{\tau} I_e(t) dt$ $O_e = \int_0^{\infty} O_{e\lambda}(\lambda) d\lambda$	$\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{ср}}$	$O_{e\lambda}(\lambda) = \frac{dO_e(\lambda)}{d\lambda}$	$\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{ср} \cdot \text{мкм}}$

Экспериментальные исследования показывают, что реакция (изменение каких-либо свойств) различных тел при попадании на них излучения различна.

Для оценки эффективности взаимодействия излучения с различными объектами светотехники (человеческий глаз, листья растений, человеческая кожа и т.д.) вводят *эффективные характеристики излучения* (системы эффективных величин и единиц).

Все эти системы базируются на чувствительности к излучению некоторых условных приемников, которые в светотехнике называют *образцовыми приемниками излучения*.

Словарь МКО определяет системы различных эффективных величин и единиц в соответствии с выражением (2.6). При этом за $S_0(\lambda)$ принимаются различные функции с максимальным значением 1, которые называются спектрами действия или функциями спектрального взвешивания. Следуя исторической традиции эффективным назван и световой поток излучения, для которого максимальное значение спектра действия имеет размерность и не равно единице.

Аналогично выражению (2.6) для эффективного потока, можно получить выражение для любой фотометрической характеристики, приведенной в табл. 3.1. Например, эффективная сила излучения определится выражением:

$$I_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} I_{\text{ελ}}(\lambda) S_0(\lambda) d\lambda. \quad (3.40)$$

Кривые спектральной чувствительности приемников излучения, встречающихся в светотехнических задачах, отличаются тем, что сами значения, а также положение максимумов чувствительности для различных групп приемников сильно отличаются. Следовательно, их реакции на одно и то же излучение будут различны. Решать светотехническую задачу по освещению конкретного образца (например, конкретного человека), с учетом его индивидуальной кривой $S_0(\lambda)$ нерационально, так как в зону действия осветительной установки могут попадать и приемники (люди) с разными $S_0(\lambda)$.

При рациональном проектировании светотехнической установки необходимо пользоваться некоторыми усредненными спектральными характеристиками. Приемник с такой усредненной по группе приемников излучения спектральной характеристикой получил название *образцового приемника излучения*. К образцовому приемнику излучения предъявляются следующие требования.

1. Образцовый приемник должен реагировать на любые монохроматические излучения в пределах того участка спектра, на котором располагаются кривые спектральной чувствительности всех приемников данной группы.

2. Мера реакции образцового приемника при облучении его потоком излучения должна поддаваться непосредственному или косвенному измерению с необходимой точностью.

3. Эффективные величины системы, созданной на основе выбранного образцового приемника, должны обладать свойством аддитивности.

В настоящее время разработаны четыре основные системы эффективных величин и единиц: *световая, фотонная, эритемная и бактерицидная*. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных систем эффективных величин, рассмотрим, на базе какого образцового приемника строится основополагающая система энергетических величин. Из сопоставления двух выражений (3.38) и (2.6) для интегрального и эффективного потоков излучения следует, что в энергетической системе величин $S_0(\lambda) = 1$ во всей оптической области спектра. Такой приемник излучения, спектральная чувствительность которого не зависит от длины волны, называется *неселективным приемником*. В природе таких приемников излучения не существует.

Постоянную спектральную чувствительность в достаточно широком спектральном диапазоне имеют тепловые приемники излучения, которые чаще всего и используются для измерения энергетических характеристик излучения.

Все характеристики энергетической системы величин, приведенные в табл. 3.1 можно выразить через энергетический поток излучения. Поэтому для образования новой системы эффективных величин достаточно определить эффективный поток этой системы. Все остальные характеристики новой системы можно получить из характеристик энергетической системы путем замены потока излучения на эффективный поток излучения.

3.6. Световая система величин и единиц. Эквивалентная яркость

Образцовым приемником излучения в световой системе величин является стандартный фотометрический наблюдатель МКО. Зрительная система человека – это сложный приемник излучения, в котором происходит, как минимум, трехкратное преобразование энергии. Энергия излучения, поглощенная светочувствительным веществом глаза, преобразуется в химическую энергию распада молекул светочувствительного вещества. Вторым этапом является преобразование химической энергии распада молекул в электрическую энергию импульсов тока, возникающих в волокнах зрительного нерва, связывающих сетчатку глаза с корой головного мозга человека. Третьим этапом является преобразование энергии движения электронов в энергию биологических процессов зрительного ощущения. Сущность этого процесса преобразования внешней энергии в нервный процесс восприятия настолько сложна, что она до настоящего времени не изучена полностью. Поток излучения, падающий на поверхность глаза, проходит через прозрачную твердую *роговую оболочку (роговицу)*, расположенную перед *зрачком* (рис. 3.6). Роговая оболочка, обладая высоким показателем преломления ($n = 1,37$) и сравнительно малым радиусом кривизны, имеет большую оптическую силу, равную примерно 33 диоптриям. После преломления в роговой оболочке лучи попадают через *зрачок* (прозрачное отверстие в *радужной оболочке*) на *хрусталик*, представляющий собой эластичное прозрачное тело чечевицеобразной формы со средним показателем преломления ($n \approx 1,4$). Оптическая сила хрусталика меняется в пределах 19–33 диоптрий в зависимости от изменения формы наружных поверхностей хрусталика (в особенности передней) и его ядра.

Преломленные лучи, попавшие внутрь глаза от наблюдаемого предмета, создают на *сетчатой оболочке (ретине)* глаза уменьшенное и перевернутое изображение этого предмета. Подробно работа человеческого глаза и всей зрительной системы будет описана в гл. 8. В данном разделе нам важно, что приемни-

ки излучения, на основе которых формируется образцовый приемник излучения световой системы, расположены в сетчатой оболочке.

Несмотря на малую толщину сетчатой оболочки, равную примерно 0,2 мм, ее устройство очень сложно (рис. 3.12, направление распространения света сверху вниз). Эта оболочка образована из нескольких слоев различно специализированных клеток зрительного нерва – *нейронов*.

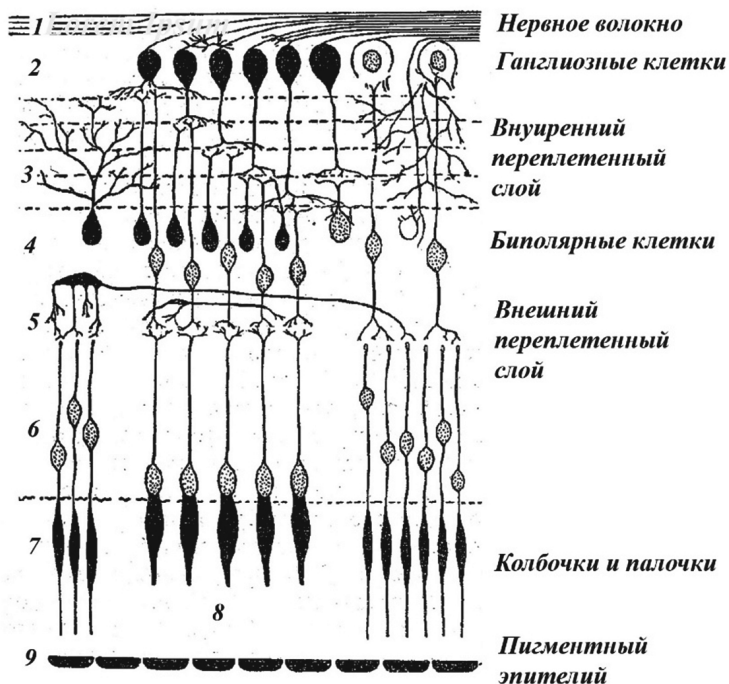


Рис. 3.12. Строение сетчатки

Излучение, пройдя глазные среды и минуя промежуточные слои нейронов, достигает первого слоя, расположенного на границе пигментного слоя сетчатой оболочки. Каждый нейрон первого нейронного слоя заканчивается одним или несколькими светочувствительными элементами, называемыми *палочками* (7 на рис. 3.12) или *колбочками* (8 на рис. 3.12) в зависимости от

их характерной формы (рис. 3.13). Излучение, достигшее первого слоя нейронов, поглощается молекулами светочувствительного вещества, заполняющего палочки и колбочки.

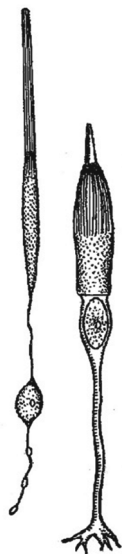


Рис. 3.13. Палочка (слева) и колбочка сетчатки

В сетчатой оболочке каждого глаза имеется около 130 млн палочек и более 7 млн колбочек, которые в основном сосредоточены в центральной части сетчатой оболочки (*желтое пятно*).

Палочки расположены в пределах всей сетчатой оболочки, причем их максимальная концентрация наблюдается в зоне, смещенной на $10-12^\circ$ от центра.

В центральной же части сетчатой оболочки плотность расположения колбочек максимальна и достигает более 10^5 на 1 мм^2 . В этой зоне сетчатой оболочки имеет место максимальная индивидуализация обслуживания светочувствительных элементов нервными волокнами, каждое из которых обслуживает не более двух-трех элементов.

В отличие от этого, в периферической части сетчатой оболочки на одно волокно нерва приходится несколько десятков и сотен палочек. Вследствие такой структуры сетчатой оболочки,

глаз обладает способностью различать мельчайшие детали, размеры изображения которых не превышают тысячных долей миллиметра, лишь только центральной частью поля зрения, ограниченной угловым размером $1,3-1,5^\circ$. Остальная часть сетчатой оболочки, которая в основном заполнена палочками, служит для общей зрительной ориентации в пространстве.

В палочках было обнаружено некоторое вещество, имеющее пурпурный цвет. Молекулы этого вещества, названного *родопсином* (зрительным пурпуром), при поглощении света диссоциируют на протеин и ретинен. Фотохимическая реакция распада молекул родопсина является обратимой, в результате чего наряду с распадом молекул родопсина происходит их восстановление. Колбочки сетчатой оболочки также содержат светочувствительное вещество, названное *иодопсином*. Это вещество так же, как и родопсин, вступает в обратимую фотохимическую реакцию фотодиссоциации при поглощении света. Каждому значению плотности облучения сетчатой оболочки соответствует определенная концентрация молекул родопсина и иодопсина, устанавливающаяся в результате баланса распада и восстановления молекул этих веществ. Процесс установления такого равенства при изменении яркости окружающего пространства называется *адаптацией*.

Уровень концентрации иодопсина и родопсина в палочках и колбочках определяется плотностью эффективного облучения сетчатой оболочки.

Максимум спектральной чувствительности родопсина находится в районе $0,510$ мкм, а максимум спектральной чувствительности иодопсина лежит на длине волны $0,555$ мкм. Существуют три разновидности иодопсина, имеющих максимумы чувствительности в красной, желто-зеленой и синей областях спектра и содержащихся в колбочках различного типа, условно названных К, З и С рецепторами (в иностранной литературе *L*, *M*, *S* рецепторы). Это позволяет человеку различать цвета. Вследствие значительно большей чувствительности родопсина палочки работают при низких уровнях возбуждения глаза, в то время как колбочки, обладающие меньшей чувствительностью, работают при высоких уровнях возбуждения глаза.

Первичным процессом зрительного ощущения является поглощение фотонов колбочками и палочками с последующей фотохимической диссоциацией молекул иодопсина и родопсина. Этот процесс избирателен по спектру падающего на глаз излучения. Как показали исследования Уолда, родопсин чувствителен преимущественно к излучениям с длинами волн 0,38–0,64 мкм, а иодопсин – в пределах 0,38–0,78 мкм. Эта особенность глаза как приемника оптического излучения приводит к специфическому свойству – зависимости его спектральной чувствительности от уровня возбуждения (уровня адаптации). В условиях яркости адаптации $L_V \geq 10 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2}$ функционирует преимущественно колбочковый световоспринимающий аппарат. Палочковый световоспринимающий аппарат чувствителен к излучениям при низких уровнях яркости. В режиме *сумеречного зрения*, когда обе системы световоспринимающих элементов работают совместно, спектральная чувствительность глаза определяется не только длиной волны излучения, но и соотношением уровней возбуждения глаза, определяемым долями участия в зрительном процессе палочек и колбочек. Чем выше уровень возбуждения глаза, т.е. чем ближе условия к дневному зрению, тем ближе кривая спектральной чувствительности к кривой дневного зрения.

Средняя по множеству наблюдателей (среднестатистическая) спектральная чувствительность глаза человека принимается за спектральную чувствительность образцового приемника в световой системе величин.

Решением МКО функции относительной спектральной чувствительности глаза для *дневного* и *ночного* зрения принято называть функциями *относительной спектральной световой эффективности монохроматического излучения*. Обе кривые относительной спектральной световой эффективности для стандартного наблюдателя МКО ($V(\lambda)$ – для дневного зрения и $V'(\lambda)$ – для ночного зрения) близки друг к другу по форме, но смещены одна относительно другой примерно на 50 нм (рис. 3.14).

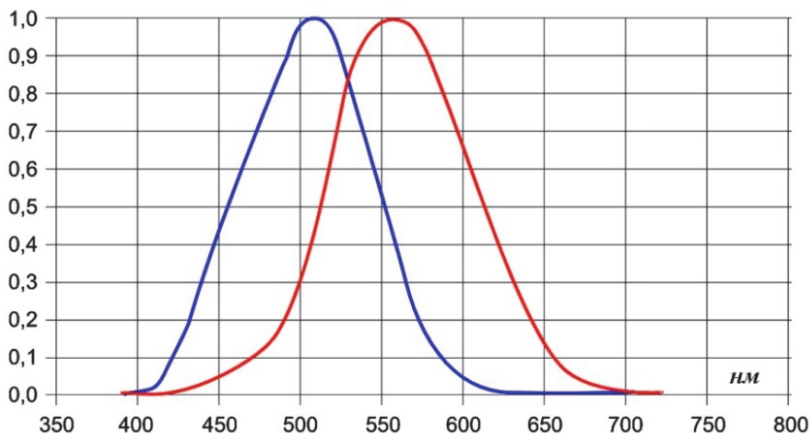


Рис. 3.14. Спектральные чувствительности зрительной системы человека для дневного (красная кривая) и ночного зрения

Для получения выражения, определяющего световой поток излучения, необходимо знать максимальные значения функций спектральной световой эффективности $K(\lambda) = K_{\max} V(\lambda)$ и $K'(\lambda) = K'_{\max} V'(\lambda)$. Эти значения определяются через одну из семи основных единиц измерения СИ – *канделу*.

По определению точечный монохроматический источник излучения частотой $5,4 \cdot 10^{14}$ Гц ($\lambda \approx 555$ нм) и энергетической силой излучения равной $\frac{1}{683} \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$ имеет силу света в *одну канделу*.

Исходя из выражения для эффективной силы излучения (3.40), для силы света монохроматического источника излучения можно получить выражение:

$$I_V = K_{\max} I_e(\lambda) V(\lambda), \quad (3.41)$$

где $I_e(\lambda) = \frac{1}{683}, \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$ – монохроматическая сила излучения на длине волны 555 нм; $V(\lambda) = 1$ для длины волны излучения 555 нм.

Записав выражение (3.41) для силы света в 1 канделу, получим:

$$1 \text{ кд} = K_{\max} \frac{1}{683} \frac{\text{Вт}}{\text{ср}} \rightarrow K_{\max} = 683 \frac{\text{кд}}{\text{Вт/ср}} \rightarrow$$

$$\rightarrow K_{\max} = 683 \frac{\text{кд} \cdot \text{ср}}{\text{Вт}} \quad (3.42)$$

С учетом полученного значения K_{\max} , выражение для силы света источника излучения сложного спектрального состава определится выражением:

$$I_V = 683 \int_0^{\infty} I_{e\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda, \quad (3.43)$$

где сила света I_V измеряется в кд, спектральная плотность силы излучения $I_{e\lambda}(\lambda)$ – в $\frac{\text{Вт}}{\text{ср} \cdot \text{мкм}}$, а λ – в мкм.

За единицу светового потока принят люмен (лм), численно равный световому потоку, излучаемому в телесном угле один стерадиан изотропным точечным источником с силой света в одну канделу, кд. Для изотропного источника света можно записать:

$$\Phi_V = I_V \Omega. \quad (3.44)$$

Записав (3.44) для потока $\Phi_V = 1$ лм, при силе света $I_V = 1$ кд и телесном угле $\Omega = 1$ ср, получим, $1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}$, откуда следует размерность люмена – кд · ср.

Таким образом, с учетом (3.42), можно записать $K_{\max} = 683 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$.

С учетом (2.6), для светового потока получим выражение:

$$\Phi_V = 683 \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda. \quad (3.45)$$

Если используется только световая система величин, то при записи световых величин допускается опускать индекс V в обозначениях световых величин.

Единицы световой системы получаются из энергетической системы простой заменой потока излучения на световой поток.

В световой системе ночного зрения относительная спектральная световая эффективность монохроматического излучения – это $V'(\lambda)$. Согласно решению МКО значения всех спектров дей-

ствия на длине волны 555 нм должны равняться $683 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$, поэто-

му значение максимальной чувствительности образцового приемника K'_{max} больше, чем в световой системе дневного зрения и при-

ближенно равно $1700 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$, поэтому выражение для светового по-

тока в системе световых величин ночного зрения имеет вид:

$$\Phi'_V = 1700 \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda}(\lambda) V'(\lambda) d\lambda . \quad (3.46)$$

В таблице 3.2 приведены все характеристики световой системы величин и единицы их измерения.

Двойственность световоспринимающего аппарата глаза, а также различие спектральной чувствительности палочек и колбочек приводят к изменению спектральной и интегральной чувствительности глаза в функции уровня яркости и спектра излучения. Эти процессы называют *яркостной* и *цветовой адаптацией*. Адаптацией принято называть приспособление зрительного аппарата к заданной яркости и цветности поля зрения путем регулирования концентрации молекул родопсина и иодопсина в палочках и колбочках, а также перестройки рецептивных полей и экранирование сетчатки темным пигментом при высоких яркостях. Функции спектральной световой эффективности излучения для каждого уровня яркости на интервале $0,01 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2} \leq L_V \leq 10 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2}$ изменяются наиболее сильно.

Таблица 3.2

Световая система величин и единиц

Название	Обозначение и расчетное выражение	Допустимое обозначение	Размерность
Световая энергия	$Q_V = \int_0^T \Phi_V(t) dt$	Q	лм · с
Световой поток	$\Phi_V = \frac{dQ_V}{dt}$ $\Phi_V = 683 \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda$	Φ	люмен = = (кд · ср), (лм)
Сила света	$I_V = \frac{d\Phi_V}{d\Omega}$	I	кандела (кд)
Освещенность	$E_V = \frac{d\Phi_V}{dA}$	E	люкс = = $\left(\frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right)$, (лк)
Светимость	$M_V = \frac{d\Phi_V}{dA}$	M	$\frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$
Яркость	$L_V = \frac{dI_V}{dA_\perp} \rightarrow L_V = \frac{d^2\Phi_V}{d\Omega dA_\perp};$ $L_V = 683 \int_0^\infty L_{e\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda$	L	$\frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$
Экспозиция	$H_V = \int_0^T E_V(t) dt$	H	лк · с
Освечивание	$O_V = \int_0^T I_V(t) dt$	O	кд · с

В 1823 г. чешский ученый Ян Эвангелиста Пуркине установил неодинаковое потемнение разноцветных равной яркости поверхностей при уменьшении яркости поля зрения в интервале $10-0,01$ кд·м². Несмотря на одинаковую расчетную яркость со стандартной кривой $V(\lambda)$, синие излучения воспринимались более светлыми, чем красные. Это явление относительного посветления синего и потемнения красного цветов, по сравнению с белым, при переходе от дневного зрения к ночному, названо *эффектом Пуркине*. Оно возникает из-за смещения относительной спектральной световой эффективности излучения в зону коротких длин волн (рис. 3.15). Причиной возникновения этого эффекта в условиях темновой адаптации являлось повышение концентрации молекул родопсина и увеличение рецептивных полей сетчатки.

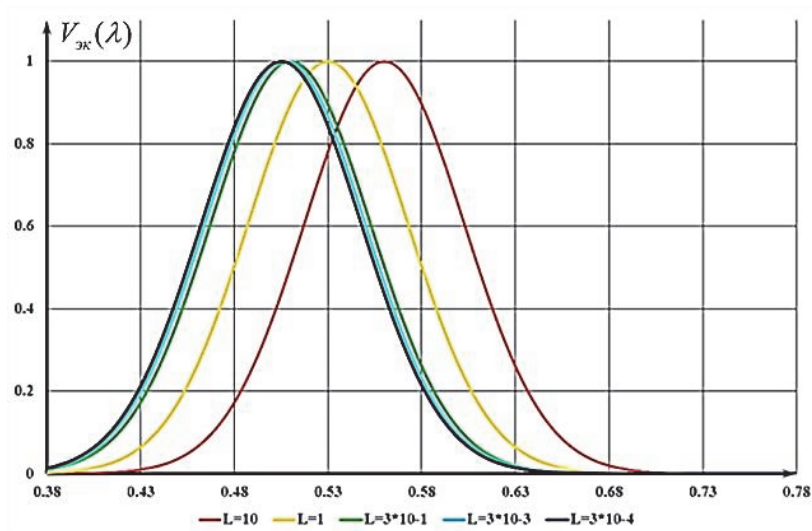


Рис. 3.15. Спектральные чувствительности глаза при различных яркостях адаптации

Наличие эффекта неодинакового зрительного ощущения (светлоты) разноспектральных излучений при одинаковой их яркости в области $L_v \leq 10 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2}$ позволяет сделать вывод о необходимости введения некоторой световой величины, однозначно определяющей уровень ощущения независимо от спектрального состава оцениваемого излучения малой яркости. Для возможности использования этой величины в светотехнической практике необходимо, чтобы величину можно было рассчитать и измерить. В качестве такой величины была предложена *эквивалентная яркость излучения* заданного спектрального состава, определяемая как яркость равносветлого оптически смежного излучения условленного спектрального состава с $T_{\text{ц}} = 2045 \text{ К}$.

Из этого определения следует, что эквивалентную яркость можно измерить, сопоставляя исследуемое излучение с эталонным по их светлоте, т.е. по условиям эквивалентности уровня зрительного ощущения. Вводя эту световую величину, будем характеризовать каждое излучение в области малых яркостей (сумеречное и ночное зрение) стандартной (фотометрической) яркостью, определяемой стандартизированной кривой относительной спектральной чувствительности глаза в условиях дневного зрения и эквивалентной яркостью, характеризующей действительное ощущение. Соотношение между этими значениями яркости будет изменяться в функции эквивалентной яркости, причем эти изменения будут различными для разноспектральных излучений. Для иллюстрации этого, а также для показа практической значимости понятия эквивалентной яркости, на рис. 3.16 приведены кривые зависимости эквивалентной яркости от стандартной для синего и красного излучений. Из этих кривых можно видеть, что для стандартной яркости $L = 0,01 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2}$ значения эквивалентной яркости различаются более, чем на порядок. Учитывая эту особенность зрительного ощущения, сопоставление разноцветных излучений малой яркости следует производить по эквивалентной яркости.

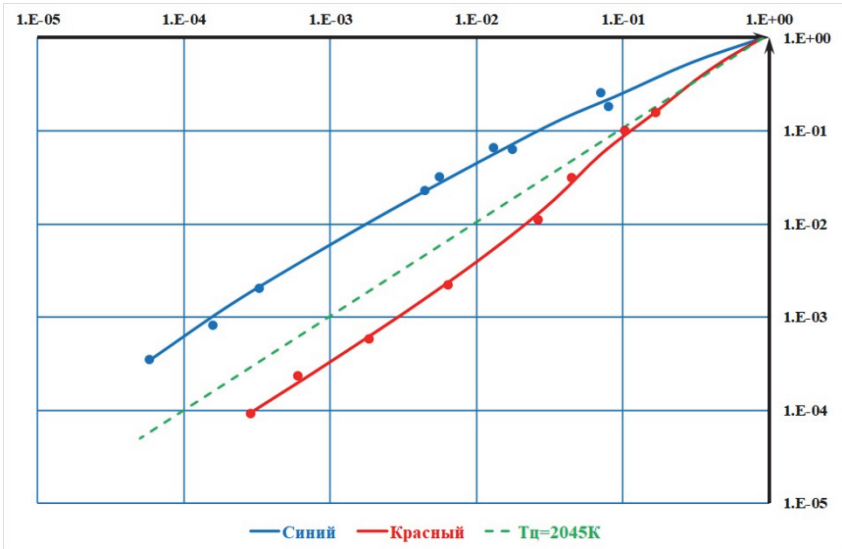


Рис. 3.16. Связь эквивалентной и стандартной яркостей

Расчет эквивалентной яркости ($L_{\text{эк}}$) любого исследуемого излучения затруднен тем, что значение относительной спектральной чувствительности глаза $V_{\text{эк}}(\lambda) = V(\lambda, L_{\text{эк}})$ и её максимальное значение $S_L(L_{\text{эк}})$ зависят от определяемой эквивалентной яркости:

$$L_{\text{эк}} = S_L(L_{\text{эк}}) \int_0^{\infty} L_{\text{эл}}(\lambda) V(\lambda, L_{\text{эк}}) d\lambda, \quad (3.47)$$

где $L_{\text{эл}}(\lambda)$ – спектральная плотность энергетической яркости исследуемого излучения.

Следовательно, уравнение, определяющее эквивалентную яркость, можно решить лишь методом последовательных приближений. Задаваясь начальной оценкой $L_{\text{эк}}$ (например, стандартной яркостью), рассчитывают её значение по выражению (3.47). Если полученное значение значительно отличается от начальной оценки, то это значение берется в качестве новой начальной оценки. Такая последовательность значений $L_{\text{эк}}$ сходится к ее истинному значению.

3.7. Фотонная, эритемная и бактерицидная системы величин

Реакция квантовых (фотонных) приемников излучения (фотоэлементов, фотодиодов и т.д.) возникает за счет поглощения фотонов, поэтому их сигнал пропорционален не энергетическому потоку излучения, а числу фотонов в единицу времени, упавших на приемник, т.е. потоку фотонов. Наличие таких фотоприемников привело к разработке фотонной системы величин.

Монохроматический *фотонный поток* $\Phi_p(\lambda)$ определяется как число квантов излучения (фотонов) в секунду, которые переносят энергетический поток $\Phi_e(\lambda)$. Поскольку энергия одного кванта равна $h\nu$, то:

$$\Phi_p(\lambda) = \frac{\Phi_e(\lambda)}{h\nu} \rightarrow \Phi_p(\lambda) = \frac{\Phi_e(\lambda)}{hc} \lambda. \quad (3.48)$$

Поскольку любая система эффективных величин обладает свойством аддитивности, то фотонный поток излучения сложного спектрального состава (интегральный фотонный поток) определяется выражением:

$$\Phi_p = \frac{1}{hc} \int_0^{\infty} \lambda \Phi_e(\lambda) d\lambda. \quad (3.49)$$

Размерность единицы фотонного потока – $\frac{1}{c}$, т.е. число фотонов в секунду.

Все другие величины фотонной системы единиц получают из энергетической системы величин путем замены потока излучения на фотонный поток. Названия величин фотонной системы (кроме энергии излучения) аналогичны названиям величин энергетической системы, с заменой слова «энергетический» на «фотонный». Названия фотонного аналога энергии излучения – число фотонов. В таблице 3.3 приведены фотонные величины и их размерности.

Как следует из определения фотонного потока, в качестве образцового приемника излучения в фотонной системе единиц взят идеальный приемник, в котором каждый упавший на него

квант излучения порождает свободный электрон (квантовый выход приемника $\eta_k = 1$). Рассмотрим какова спектральная токовая чувствительность у этого образцового приемника излучения.

В главе 2 для фотоэлемента мы получили выражение (2.55) для его токовой чувствительности $S_{\Phi_{ei}}(\lambda) = \frac{\lambda e}{hc} \eta_k(\lambda)$.

Полученная линейная зависимость чувствительности от длины волны сохраняется, согласно формуле Эйнштейна, до красной границы фотоэффекта ($\lambda_{кр}$), поэтому выражение для относительной спектральной чувствительности приемника имеет вид:

$$S_i(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}. \quad (3.50)$$

Таблица 3.3

Фотонная система единиц

Название	Обозначение и расчетное выражение	Размерность
Число фотонов	$Q_p = \int_0^T \Phi_p(t) dt$	безразмерна
Фотонный поток	$\Phi_p = \frac{dQ_p}{dt}$ $\Phi_p = \frac{1}{hc} \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda) \lambda d\lambda$	$\frac{1}{c}$
Фотонная сила излучения	$I_p = \frac{d\Phi_p}{d\Omega}$	$\frac{1}{\text{ср} \cdot \text{с}}$
Фотонная облученность	$E_p = \frac{d\Phi_p}{dA}$	$\frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$

Название	Обозначение и расчетное выражение	Размерность
Фотонная светимость	$M_p = \frac{d\Phi_p}{dA}$	$\frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$
Фотонная яркость	$L_p = \frac{dI_p}{dA_{\perp}} \rightarrow L_p = \frac{d^2\Phi_p}{d\Omega dA_{\perp}};$ $L_p = \frac{1}{hc} \int_0^{\infty} L_{e\lambda}(\lambda) \lambda d\lambda$	$\frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{с}}$
Фотонная экспозиция	$H_p = \int_0^T E_p(t) dt$	$\frac{1}{\text{м}}$
Фотонное освечивание	$O_p = \int_0^T I_p(t) dt$	$\frac{1}{\text{ср}}$

График относительной спектральной чувствительности образцового приемника излучения для фотонной системы единиц представлен на рис. 3.17. Следует отметить, что реальные квантовые приемники излучения имеют отличие от этой идеальной зависимости в области коротких длин волн (около нуля) и вблизи красной границы фотоэффекта.

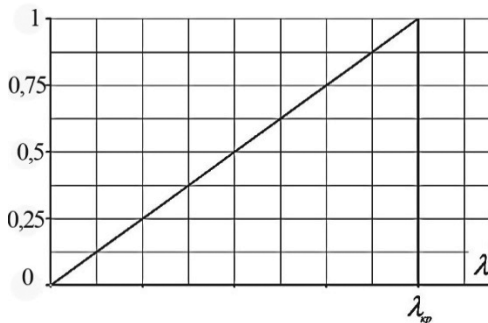


Рис. 3.17. Относительная спектральная токовая чувствительность образцового приемника фотонной системы величин

Кванты ультрафиолетового излучения, обладающие большой энергией, способны изменять химическую структуру отдельных клеток и тканей живых организмов. Установлено, что ультрафиолетовое излучение с длинами волн от 280 до 400 нм оказывает полезное действие на организм человека, животных и птиц. Принято считать, что главную роль в тонизирующем и терапевтическом действии УФ излучения играют расширение кровеносных сосудов и последующие за этим реакции организма в результате действия гистамина. На основании этого мерой тонизирующего и терапевтического действия излучения принято считать степень покраснения кожи в результате ее облучения (возникновение *эритемы*). Эритема наступает по истечении нескольких часов (2–5) после облучения, что отличает ее от *гиперемии* – покраснения кожи в результате теплового действия видимых и инфракрасных излучений. Практикой установлено, что пороговая эритема наблюдается при 1 биодозе лишь в тех случаях, когда время облучения не менее 10 с и не более 1 ч. При малых плотностях облучения, когда время действия излучения, соответствующее 1 биодозе, равно нескольким часам, продукты фотохимических реакций, вызывающие эритему, будут частично восстанавливаться или удаляться из организма в результате обмена веществ, что приведет к ослаблению биологического действия излучения. Следует отметить, что эритему вызывает не только УФ излучение, но и видимое излучение 380–400 нм.

В 1998 г. международная организация по стандартизации (ISO) приняла зависимость *относительной спектральной эритемной эффективности излучения*, которая приведена на рис. 3.18.

Для этой зависимости существует аналитическая аппроксимация в виде:

$$\begin{aligned} V_{\text{эп}} &= 1 && \text{при } 250 \text{ нм} \leq \lambda \leq 298 \text{ нм}; \\ V_{\text{эп}} &= 10^{0,094(298-\lambda)} && \text{при } 298 \text{ нм} \leq \lambda \leq 328 \text{ нм}; \\ V_{\text{эп}} &= 10^{0,015(140-\lambda)} && \text{при } 328 \text{ нм} \leq \lambda \leq 400 \text{ нм}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Выражение для расчета *эритемного потока* излучения имеет вид:

$$\Phi_{\text{эп}} = \int_{0,25}^{0,4} \Phi_{\text{эл}}(\lambda) V_{\text{эп}}(\lambda) d\lambda. \quad (3.52)$$

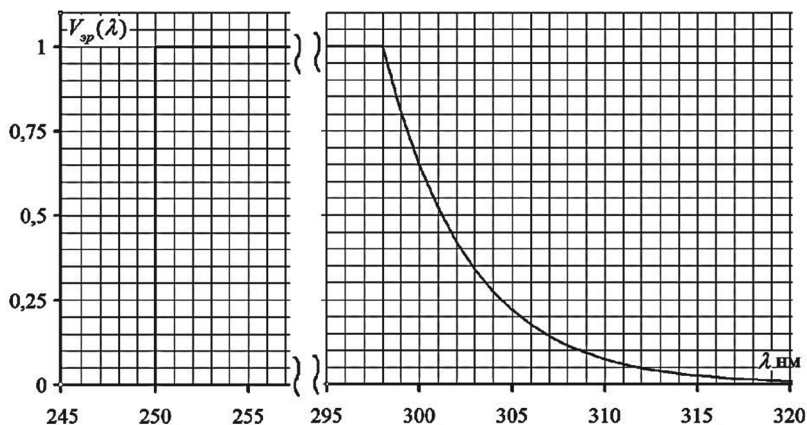


Рис. 3.18. Относительная спектральная эффективность эритемного излучения

Спектральная эритемная эффективность излучения принята равной нулю в области $205 \text{ нм} \leq \lambda \leq 250 \text{ нм}$, однако это излучение также вызывает эритему, но при этом оно оказывает вредное воздействие, так как разрушает кожные клетки.

Значение $V_{эп}(\lambda_{\text{max}})$ принято равным 1 для длины волны 0,298 мкм. Единицей эритемного потока принято считать эффективный Ватт эритемного излучения. Следует отметить, что, когда приводится количественная характеристика любого эффективного потока (кроме светового), необходимо указывать какой спектр действия (какая системы единиц) имеется в виду, так как единицы измерения всех эффективных потоков одинаковы – это Вт (точнее эффективный Вт).

Минимальная эритемная экспозиция, вызывающая эритему первой степени, называемая *эритемной дозой (биодозой)*, численно равна $156 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$. Следует отметить, что данное значение является только средним значением, и индивидуальные отличия могут различаться в несколько раз. В следствие этого, в медицине биодозу для каждого пациента определяют индивидуально.

В качестве источников эритемного излучения применяются дуговые разрядные ртутные лампы высокого давления ДРТ–125, ДРТ 240, ДРТ–400, ДКБ–7, ДКБ–9, TUV PL–S 7W/2P, *Philips Cleo Compact* 15W, ЛЭ–15, ЛЭ–30, ЛУФ–4 и др. Средние значения эритемного потока для диапазона УФ–А составляет 10–15% от мощности лампы, отношение мощности излучения в спектральном диапазоне УФ–В к мощности излучения в диапазоне УФ–А составляет 1–2%.

Ультрафиолетовое излучение может активно воздействовать на микроорганизмы. Для разрыва связей молекул белкового вещества бактерий необходима значительная энергия – порядка $377 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$, что соответствует энергии фотонов УФ излучения с длиной волны $\lambda < 0,3$ мкм. Ультрафиолетовое излучение с длинами волн 205–315 нм обладает *бактерицидным действием*, которое проявляется в фотохимических повреждениях ДНК клеточного ядра микроорганизма, что приводит к гибели микробной клетки в первом или последующих поколениях. *Бактерицидное излучение* – это ультрафиолетовое излучение, заключенное в указанном спектральном диапазоне. Реакция живой микробной клетки на ультрафиолетовое излучение не одинакова для различных длин волн. Зависимость бактерицидной эффективности от длины волны излучения ($V_{\text{БК}}(\lambda)$), т.е. относительная спектральная чувствительность образцового приемника бактерицидной системы величин, приведена на рис. 3.19.

Эффективный *поток бактерицидного излучения*, с помощью которого можно определить все остальные величины бактерицидной системы величин и единиц, определится выражением:

$$\Phi_{\text{БК}} = \int_{0,205}^{0,315} \Phi_{\text{эл}}(\lambda) V_{\text{БК}}(\lambda) d\lambda, \quad (3.53)$$

где пределы интегрирования в (3.53) выражены в мкм.

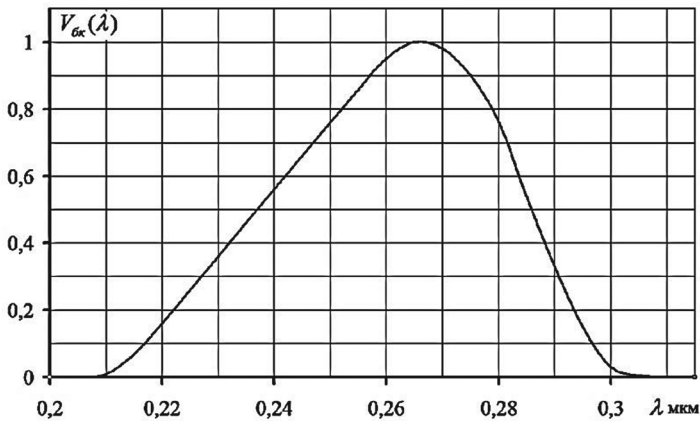


Рис. 3.19. Относительная спектральная эффективность бактерицидного излучения

Значение максимальной чувствительности $V_{бк}(\lambda_{max})$ принято равной 1 для длины волны 0,265 мкм.

Чтобы вызвать гибель 90% клеток, подавление синтеза нуклеиновых кислот и белков, образование мутаций необходимо создать дозу облучения не менее $10-20 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

В бактерицидных установках используют ртутные лампы низкого и высокого давлений, однако наиболее эффективны лампы низкого давления, у которых доля излучения резонансной линии $\lambda = 0,254$ мкм составляет около 80% от полного потока лампы. К ним относятся ДРБ 8, 15, 30, 60 Вт и многие др. В ряде ламп с кварцевым стеклом колбы используется защитное покрытие, поглощающее излучение резонансной линии излучения ртути $\lambda = 0,185$ мкм, что уменьшает образование озона в окружающем воздухе (ДРП 250, 400 Вт).

Чрезмерная доза бактерицидного облучения может вызывать повышенную эритему кожи, воспаление слизистых оболочек глаза, а также раздражение слизистых оболочек дыхательных путей озоном, получающимся в результате фотополимеризации мо-

лекул кислорода воздуха при поглощении ими УФ излучения. Учитывая это, следует избегать плотности бактерицидного облучения в зоне пребывания людей на высоте 1,5 м от пола более

$$E_{\text{БК}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \text{ при ежедневном пребывании людей в облучаемом помещении в течение 8 ч.}$$

Как и для фотонной системы единиц, названия всех других величин рассмотренных эритемной и бактерицидной систем аналогичны названиям энергетической системы и образуются из названий ее величин путем замены слова «энергетический» на «эритемный» или «бактерицидный», соответственно, либо их добавлению к названию единиц энергетической системы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мешков, В.В. Основы светотехники: учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / В.В. Мешков. – 2-е изд., перераб. – М.: Энергия, 1979. – 386 с.

В книге рассматриваются системы энергетических, а также эффективных (световых, эритемных и бактерицидных) величин и единиц оптического излучения. Описываются основные закономерности теплового излучения и люминесценции. Излагаются основы теоретической фотометрии. Рассматриваются законы поглощения, отражения и рассеяния оптического излучения. Излагаются общие законы преобразования оптического излучения.

2. Справочная книга по светотехнике / под ред. Ю.Б. Айзенберга. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Редакция журнала «Светотехника», 2019. – 892 с.

Четвёртое полностью переработанное издание книги «Справочная книга по светотехнике» даёт достаточное представление о состоянии светотехнической науки и техники в конце XX в. и начале XXI в. Предназначена для широкого круга специалистов, работа которых связана с применением естественного и искус-

ственного освещения, разработкой и производством светотехнических изделий, проектированием, монтажом и эксплуатацией светотехнических установок.

3. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов: В 4т. – М.: Наука, 1966. – Т.3. – С. 389–391.

Настоящее издание представляет собой первое в мировой литературе фундаментальное собрание научных трудов Эйнштейна. Третий том содержит все физические статьи, не связанные с теорией относительности. Кроме статей по кинетической теории и теории излучения, в томе собраны полемические статьи по квантовой механике.

4. ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

4.1. Основные законы геометрической оптики

Рассмотрим траектории лучей в среде с заданным распределением показателя преломления $n(\mathbf{r})$ на основе уравнения луча (1.85). Будем считать, что среда однородная $n \neq n(\mathbf{r})$ и $\nabla n(\mathbf{r}) = 0$. Тогда (1.85) примет вид:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0. \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1), определяющего равенство нулю второй производной, есть линейная функция:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}, \quad (4.2)$$

где постоянные вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} определяются из граничных условий:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} = \hat{\mathbf{l}}, \quad (4.3)$$

что определяет точку выхода и направление луча.

Соответственно, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\hat{\mathbf{l}}, \quad (4.4)$$

то есть луч в однородной среде есть прямая линия.

Поэтому ход луча можно построить, используя карандаш и линейку, что определило название геометрическая оптика.

Проанализируем ход луча в среде с произвольным распределением показателя преломления $n(\mathbf{r})$. Определим радиус кривизны ρ и кручение κ луча в неоднородной среде. Для этого воспользуемся формулами Серре-Френе, которые описывают эволюцию сопровождающего трехгранника $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{b}}$ вдоль луча:

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{ds} = -\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\rho}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = -\frac{\hat{\mathbf{s}}}{\rho} - \kappa\hat{\mathbf{b}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{v}}, \quad (4.5)$$

где $\hat{\mathbf{v}}$ – орт главной нормали к лучу, $\hat{\mathbf{b}} = [\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{v}}]$ – орт бинормали.

Сопровождающий трехгранник $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{b}}$ носит название в дифференциальной геометрии репера – ортонормированный базис в каждой точке кривой $\mathbf{r}(s)$ (рис. 4.1).

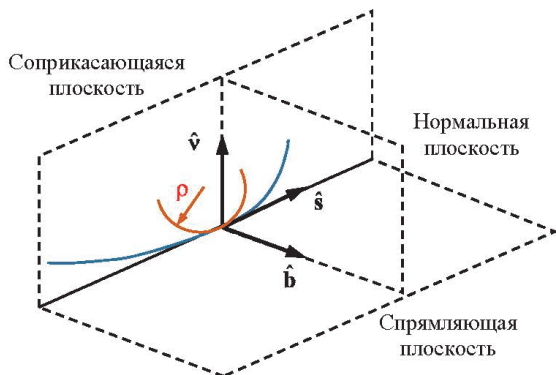


Рис. 4.1. Сопровождающий трехгранник кривой Френе–Серре

В каждой точке луча можно построить плоскость, перпендикулярную вектору, касательного к нему \hat{s} – нормальная плоскость. Плоскость, проходящая через вектора \hat{s} и \hat{v} , называется соприкасающейся плоскостью. Название соприкасающейся плоскости обусловлено тем, что ее можно определить как предельное положение плоскости, построенной по трем бесконечно близким точкам кривой. Плоскость, перпендикулярная нормальной и соприкасающейся плоскостям, называется спрямяющей плоскостью. Радиус кривизны луча ρ равен радиусу окружности, соприкасающейся с кривой в рассматриваемой точке и построенной в соприкасающейся плоскости. Кривизна κ определяет угловую скорость вращения сопровождающего трехгранника вокруг \hat{s} при перемещении трехгранника вдоль луча.

Преобразуем правую часть (1.85):

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (n\mathbf{s}) = \hat{s} \frac{dn}{ds} + n \frac{d\hat{s}}{ds} = \hat{s}(\hat{s}, \nabla n) + \frac{\hat{v}}{\rho}, \quad (4.6)$$

что приведет (1.85) к виду

$$\rho \hat{s}(\hat{s}, \nabla n) + n \hat{v} = \rho \nabla n,$$

или

$$\hat{v} = \frac{\rho}{n} [\nabla n - \hat{s}(\hat{s}, \nabla n)]. \quad (4.7)$$

Откуда видно, что луч загибается в сторону области с большим показателем преломления. Это объясняет явления миражей: в солнечный день от поверхности земли прогревается нижний слой воздуха, его показатель преломления уменьшается, лучи изгибаются вверх, что создает иллюзию отражения (рис. 4.2).

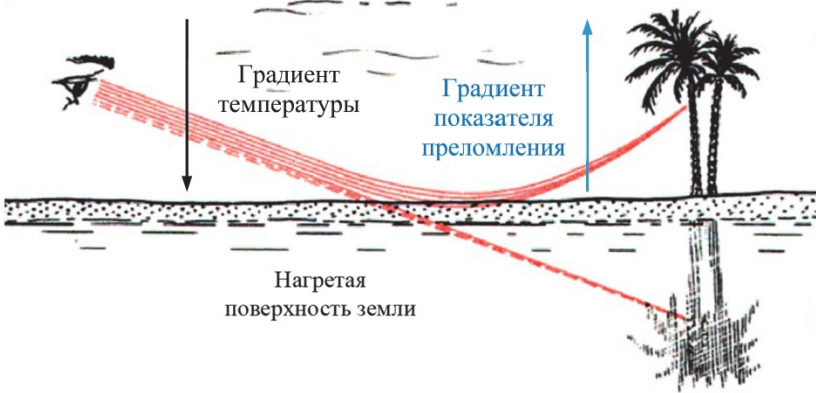


Рис. 4.2. Рефракция света

Уравнения Максвелла получены для областей пространства, в которых показатель преломления n является непрерывной функцией координат. В оптике часто встречается ситуация, когда эти свойства резко изменяются на одной поверхности границы раздела. Рассмотрим случай поведения луча на границе раздела двух сред с разным показателем преломления n_1 и n_2 (рис. 4.3). В этом случае векторы напряженности электромагнитного поля также будут претерпевать разрыв, и удовлетворить граничным условиям, согласованным с уравнениями Максвелла, можно, только если падающая волна по направлению \hat{s}_i разделяется на две волны: проходящую во вторую среду \hat{s}_r и отраженную \hat{s}_r' .

Возьмем ротор от уравнения эйконала (1.83) на границе:

$$\text{rot}(n\hat{s}) = 0, \quad (4.8)$$

поскольку $\text{rot}(\nabla\varphi) \equiv 0$.

Проинтегрируем полученное выражение (4.8) по малой прямоугольной области δA на границе раздела (рис. 4.3):

$$\int_{(\delta A)} \text{rot}(n\mathbf{s})d^2r = 0. \quad (4.9)$$

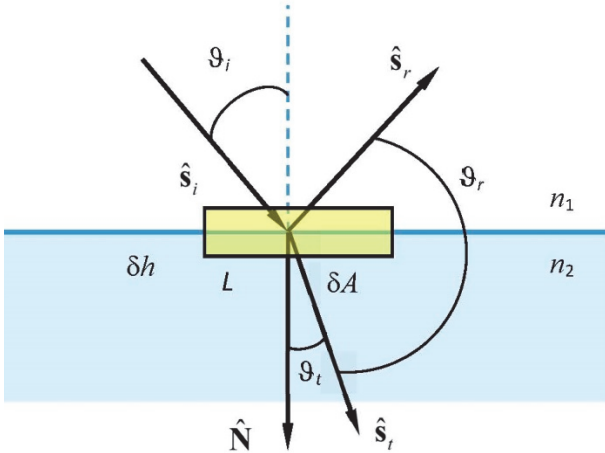


Рис. 4.3. К выводу закона преломления луча на границе двух диэлектриков

По теореме Стокса интеграл от ротора по области равен контурному интегралу по границе этой области:

$$\oint n(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}})dl = 0, \quad (4.10)$$

где $\hat{\mathbf{t}}$ – единичный вектор касательной к контуру.

Рассмотрим случай преломления луча. В этом случае мы можем записать (4.10) в виде:

$$L[n_1(\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{t}}_1) + n_2(\hat{\mathbf{s}}_r, \hat{\mathbf{t}}_2)] + \delta h(\text{вклад от боковых стенок}) = 0, \quad (4.11)$$

где L – длина прямоугольного контура, dh – его высота (рис. 4.3).

Если контур стянуть к границе раздела $dh \rightarrow 0$, то вклад от боковых стенок будет равен нулю, и получим выражение

$$[n_1\hat{\mathbf{s}}_i + n_2\hat{\mathbf{s}}_r]\hat{\mathbf{t}} = 0, \quad (4.12)$$

где введено обозначение $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_1 = -\hat{\mathbf{t}}_2$.

Определим нормаль $\hat{\mathbf{b}}$ к контуру так, чтобы $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{N}}]$. Тогда (4.12) с учетом правил смешанного произведения и произвольно-сти нормали к контуру, можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot (n_1 \hat{\mathbf{s}}_i - n_2 \hat{\mathbf{s}}_r) = 0, \quad (4.13)$$

или с учетом обозначений на рис. 4.3

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r. \quad (4.14)$$

В случае отражения выражение (4.14) примет вид

$$\hat{\mathbf{s}}_r \rightarrow -\hat{\mathbf{s}}_r, \quad n_1 = n_2 : \sin \vartheta_i = -\sin \vartheta_r, \quad \vartheta_r = \pi - \vartheta_i, \quad (4.15)$$

что соответствует положению зеркального отражения. Отметим, что это эквивалентно $n_2 = -n_1$, что часто используется при выводе соотношений для отражения.

Закон преломления луча (4.14) впервые установлен Снеллиусом, который утверждает, что луч упавший $\hat{\mathbf{s}}_i$, преломленный $\hat{\mathbf{s}}_t$, отраженный $\hat{\mathbf{s}}_r$ и нормаль $\hat{\mathbf{N}}$ к границе раздела лежат в одной плоскости, а для углов падения и преломления справедливо соотношение (4.14).

Закон Снеллиуса содержит тригонометрические функции, что очень неудобно для построения вычислительных алгоритмов, поэтому желательно получить соотношения непосредственно для направляющих векторов падающего и преломленного лучей. Поскольку все три вектора $\hat{\mathbf{s}}_i$, $\hat{\mathbf{s}}_t$, $\hat{\mathbf{N}}$ лежат в одной плоскости (компланарны), то один из них всегда можно выразить в виде линейной комбинации двух других:

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \alpha \hat{\mathbf{s}}_i + \beta \hat{\mathbf{N}}, \quad (4.16)$$

где α , β – искомые коэффициенты линейной комбинации.

Казалось бы, что нам не хватает уравнений – две неизвестных и одно уравнение, однако векторное уравнение для векторов

на плоскости есть краткая запись двух уравнений. Для того, чтобы их получить надо спроектировать (4.16) на два неколлинеарных направления, для чего последовательно умножим скалярно (4.16) на вектора \hat{s}_i и \hat{N} :

$$\begin{cases} (\hat{N}, \hat{s}_i) = \alpha(\hat{N}, \hat{s}_i) + \beta, \\ (\hat{s}_i, \hat{s}_i) = \alpha + \beta(\hat{N}, \hat{s}_i). \end{cases} \quad (4.17)$$

Выразим скалярные произведения векторов через углы рис. 4.3:

$$\begin{cases} \cos \vartheta_i = \alpha \cos \vartheta_i + \beta, \\ \cos(\vartheta_i - \vartheta_i) = \alpha + \beta \cos \vartheta_i. \end{cases} \quad (4.18)$$

Из первого уравнения сразу получим: $\beta = \cos \vartheta_i - \alpha \cos \vartheta_i$, что после подстановки во второе, с учетом теоремы сложения для косинусов, приведет к выражению: $\alpha = n_1/n_2$. Соответственно, получим закон преломления в векторной форме:

$$\hat{s}_t = \frac{n_1}{n_2} \hat{s}_i + \left[\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1 - (\hat{N}, \hat{s}_i)^2)} - \frac{n_1}{n_2} (\hat{N}, \hat{s}_i) \right] \hat{N}. \quad (4.19)$$

Можно было бы провести аналогичный анализ и для отражения, однако воспользуемся свойством, что формулы преломления переходят в формулы для отражения, если положить $n_1 = -n_2$ и с заменой у \hat{s}_r знака на противоположный в соответствии с рис. 4.3 – луч отраженный будет направлен вверх. Закон отражения в векторной форме примет вид:

$$\hat{s}_r = \hat{s}_i - 2(\hat{N}, \hat{s}_i)\hat{N}. \quad (4.20)$$

Из анализа в электродинамике граничных условий для напряженности трех волн на границе можно получить связь амплитуды преломленной (T) и отраженной (R) волн с амплитудой падающей (A):

$$T_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_2 \cos \vartheta_i + n_1 \cos \vartheta_t} A_{\parallel}, \quad T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_i}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_t} A_{\perp}, \quad (4.21)$$

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \vartheta_i - n_1 \cos \vartheta_t}{n_2 \cos \vartheta_i + n_1 \cos \vartheta_t} A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_i - n_2 \cos \vartheta_t}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_t} A_{\perp}. \quad (4.22)$$

Формулы (4.21), (4.22) называются формулами Френеля. Впервые они были выведены Френелем в несколько менее общем виде в 1823 г. на основе его теории, рассматривавшей свет как колебания упругой среды. Из формул Френеля видно, что отраженный и преломленный свет будут частично поляризованными (впервые открыл Малюс). Допустим, что угол напряженности поля E с плоскостью отражения a_i . Тогда, с учетом связи яркости с электромагнитным полем (1.125), можно определить коэффициент отражения по потоку:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\Phi_r}{\Phi_i} = \frac{L_r d\Omega_r \cos \vartheta_r}{L_i d\Omega_i \cos \vartheta_i} = \frac{|R|^2}{|A|^2} = \frac{|R_{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2}{|A|^2} = \\ &= \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} \cos^2 \alpha_i + \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} \sin^2 \alpha_i = \rho_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha_i, \quad (4.23) \end{aligned}$$

где $L_i, d\Omega_i, \cos \vartheta_i$ – яркость, телесный угол пучка и косинус угла с нормалью для падающего пучка света; индекс r – то же самое, но для отраженного. В преобразованиях учтено, что $d\Omega_i = d\Omega_r$ и $\cos \vartheta_i = \cos \vartheta_r$.

Для естественно-поляризованного света необходимо выражения (4.23) усреднить по всем углам α_i , что с учетом $\langle \cos^2 \alpha_i \rangle = \langle \sin^2 \alpha_i \rangle = 1/2$ дает выражение для естественно поляризованного света

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}). \quad (4.24)$$

На рисунке 4.4 изображена зависимость коэффициентов отражения для параллельной и перпендикулярной компонент. Отметим, что при угле падения

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.25)$$

$\rho_{\perp} = 0$, и отраженный свет полностью поляризован в плоскости перпендикулярной плоскости отражения. Это угол носит имя угол Брюстера, открывшего это явление в 1815 г.

Формулы Френеля отражения на границе двух диэлектриков

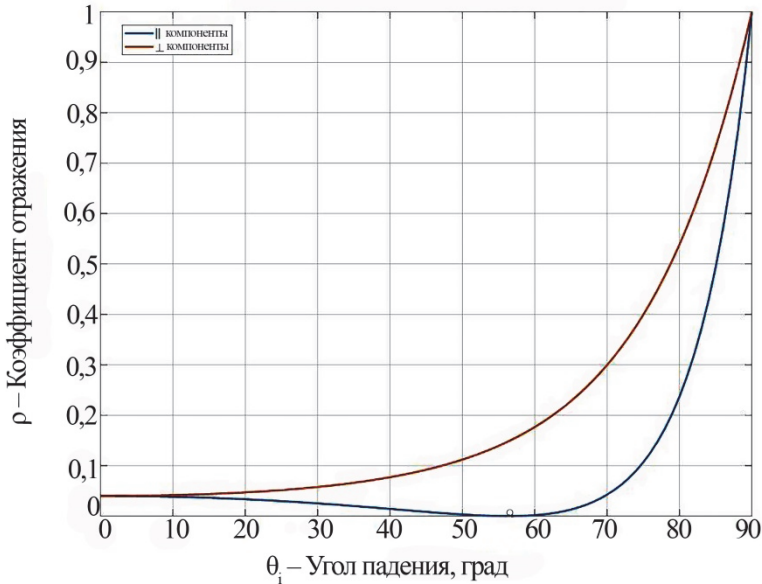


Рис. 4.4. Отражение света от границы двух диэлектриков с $n_1 = 1, n_2 = 1,5$ (стекло). На оси абсцисс угол Брюстера ($56,31^\circ$) отмечен кружочком

Для определения коэффициента пропускания пучка необходимо учесть изменение телесного угла. Рассмотрим поток через границу по нормали:

$$L_i \cos \vartheta_i d\Omega_i - L_r \cos \vartheta_r d\Omega_r = L_t \cos \vartheta_t d\Omega_t. \quad (4.26)$$

Учитывая, что $d\Omega_r = d\Omega_i = \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\varphi$, $d\Omega_t = \sin \vartheta_t d\vartheta_t d\varphi$, а также закон Снеллиуса (4.14) и вытекающее из него после дифференцирования соотношение $n_1 \cos \vartheta_i d\vartheta_i = n_2 \cos \vartheta_t d\vartheta_t$, можно записать (4.26) в виде:

$$L_i \cos \vartheta_i \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\varphi - L_r \cos \vartheta_r \sin \vartheta_r d\vartheta_r d\varphi = L_t \cos \vartheta_t \sin \vartheta_t d\vartheta_t d\varphi,$$

или

$$L_i \sin \vartheta_i - L_r \sin \vartheta_r = L_t \sin \vartheta_t \frac{n_1}{n_2}.$$

Примем во внимание еще раз закон Снеллиуса и определение коэффициента отражения $L_r = \rho L_i$ и получим из последнего выражения

$$L_t = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 (1 - \rho) L_i. \quad (4.27)$$

Если определить энергетические коэффициенты пропускания по аналогии с $\rho, \rho_{\parallel}, \rho_{\perp}$

$$\tau_{\parallel} = \frac{|T_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2}, \quad \tau_{\perp} = \frac{|T_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2}, \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau_{\parallel} + \tau_{\perp}), \quad (4.28)$$

причем прямыми вычислениями можно показать, что $\rho + \tau = 1$, $\rho_{\parallel} + \tau_{\parallel} = 1$, $\rho_{\perp} + \tau_{\perp} = 1$, то соотношение (4.27) можно переписать в виде

$$L_t = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \tau L_i, \quad (4.29)$$

где первый множитель отражает изменение телесного угла пучка при преломлении.

Если показатель преломления второй среды $n_2 < n_1$, то угол преломления из закона Снеллиуса (4.14)

$$\sin \vartheta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_i$$

для углов падения, превышающих некоторый критический $\bar{\vartheta}_i$,

$$\sin \bar{\vartheta}_i = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.30)$$

становится комплексным. Возникает явление полного внутреннего отражения, когда весь свет отражается во первую среду:

$$\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = 1, \quad \tau_{\perp} = \tau_{\parallel} = 0.$$

На рисунке 4.5 представлены зависимости ρ_{\perp} , ρ_{\parallel} в случае полного внутреннего отражения. Тем не менее электромагнитное поле в этом случае во второй среде не равно нулю, отсутствует лишь поток энергии через границу. Волна во второй среде становится неоднородной: распространяется вдоль поверхности раздела в плоскости падения и затухает экспоненциально с изменением расстояния от этой поверхности вглубь по нормали.

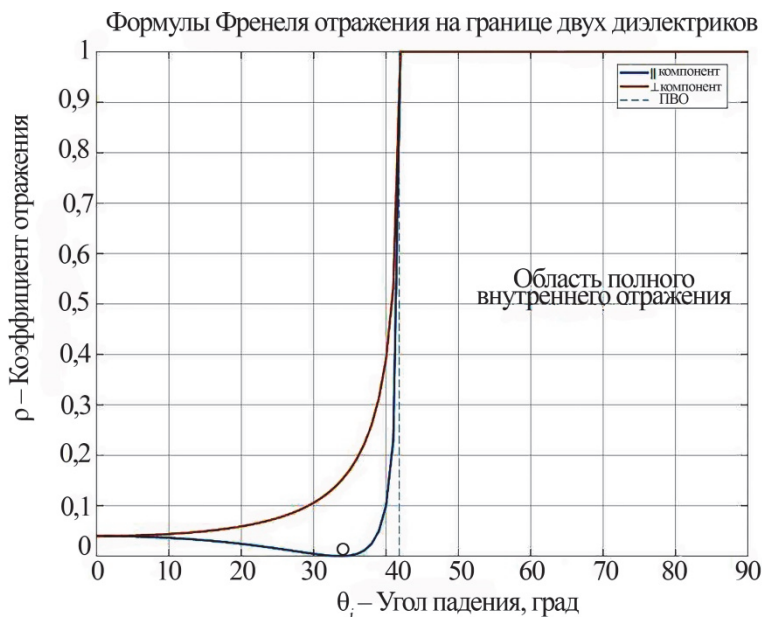


Рис. 4.5. Полное внутреннее отражение:

$$n_1 = 1,5, n_2 = 1,0$$

Металлы отличаются от диэлектриков наличием проводимости, что приводит формулам Френеля с комплексным показателем преломления

$$\tilde{n} = n(1 + ik), \quad (4.31)$$

где n , k зависят от диэлектрической проницаемости, проводимости и длины волны света.

Волны в металлах также становятся существенно неоднородными: n определяет преломление по закону Снеллиуса, а κ поглощение по направлению нормали. Волны не распространяются в металле на расстояние большее длины волны. Запишем формулы Френеля (4.22) для коэффициентов отражения относительно угла падения:

$$\rho_{\parallel} = \frac{\left| \tilde{n}^2 \cos \vartheta_i - \sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2 \vartheta_i} \right|^2}{\left| \tilde{n}^2 \cos \vartheta_i + \sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2 \vartheta_i} \right|^2}, \quad (4.32)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{\left| \cos \vartheta_i - \sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2 \vartheta_i} \right|^2}{\left| \cos \vartheta_i + \sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2 \vartheta_i} \right|^2}.$$

Для металлов характерна высокая проводимость, что приводит к тому, что $\kappa \approx 1$, а $n \gg 1$. В этом случае возможны приближения

$$\sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2 \vartheta_i} \approx \sqrt{\tilde{n}^2} \approx n + in, \quad \tilde{n}^2 = n^2 - n^2 \kappa^2 + 2in\kappa \approx 2in^2,$$

что позволяет упростить формулы (4.32)

$$\rho_{\parallel} = \frac{2n^2 \cos^2 \vartheta_i - 2n \cos \vartheta_i + 1}{2n^2 \cos^2 \vartheta_i + 2n \cos \vartheta_i + 1} \Big|_{n \cos \vartheta_i \gg 1} \approx \frac{n \cos \vartheta_i - 1}{n \cos \vartheta_i + 1} \approx 1 - \frac{1}{n \cos \vartheta_i}, \quad (4.33)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{2n^2 - 2n \cos \vartheta_i + \cos^2 \vartheta_i}{2n^2 + 2n \cos \vartheta_i + \cos^2 \vartheta_i} \Big|_{n \cos \vartheta_i \gg 1} \approx \frac{n - \cos \vartheta_i}{n + \cos \vartheta_i} \approx 1 - \frac{\cos \vartheta_i}{n}, \quad (4.34)$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_{\perp} + \rho_{\parallel}) = 1 - \frac{1}{2n} \left(\cos \vartheta_i + \frac{1}{\cos \vartheta_i} \right). \quad (4.35)$$

Поскольку для металлов $n \gg 1$, то нетрудно видеть, что отражение от металлов $\rho_{\perp}, \rho_{\parallel} \approx 1, 0$. При этом разница между компонентами $\rho_{\perp}, \rho_{\parallel}$ значительно меньше. Вследствие комплексности показателя преломления \tilde{n} амплитудные коэффициенты отражения R_{\perp}, R_{\parallel} так же комплексные, что приводит к сдвигу фаз между компонентами, а потому отраженный металлом свет обычно поляризован эллиптически.

Для кристаллов характерно регулярное расположение атомов в кристаллической решетке. Такое правильное расположение атомов в пространстве приводит к анизотропии (неравенству оптических свойств по различным направлениям), что математически требует описания тензора. В частности, диэлектрическая проницаемость является тензором. Выбором соответствующей системы координат тензор можно диагонализировать, что приведет к появлению трех показателей преломления для направления напряженностей по осям системы координат. Чаще имеет место только два показателя преломления. Такие материалы принято называть одноосными. Различают показатели преломления n_o и n_e для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. При распространении волны в таком кристалле между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность фаз.

Также анизотропной может быть и проводимость, что приводит к зависимости поглощения от поляризации, и называется дихроизмом.

4.2. Оптическая система

Создавая различное распределение $n(\mathbf{r})$, мы можем получать различные траектории лучей. Рассмотрим пучок лучей, выходящих из источника, расположенного в точке P . Такой пучок принято называть расходящимся гомоцентрическим. Из точки P выходит бесконечное множество лучей, но через любую другую, вообще говоря, проходит их конечное число. Однако возможна такая ситуация, что через некоторую точку P' , через которую пройдет бесконечное множество лучей из P – сходящийся гомоцентрический пучок. Точка P' называется стигматическим (резким) изображением точки P .

Идеальный оптический прибор дает для каждой точки P трехмерной области, называемой пространством предмета, стигматическое изображение P' . Совокупность точек изображений определяет пространство изображений. Соответствующие точки в этих двух областях называются сопряженными. В общем случае

не все лучи, выходящие из P , достигнут пространства изображений, например, некоторые лучи задержатся диафрагмой прибора. Лучи, достигающие пространства изображения, лежат в поле прибора.

Возможно, что совокупность точек P образует кривую C , и, соответственно, сопряженные им точки P' образуют кривую C' . Если эти кривые конгруэнтны (существует отображение пространств, которое переводит одну кривую в другую) друг другу, то области отображаются идеально, и такое распределение показателя преломления $n(\mathbf{r})$ мы будем называть оптической системой (ОС). Оптическая система, дающая стигматическое изображение трехмерного объекта, называется абсолютной. К сожалению, абсолютной является только одна система, состоящая из плоского зеркала.

Поскольку большинство оптических систем состоит из поверхностей вращения с общей осью (такие системы обычно называются центрированными), то особую роль в оптике играет случай аксиальной симметрии. Тогда из симметрии системы следует, что изображение любой точки P лежит в плоскости, проходящей через эту точку и ось симметрии. Поэтому при изучении свойств таких систем можно ограничиться рассмотрением точек, лежащих в такой меридиональной плоскости. Будем называть идеальной ОС, где подобны сопряженные кривые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оптической оси. Нетрудно отметить, что для исследования свойств таких ОС достаточно проанализировать ход лучей в меридиональной плоскости.

Отображения пространства предметов в пространство изображений, осуществляемое идеальной осесимметричной ОС, называется коллинеацией. Свойства этого отображения можно полностью определить через задание так называемых кардинальных точек ОС (см. рис. 4.6).

Для описания свойств идеальной ОС введем систему координат, где ось OZ совпадает с оптической осью, а ось OY перпендикулярна ей и лежит в меридиональной плоскости. При коллинеации в идеальной ОС всегда существует пара сопряженных плос-

костей H и H' , называемых передней и задней главными плоскостями. Они перпендикулярны оптической оси и имеют поперечное увеличение для сопряженных точек, лежащих в них $\beta = Y'/Y = 1$, где Y и Y' – ординаты сопряженных точек. Луч между главными плоскостями может идти по различной траектории, но сопряженная точка будет лежать в задней плоскости на том же расстоянии от оптической оси, поэтому сопряженные точки в главных плоскостях соединяем пунктирной линией.

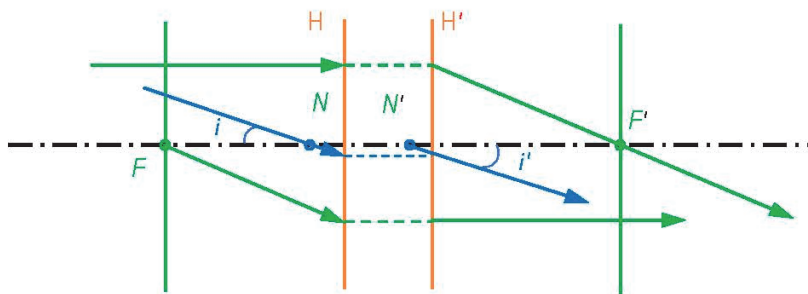


Рис. 4.6. Кардинальные точки ОС

Плоскость F в пространстве предметов, сопряженная с бесконечно удаленной в пространстве изображений, называется передней фокальной плоскостью. Аналогично плоскость F' в пространстве изображений, являющаяся сопряженной бесконечно удаленной в пространстве предметов, называется задней фокальной плоскостью. Точки пересечения фокальных плоскостей с оптической осью называются передним F и задним F' фокусом системы. Очевидно, что сопряженные фокусам точки лежат на оптической оси в бесконечности. Соответственно, луч, сопряженный лучу, который проходит через передний (задний) фокус, будет параллельным оптической оси в пространстве изображений (предметов).

Отношение тангенсов углов сопряженных лучей с оптической осью $\gamma = \operatorname{tg} i' / \operatorname{tg} i$ называется угловым увеличением. В идеальной ОС существует пара сопряженных точек N и N' , называемых узловыми, угловое увеличение лучей, проходящих через них, $\gamma = 1$.

Задание кардинальных точек полностью определяет ход лучей через оптическую систему. Пусть задана своими кардинальными точками ИОС (рис. 4.7). Необходимо построить ход произвольного луча, изображенного на рисунке, черным цветом. Для построения сопряженного луча в пространстве изображений необходимо знать две точки. Одна точка находится без труда параллельным переносом точки пересечения луча с передней главной плоскостью H на заднюю H' .

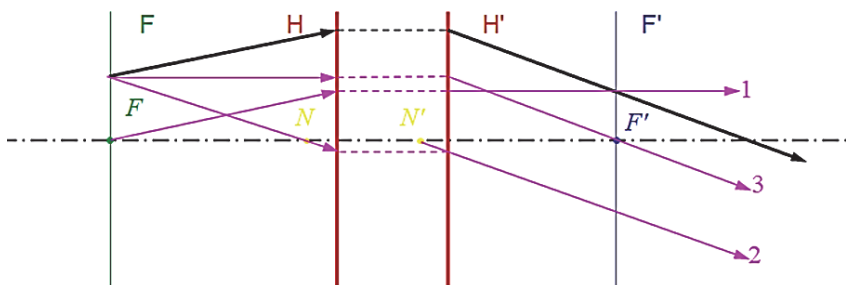


Рис. 4.7. Ход луча через идеальную ОС

Для нахождения второй точки воспользуемся построением некоторых вспомогательных лучей в пространстве предметов, обозначенных на рис. 4.7 цифрами.

1. Параллельно заданному лучу через передний фокус – ему сопряженный пройдет в пространстве изображений параллельно оптической оси. Поскольку оба луча в пространстве предметов параллельны другу, то можно считать, что они выходят из точки в бесконечности, а потому ей сопряженная лежит в задней фокальной плоскости. Искомая вторая точка есть точка пересечения луча 1 с задней фокальной плоскостью.

2. Из точки пересечения заданного луча с передней фокальной плоскостью и через переднюю узловую точку – ему сопряженный луч 2 выйдет из задней фокальной точки параллельно себе в пространстве предметов. Поскольку лучи выходят из одной точки передней фокальной плоскости, то в пространстве предметов они должны быть параллельны.

3. Из точки пересечения заданного луча с передней фокальной плоскостью параллельно оптической оси – сопряженный луч 3 пройдет через задний фокус, а сопряженный заданному должен быть в пространстве изображений ему параллелен.

На практике часто используется понятие тонкой оптической системы, когда можно считать точки H, H' и N, N' совпадающими друг с другом. Назовем такую точку центром тонкой ОС. Нетрудно видеть, что луч проходит через центр без преломления, что существенно упрощает построение лучей в тонкой ОС.

Преобразование пространства предметов в пространство изображений, осуществляемое идеальной ОС, когда прямая линия переходит в прямую, называется коллинеацией. Если ввести прямоугольные системы координат в пространствах предмета $OXYZ$ и изображений $O'X'Y'Z'$ с параллельными осями так, чтобы оси OZ и $O'Z'$ совпадали с оптической осью ОС, то координаты сопряженных точек пространств будут связаны соотношениями:

$$x' = F_1/F_0, \quad y' = F_2/F_0, \quad z' = F_3/F_0, \quad (4.36)$$

где $F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i, i \in \overline{0,1}$.

Разрешая (4.36) относительно x, y, z получим соотношения того же типа:

$$x = F_1'/F_0', \quad y = F_2'/F_0', \quad z = F_3'/F_0', \quad (4.37)$$

где $F_i' = d_i' x' + b_i' y' + c_i' z' + d_i', i \in \overline{0,1}$.

Поскольку идеальная ОС (ИОС) является осесимметричной, то, как мы указывали, достаточно взять точки только в меридиональной плоскости. Пусть меридиональная плоскость проходит через плоскость OYZ . Тогда преобразования коллинеации можно записать в виде:

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z + d_2}{b_0 y + c_0 z + d_0}, \quad z' = \frac{b_3 y + c_3 z + d_3}{b_0 y + c_0 z + d_0}. \quad (4.38)$$

Из симметрии системы вытекает, что z' не меняется при замене y на $-y$. Это возможно только в том случае, если $b_0 = b_3 = 0$. Далее ясно, что при замене y на $-y$ координата y' меняется на $-y'$, откуда следует, что $c_2 = d_2 = 0$. Следовательно, (4.38) примет форму

$$y' = \frac{b_2 y}{c_0 z + d_0}, \quad z' = \frac{c_3 z + d_3}{c_0 z + d_0}. \quad (4.39)$$

Разрешая (4.39) относительно x и y , получим

$$y = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2} \frac{y'}{c_0 z' - c_3}, \quad z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3}. \quad (4.40)$$

Полученные уравнения содержат пять постоянных, однако важны только их отношения. Таким образом, коллинеация в ИОС характеризуется четырьмя параметрами.

Из выражений (4.39) и (4.40) следует, что фокальные плоскости описываются уравнениями, при которых обращается в ноль знаменатель, что соответствует сопряженным точкам в бесконечности:

$$F_0 \equiv c_0 z + d_0 = 0, \quad F_0' \equiv c_0 z' - c_3 = 0.$$

Соответственно, фокальные плоскости пересекают ось OZ в точках переднего и заднего фокусов:

$$z = -d_0/c_0, \quad z' = -c_3/c_0. \quad (4.41)$$

Перейдем к системам координат, начало которых находятся в фокусах ИОС

$$\begin{cases} y = Y, & c_0 z + d_0 = c_0 Z, \\ y' = Y', & c_0 z' - c_3 = c_0 Z', \end{cases}$$

что приведет к выражениям

$$Y' = \frac{b_2 Y}{c_0 Z}, \quad Z' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{c_0^2 Z}. \quad (4.42)$$

Введем обозначения

$$f \equiv \frac{b_2}{c_0}, \quad f' \equiv \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2 c_0},$$

которые определяют переднее и заднее фокусное расстояние ИОС, а выражение для коллинеации ИОС примет простое выражение

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}. \quad (4.43)$$

Второе из этих уравнений, $(ZZ' = ff')$ обычно называют уравнением Ньютона. Оно выражает координаты сопряженных точек в системах координат в точках фокусов через фокусные расстояния.

Из (4.43) следует, что поперечное увеличение равно

$$\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}.$$

Поперечное увеличение равно единице, если $Z = f$ и $Z' = f'$ – главные плоскости. Иногда оказывается удобным отсчитывать расстояния не от фокальных плоскостей, а от главных. В этом случае вместо Z и Z' используют переменные $s = Z - f$, $s' = Z' - f'$, и уравнение Ньютона приобретает вид:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = -1. \quad (4.44)$$

Если показатели среды пространства объектов и изображений совпадают, то $f' = -f$, и выражение имеет форму формулы Гаусса

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}. \quad (4.45)$$

4.3. Ограничение пучков в оптической системе

В рассмотренной нами ИОС все лучи, выходящие из точки P пространства предметов, проходили через сопряженную точку P' . В реальности это невозможно, что мы обговорили, утверждая,

что лучи должны попадать в поле зрения ОС. Поле зрения прибора формируется диафрагмами, которыми являются как оправы всех реальных оптических ОС, так и специально вводимые экраны (рис. 4.8).

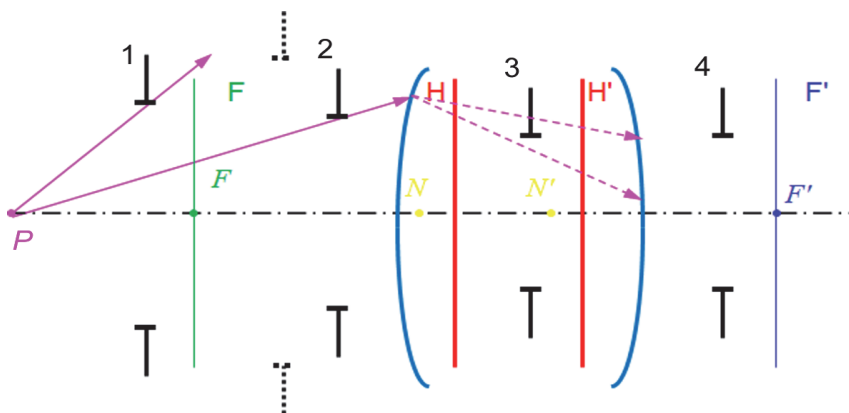


Рис. 4.8. Диафрагмы в ОС

Рассмотрим ограничения лучей из точки P на оптической оси в пространстве предметов. Построим лучи в край диафрагм 1 и 2, которые расположены до поверхностей оптических элементов – очевидно, что именно диафрагма 2 будет ограничивать пучок лучей из точки P . Однако такой способ определения поля прибора не подходит для диафрагмы 3, которая расположена внутри ОС. Ход луча, проведенного в край диафрагмы 2, далее определяется свойствами ОС, и он может пройти через диафрагму 3 или, напротив, ею задержаться. Чтобы учесть ход луча от диафрагмы 2 до 3 мы можем построить сопряженную 3 диафрагму (пунктирная линия на рис. 4.8 пунктиром). Поскольку эта диафрагма сопряженная реальной 3, то все лучи, проходящие через нее, пройдут и через саму 3. Тем самым мы можем заменить сравнение с диафрагмой с ее сопряженной. Следовательно, мы можем построить всем диафрагмам их сопряженные в той части ОС, что расположена между точкой P и самой диафрагмой, что позволит анализировать прохождение лучей, не принимая во внимание ОС.

Изображение диафрагмы, ограничивающей самый малый угол луча из P с оптической осью, определяет апертурный угол ОС. При этом сама диафрагма называется апертурной, а ее изображение в предшествующей части ОС называется входной зрачок ОС, а в последующей – выходной зрачок. Очевидно из построения, что входной и выходной зрачки являются сопряженными. Апертурная диафрагма ограничивает входной пучок лучей и определяет облученность в изображении. Входной, выходной зрачки и кардинальные точки ОС определяют основные свойства изображения ОС.

Часто изображение ограничено резкой границей, что определяется полевой диафрагмой. Полевая диафрагма располагается в плоскости, сопряженной с плоскостью предмета или анализа. Она определяет, какая часть пространства может быть изображена ОС, и проявляется в резком очерчивании края изображения.

Все диафрагмы, не являющиеся апертурной или полевой, называются виньетирующими (рис. 4.9). Виньетирование – затемнение изображения по краям кадра, от французского *vignette* – заставка. Проявляется в постепенном падении яркости изображения от центра к краям. Влияние такой диафрагмы определяется коэффициентом виньетирования – величиной, характеризующей падение освещенности в изображении от центра к краю поля зрения. В случае отсутствия полевой диафрагмы изображение плавно исчезает за счет виньетирования.

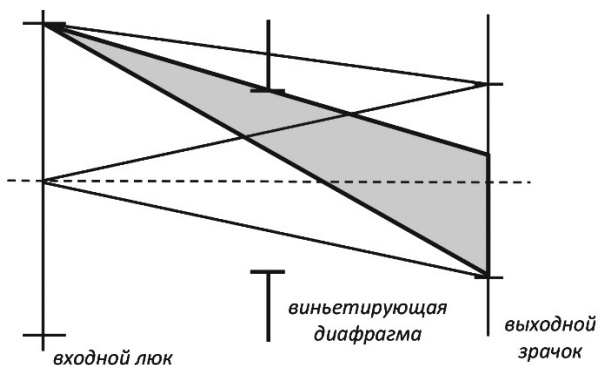


Рис. 4.9. Виньетирование пучков в ОС

Определим облученность точки P' в плоскости анализа изображения (рис. 4.10). Для простоты анализа допустим, что мы имеем в точке P' стигматическое изображение, поэтому точка P' является вершиной осесимметричного светового конуса, основанием которого является выходной зрачок. В этом случае для облученности в точке P' можно записать выражение:

$$E_{P'} = \int_{(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}) \geq 0} L(\mathbf{r}_P, \hat{\mathbf{i}})(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}}, \quad (4.46)$$

где нормаль $\hat{\mathbf{N}}$ к плоскости анализа совпадает по направлению с оптической осью.

Определим сферическую систему координат с осью OZ , совпадающей с оптической осью, с зенитным углом ϑ , азимутальным φ . Тогда в соответствии с рис. 4.10 и осевой симметрией мы можем переписать выражение (4.46) в виде:

$$\begin{aligned} E_{P'} &= 2\pi L \int_0^{\vartheta_{\max}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_{\nu=\sin \vartheta}^{\sin \alpha_{\max}} v dv = 2\pi L \int_0^{\sin \alpha_{\max}} v dv = \pi L \sin^2 \vartheta_{\max} \approx \\ &\approx \pi L \left(\frac{D'}{2f'} \right)^2 = \frac{\pi O^2}{4} L, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где D' – диаметр выходного зрачка, $D'/(2f')$ – относительное отверстие, f' – задний фокус ОС.

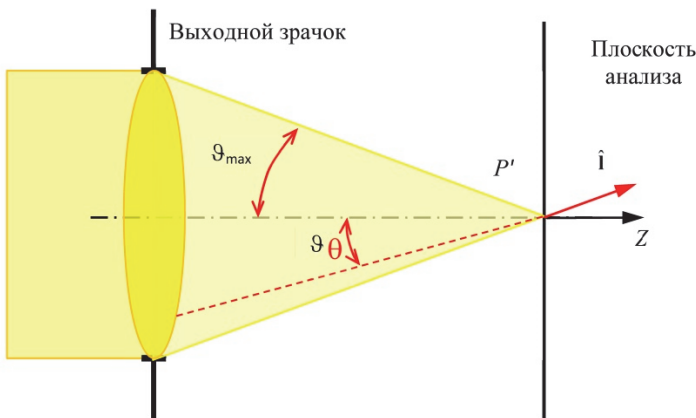


Рис. 4.10. Облученность в точке изображения

Последние два равенства в (4.47) получены в предположении, что плоскость анализа совпадает с задней фокальной плоскостью, это выполнимо, если объект удален от объекта на расстоянии более 10 фокусных расстояний, что наиболее часто встречается на практике.

Следовательно, облученность в точке изображения на оптической оси пропорциональна яркости пучка лучей на входном зрачке. Анализ облученности в изображении в точках вне оптической оси аналогичен, но приводит к более трудоемким вычислениям. Мы ограничимся качественным анализом и учтем, что по сравнению с E_p для точек вне оси (θ – угол отклонения точки от оси):

- проекционное сокращение площади выходного зрачка $\sim \cos q$;
- увеличенное расстояние от центра выходного зрачка, что в соответствии с законом обратных квадратов приведет к уменьшению облученности $\sim \cos^2 \theta$;
- изменение угла падения пучка на плоскость анализа $\sim \cos \theta$.

Соответственно, для точки вне оси получим

$$E(\theta) = E_p \cos^4 \theta. \quad (4.48)$$

Из проделанного анализа облученности в изображении мы можем сделать вывод, что визуализация трехмерных объектов есть отображение углового распределения яркости светового поля по углам визирования ОС.

4.4. Аберрации в оптических системах

Любая реальная система нарушает гомоцентричность пучков в изображении, что не позволяет сформировать в такой ОС стигматическое изображение сопряженных точек. Пучок становится астигматическим – он не образует ни в одной секущей его плоскости точку. Тем самым возникают отклонения в реальных ОС от изображения, построенного по правилам идеальной ОС. Такие искажения принято называть аберрациями ОС. Можно получить величину отклонения луча в реальной ОС от луча в идеальной, выходящих из одной и той же точки в пространстве пред-

метов. Это отклонение будет функцией расстояния этой точки от оси и угла наклона луча к оптической оси. Если эту функцию разложить в ряд от расстояния и угла, то в ряду будут содержаться только их нечетные степени, причем все члены у первой степени равны 0. Исторически наиболее изучены aberrации членов с третьей степенью, что дало им название aberrации третьего порядка. При этом из них можно выделить член, не зависящий от угла, – сферическую aberrацию, а также и члены, зависящие от угла, – полевые aberrации (кома, астигматизм и кривизна поля, дисторсия).

Рассмотрим прохождения реального луча, если они образуют малые углы с оптической осью, на примере системы из одной сферической преломляющей поверхности (рис. 4.11), где C – центр сферы радиуса R , **красным и черным цветом** отмечены сопряженные лучи.

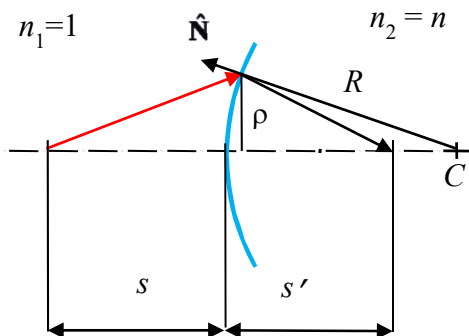


Рис. 4.11. Ход параксиального луча при преломлении на сферической поверхности

В приближении параксиальной оптики

$$(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}}) \approx 1, \quad (4.49)$$

спроецируем векторное уравнение преломления (4.19) на плоскость перпендикулярную оптической оси:

$$\mathbf{l}_{\perp 2} = \frac{1}{n} \mathbf{l}_{\perp 1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{N}_{\perp}, \quad (4.50)$$

где знак « \perp » означает проекцию соответствующего вектора на плоскость перпендикулярную оптической оси.

Из рисунка 4.11 выразим проекции всех векторов в (4.50), что приведет к выражению

$$\frac{\rho}{s'} = \frac{1}{n} \frac{\rho}{s} + \frac{n-1}{n} \frac{\rho}{R},$$

или, сокращая обе части на ρ , получим:

$$\frac{n}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{n-1}{R}, \quad (4.51)$$

где $f' = \frac{R}{n-1}$ – заднее фокусное расстояние сферической поверхности.

Выражение (4.51) полностью соответствует формуле Гаусса.

Значения аберраций получают как разность координат точек пересечения с плоскостью изображения реальных лучей, рассчитанных по формулам (4.19), и координат точек пересечения лучей идеальной системы, рассчитанных по формулам ИОС. В теории оптических систем их аберрации делят на две группы: монохроматические аберрации, возникающие в системе при прохождении через нее монохроматического излучения, и хроматические аберрации, связанные с дисперсией света и возникающие в системе при прохождении через нее излучения сложного спектрального состава.

Предположим, что известны конструктивные параметры системы, расстояние s_1 от первой поверхности до плоскости предметов A и расстояние s_P от первой поверхности до входного зрачка (рис. 4.12). Точка B пространства объектов удалена от оптической оси на расстояние y_1 . Рассмотрим произвольный луч BG , который в общем случае не лежит в меридиональной плоскости. Если известны координаты y_1 , s_1 и s_P , то положение такого косоугольного луча в пространстве определяется заданием координат точки G пересечения этого луча с плоскостью входного зрачка P . Точка G в плоскости входного зрачка фиксируется координатами m , M . На основе хода реального луча находим точку B' с координатами (x'_q, y'_q) – пересечения луча с плоскостью изображения. Точка B'_0 – сопряженная точка в пространстве изображений ИОС.

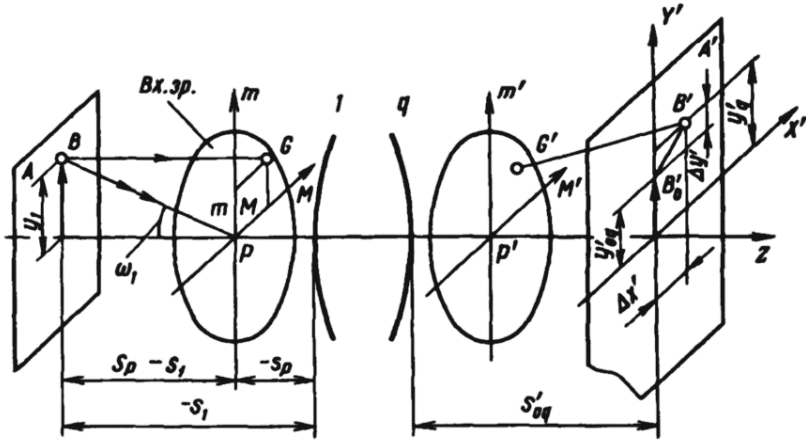


Рис. 4.12. К определению aberrаций оптической системы

Отрезок B'_0B' и определяет поперечную aberrацию, которой соответствуют $\Delta y'$ – поперечная aberrация в меридиональной, и $\Delta x'$ – поперечная aberrация в сагиттальной плоскостях. Теория aberrаций устанавливает связь между составляющими aberrаций $\Delta y'$ и $\Delta x'$ и координатами луча y_1, m, M , функции не содержат членов четных порядков. Если разложить в ряд выражения для $\Delta y'$ и $\Delta x'$ по степеням y_1, m, M , то вследствие симметрии системы относительно оптической оси они будут содержать только члены нечетных порядков: третьего, пятого, седьмого и более высоких порядков.

В общем случае аналитические выражения, определяющие aberrации высших порядков, оказываются настолько громоздкими, что их практическое применение затруднено. Поэтому при решении задачи по определению конструктивных параметров оптической системы, удовлетворяющих наперед заданным остаточным aberrациям, используют теорию aberrаций третьего порядка, которая позволяет получить приближенные значения конструктивных параметров оптической системы и является математическим аппаратом для анализа общих aberrационных свойств исследуемой системы.

Если сгруппировать члены, описывающие aberrации третьего порядка по степеням координаты входа луча и его угла наклона с оптической осью на входном зрачке, то таких членов окажется 5. Коэффициенты перед каждым зависят только от конструктивных элементов ОС, их принято обозначать символами $S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_V$ и называть суммами Зейделя в честь немецкого математика, который 1856 г. создал теорию aberrаций оптических систем третьего порядка. Каждый из членов ряда получил название. Члены, зависящие от третьей степени только координат, определяют сферическую aberrацию, которая не зависит от угла наклона луча, а потому постоянна по полю системы. Остальные aberrации зависят от угла и называются полевыми: кома – первая степень угла, астигматизм и кривизна поля – вторая степень, дисторсия – только от угла в третьей степени. В реальных системах отдельные виды монохроматических aberrаций почти никогда не встречаются. В действительности наблюдается сочетание всех aberrаций, а исследование сложной aberrационной фигуры рассеяния методом выделения отдельных видов aberrаций (любого порядка) – не более чем искусственный приём, облегчающий анализ явления.

Хроматические aberrации появляются в оптических системах в результате некомпенсированной дисперсии, т.е. разложения на монохроматические составляющие излучения сложного спектрального состава при прохождении лучей через преломляющие поверхности.

Рассмотрим процесс формирования изображения в ОС. В качестве объекта рассмотрим слайд, который равномерно освещается сзади, что создает на выходе слайда равномерную светимость. Введем систему координат в плоскости слайда, что определит распределение светимости по слайду $E_o(\mathbf{r}_o)$. Для удобства дальнейшего изложения светимость будем обозначать буквой E . ОС создаст в плоскости анализа сопряженное изображение с распределением облученности по нему $E_i(\mathbf{r}_i)$. Системы координат пространства объектов и изображений согласуем так, чтобы их оси аппликат OZ совпадали друг с другом и осью ОС.

Выражение (4.47) определяет, что облученность в изображении линейно связана с яркостью падающего пучка. Облученность точки вне оси определяется яркостью соответствующего угла падения излучения на входном зрачке, что однозначно связано с координатой точки в объекте. Допустим, что наш слайд пропускает диффузно, поэтому яркость точки объекта $L(\mathbf{r}_o) = E(\mathbf{r}_o)/p$. Предположим, что наша система является узкопольной, что позволяет пренебречь законом снижения облученности по полю. Тогда можно записать

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \frac{\pi O^2}{4} L(\mathbf{r}_o) = \frac{O^2}{4} E_o(\mathbf{r}_o) = C \cdot E_o(\mathbf{r}_o), \quad (4.52)$$

где точки \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_o – координаты сопряженных точек, C – некоторая константа для данной ОС.

Выражение (4.52) позволяет утверждать, что облученности сопряженных точек в идеальной ОС связаны линейно. Реальные системы отличаются наличием aberrаций. Но даже если aberrации в ОС сведены к 0, то все равно остается дифракция излучения на выходном зрачке. Поэтому, если в качестве объекта взять светящуюся точку, то ее изображением будет являться некоторое пятно с распределением облученности по нему, которое принято называть функцией рассеяния точки (ФРТ). В результате облученность в изображении и светимость в объекте сводятся к интегралу суперпозиции

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_o(\mathbf{r}_o) h(\mathbf{r}_o \rightarrow \mathbf{r}_i) d^2 r_o, \quad (4.53)$$

где $h(\mathbf{r}_o \rightarrow \mathbf{r}_i)$ – ФРТ ОС.

Эта функция зависит от двух аргументов: \mathbf{r}_o и \mathbf{r}_i , что можно было бы записать через запятую. Стрелочка означает формальную запись, подчеркивающую влияние, передачу изображения от точки \mathbf{r}_o в точку \mathbf{r}_i . Интеграл (4.53) можно трактовать, что исходное изображение $E_o(\mathbf{r}_o)$ мы представляем в виде совокупности светящихся точек, тогда изображение есть сумма (суперпозиция) сигналов от каждой из них.

Особенно важный для практики случай, когда ФРТ не зависит от точек \mathbf{r}_o и \mathbf{r}_i , а только от расстояния между ними. Это возможно, когда малы полевые аберрации, ФРТ одинаково для всех точек поля прибора. В этом случае интеграл суперпозиции переходит в интеграл свертки

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_o(\mathbf{r}_o)h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o)d^2r_o \equiv E_o(\mathbf{r}) \cdot h(\mathbf{r}) . \quad (4.54)$$

Для справедливости (4.54) необходимо требование малости полевых аберраций, это часто выполняется для узкопольных систем, что и сделало выражение (4.54) основой анализа переноса изображений в реальных ОС.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Мир, 1973. – 720 с.

Наиболее полный и авторитетный труд по оптике в мировой литературе, учитывающий все последние достижения классической теории. Излагаются макроскопические уравнения Максвелла с формально введенными константами и подробно разбираются вопросы распространения электромагнитных волн в среде, а также связь этих констант с поляризацией и намагничиванием. Уравнения геометрической оптики последовательно выводятся из уравнений Максвелла и затем применяются к теории оптического изображения и к расчету аберраций. Рассматриваются интерференция, элементарная и строгая теория дифракции, дифракционная теория аберраций и дифракция света на ультразвуковых волнах. Подробно излагаются вопросы распространения, интерференции и дифракции частично когерентного света; основное внимание уделяется случаю квазимонохроматического излучения, причем общее рассмотрение строится на использовании метода корреляционных функций. Излагаются вопросы металлооптики и кристаллооптики. Много внимания уделяется изложению математического аппарата.

2. Гудмен, Дж. Введение в Фурье-оптику / Дж. Гудмен. – М.: Мир, 1970. – 364с.

Книга содержит систематическое и вместе с тем доступное изложение теории оптического изображения с точки зрения интегральных преобразований. В ней рассматриваются вопросы оптической обработки информации, фильтрация. Содержание книги охватывает как теорию, так и прикладные вопросы разработки и применения видеосистем.

3. Прикладная оптика: учеб. пособие для вузов / А.С. Дубовик, М.И. Апенко, Г.В. Дурейко и др. – М.: Недра, 1982. – 612 с.

Приведены основные законы и понятия геометрической оптики применительно к проектированию оптических приборов. Описаны материалы, применяемые при изготовлении оптических деталей, и их основные постоянные. Изложены вопросы хроматических aberrаций первого и высшего порядков, монохроматических aberrаций первого, третьего и пятого порядков, и волновых aberrаций. Рассмотрена теория оптических систем различного типа, приведены основные характеристики систем. Описаны требования к различным оптическим системам, основные этапы разработки и расчета.

5. СВЕТОВОЕ ПОЛЕ В МУТНОЙ СРЕДЕ

5.1. Уравнение переноса излучения

Мы рассмотрели световое поле в вакууме и в однородной среде. Реальные среды неоднородны и содержат мелкие частицы, сопоставимые по размерам с длиной волны. Взаимодействие света с ними включает в себя отражение, преломление, дифракцию, поглощение света. Эти эффекты на малой частице принято называть рассеянием света. При этом имеет место и поглощение света средой, в которой взвешены частицы. Среды, в которых происходит рассеяние и поглощение света, принято называть мутными.

В случае мутной среды, в которой во взвешенном состоянии находятся малые частицы сравнимые с длиной волны, развитый в разд. 1.5 статистико-волновой подход сталкивается с трудностями. Так, например, остается неясным, что понимать под яркостью излучения вблизи отдельной рассеивающей частицы, которая может вовсе и не быть плавной в масштабе длины волны, так что приближение геометрической оптики теряет силу. Удовлетворительный ответ на этот и на аналогичные вопросы может быть дан лишь при статистическом подходе, когда излучение и среда трактуются как два взаимодействующих случайных поля.

Очевидно, что статистический смысл яркости как углового спектра функции когерентности волнового поля должен сохраняться и для излучения в рассеивающей среде. При этом должно выполняться условие квазиоднородности, позволяющее ввести понятие локального спектра, в качестве которого будем использовать спектр Вигнера (1.118), (1.125). Однако условия квазиоднородности теперь уже недостаточно, так как для справедливости уравнения переноса рассеяние должно быть в некотором смысле «малым», что приводит к определенным ограничениям на параметры рассеивающей среды.

Анализ фотометрического приближения в мутной среде должен, естественно, исходить из стохастического волнового уравнения для случайного поля, считая заданными статистические характеристики рассеивающей среды. Стохастические волновые уравнения используются для получения уравнений для статистических моментов поля (функции когерентности Γ). При этом среда описывается корреляционной функцией диэлектрической проницаемости.

Результирующее поле складывается на основе интерференции волн, дифрагировавших на различных частицах. При этом возможны и всегда присутствуют процессы дифракции на частице волны, уже дифрагировавшей на другой частице – процесс многократного рассеяния (дифракции) волн. В принципе необходимо решать задачу дифракции при каждой реализации среды, однако каждая такая реализация случайна, и на практике при измерении прибором, усредняющим измеряемое значение по пространству и времени, существенно превышающими пространство и время корреляции среды, нас будут интересовать средние значения поля и его квадратичной величины (энергии).

Существенно, что при таком подходе метод геометрической оптики применяется не к отдельным реализациям поля, а лишь к уравнению для средней по ансамблю величины – функции когерентности. Это сразу же снимает ряд методологических вопросов, связанных с трактовкой понятия яркости в рассеивающей среде. В частности, теряет смысл вопрос, что понимать под яркостью вблизи резких рассеивающих неоднородностей. Действительно, как мы видели, яркость – это существенно статистическое понятие, характеризующее ансамбль реализаций. Поэтому говорить о значении яркости в точке вблизи отдельной неоднородности, вообще говоря, бессмысленно.

Строгий анализ указанных вопросов светового поля в рассеивающей среде опирается на специальный математический аппарат, выходящий за пределы нашего курса. Мы же в своем изложении ограничимся качественными узловыми моментами на физическом уровне строгости.

В условиях квазиоднородности волны для корреляционной функции поля $\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ в случае стохастической среды вместо первого уравнения системы (1.112) получается уравнение Бете–Солпитера:

$$2\nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int [\mathcal{Q}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}') - \mathcal{Q}^*(\mathbf{R}, -\boldsymbol{\rho}')] \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d^3 \rho' + \\ + \int [\bar{G}^*(-\boldsymbol{\rho}') - \bar{G}(\boldsymbol{\rho}')] K(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'') \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}'') d^3 \rho' d^3 \rho'' . \quad (5.1)$$

где $\mathcal{Q}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ и $K(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ – так называемые ядра массового оператора и оператора интенсивности, выражающиеся через корреляционную функцию диэлектрической проницаемости среды в виде функциональных рядов, формально просуммированных с помощью диаграммной техники Фейнмана.

Ядра $\mathcal{Q}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ и $K(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ описывают дифракцию случайной волны на статистическом ансамбле частиц. При этом если зависимость ядер от переменных \mathbf{r} значительно сильнее зависимости от \mathbf{R} , то физически это сводится к статистически независимому рассеянию на отдельных частицах. Однако возможна значительная корреляция волны и частиц, что может приводить к рассеянию на группе частиц, хотя при этом взаимодействие между группами будет независимым. Тем самым на группе происходит дифракция, а между группами взаимодействие некогерентно.

Аналогично анализу поля в однородной среде выполним от (5.1) преобразование Фурье (1.111) по разностной переменной $\boldsymbol{\rho}$. С учетом связи яркости $L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{I}})$ с Фурье-трансформантой (1.118) уравнение (5.1) после некоторых преобразований примет вид уравнения переноса излучения (УПИ) в мутной среде:

$$(\hat{\mathbf{i}}, \nabla) L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}}) = -\varepsilon(\mathbf{R}) L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{\sigma(\mathbf{R})}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}' , \quad (5.2)$$

где ε – показатель ослабления; σ – показатель рассеяния; $\kappa = \varepsilon - \sigma$ – показатель поглощения; $\Lambda = \sigma / \varepsilon$ – альбеда однократ-

ного рассеяния; $x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$ – индикатриса рассеяния с условием нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' = 1. \quad (5.3)$$

Показатели ϵ , σ выражаются через Фурье-преобразование от $Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$, а индикатриса рассеяния от $K(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$.

Отметим, что наряду с переносом излучения в физике рассматривается целая группа явлений переноса: массы, заряда, энергии, ... Все эти процессы приводят к необратимому перераспределению в пространстве и во времени полей соответствующих характеристик. Несмотря на различия в физической природе явлений переноса, их описание строится на анализе баланса исследуемой величины или ее носителей – частиц, – для выделенного объема фазового пространства. При этом учитываются процессы рождения, рассеяния и поглощения частиц, смены их состояния и перехода через границы выделенного объема. Уравнения переноса или кинетические уравнения получаются при предельном переходе стягивания объема в точку в классическом приближении. Развитие теории каждого процесса переноса обогащает раздел математической физики, посвященный решению уравнений переноса.

Из общего анализа математических основ всех явлений переноса можно доказать, что для перехода к уравнению переноса должен выполняться принцип локальной компактности. Физически это означает локализацию в пространстве носителя – луча или частицы, – что сразу приводит к уравнению аналогичному УПИ. В этом смысле квазиоднородность волнового поля есть одно из выражений принципа локальной компактности. С точки зрения переноса лучи, корпускулы и частицы неразличимы друг с другом. Это определило живучесть понятия «фотон» в виде шариков, траектория движения которых есть луч, что не соответствует современной квантовой электродинамике. Общность всех явлений переноса позволяет использовать результаты для частиц в теории светового поля, которой посвящено множество литературы.

Полученному УПИ (5.2) можно придать весьма наглядную лучевую трактовку, если рассмотреть изменение яркости луча на участке его траектории dl (рис. 5.1) в рамках теории светового поля. Введем в рассмотрение следующие величины:

l/ϵ – длина свободного пробега фотона вдоль луча, $\epsilon = \sigma + \kappa$;

ϵdl – вероятность столкновения на участке траектории длины dl ;

σdl – вероятность рассеяния на участке траектории длины dl ;

κdl – вероятность поглощения на участке траектории длины dl ;

$\frac{1}{4\pi} x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$ – вероятность рассеяния под определенным углом.

лом.

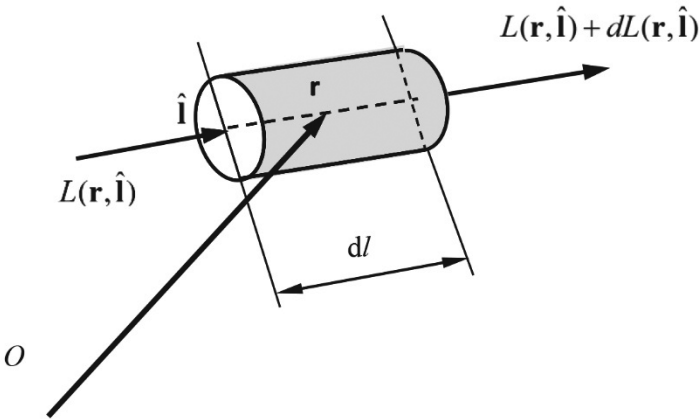


Рис. 5.1. Изменение яркости луча на участке его траектории в мутной среде

Тогда изменение яркости на участке траектории dl можно представить в виде суммы ослабления излучения средой, вследствие поглощения и рассеяния света на другие направления распространения, и увеличения, за счет рассеяния света в исследуемом направлении $\hat{\mathbf{l}}$ с других направлений:

$$dL = -\epsilon L dl + \frac{\sigma}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' dl + S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) dl, \quad (5.4)$$

где $S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{d\Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})}{dV(\mathbf{r}) d\Omega(\hat{\mathbf{l}})}$ – функция источников, связанная с внутренними источниками света в объеме среды $dV(\mathbf{r})$, излучающими поток $d\Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ в телесном угле $d\Omega(\hat{\mathbf{l}})$.

Поскольку производная по направлению $\hat{\mathbf{l}}$ выражается в виде

$$\frac{d}{dl} = (\hat{\mathbf{l}}, \nabla),$$

то (5.4) примет форму

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon L + \frac{\sigma}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}' + S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (5.5)$$

что совпадает с уравнением (5.2), полученным из статистико-волнового рассмотрения.

Впервые УПИ в интегральной форме было сформулировано из феноменологических соображений светового поля практически одновременно в 1889 г. в работах Хвольсона и Ломмеля. Их исследования были посвящены анализу яркости внутри молочных пластин. Очевидно, что законы Ламберта здесь не работают, и в работах сделана попытка найти уравнение для яркости в каждой точке среды. На сегодняшний день трудно точно установить приоритет между авторами. Однако обе статьи, как сказано в предисловии, являются публикациями докладов. Судя по предисловиям, доклад Хвольсона состоялся в 1885 г., а у Ломмеля – в 1887 г. Трудность решения полученного уравнения и небольшая практическая значимость молочных стекол послужил тому, что значительного влияния эти работы на развитие теории переноса не оказали.

Интегро-дифференциальное уравнение в форме, подобной уравнению (5.4), было впервые получено в близких по времени работах А. Шустера в 1905 г. и К. Шварцшильда в 1906 г. Особо сильное значение для теории имела работа Шварцшильда. Последний ссылается на работу А. Шустера, но ему удается получить целый ряд важных астрофизических результатов, что и определило эту работу как основополагающую в теории переноса.

В чисто поглощающей среде ($\sigma = 0$, $\Lambda = 0$, $\varepsilon = \kappa$) УПИ приобретает вид (1.21) и его решением является закон Бугера.

Проинтегрируем почленно УПИ (5.5) по полному телесному углу:

$$\oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} = E_0(\mathbf{r}), \quad \oint S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} = E_0^{\text{нзл}}(\mathbf{r});$$

$$\begin{aligned} & \oint \frac{1}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}} d\hat{\mathbf{i}} = \\ & = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}} d\hat{\mathbf{i}}'}_{=1} = \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}' = E_0(\mathbf{r}); \end{aligned}$$

$$\oint (\hat{\mathbf{i}}, \nabla) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} = \left(\hat{\mathbf{i}}, \oint L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} \right) = (\nabla, \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Собирая полученные соотношения вместе, получим

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\kappa(\mathbf{r})E_0(\mathbf{r}) + E_0^{\text{нзл}}(\mathbf{r}), \quad (5.6)$$

называемое уравнением Гершуна–Гуревича–Кубелки–Мунка по именам лиц, впервые получивших это выражение.

Рассмотрим точечный источник с силой света I_0 в чисто поглощающей среде. Из сферической симметрии задачи нетрудно отметить

$$|\mathbf{E}(r)| = E_0(r) = E(r), \quad \text{div} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2);$$

$$E_0^{\text{нзл}}(\mathbf{r}) = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{4\pi r^2} \delta(r) = \frac{I_0}{r^2} \delta(r).$$

Подставляя полученные соотношения в (5.6), получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r)) = -\kappa(r)E(r) + \frac{I_0}{r^2} \delta(r). \quad (5.7)$$

Введем обозначение $\chi(r) = E(r) r^2$, что позволит переписать уравнение (5.7) в виде

$$\frac{d}{dr}\chi(r) + \kappa(r)\chi(r) = I_0\delta(r), \quad (5.8)$$

представляющее линейное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого методом вариации произвольной постоянной имеет вид

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \left\{ I_0 \int_0^r \exp \left[\int_0^\zeta \kappa(\xi) d\xi \right] d\zeta + C_0 \right\} \exp \left[- \int_0^r \kappa(\xi) d\xi \right],$$

что с учетом нулевых граничных условий примет окончательный форму

$$E(r) = \frac{I_0}{r^2} \exp \left[- \int_0^r \kappa(\zeta) d\zeta \right], \quad (5.9)$$

которая носит название закон Бугера–Аллара, опубликовал свои измерения видимости прожекторных пучков в монографии «Ма-яки» (*Les Phares*), 1900 г.

5.2. Структура светового поля в мутной среде

От краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения можно перейти к интегральному уравнению Пайерлса, интегрируя УПИ вдоль луча (в теории дифференциальных уравнений первого порядка – характеристики), как обыкновенное дифференциальное уравнение с известной правой частью. Сделаем переход к переменным вдоль луча из точки \mathbf{R} по направлению $\hat{\mathbf{l}}$. Тогда произвольная точка \mathbf{r} на луче на расстоянии ξ от \mathbf{R} вдоль луча должна удовлетворять уравнению

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}. \quad (5.10)$$

В этом случае УПИ в переменных вдоль луча (5.10) получит вид

$$\frac{d}{d\xi} L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = F(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}), \quad (5.11)$$

где $F(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) \equiv \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}'$.

Уравнение (5.11), если считать $F(\xi)$ известной функцией, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением относительно переменной ξ , решение которого может быть записано в форме

$$L(\mathbf{R} - \xi \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{R} - \xi_0 \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi} + e^{-\varepsilon \xi} \int_0^{\xi_0} F(\mathbf{R} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{\varepsilon \zeta} d\zeta, \quad (5.12)$$

или

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_e(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi_0} + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\xi_0} e^{-\varepsilon(\xi_0 - \zeta)} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' d\zeta, \quad (5.13)$$

где ξ_0 – расстояние по лучу до границы объема, или в удобной для дальнейшего изложения операторной форме

$$L = L_0 + \mathbf{TL}, \quad (5.14)$$

где

$$L_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_e(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\varepsilon \xi_0}, \quad (5.15)$$

а остальные обозначения показаны на рис. 5.2.

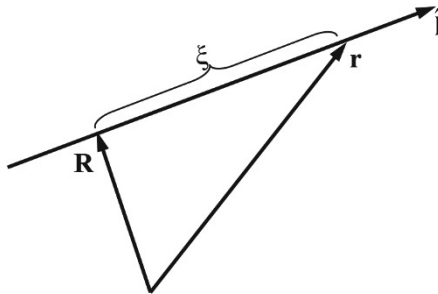


Рис. 5.2. Интегрирование вдоль луча

На основе принципа сжимающихся отображений решение (5.14) представимо в виде ряда Неймана

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}^n L_0, \quad (5.16)$$

что физически означает разложение по кратностям рассеяния света.

Соответственно для яркости произвольной кратности рассеяния можно записать выражение

$$L_n(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{T} L_{n-1} = \mathbf{T}^n L_0 = \left(\frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \right)^n \underbrace{\int_0^{\xi_1} \cdots \int_0^{\xi_1}}_n \underbrace{\oint \cdots \oint}_n \exp\left(-\varepsilon\left(\xi + \sum_{k=1}^n \zeta_k\right)\right) \times \\ \times x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}_1) \cdots x(\hat{\mathbf{l}}_{n-1}, \hat{\mathbf{l}}_n) L_0(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}_n) d\hat{\mathbf{l}}_1 \cdots d\hat{\mathbf{l}}_n d\xi_1 \cdots d\xi_n, \quad (5.17)$$

где все особенности интегрирования иллюстрирует рис. 5.3.

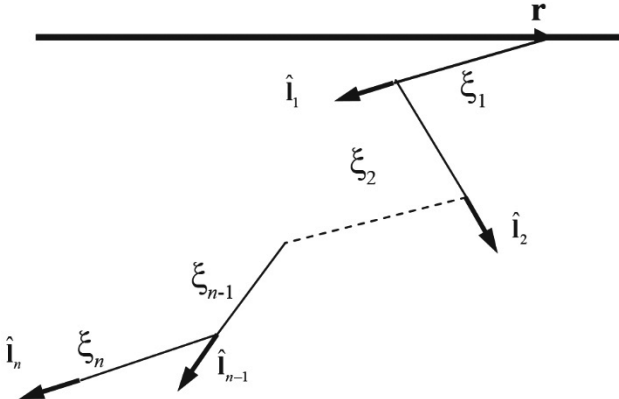


Рис. 5.3. Траектория n -кратного рассеяния

Метод решения УПИ в виде ряда (5.16), представляющего решение по кратностям рассеяния, получил название *метода итераций*. Представление полной яркости светового поля в виде суммы яркостей соответствующих кратностей рассеяния пред-

ставляет собой и хороший способ качественного, «физического» анализа задач теории переноса. Прежде всего, отметим, что член ряда (5.16) с индексом нуль, иначе называемый прямым излучением, представляет собой излучение, падающее на объем извне, не испытывавшее ни одного рассеяния и экспоненциально ослабленное по трассе вдоль луча по закону Бугера. Простота аналитического выражения для нулевой кратности рассеяния (прямого излучения) позволяет достаточно просто получить выражение и для первой кратности, являющейся яркостью однократно рассеянного света, и которое с учетом симметрии светораспределения источника часто можно свести к однократному интегралу. Однако выражения для второй кратности и выше представляют собой многократные интегралы, расчет которых возможен, но является серьезной математической проблемой.

Для качественного анализа влияния яркостей различных кратностей рассеяния на полную яркость в данной точке поля допустим, что индикатриса рассеяния имеет вид

$$x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) = 4\pi\delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}'). \quad (5.18)$$

Конечно, представление (5.18) эквивалентно отсутствию рассеяния, поскольку излучение рассеивается в первоначальном направлении, однако это позволит сделать оценку доли каждой кратности рассеяния. С учетом (5.18) выражение (5.17) примет вид

$$\begin{aligned} L_n(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) &= \left(\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\right)^n e^{-\varepsilon\xi_0} \underbrace{\int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_1}}_n d\xi_1 \dots d\xi_n L_0(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}) = \\ &= \left(\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\right)^n e^{-\varepsilon\xi_0} \frac{\xi_0^n}{n!} L_0(\mathbf{r} - \xi_0 \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Если полученное выражение продифференцировать по оптической толще $\tau = \varepsilon\xi_0$, то максимум яркости соответствующей кратности рассеяния достигается при $\tau = n$. При произвольной индикатрисе это соотношение изменится, но общее соотношение о смещении максимума яркости для высшей кратности рассеяния в сторону больших оптических толщ сохранится. Соответственно, у

границы среды преобладает прямое и однократно рассеянное излучение, а с удалением от границы вглубь среды яркость поля формируется многократно рассеянным светом. Оператор переноса излучения вдоль луча является оператором свертки, что определяет его сглаживающие свойства по углу и пространству: выражение для яркости каждой последующей кратности рассеяния является более гладкой функцией угловых и пространственных переменных.

Рассмотрим простейший случай плоского слоя однородной мутной среды, освещаемого ПМ-источником. В этом случае интегральное уравнение разбивается на два уравнения по числу границ (сверху и снизу), что определяет падающее излучение, которые имеют вид

$$L(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = \begin{cases} e^{-\tau/\mu_0} \delta(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{i}}_0) + \frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int_0^\tau e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') L(t, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}' dt, & \mu \geq 0; \\ \frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int_\tau^{\tau_0} e^{-(\tau-t)/\mu} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') L(t, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}' dt, & \mu < 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

тогда выражение для яркости первой кратности рассеяния

$$L_1(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \gamma x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}_0) \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{\mu}\right) \right], & \mu \geq 0; \\ \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \gamma x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}_0) \left[\left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{\mu}\right) \right] - \exp\left(-\frac{\gamma\tau_0}{\mu}\right) \right], & \mu < 0, \end{cases} \quad (5.21)$$

где $\gamma \equiv \mu_0/(\mu_0 - \mu)$, $\mu_0 = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{i}}_0)$, $\mu = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{i}})$ – косинусы углов падения на слой среды и визирования излучения соответственно.

В выражении (5.21) для яркости вниз $\mu \geq 0$ можно отметить два фактора: рассеяние излучения в соответствии с индикатрисой, что приводит к максимальному значению яркости по углу визиро-

вания по направлению падения $\hat{\mathbf{I}}_0$, и ослабление излучения по Бугеру, которое имеет максимум вдоль направления нормали к границе поверхности $\hat{\mathbf{z}}$. В соответствии с этим на малых оптических глубинах максимум тела яркости направлен по направлению падения. Однако с ростом глубины становится все более существенным фактором бугеровская экспонента, что разворачивает максимум в направлении нормали к поверхности.

При учете многократного рассеяния картина становится сложнее, однако, учитывая сглаживающие свойства оператора переноса, общая тенденция изменения поля с глубиной не только сохраняется, но и усиливается. В приповерхностном слое тело яркости определяется в основном граничными условиями, и максимум тела яркости ориентирован на источник, с глубиной тело яркости уширяется и разворачивается, определяется многократным рассеянием и, можно сказать, «забывает» о граничных условиях.

Предположим, что мы исследуем световое поле на некоторой глубине, где основную роль уже играют процессы многократного рассеяния, а тело яркости приобрело существенно изотропный вид. В этом случае можно предполагать, что существенное отличие в значениях яркости будет для передней по отношению к направлению на падающую волну (Ω_+ : $\mu > 0$) и задней полусферы (Ω_- : $\mu > 0$), а внутри каждой из полусфер направлений отличаясь незначительны. Это позволяет заменить уравнение переноса для яркости для ПМ-источника

$$\mu \frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau} + L(\tau, \mu) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' \quad (5.22)$$

на два уравнения для полусферических освещенностей «сверху» $E_{\uparrow}(\tau)$ и «снизу» $E_{\downarrow}(\tau)$ (что равносильно для средней яркости сверху – снизу):

$$E_{\downarrow}(\tau) = \int_{\Omega_+} L(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{I}}, \quad E_{\uparrow}(\tau) = \int_{\Omega_-} L(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{I}}. \quad (5.23)$$

Для этого проинтегрируем уравнение (5.22) по верхней (нижней) полусфере. Рассмотрим преобразования каждого члена уравнения по отдельности на примере освещенности «сверху» $E_{\downarrow}(\tau)$:

$$\int_{\Omega_+} \mu \frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau} d\hat{\mathbf{i}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_+} \mu L(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{i}} \approx \mu_{\downarrow} \frac{dE_{\downarrow}(\tau)}{d\tau}; \quad (5.24)$$

$$\int_{\Omega_+} L(\tau, \mu) d\hat{\mathbf{i}} = E_{\downarrow}(\tau); \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_+} \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{i}}' d\hat{\mathbf{i}} = \\ & = \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega_+} \left[\int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{i}}' + \int_{\Omega_-} x(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}}) L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{i}}' \right] d\hat{\mathbf{i}} = \\ & = \frac{\Lambda}{4\pi} \left[\int_{\Omega_+} \int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{i}}' + \int_{\Omega_-} \int_{\Omega_+} x(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}} L(\tau, \mu') d\hat{\mathbf{i}}' \right] \approx \\ & \approx \Lambda \beta_1 E_{\downarrow}(\tau) + \Lambda \beta_2 E_{\uparrow}(\tau), \end{aligned} \quad (5.26)$$

где β_1 – коэффициент рассеяния «вперед»; β_2 – коэффициент рассеяния «назад»; μ_{\downarrow} – средний косинус тела яркости в нижнюю полусферу.

Соответственно, вместо (5.22) получим систему уравнений для средних освещенностей сверху и снизу

$$\begin{cases} \mu_{\downarrow} \frac{dE_{\downarrow}(\tau)}{d\tau} + E_{\downarrow}(\tau) = \Lambda \beta_1 E_{\downarrow}(\tau) + \Lambda \beta_2 E_{\uparrow}(\tau), \\ \mu_{\uparrow} \frac{dE_{\uparrow}(\tau)}{d\tau} + E_{\uparrow}(\tau) = \Lambda \beta_2 E_{\downarrow}(\tau) + \Lambda \beta_1 E_{\uparrow}(\tau), \end{cases} \quad (5.27)$$

с краевыми условиями:

$$E_{\downarrow}(0) = \mu_0 E_0, \quad E_{\uparrow}(\tau_0) = 0, \quad (5.28)$$

причем E_0 – нормальная облученность верхней границы слоя.

Выражая $E(\tau)$ из верхнего уравнения (5.27) и подставляя в нижнее, получим

$$\mu_{\uparrow}\mu_{\downarrow}\frac{d^2E_{\downarrow}(\tau)}{d\tau^2}+(\mu_{\uparrow}+\mu_{\downarrow})d\frac{dE_{\downarrow}(\tau)}{d\tau}+[d^2-\Lambda^2\beta_2^2]E_{\downarrow}(\tau)=0, \quad (5.29)$$

где $d \equiv 1 - \Lambda\beta_1$, и аналогичное для $E_{\uparrow}(\tau)$, получаемое из (5.29) заменой индексов: $\downarrow \rightarrow \uparrow$, $1 \rightarrow 2$.

Однако решение полученного уравнения достаточно громоздко, для качественного анализа ограничимся практически значимым случаем аэрозольного рассеяния, когда $\beta_1 \gg \beta_2$. При этом верхнее уравнение (5.27) примет вид

$$\mu_{\downarrow}\frac{dE_{\downarrow}(\tau)}{d\tau}+(1-\Lambda\beta_1)E_{\downarrow}(\tau)=0, \quad (5.30)$$

решение которого можно записать в форме следующего выражения

$$E_{\downarrow}(\tau)=\mu_0E_0\exp\left[-\frac{1-\Lambda\beta_1}{\mu_{\downarrow}}\tau\right]. \quad (5.31)$$

Из анализа выражения (5.31) видно, что облученность убывает с глубиной экспоненциально, но с другим, меньшим, чем в приповерхностном режиме, показателем. Строго говоря, выражение (5.31) справедливо только асимптотически с глубиной, поскольку мы допустили независимость $\mu_{\downarrow} \neq \mu_{\downarrow}(\tau)$. Данное соотношение становится справедливо в так называемом глубинном световом режиме.

Поскольку в глубинном световом режиме световое поле «забывает» о граничных условиях, то для неограниченного объема однородной среды асимптотический световой режим должен удовлетворять УПИ для плоского слоя среды. В этом случае

$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \equiv L(\tau, \mu)$ и УПИ имеет вид:

$$\mu\frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau}+L(\tau, \mu)=\frac{\Lambda}{2}\int_{-1}^1L(\tau, \mu')x(\mu', \mu)d\mu'. \quad (5.32)$$

Для простоты анализа рассмотрим случай изотропного рассеяния: $x(\mu', \mu) = 1$. В глубинном режиме тело яркости по форме уже не изменяется, поэтому решение можно представить в виде

$$L(\tau, \mu) = C_0 f(\mu) e^{-\Gamma \tau}, \quad (5.33)$$

где C_0 – константа нормировки, пропорциональная мощности источника; Γ – так называемый глубинный показатель ослабления; $f(\mu)$ – асимптотическое глубинное тело яркости.

Поскольку полный поток определяется константой C_0 , то без ограничений общности можно наложить условие:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = 1. \quad (5.34)$$

Подставим (5.33) в УПИ (5.32) для случая изотропной индикатрисы и с учетом (5.34) получим

$$-\mu \Gamma f(\mu) + f(\mu) = \Lambda,$$

или для глубинного тела яркости

$$f(\mu) = \frac{\Lambda}{1 - \mu \Gamma}. \quad (5.35)$$

Глубинный показатель ослабления Γ можно определить, подставив (5.35) в условие нормировки (5.34):

$$\frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - \Gamma \mu} = 1 \Rightarrow \frac{\Lambda}{2\Gamma} \ln \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = 1. \quad (5.36)$$

На рисунке 5.4. представлен график зависимости глубинного показателя ослабления Γ от Λ . Для сравнения в тех же осях пунктиром изображена зависимость $\Gamma(\Lambda)$ для случая индикатрисы рассеяния $x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) = \delta(\hat{\mathbf{I}}' - \hat{\mathbf{I}})$: поскольку в этом случае рассеяние, по сути, отсутствует, то $\Gamma = 1 - \Lambda$ – чистое поглощение. Поскольку $\Gamma \leq 1$, то в глубине изотропно рассеивающей среды тело яркости (5.35) представляет собой эллипсоид с эксцентриситетом Γ . Зависимость $\Gamma(\Lambda)$ для случая произвольной индикатрисы рассеяния будет расположена между этими двумя крайними случаями.

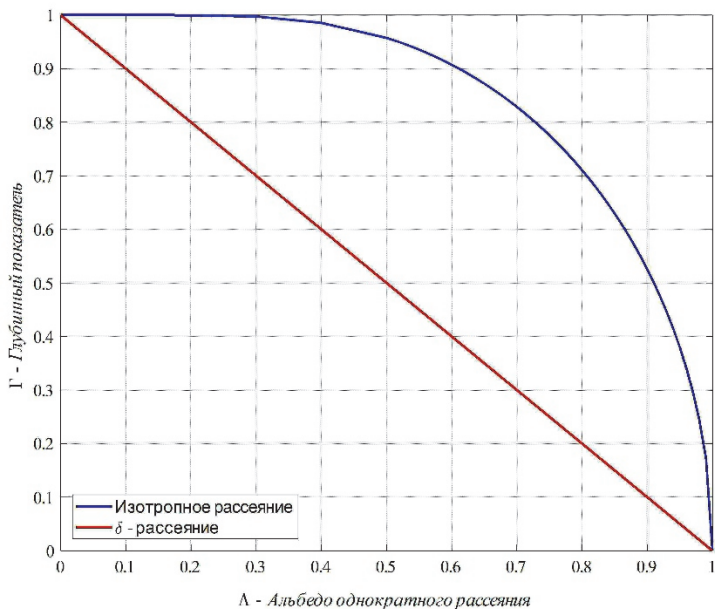


Рис. 5.4. Глубинный показатель ослабления

С другой стороны, $\Gamma \leq 1$ показывает, что ослабление в глубинном режиме при наличии рассеяния превосходит чистое поглощение, однако меньше и ослабление в среде, т.е. часть света за счет рассеяния возвращается в пучок. Последний факт можно интерпретировать и иначе: за счет рассеяния длина траектории фотонов (лучей) увеличивается, что и учитывает отличие $\Gamma > 1 - \Lambda$.

В проведенном анализе не были приняты во внимание спектральные зависимости оптических характеристик среды от длины волны. Процессы многократного рассеяния приводят к тому, что с оптической глубиной изменяется не только пространственно-угловое распределение излучения, но и его спектральный состав. В природе такое изменение дает удивительные по красоте явления: голубизна неба, красные заря и закат, так называемый «зеленый луч» и многие др. Сущность этих явлений связана с перераспределением излучения по спектру вследствие многократных рассеяний и поглощений излучения.

В чистой атмосфере рассеяние происходит на флуктуациях плотности молекул, что определяет закон рассеяния Релея, при котором показатели ослабления и рассеяния зависят от длины волны $\sim 1/\lambda^4$. При малых оптических толщах, когда преобладает однократно рассеянный свет, прямое излучения сильно обеднено светом коротковолновой части спектра и будет иметь красный оттенок (заря, закат), а в рассеянном излучении, формируемым однократным рассеянием, будут преобладать «синие» лучи, что и объясняет голубой цвет неба.

С ростом оптической толщи, поскольку в прямом излучении отсутствуют «синие» лучи, то и рассеянное излучение начинает «краснеть». Однако с ростом кратностей рассеяния часть «синего» излучения возвращается в прямое, отчего оно теряет выраженный красный цвет. Следовательно, как и при изменении пространственного углового распределения излучения, малые кратности «разбивают» спектральное распределение от источников, а многократное рассеяние стремится установить некое собственное, глубинное распределение. Из анализа рис. 5.4 можно сделать приближенное представление для глубинного показателя ослабления при $\Lambda \approx 1$, характерное для видимого излучения в атмосфере, когда $\varepsilon \approx \sigma$:

$$\Gamma = \sqrt{1 - \Lambda^2} \approx \sqrt{2\Lambda(1 - \Lambda)} \Rightarrow \Gamma\varepsilon \approx \sqrt{2\sigma\kappa}. \quad (5.37)$$

Соответственно, ослабление в толще атмосферы будет уже иметь зависимость $1/\lambda^2$, что изменит цвет рассеянного света с синего в красную область, т.е. будь атмосфера Земли в 10 раз толще или плотнее, и «голубая планета» превратилась бы в «зеленую». Отметим также, что для не очень больших взвешенных в среде частиц (краска), σ можно считать пропорциональным размеру частиц, поэтому цвет краски зависит не только от материала, но и от его растирания, среднего размера частиц. Полученный результат частично оправдывает практику средневековых цехов, когда прежде чем ученика начинали обучать живописи, его заставляли некоторое время растирать краску, в результате чего он опытным путем получал краску нужного цвета.

5.3. Отражение и пропускание света слоем мутной среды

УПИ в общем случае произвольной мутной среды не имеет аналитического решения. Наибольший прогресс в решении УПИ достигнут в случае плоского слоя мутной среды, освещенного бесконечно широким параллельным пучком, что соответствует практически важным случаям световых полей солнечного излучения в атмосфере и океане, отражения света поверхностью тел. В этом случае в силу плоской симметрии (рис. 5.5) УПИ (5.5) приобретает вид

$$\frac{\partial L(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} = -L(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{l}}', \quad (5.38)$$

где

$$\mu = (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{l}} = [\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \mu], \quad \hat{\mathbf{l}}_0 = [\sqrt{1-\mu_0^2}, 0, \mu_0] -$$

направление падения излучения на слой;

$$\mu_0 = (\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{z}}), \quad \tau = \int_0^z \varepsilon dz - \text{оптическая толщина;}$$

$\hat{\mathbf{z}}$ – единичный орт оси OZ .

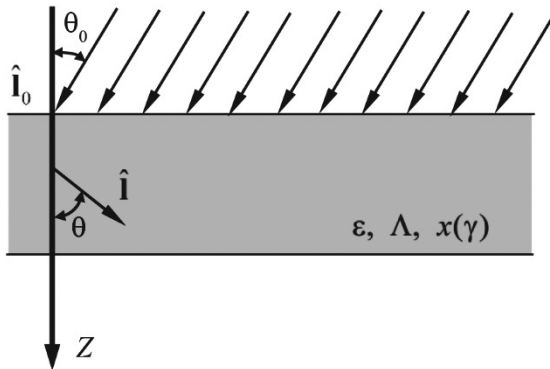


Рис. 5.5. Перенос излучения в плоском слое мутной среды

Поскольку УПИ (5.38) является интегро-дифференциальным, то для единственности его решения необходимо задать еще и граничные условия:

$$L(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=0, \mu>0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \quad L(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = 0, \quad (5.39)$$

что соответствует облучению слоя плоским мононаправленным источником в направлении $\hat{\mathbf{I}}_0$ с нормальной облученностью равной 1.

Выражения (5.38) и (5.39) представляют собой краевую задачу УПИ для плоского слоя. По решению сформулированной краевой задачи существует обширная литература. Для специального вида индикатрисы рассеяния – изотропная, рэлеевская, – здесь получены аналитические решения. Однако аналитическое решение УПИ в общем случае вряд ли возможно. Численное решение краевой задачи УПИ (5.38), (5.39) основывается на замене интеграла рассеяния конечной суммой. Такая замена возможна одним из двух методов.

1. Метод сферических гармоник.

В этом случае решение и индикатриса представляются в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} L(\tau, \mu, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} C_k^m(\tau) P_k^m(\mu) e^{im\varphi} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k^m(\tau) Q_k^m(\mu) e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=0}^{N_x} (2k+1) x_k P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'), \quad (5.41)$$

где $P_l^n(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра, причем

$P_l^0(\mu) \equiv P_l(\mu)$ – полиномы Лежандра; $Q_l^n(\mu) = \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_l^n(\mu)$ – перенормированные полиномы Лежандра или полиномы Шмидта;

$C_k^m(\tau)$ – искомые коэффициенты разложения яркости по сферическим функциям; x_k – коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра; N_x – количество членов ряда в разложении индикатрисы по полиномам Лежандра. В дальнейшем для простоты записи будем полагать, что $x_k \equiv 0$ при $k > N_x$.

Подставим представления (5.40), (5.41) в УПИ (5.38), умножим его на $Q_k^m(\mu) e^{im\varphi}$ и проинтегрируем его по полному телесному углу. С учетом ортогональности, рекуррентных соотношений и теоремы сложения для полиномов Лежандра получим систему связанных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\sqrt{(k-m)(k+m)} C_{k-1}^m(\tau) + \sqrt{(k+m+1)(k-m+1)} C_{k+1}^m(\tau) \right] = \\ = -(2k+1)(1 - \Lambda x_k) C_k^m(\tau). \end{aligned} \quad (5.42)$$

2. Метод дискретных ординат.

Представим индикатрису рассеяния в виде ряда (5.41), а искомую яркость в виде ряда Фурье по азимуту:

$$L(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C^m(\mu, \tau) e^{im\varphi}. \quad (5.43)$$

После подстановки этого выражения в УПИ краевой задачи с учетом теоремы сложения для полиномов Лежандра и ортогональности азимутальных гармоник приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{dC^m(\tau, \mu)}{d\tau} = -C^m(\tau, \mu) + \\ + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=m}^{N_x} (2k+1) x_k Q_k^m(\mu) \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Приближенно заменим интеграл в (5.44) гауссовой квадратурой, для чего представим $C^m(\tau, \mu_i)$ конечным набором из N значений по μ , иначе ординат. Отметим, что в случае однородного

слоя перенос излучения симметричен относительно восходящих ($\mu < 0$) и нисходящих ($\mu > 0$) потоков излучения, поэтому интеграл в уравнении представим гауссовой квадратурой в форме:

$$\int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^-(\tau) Q_k^m(\mu_j^-) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} w_j C_j^+(\tau) Q_k^m(\mu_j^+), \quad (5.45)$$

где $\mu_j^- = (\mu_j - 1)/2$, $\mu_j^+ = (\mu_j + 1)/2$; μ_j – нули полиномов Лежандра; $P_{N/2}(\mu)$, w_j – весовые коэффициенты гауссовой квадратуры; $C_j^\pm(\tau) \equiv C_j^m(\tau, \mu_j^\pm)$. Отметим, что N должно быть четным. Достоинством данной схемы является поиск только $N/2$ корней.

В этом случае УПИ (5.44) можно заменить системой из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mu_i^\pm \frac{dC_i^\pm(\tau)}{d\tau} = -C_i^\pm(\tau) + \frac{\Lambda}{4} \sum_{j=1}^{N/2} w_j \sum_{k=m}^{N_x} (2k+1) x_k Q_k^m(\mu_i^\pm) \left(C_j^-(\tau) Q_k^m(\mu_j^-) + C_j^+(\tau) Q_k^m(\mu_j^+) \right). \quad (5.46)$$

Обе системы (5.42) и (5.46) для одного азимутального индекса m можно переписать в единой матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \vec{C}(\tau) = \vec{B} \vec{C}(\tau), \quad (5.47)$$

где $\vec{C}(\tau)$ – вектор-столбец искомых коэффициентов разложения; \vec{B} – матрица, соответствующая системам (5.42) или (5.46).

В обоих случаях матричные представления возможны, если в ряде (5.40) и в гауссовой квадратуре зависимость яркости от зенитного угла μ представима конечным числом членов N , что воз-

можно если $L(\mu)$ является гладкой функцией. Исследования показывают, что в угловом распределении яркости внутри среды имеются особенности. Особенность нельзя представить конечным числом членов ряда, поскольку это приведет к непредсказуемой ошибке в решении. Единственный эффективный путь здесь: пусть приближенное, но аналитическое выделение особенностей решения, т.е. решение краевой задачи УПИ (5.38), (5.39), представляется в виде суммы анизотропной части решения $L_a(\tau, \mu, \varphi)$, содержащей все особенности решения, и гладкой части решения $\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)$:

$$L(\tau, \mu, \varphi) = L_a(\tau, \mu, \varphi) + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi), \quad (5.48)$$

что приведет к краевой задаче

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tau} + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \tilde{L}(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{I}}' + S(\tau, \mu, \varphi), \\ \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=0, \mu>0} = 0, \quad \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = -L_a(\tau_0, \mu, \varphi), \end{cases} \quad (5.49)$$

где функция источников (невязка УПИ от неточности представления анизотропной части)

$$S(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) L_a(\tau, \mu', \varphi') d\hat{\mathbf{I}}' - \mu \frac{\partial L_a}{\partial \tau} - L_a(\tau, \mu, \varphi). \quad (5.50)$$

Изменение граничных условий связано с тем, что часто анизотропная часть учитывает прямое излучение строго, а рассеянное в обратную полусферу – приближенно, и для эквивалентности краевых задач (5.49) и (5.38), (5.39) необходимо эту неточность компенсировать.

Существуют различные формы выделения анизотропной части решения, но независимо от конкретной формы представления $L_a(\tau, \mu, \varphi)$ система (5.47) для гладкой части решения примет вид

$$\frac{d}{dt} \vec{C}(\tau) = \vec{B} \vec{C}(\tau) + \vec{F}(\tau), \quad (5.51)$$

где вектор-столбец $\vec{F}(\tau)$ источников связан с модификацией УПИ от выделения $L_a(\tau, \mu, \varphi)$. Здесь столбец $\vec{C}(\tau)$ связан с представлением гладкой части решения, но знак тильда опущен для упрощения записи.

Решение полученной системы (5.51) имеет вид

$$-\vec{C}(0) + e^{\vec{B}\tau_0} \vec{C}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\vec{B}t} \vec{F}(t) dt. \quad (5.52)$$

Система содержит N уравнений с $2N$ неизвестными. Недостающие N уравнений дают граничные условия краевой задачи (5.49), которые имеют вид двухточечных краевых условий – по $N/2$ на каждой границе. Это приводит (5.52) к решению в форме рассеивателей

$$\begin{bmatrix} \vec{C}_-(0) \\ \vec{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}_- \\ \vec{J}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_- & \vec{T}_- \\ \vec{T}_+ & \vec{R}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_+(0) \\ \vec{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

где столбец \vec{J} является следствием функции источников, а матрица коэффициентов R и T определяет азимутальную матрицу коэффициентов яркости плоского слоя по отражению R и пропусанию T .

5.4. Коэффициент яркости поверхности объектов

Полученное решение (5.53) позволяет сформулировать математическую модель коэффициента яркости поверхности объектов. Однако модель должна быть дополнена, чтобы учесть: 1) отражение верхней границей слоя; 2) отражение подложкой на нижней границе слоя; 3) преломление и пропускание света на верхней границе; 4) неоднородность оптических параметров слоя по глубине.

Выражение (5.53) определяет перенос излучения через слой: отраженное $\vec{C}_-(0)$ и прошедшее $\vec{C}_+(\tau_0)$ излучение через излучение падающее на границы слоя сверху $\vec{C}_+(0)$ и снизу $\vec{C}_-(\tau_0)$. До-

стоинством (5.53) является возможность перехода к неоднородному по высоте, стратифицированному слою, разбивая его произвольное количество однородных слоев.

Покажем, что два смежных слоя можно заменить одним слоем, описываемым выражением эквивалентным по форме (5.53), но с эффективными параметрами, выражающимися через параметры слоев. Тем самым свойства переноса излучения через слой обладает инвариантностью, а элементы матрицы объединенного слоя определяются при помощи матрично-операторного метода (МОМ).

Рассмотрим случай двухслойной среды из двух смежных слоев (рис. 5.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{C}_-^1(0) \\ \bar{C}_+^1(\tau_1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{J}_-^1 \\ \bar{J}_+^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{1-} & \bar{T}_{1-} \\ \bar{T}_{1+} & \bar{R}_{1+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_\downarrow^1(0) \\ \bar{C}_\uparrow^1(\tau_1) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \bar{C}_-^2(\tau_1) \\ \bar{C}_+^2(\tau_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{J}_-^2 \\ \bar{J}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2-} & \bar{T}_{2-} \\ \bar{T}_{2+} & \bar{R}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_\downarrow^2(\tau_1) \\ \bar{C}_\uparrow^2(\tau_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где нижний индекс определяет принадлежность верхнему 1 или нижнему слою 2. Вертикальными стрелками обозначено падающее сверху или снизу на слой излучение.

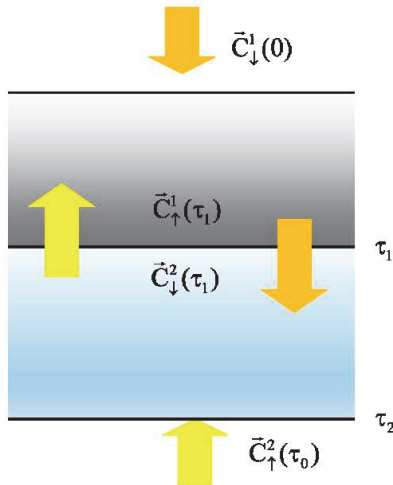


Рис. 5.6. Система из двух смежных слоев мутной среды

Отметим, что поскольку слои соприкасаются друг с другом, то

$$\vec{C}_+(\tau_1) = \vec{C}_\downarrow^2(\tau_1) \equiv \vec{C}_\downarrow, \quad \vec{C}_-(\tau_1) = \vec{C}_\uparrow^1(\tau_1) \equiv \vec{C}_\uparrow, \quad (5.55)$$

что позволяет переписать (5.54) в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{C}_-^1 \\ \vec{C}_\downarrow \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \vec{F}_-^1 \\ \vec{F}_+^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_{1-} & \vec{T}_{1-} \\ \vec{T}_{1+} & \vec{R}_{1+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_\downarrow^1 \\ \vec{C}_\uparrow \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vec{C}_\uparrow \\ \vec{C}_+^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \vec{F}_-^2 \\ \vec{F}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R}_{2-} & \vec{T}_{2-} \\ \vec{T}_{2+} & \vec{R}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_\downarrow \\ \vec{C}_\uparrow^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Разрешая полученную систему относительно отраженного \vec{C}_- и прошедшего \vec{C}_+ излучений относительно падающего на систему излучения \vec{C}_\downarrow и \vec{C}_\uparrow^2 , получим:

$$\begin{aligned} \vec{C}_-^1 &= \vec{F}_-^1 + \vec{T}_{1-} (\vec{I} - \vec{R}_{2-} \vec{R}_{1+})^{-1} \vec{R}_{2-} \vec{F}_+^1 + \vec{T}_{1-} (\vec{I} - \vec{R}_{2-} \vec{R}_{1+})^{-1} \vec{F}_-^2 + \\ &+ \left[\vec{R}_{1-} + \vec{T}_{1-} (\vec{I} - \vec{R}_{2-} \vec{R}_{1+})^{-1} \vec{R}_{2-} \vec{T}_{1+} \right] \vec{C}_\downarrow^1 + \vec{T}_{1-} (\vec{I} - \vec{R}_{2-} \vec{R}_{1+})^{-1} \vec{T}_{2-} \vec{C}_\uparrow^2, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_+^2 &= \vec{T}_{2+} (\vec{I} - \vec{R}_{1+} \vec{R}_{2-})^{-1} \vec{F}_+^1 + \vec{T}_{2+} (\vec{I} - \vec{R}_{1+} \vec{R}_{2-})^{-1} \vec{R}_{1+} \vec{F}_-^2 + \vec{F}_+^2 + \\ &+ \vec{T}_{2+} (\vec{I} - \vec{R}_{1+} \vec{R}_{2-})^{-1} \vec{T}_{1+} \vec{C}_\downarrow^1 + \left[\vec{R}_{2+} + \vec{T}_{2+} (\vec{I} - \vec{R}_{1+} \vec{R}_{2-})^{-1} \vec{R}_{1+} \vec{T}_{2-} \right] \vec{C}_\uparrow^2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Введем следующие обозначения

$$\vec{a}_1 = (\vec{I} - \vec{R}_{2-} \vec{R}_{1+})^{-1}, \quad \vec{a}_2 = (\vec{I} - \vec{R}_{1+} \vec{R}_{2-})^{-1}, \quad (5.59)$$

что позволит записать (5.57), (5.58) в матричном виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{C}_-^1 \\ \vec{C}_+^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \vec{F}_-^1 + \vec{T}_{1-} \vec{a}_1 (\vec{R}_{2-} \vec{F}_+^1 + \vec{F}_-^2) \\ \vec{T}_{2+} \vec{a}_2 (\vec{F}_+^1 + \vec{R}_{1+} \vec{F}_-^2) + \vec{F}_+^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \vec{R}_{1-} + \vec{T}_{1-} \vec{a}_1 \vec{R}_{2-} \vec{T}_{1+} & \vec{T}_{1-} \vec{a}_1 \vec{T}_{2-} \\ \vec{T}_{2+} \vec{a}_2 \vec{T}_{1+} & \vec{R}_{2+} + \vec{T}_{2+} \vec{a}_2 \vec{R}_{1+} \vec{T}_{2-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_\downarrow^1 \\ \vec{C}_\uparrow^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Тем самым мы показали, что решение для плоского слоя обладает свойством инвариантности, который впервые предложил в 1943 г. Виктор Амазаспович Амбарцумян. Принцип инвариант-

ности позволил Амбарцумяну получить строгое аналитическое решение уравнения переноса, что по сути стало основой астрофизики: всю информацию о звездах мы получаем по выходящему из их атмосферы излучению.

Обратимся теперь к учету отражения и преломления на границе двух сред. Рассмотрим предварительно важный частный случай слоя, облучаемого плоским мононаправленным источником, с диффузно отражающей подложкой с коэффициентом отражения ρ . В этом случае

$$L(\tau_0, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\mu < 0} = \frac{\rho}{\pi} \int_{(\mu > 0)} L(\tau_0, \hat{\mathbf{l}}') \mu d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (5.61)$$

Если подставить представление яркости через азимутальный ряд (5.43) и дискретные ординаты, а интеграл (5.61) выразить через гауссовы квадратуры, то получим

$$C^0(\tau_0, \mu_i^-) = 2\rho \sum_{j=1}^{N/2} C^0(\tau_0, \mu_j^+) \mu_j^+ w_j, \quad \forall m > 0: C^m(\tau_0, \mu_i^-) = 0, \quad (5.62)$$

или в матричной форме

$$m=0: \bar{\mathbf{C}}_-(\tau_0) = 2\rho \bar{\mathbf{R}}_L \bar{\mathbf{C}}_+(\tau_0); \quad \forall m > 0: \bar{\mathbf{C}}_-(\tau_0) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (5.63)$$

где матрица ламбертовского отражения $\bar{\mathbf{R}}_L$ состоит из $N/2$ одинаковых строк $\{\mu_j^+ w_j\}$.

В соответствии с MOM (5.60) получим отраженной компоненты нулевой гармоники

$$\bar{\mathbf{C}}_-(0) = \bar{\mathbf{F}}_- + 2\rho \bar{\mathbf{T}}_- (\bar{\mathbf{1}} - 2\rho \bar{\mathbf{R}}_L \bar{\mathbf{R}})^{-1} \bar{\mathbf{R}}_L \bar{\mathbf{F}}_+, \quad (5.64)$$

где везде опущен очевидный индекс 1, относящийся к слою. Все остальные азимутальные гармоники $m > 0$ определяются выражением однослойной среды (5.53).

Однако данный подход непосредственно не может быть применен на границе с преломлением, поскольку направления ординат («лучей») меняется на границе по закону Снеллиуса

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (5.65)$$

где n_1, n_2 – показатели преломления среды, и нарушается соответствие направлений ординат.

Рассмотрим подробнее преломление на практически важном случае, когда $n_1 < n_2$. Будем первую среду называть для определенности «атмосфера» (все, что относится к ней будем снабжать индексом a) и положим ее $n_a = 1$, а вторую – «океан» (индекс o) с $n_o > 1$. Косинусы лучей с осью OZ в обеих средах в соответствии с (5.65) будут связаны между собой

$$\mu_a = \sqrt{1 - n_o^2(1 - \mu_o^2)}. \quad (5.66)$$

Из (5.66) видно, что для $\mu_o < \mu_t \equiv \sqrt{1 - 1/n_o^2}$ в океане возникает область *total reflection*, когда лучи не выходят из океана, а идеально отражаются опять в океан. Для области *total reflection* формулировка граничных условий не представляет проблем. Рассмотрим в этих условиях интеграл (5.44) по зонам

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' &= \int_{-1}^{-\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \\ + \int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' &+ \int_{\mu_t}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Первый и последний интегралы связаны с областью преломления, а второй относится к области полного внутреннего отражения. Для второго интеграла выполним преобразование

$$\int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^1 Q_k^m(\nu) C^m(\tau, \nu) d\nu, \quad \mu' = \mu_t \nu, \quad (5.68)$$

что позволяет применить двойную гауссову квадратуру с N_i узлами и впоследствии перейти в этой зоне к двум потоком ординат: \vec{C}_+ , \vec{C}_- , которые на границе связаны идеальным зеркальным отражением.

Для первого и последнего интегралов в (5.67) сделаем преобразование переменной интегрирования к μ_a по выражению (5.66)

$$\mu_o = \sqrt{1 - \frac{1 - \mu_a^2}{n_o^2}}, \quad d\mu_o = \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad (5.69)$$

что преобразует интегралы к виду

$$\int_{-1}^{-\mu_i} Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) d\mu_o = \int_{-1}^0 Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad (5.70)$$

$$\int_{\mu_i}^1 Q_k^m(\mu_2) C^m(\tau, \mu_2) d\mu_2 = \int_0^1 Q_k^m(\mu_o) C^m(\tau, \mu_o) \frac{\mu_a d\mu_a}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}}, \quad (5.71)$$

где $\mu_o = -\sqrt{1 - \frac{1 - \mu_a^2}{n_o^2}}$.

Нетрудно видеть, что при переходе к дискретным ординатам устанавливается полное соответствие между атмосферными ординатами \vec{C}_+ , \vec{C}_- и соответствующими океанскими \vec{C}_+ , \vec{C}_- . При этом для океана изменяются веса квадратурной формулы

$$w_i^o = w_i^a \frac{\mu_i}{\sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_i^2)}}, \quad (5.72)$$

где μ_i – корню полинома порядка N .

Если ввести вектора $\vec{C}_+^{\text{опп}} = [\vec{C}_+^t; \vec{C}_+^o]$, $\vec{C}_-^{\text{опп}} = [\vec{C}_-^o; \vec{C}_-^t]$, где квадратные скобки обозначают объединение векторов в один, суммарной размерности, в соответствии с правилами системы

Matlab, то для них будут справедливы все соотношения (5.51)–(5.53). Соответственно, для введенных величин можно записать и условие на границе раздела атмосфера – океан:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_-^a \\ \bar{\mathbf{C}}_+^{\text{осп}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \bar{\mathbf{T}}_{ao} \\ \bar{\mathbf{T}}_{oa} & \bar{\mathbf{R}}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_+^a \\ \bar{\mathbf{C}}_-^{\text{осп}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{ao} \equiv [\bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{0}}], \quad \bar{\mathbf{T}}_{oa} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{T}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_{oo} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{1}} \\ \bar{\mathbf{R}} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

где $\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{T}}$ – френелевские матрицы отражения.

Выражение (5.73) позволяет использовать матрично-операторный метод. Нетрудно видеть, что в случае полубесконечного океана с френелевской границей, яркость отраженного диффузного излучения будет иметь вид

$$\bar{\mathbf{C}}_- = -[\bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{0}}](\bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{u}}_{12}^{-1}\bar{\mathbf{u}}_{11}\bar{\mathbf{R}}_{oo})^{-1}\bar{\mathbf{u}}_{12}^{-1}\bar{\mathbf{J}}_-. \quad (5.74)$$

5.5. Рассеяние света малыми частицами

Рассмотрим рассеяние на одной частице. Размер частицы сопоставим с длиной волны рассеиваемого излучения, поэтому поле внутри частицы и на малом расстоянии от нее существенно неоднородное, отчего приближение лучевой оптики неприменимо. Анализ рассеяния возможен только на основе электромагнитной теории. Однако при этом на расстоянии в несколько длин волн от частицы (дальняя зона) лучевое приближение уже применимо.

Имеем для облученностей при рассеянии на частице плоской волны (рис. 5.7):

$$E(\hat{\mathbf{I}}) = E(\theta, \varphi) = \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{r^2} E_0 = \frac{\sigma(\hat{\mathbf{I}})}{r^2} E_0,$$

где $\sigma(\theta, \varphi)$ – коэффициент направленного рассеяния; E_0 – облучённость частицы падающей волной; r – расстояние от частицы до точки исследования рассеянного света, остальные обозначения приведены на рис. 5.7.

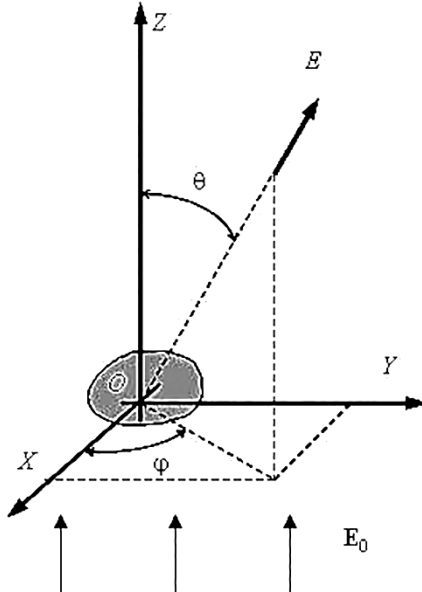


Рис. 5.7. Рассеяние плоской электромагнитной волны частицей

Определим следующие величины:

$\sigma = \oint \sigma(\hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}$ – показатель полного ослабления,

$x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') = \frac{\sigma(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')}{\sigma} 4\pi$ – индикатриса рассеяния.

Одновременно с рассеянием внутри частицы происходит поглощение. Поэтому вводится κ – коэффициент поглощения и ослабления $\varepsilon = \kappa + \sigma$.

При анализе рассеяния удобнее оперировать не самими коэффициентами, а с отношением их к площади сечения рассеивающей частицы G :

$$Q_a = \frac{\kappa}{G}, \quad Q_s = \frac{\sigma}{G}, \quad Q_e = \frac{\varepsilon}{G}, \quad (5.75)$$

где Q_a, Q_s, Q_e – факторы поглощения, рассеяния и ослабления.

Нетрудно видеть, что все коэффициенты имеют размерность L^2 , а соответствующие факторы безразмерны.

Пусть на частицу падает плоская скалярная волна

$$u_0 = \exp(-ikz + i\omega t). \quad (5.76)$$

Рассеянную волну на большом расстоянии можно считать близкой к сферической

$$u' = S(\hat{\mathbf{I}}) \frac{\exp(-ikr + i\omega t)}{ikr} = S(\hat{\mathbf{I}}) \frac{\exp(-ikr + ikz)}{ikr} u_0, \quad (5.77)$$

где $S(\hat{\mathbf{I}})$ – амплитудная функция рассеяния.

Поскольку $E \sim |u|^2$, то

$$\sigma(\hat{\mathbf{I}}) = |S(\hat{\mathbf{I}})|^2. \quad (5.78)$$

На большом расстоянии от частицы поле будет иметь вид суперпозиции падающей и рассеянной волн

$$u' + u_0 = u_0 \left\{ 1 + \frac{S(\hat{\mathbf{I}})}{ikr} \exp(-ikr + ikz) \right\}. \quad (5.79)$$

Во френелевском приближении

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}, \quad \frac{1}{r} \approx \frac{1}{z},$$

что приводит (5.79) к виду

$$u' + u_0 = u_0 \left\{ 1 + 1 + \frac{S(0)}{ikz} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) \right\}. \quad (5.80)$$

Откуда имеем для интенсивности волны

$$\begin{aligned} |u' + u_0|^2 &= \left| 1 + \frac{S(0)}{ikz} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) \right|^2 = \\ &= 1 + \frac{2}{kz} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S(0)}{i} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) \right\} + \frac{\operatorname{const}}{k^2 z^2}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Тогда можно вычислить коэффициент ослабления

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int (|u' + u_0|^2 - |u_0|^2) dx dy}{|u_0|^2} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{S(0)}{ikz} \iint \exp \left(-ik \frac{\rho^2}{2z} \right) dx dy \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{4\pi}{i} S(0) \frac{1}{kz} \int_0^{\infty} \exp \left(-ik \frac{\rho^2}{2z} \right) \rho d\rho \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi}{ikz} \frac{2z}{(-ik)} \right\}. \end{aligned}$$

Соответственно, имеем выражение

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}(S(0)), \quad (5.82)$$

которое носит название оптической теоремы. Это исключительно важное соотношение, позволяющее определить ослабление на частице по значению амплитудного коэффициента рассеяния.

Отметим, что рассеяние представляет собой отражение, преломление и дифракцию на частице. Отражение и преломление, как следует из формул Френеля, всегда приводит к поляризации излучения. Поэтому анализ рассеяния на частице возможен только на основе векторной теории, что в лучевом приближении приводит вектор-параметру Стокса $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$. Поэтому для описания рассеяния необходимо использовать не один амплитудный коэффициент, а матрицу рассеяния Мюллера $\tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}})$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}'), \quad (5.83)$$

которая выражается через билинейную комбинацию коэффициентов матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ и в общем случае является матрицей 4×4 . Наличие симметрии при рассеянии приводит к уменьшению числа независимых и отличных от нуля элементов матрицы. В случае сферической симметрии это приводит к матрице вида

$$\tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) = \begin{bmatrix} d_{11}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & d_{21}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & 0 & 0 \\ d_{21}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & d_{11}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & d_{34}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \\ 0 & 0 & -d_{34}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) & d_{33}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

Определим показатель рассеяния

$$\sigma = \oint d_{11}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}', \quad (5.85)$$

что позволяет ввести нормированную матрицу рассеяния

$$\tilde{x}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) = \frac{4\pi}{\sigma} \tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}). \quad (5.86)$$

Все сказанное позволяет записать уравнение переноса излучения с учетом поляризации – векторное УПИ (ВУПИ):

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\sigma}{4\pi} \oint \tilde{x}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}', \quad (5.87)$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$ – матрица экстинкции, определяющая зависимость поглощения от состояния поляризации – дихроизм среды.

Однако для большинства сред характерно

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{I}},$$

что приводит ВУПИ к виду

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Lambda \varepsilon(\mathbf{r})}{4\pi} \oint \tilde{x}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (5.88)$$

5.6. Теория Ми

Строгое решение уравнений Максвелла при облучении сферической металлической частицы плоской волной было предложено Г. Ми в 1908 г. – теория Ми. Векторное волновое уравнение для случая дифракции плоской монохроматической волны на металлической сфере имеет вид

$$(\Delta + \tilde{n}^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \tilde{n} = n + ik, \quad \tilde{n}^2 = \varepsilon \mu + i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}, \quad (5.89)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – комплексная амплитуда волны; ε – диэлектрическая проницаемость; μ – магнитная проницаемость; σ – проводимость среды; k – волновое число; ω – частота волны.

Для решения используются вектора Герца

$$\vec{\Pi}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\psi_e(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{ru}, \quad \vec{\Pi}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\psi_m(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{rv}, \quad (5.90)$$

где функции ψ удовлетворяют скалярному волновому уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \tilde{n}^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.91)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{M}_v + i\mathbf{N}_u, \quad \mathbf{H} = \tilde{n}(-\mathbf{M}_u + i\mathbf{N}_v), \\ \mathbf{M}_\psi &= \text{rot}(\mathbf{r}\psi), \quad \tilde{n}k\mathbf{N}_\psi = \text{rot}\mathbf{M}_\psi. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Разница между функциями ψ определяется граничными условиями:

\mathbf{M} – магнитное колебание: $E_r = 0, H_r \neq 0$;

\mathbf{N} – магнитное колебание: $E_r \neq 0, H_r = 0$.

Функции ψ как решения скалярного волнового уравнения в сферически симметричном случае представимы в виде линейной комбинации собственных функций волнового уравнения

$$\psi_{lm}(r, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) Z_l(\tilde{n}kr), \quad (5.93)$$

где

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферическая функция;

$Z_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} z_{l+1/2}(\rho)$, $z_{l+1/2}(\rho)$ – функция Бесселя.

С учетом введенных обозначений комплексные амплитуды электромагнитного поля можно выразить в виде

$$\begin{aligned} E_\theta = H_\varphi &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr} S_2(\theta) \cos\varphi, \quad -E_\varphi = \\ &= H_\theta = -\frac{i}{kr} e^{-ikr} S_1(\theta) \cos\varphi, \end{aligned} \quad (5.94)$$

где амплитудные функции рассеяния M_i имеют вид

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m(m+1)} [a_m \pi_m(\cos\theta) + b_m \tau_m(\cos\theta)], \quad (5.95)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m(m+1)} [b_m \pi_m(\cos\theta) + a_m \tau_m(\cos\theta)], \quad (5.96)$$

$$\pi_m(\cos\theta) = \frac{dP_m(\cos\theta)}{d\cos\theta}, \quad \tau_m(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} \pi_m(\cos\theta), \quad (5.97)$$

$$a_m = \frac{\psi'_m(y)\psi_m(x) - \tilde{n}\psi_m(y)\psi'_m(x)}{\psi'_m(y)\zeta_m(x) - \tilde{n}\psi_m(y)\zeta'_m(x)},$$

$$b_m = \frac{\tilde{n}\psi'_m(y)\psi_m(x) - \psi_m(y)\psi'_m(x)}{\tilde{n}\psi'_m(y)\zeta_m(x) - \psi_m(y)\zeta'_m(x)}, \quad (5.98)$$

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{m+1/2}(z), \quad \zeta_m(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{m+1/2}(z),$$

$$x = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad y = \tilde{n}x. \quad (5.99)$$

Компоненты E_r и H_r убывают быстрее, чем $1/r$, и, соответственно, на больших расстояниях от частицы обращаются в 0.

Соответственно, для рассеяния естественного света можно записать

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{i_1(\theta) + i_2(\theta)}{2}, \quad i_1(\theta) = |S_1(\theta)|, \quad i_2(\theta) = |S_2(\theta)|, \quad (5.100)$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1(0) + S_2(0)}{2} \right\}. \quad (5.101)$$

Расчеты по формулам теории Ми невозможны без применения компьютера. Для качественного анализа рассеяние на частице можно представить как интерференцию трех волн: отраженной, преломленной и дифрагировавшей. Однако такое деление волны на три выраженные компоненты возможно только для частиц существенно больших длины волны. Для частиц произвольного размера необходимо учесть эффекты, не описываемые в приближении дифракции.

1. Краевой эффект – особое распределение полей и токов на границе (крае) раздела свет–тень, придает особенность распределению рассеянного вперед света; приводит к тому, что кривая $Q_e(x)$ с ростом x стремится к значению выше 2.

2. Поверхностная волна – волновое распределение токов, которое продолжается и в области тени – объясняют глории, рассеяние назад, существование «ряби» на кривой $Q_e(x)$.

При анализе явления рассеяния на основе теории Ми часто полезным оказывается принцип локализации Дебая: зависимость a_m и b_m от номера m имеет достаточно сложный характер при $m \ll x$, однако при $m \sim x$ они экспоненциально убывают и практически равны нулю при $m + 2 > x$.

Физическая сущность принципа локализации раскрывается на основе зон Френеля: члены m -ых номеров рядов теории Ми связаны с лучами, проходящими на расстоянии $\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\pi}$ от центра сферы. Поэтому члены с номерами $m + 1/2 < x$ относятся к лучам внутри сферы, а члены с $m + 1/2 > x$ относятся к лучам, проходящим мимо сферы.

Физику рассеяния света на сферических частицах лучше всего понять при изучении крайних, граничных значений параметров частиц, где преобладают те или иные эффекты и возможны простые приближенные решения. На рисунке 5.8 приведен «квадрат» из монографии ван де Хюлста Г. «Рассеяние света малыми частицами», который графически отображает все возможные приближения в теории Ми.

При этом приняты следующие обозначения:

- области, обозначенные одной цифрой, определяются одним, ярко выраженным здесь эффектом;
- области, обозначенные двумя цифрами, занимают промежуточное положение, где справедливы эффекты обеих областей;
- в центральной области невозможно приближенное описание – это область теории Ми.

Далее рассмотрим каждую область подробно, следуя обозначениям и последовательности ван де Хюлста Ми.

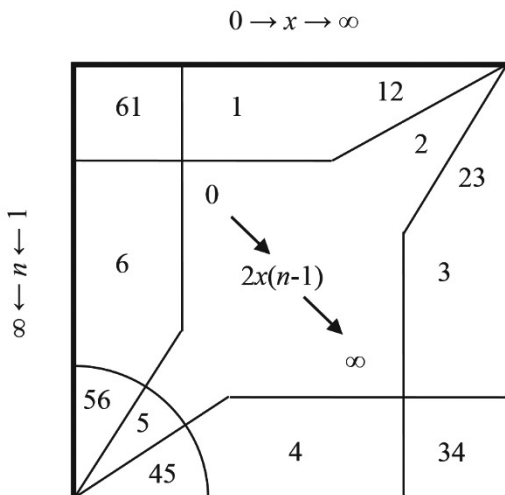


Рис. 5.8. Диаграмма приближенных решений в теории Ми для сферических частиц без поглощения

Область 6 *рассеяние Рэлея* – это область очень малых частиц, когда размеры частиц и набег фазы на них очень мал:

$$x \ll 1, \quad \tilde{n}x \ll 1, \quad (5.102)$$

то есть частица не вызывает существенных искажений в поле электромагнитной волны.

В соответствии с принципом локализации Дебая это соответствует только одному члену в рядах теории Ми – рассеянию на диполе:

$$i_1(\theta) = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 x^4, \quad i_2(\theta) = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 x^4 \cos^2 \theta, \quad (5.103)$$

что соответствует фактору рассеяния

$$Q_\sigma(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 x^4 (1 + \cos^2 \theta), \quad (5.104)$$

и степени поляризации рассеянного света

$$p = \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (5.105)$$

Распределение интенсивностей и поляризации рассеянного излучения приведены на рис. 5.9.

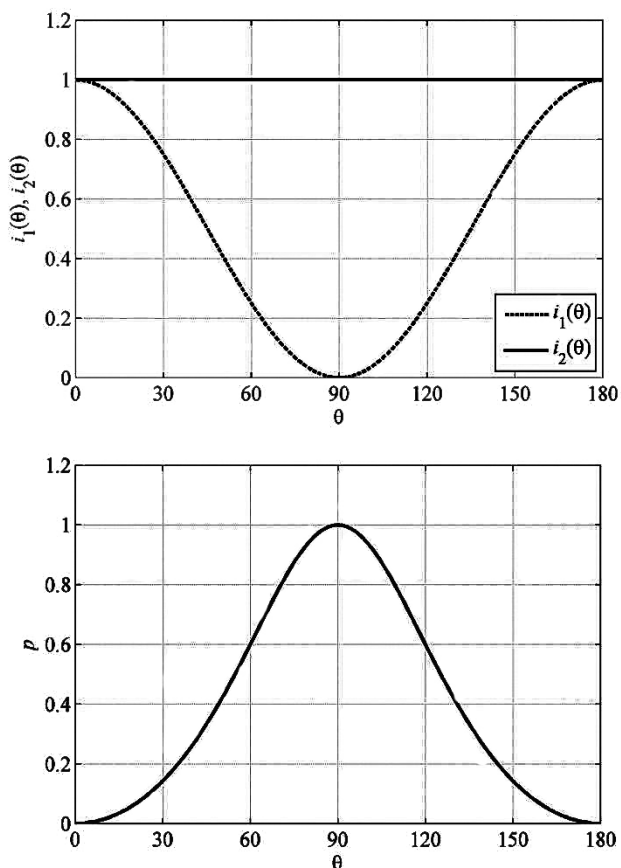


Рис. 5.9. Распределение яркости и поляризации рассеянного света при рассеянии Рэлея

Нетрудно отметить из анализа приведенных графиков, что максимум поляризации 100% под углом 90° . Из выражения (5.104) видно, что для рэлеевского рассеяния характерна сильная зависимость от длины волны λ :

$$\sigma = \varepsilon \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

Такая зависимость от длины волны объясняет голубой цвет неба и красный цвет восхода или заката солнца.

Соответственно (5.104) имеем индикатрису рассеяния

$$x(\theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta). \quad (5.106)$$

Отметим, что при рэлеевском рассеянии доли рассеянных потоков вперед и назад равны.

С увеличением размеров частиц или их показателя преломления необходимо учитывать все большее число членов в рядах теории Ми, что приводит к следующим эффектам:

1) увеличивается отношение доли рассеяния потока в переднюю полусферу направлений к доле рассеянного потока назад – эффект Ми: преимущественное рассеяние света вперед;

2) максимум поляризации смещается в область углов визирования $\theta > 90^\circ$, а степень поляризации становится меньше 100%;

3) остаточный голубой свет для излучения рассеянного под углом около 90° – зависимость рассеяния от длины волны уменьшается, однако различно у разных компонент i_1 и i_2 .

Отметим, что рэлеевское рассеяние не чувствительно ни к форме, ни к размерам частиц при соблюдении условий (5.102).

Область 5б, где с дальнейшим ростом показателя преломления n , становятся все более существенными в рядах теории Ми члены более высоких номеров. Периодически в распределении волны по поверхности частицы возникают стоячие волны, для которых наблюдается резонанс – область оптического резонанса.

Область 5 – область оптического резонанса.

В соответствии с формулами (5.98) для коэффициентов рядов теории Ми выражение в знаменателе может обратиться в 0:

$$\psi'_m(y)\zeta_m(x) - \tilde{m}\psi_m(y)\zeta'_m(x) = 0, \quad \tilde{m}\psi'_m(y)\zeta_m(x) - \psi_m(y)\zeta'_m(x) = 0.$$

Это приводит к тому, что в рядах этот член становится существенно больше других, и ими можно пренебречь. Тем самым ряды обращаются в один член, что аналогично рэлеевскому рассеянию, однако свойства рассеяния при этом очень специфичны именно для этого типа стоячей волны на сфере. В этом смысле

рассеяние Рэля является одним из типов – электрический диполь. Возможны также и магнитный диполь, электрический магнитный квадруполь, ...

На кривой ослабления появляются характерные пички, а индикатриса рассеяния и кривая поляризации приобретают крайне сложный и капризный вид.

Область 45, где с ростом размеров шара в рассеянной волне появляются все более выраженные отраженная и дифрагировавшая компоненты.

Область 4 – *полностью отражающие шары*.

Такое разделение на отраженную и дифрагировавшую волны отчетливо проявляется для $x \geq 3$, а для $x \leq 0,4$ расчет возможен только по полным формулам теории Ми. При дифракции на сфере имеем кружок рассеяния Эйри:

$$i(\theta) \sim \left(\frac{J_1(x\theta)}{x\theta} \right)^2, \quad (5.107)$$

отраженную волну, а для определения рассеянного поля необходимо учесть их интерференцию. Индикатриса для углов рассеяния в переднюю полусферу приведена на рис. 5.10.

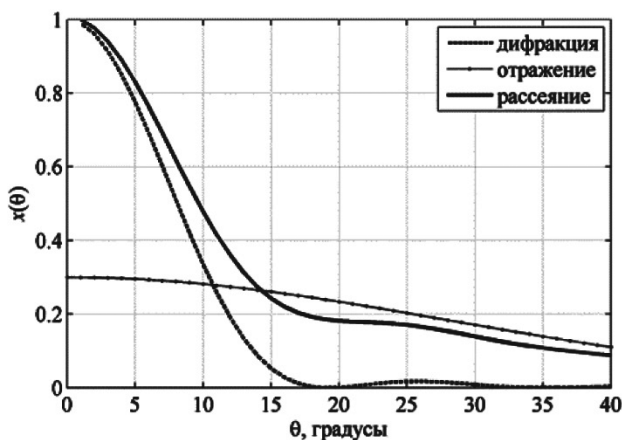


Рис. 5.10. Индикатриса рассеяния для больших отражающих шаров

Область 34, где с уменьшением показателя преломления частицы n , в рассеянной волне появляются все более выраженные отраженные компоненты.

Область 3 – *большие шары – область геометрической оптики.*

В этой области присутствуют отраженная и прошедшая (преломленная) компоненты, расчет которых возможен на основе геометрической оптики, и дифрагировавшая волна. Рассеянное поле определяется их интерференцией.

При дифракции поляризация волны не зависит от ее положения относительно плоскости рассеяния, а поляризация отраженной и преломленной компонент в соответствии с законом Френеля сильно поляризована. В области малых углов преобладает дифракция, и излучение поляризовано слабо. В области больших углов рассеяния преобладают отраженные и преломленные компоненты, что и определяет сложную картину поляризации здесь. Отметим, что ход лучей геометрической оптики не зависит от радиуса капли.

Для больших шаров известен парадокс рассеяния, когда при $x \rightarrow \infty$ фактор ослабления $Q_e \rightarrow 2$, т.е. сечение ослабления в 2 раза превосходит сечение рассеяния, что и определяется наличием двух компонент пропорциональных сечению частицы: дифракция и геометрическая оптика.

Внутри капли может происходить полное внутреннее отражение (ПВО), при котором коэффициент отражения близок к 1, что определяет высокую яркость (пики) рассеянного излучения для некоторых направлений. Возможны две геометрии хода лучей внутри капли: радуга и глория (рис. 5.11).

Поскольку угол рассеяния при радуге фиксирован, то излучение повышенной яркости образует дугу относительно наблюдателя в направлении противоположном от источника: в природе наблюдается солнечная радуга. Угол рассеянного излучения при радуге зависит только от показателя преломления среды шара, что вследствие дисперсии приводит к его зависимости от длины волны. Это приводит к раскраске дуги в основные цвета спектра.

Возможны схемы хода лучей с двумя, тремя и т.д. ПВО. Поэтому говорят о радугах высших порядков, угол которых смещается в переднюю полусферу.

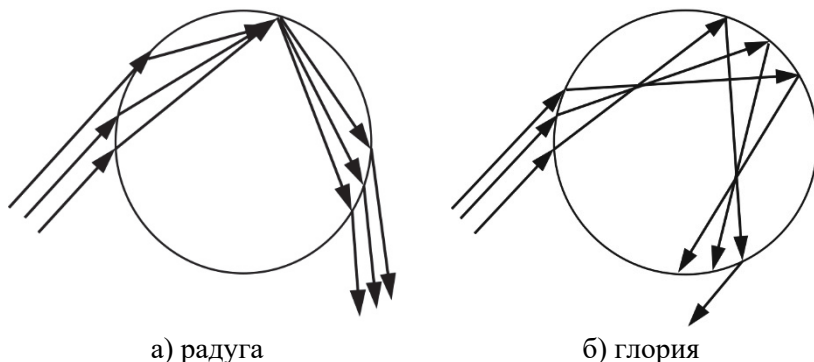


Рис. 5.11. Полное внутреннее отражение внутри шара

Область 23, где с уменьшением показателя преломления частицы n , все более возрастает и сосредотачивается в области малых углов преломленная компонента, а отраженная компонента падает.

Область 2 – аномальная дифракция.

Преломленная составляющая становится неотличимой от дифракции, и они интерферируют между собой – аномальная дифракция. При этом образуется крайне сложный вид индикатрисы рассеяния, характерный для интерференции – венцы. В случае малого показателя преломления «оптически мягких частиц» можно получить приближенное, но очень простое выражение для фактора ослабления

$$Q_e = 2 - \frac{4}{x} \sin x + \frac{4}{x^2} (1 - \cos x). \quad (5.108)$$

Область 12, где с уменьшением размеров частицы x , уменьшается фазовый сдвиг между отраженной и преломленными компонентами, уменьшается дифракция.

Область 1 – область Рэлея–Ганса.

Все три компонента неотличимы друг от друга. Условие для приближения этой области малый сдвиг фазы волны:

$$|\tilde{n} - 1|x \ll 1.$$

Принимается следующее допущение: каждый элемент среды излучает по Рэлею, а суммарная интенсивность определяется их интерференцией. Рассеяние Рэлея–Ганса применимо к частице произвольной формы.

Рассмотрим влияние других параметров оптических свойств частицы на характер рассеяния света на ней.

1. *Поглощение*, когда показатель преломления в общем случае является комплексным

$$\tilde{n} = n + ik,$$

где мнимая компонента определяет поглощение света частицей.

Влияние k очень велико на все характеристики рассеяния, поэтому качественно сводится к уменьшению прошедшей компоненты света и увеличению отраженной. Однако количественный анализ возможен только на основе рядов теории Ми.

2. *Форма частицы* сильно влияет на область рассеяния назад и на поляризационные характеристики рассеянного излучения. Совокупность хаотически ориентированных частиц не эквивалентна системе сферических частиц.

3. *Полидисперсность*, когда в случае рассеяния на ансамбле полидисперсных частиц с функцией распределения частиц по радиусам

$$n(r) = \frac{dN(r)}{dr}, \quad (5.109)$$

все выражения теории Ми должны быть усреднены с функцией (5.109).

В частности для показателя рассеяния имеем:

$$\sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi) = \int_{r_1}^{r_2} n(r) \sigma(2\pi r / \lambda; \theta, \varphi) dr. \quad (5.110)$$

Такая процедура приводит к сглаживанию всех особенностей, венцов и приводит к более монотонному характеру всех зависимостей.

Для многих сред характерно распределение Юнга

$$n(r) = C_0 r^{-\nu},$$

где ν – параметр распределения.

Соответственно, имеем для показателя рассеяния

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma}(\theta, \varphi) &= \int_0^{\infty} C_0 r^{-\nu} \sigma(2\pi r / \lambda; \theta, \varphi) dr = \\ &= C_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{1-\nu} \int_0^{\infty} x^{-\nu} \sigma(x; \theta, \varphi) dx = \text{const} \cdot \lambda^{1-\nu}. \end{aligned}$$

Тем самым рассеяние на системе частиц (аэрозоле) носит менее селективный характер и определяется распределением частиц по радиусам.

4. *Молекулярное рассеяние света*, причиной которого являются флуктуации показателя преломления среды вследствие теплового движения молекул. Если молекулы анизотропны, то к флуктуациям плотности добавляются и флуктуации их ориентации. С оптической точки зрения характеристики молекулярного рассеяния аналогичны рассеянию Рэлея, однако по разному зависят от концентрации частиц (молекул). Рассеяние Рэлея растет с увеличением числа частиц, а молекулярное рассеяние убывает, так как падает вероятность флуктуаций плотности.

Для атмосферы показатель молекулярного рассеяния имеет вид:

$$\sigma_R = \frac{8\pi^3 (n^2 - 1)^2}{3N\lambda^4} \frac{6 + 3\delta}{6 - 7\delta}, \quad (5.111)$$

где N – концентрация молекул; δ – постоянная Кабана, учитывающая анизотропию молекул атмосферы.

Из теории дисперсии

$$n^2 - 1 = \text{const} \cdot N,$$

что позволяет придать формуле (5.111) следующий вид

$$\sigma_R = \text{const} \cdot \frac{N}{\lambda^4}. \quad (5.112)$$

Из уравнения газового состояния в условиях ТДР

$$p = kNT \Rightarrow N = \frac{p}{kT}.$$

Откуда (5.112) приобретает вид

$$\sigma_R = \text{const} \cdot \frac{p}{T\lambda^4}. \quad (5.113)$$

Допустим, нам известно значение показателя рассеяния у поверхности Земли для середины видимого излучения: $\sigma_R(z=0, \lambda=0,55) \equiv \sigma_0$, что позволяет переписать выражение в форме:

$$\sigma_R(z, \lambda) = \sigma_0 \left(\frac{0,55}{\lambda} \right)^4 \frac{p(z)}{T(z)}, \quad (5.114)$$

где z – высота над поверхностью Земли.

5.7. Уравнение глобального освещения

Важное место в светотехнике занимают многократные преотражения в сценах освещения. Этому соответствует краевая задач УПИ для объема V однородной среды без поглощения с отражением и/или преломлением на ее границах S и поверхностях внутри объема. Рассмотрим световое поле внутри некоторого объема V (рис. 5.12) однородной среды без поглощения и рассеяния света, на границах которого и внутренних поверхностях возможно отражение, пропускание и излучение света в объем.

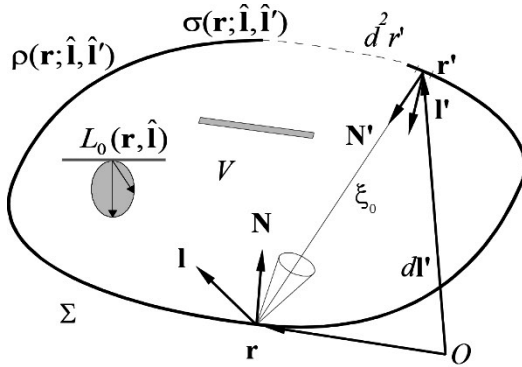


Рис. 5.12. К выводу уравнения глобального освещения

Поскольку в сцене освещения поверхности как отражают, так и пропускают свет, что позволяет определить выходящее из поверхности излучение как рассеянное

$$L_{out}(\hat{\mathbf{i}}) = \frac{1}{\pi} \oint L_{in}(\hat{\mathbf{i}}') \sigma(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) |(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}')| d\hat{\mathbf{i}}', \quad (5.115)$$

где L_{in} , L_{out} – яркости падающего и рассеянного излучений; $\sigma(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$ – коэффициент яркости по рассеянию (отражению и пропусканию) или двунаправленная функция рассеяния (английский термин *BSDF*, *Bi-directional Scattering Distribution Function*):

$$\sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') & \text{при } (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}') \leq 0, \\ \tau(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') & \text{при } (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}') > 0. \end{cases} \quad (5.116)$$

В этом случае яркость в произвольной точке \mathbf{r} поверхности $\Sigma \subset V$ с коэффициентом яркости по рассеянию $\sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$ при направленном освещении имеет вид:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) \Big|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = L_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) + \frac{1}{\pi} \oint L_i(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') \sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') |(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{i}}')| d\hat{\mathbf{i}}', \quad (5.117)$$

где L_0 – яркость собственного излучения элемента поверхности (светильник), а L_i – яркость пучка лучей, падающих на поверхность Σ .

Яркость падающего излучения L_i определяется либо с излучением, либо отражением или пропусканием света каким-либо другим элементом поверхности Σ в данную точку \mathbf{r} , т.е. происходящими в объеме V процессами переноса излучения, что определяется УПИ

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = 0. \quad (5.118)$$

Уравнение (5.118) с условием на границе (5.117) определяют краевую задачу светового поля в объеме V с учетом многократных переотражений на поверхностях внутри этого объема. При решении реальных задач расчета светового поля с учетом многократных отражений необходимо определить этот объем и входящие в него оптически активные поверхности. При строгой постановке это требует учета всех поверхностей во Вселенной, что, конечно же, невозможно. С другой стороны, очевидно, что влияние некоторых поверхностей, например стены другой комнаты, будет пренебрежимо мало, хотя возможно проникновение света через отражение от стен в коридоре. Поэтому принято ограничивать расчет только некоторыми поверхностями, совокупность которых называют сценой.

Решение (5.118) известно – независимость яркости вдоль луча, что позволяет перейти в интеграле (5.117) от яркости падающего излучения L_i в точке \mathbf{r} к яркости точки \mathbf{r}' поверхности Σ , лежащей на ее пересечении с лучом из \mathbf{r} по направлению $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{\mathbf{l}}. \quad (5.119)$$

Элемент d^2r' в точке \mathbf{r}' поверхности Σ сцены наблюдается из исследуемой точки \mathbf{r} под телесным углом

$$d\hat{\mathbf{l}}' = \frac{|\hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{l}}'|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} d^2r', \quad (5.120)$$

где все обозначения приведены на рис. 5.12.

Это позволяет переписать нам граничное условие (5.117) в виде

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma'} L(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}') \sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \frac{|\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{l}}'(\hat{\mathbf{N}}', \hat{\mathbf{l}}')|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} d^2 r', \quad (5.121)$$

где Σ' – видимая напрямую часть поверхностей сцены.

Определение Σ' , во-первых, затруднительно, а во-вторых, зависит от точки исследования \mathbf{r} . Эти трудности можно преодолеть, если ввести функцию видности $\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ точки \mathbf{r}' из точки \mathbf{r} , которая равна 1, если точка видна, и 0 в противоположном случае – затеняется другой поверхностью. Это позволяет придать (5.121) вид интегрального уравнения Фредгольма II-рода для определения поля яркости точек поверхности Σ с учетом многократных переотражений:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} L(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{l}}') \sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 r', \quad (5.122)$$

где $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\left| \left(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}), (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \left(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \right|}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^4}$.

Интегральное уравнение (5.122) учитывает все кратности диффузно-зеркального отражения, пропускания и собственное излучение на границах поверхностей объема V (рис. 5.12), что и является предметом теории глобального освещения. Поэтому в дальнейшем уравнение (5.122) будем называть уравнением глобального освещения (УГО).

Впервые УГО (5.122) было получено в 1960 г. советским теплотехником Г.Л. Поляком для случая радиационного теплообмена излучением в печах. Позднее, в 1986 г., это же уравнение под названием уравнения визуализации было получено *Kajiya J.T* (уравнение получено *Ph.D.* диссертации в университете Юты в 1979 г., с 1979 г. по 1994 г. был профессором в Калифорнийском технологическом институте, в настоящее время исследователь в *Microsoft Research*) в компьютерной графике. УГО записано для яркости и описывает процесс переноса излучения в объеме с многократными отражениями в пятимерном пространстве координат

и направлений. Аналитических решений УГО не найдено, а численное решение стало возможным только с появлением быстродействующих компьютеров.

УГО сильно упрощается в случае диффузного отражения и пропускания всех поверхностей объема V :

$$\sigma(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') = \sigma(\mathbf{r}),$$

что при наличии в сцене диффузных источников приводит к независимости яркости от направления в каждой точке поверхности сцены, и уравнение (5.122) приобретает вид

$$L(\mathbf{r}) = L_0(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\pi} \int_{\Sigma} L(\mathbf{r}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (5.123)$$

В случае равнорядной поверхности ее яркость выражается через светимость в виде

$$L(\mathbf{r}) = \frac{M(\mathbf{r})}{\pi},$$

что позволяет переписать (5.123) в более простом виде

$$M(\mathbf{r}) = M_0(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\pi} \int_{\Sigma} M(\mathbf{r}') F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (5.124)$$

В таком виде УГО было впервые получено П. Мун. Достоинством уравнения (5.124) является то, что неизвестная функция $M(\mathbf{r})$ зависит только от координат поверхности. Нетрудно видеть, что решение (5.124) не является в строгом смысле светимостью, поскольку определяется не только собственным свечением поверхности, но и отражением падающего на нее с других поверхностей света, а потому характеризует не только саму поверхность, но и ее положение, а также свойства других поверхностей. Понимание этого факта привело П. Мун к необходимости введения новых терминов для описания освещения и свечения поверхности в условиях многократных переотражений света. В частности, для светимости в этом случае им было изобретено новое английское слово "radiosity", которое, если пользоваться правилами об-

разования слов в английском языке: *radio* – излучение, *-sity* – суффикс образования существительного от существительного, можно перевести, как излучательность. Поэтому уравнение (5.124) в литературе получило название уравнение излучательности или радиосити.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апресян, Л.А. Теория переноса излучения. Статистические и волновые эффекты / Л.А. Апресян, Ю.А. Кравцов. – М.: Наука, 1983. – 216с.

В книге изложена теория переноса излучения как следствие теории многократного рассеяния статистически квазиоднородного волнового поля. Такой подход позволяет выявить зависимость яркости от корреляционных характеристик излучения, связать параметры уравнения переноса излучения со статистическими свойствами рассеивающей среды, уточнить и в некоторых случаях расширить границы применимости фотометрического описания. Книга написана лаконичным языком и позволяет глубже понять физическое содержание и статистический смысл фотометрии и теории переноса излучения.

2. Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику: В 2ч. Часть 1. Случайные процессы / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1976. – 494с.

Первая часть книги представляет собой введение в теорию случайных функций, которая излагается в основном на материале статистических задач радиофизики. Из этих задач выбраны лишь немногие, но такие, которые, с одной стороны, интересны и важны сами по себе, а с другой – позволяют наглядно проиллюстрировать как необходимость введения определенных математических понятий и методов, так и их применение.

3. Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику: В 2ч. Часть 2. Случайные поля / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 464с.

Вторая часть книги, посвященная теории случайных полей, построена в соответствии с тем же принципом, что и первая (случайные процессы): математическая теория излагается в тесной связи с приложениями к физическим задачам, выбор которых ограничен вопросами, имеющими самостоятельное значение и интерес. Вместе с тем эти вопросы позволяют довольно широко осветить различные методы теории случайных полей, главным образом корреляционной теории. Выбраны две физические проблемы – излучение и распространение скалярных и векторных волн в случайно-неоднородных средах и равновесные поля теплового происхождения.

4. Хюлст, Г. ван де. Рассеяние света малыми частицами: В 3ч. / Г. ван де. Хюлст: пер. с англ. Т.В. Водопьяновой; под ред. В.В. Соболева. – М.: ИИЛ, 1961. – 537с.

Библия оптики рассеяния на частице. Излагается теория рассеяния света малыми частицами с применениями теории к физике, астрономии, химии и метеорологии. В первой части книги рассмотрены свойства частиц, знание которых необходимо для описания оптических характеристик состоящей из них среды. Вторая часть посвящена теоретическому рассмотрению различных задач рассеяния света. В третьей части рассмотрены практические приложения теории. Здесь химик, метеоролог, астроном и физик найдут ценные практические рекомендации по применению изложенных в книге методов.

5. Чандрасекар, С. Перенос лучистой энергии / С. Чандрасекар. – М.: ИИЛ, 1953. – 432с.

Монография Нобелевского лауреата представляет собой попытку превратить теорию излучения в особую ветвь математической физики со своими методами и тематикой исследования. Это итог многолетних исследований автора, направленных на разработку эффективных методов решения основных уравнений теории излучения. По сути нельзя работать в теории переноса, не зная этой монографии.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

6.1. Кинетическая теория электромагнитных процессов

Во всех наших предыдущих рассуждениях было принято, что при распространении света через среду она не меняется, а только изменяет проходящее через нее излучение (поглощение, рассеяние), что принято называть переносом излучения через вещество. Однако проходящее излучение вызывает в среде токи и поляризацию частиц, изменяет характер хаотического движения частиц, из которых состоит вещество, что приводит не только к поглощению и рассеянию света, но и излучению света средой. Поэтому наиболее последовательно рассматривать совместную кинетику частиц вещества и электромагнитного поля.

В этом случае необходимо обратиться непосредственно к уравнениям Максвелла в среде, представляющей статистический ансамбль частиц:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q(\mathbf{r}, t), \end{cases} \quad (6.1)$$

куда входят функции, описывающие токи и заряды, существующие в такой системе.

Поскольку наша среда является статистическим ансамблем частиц (заряженных и нейтральных), то пространственное распределение зарядов и токов определяется функцией распределения частиц по пространству и скоростям:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a N_a \int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_a \frac{e_a N_a}{m_a} \int \mathbf{p} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где суммирование проводится по всем сортам частиц a ; e_a – заряд частиц; N_a – число частиц; m_a – масса частиц сорта a ; $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – плотность вероятности распределения частиц сорта a по пространству \mathbf{r} , импульсам \mathbf{p} в момент времени t .

В основу нашего анализа положим представление о веществе, как об ансамбле независимых заряженных частиц, взаимодействующих между собой. Для простоты записи всех выражений представим, что в ансамбле представлены частицы только одного сорта (индекс сорта частиц в дальнейшем будем опускать). Движение такой системы полностью задается в $6N$ -мерном пространстве координат и импульсов $x_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ – фазовое пространство. Соответственно, поведение статистического ансамбля полностью задано, если определена N -частичная функция распределения $f_N(x_1, \dots, x_N, t)$, – плотность вероятности того, что в момент времени t первая частица находится в точке \mathbf{r}_1 и имеет импульс \mathbf{p}_1 , вторая в точке \mathbf{r}_2 и имеет импульс \mathbf{p}_2 , ... В выражения для плотности зарядов и токов входит одночастичная функция распределения $f_1(x_1, t)$, выражающая плотность вероятности того, что в момент времени t первая частица находится в точке \mathbf{r}_1 и имеет импульс \mathbf{p}_1 . Одночастичная функция распределения связана с многочастичной через интеграл

$$f_1(x_1, t) = V \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_2 \dots dx_N, \quad (6.3)$$

где V – полный объем вещества, введен из условий нормировки, упрощает многие последующие выражения.

В аналитической механике Гамильтона положение системы N независимых частиц задается точкой в $6N$ -мерном фазовом пространстве координат \mathbf{r}_i и импульсов \mathbf{p}_i (по три проекции в декартовых координатах). При этом движение системы определяется граничными условиями с уравнениями Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad (6.4)$$

где $H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j} \Phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_{i=1}^N U_0(\mathbf{r}_i)$ – гамильтониан системы, представляющий полную энергию системы; $\Phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ – потенциальная энергия взаимодействия частиц, расположенных в точ-

ках \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j ; $U_0(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия внешнего поля. Суммирование во второй сумме проводится по всем i и j , кроме случая, когда $i = j$, т.е. частица не взаимодействует сама с собой.

Положение ансамбля в фазовом пространстве задается точкой, положение которой изменяется со временем, образуя фазовые траектории (рис. 6.1). Однако для реальных систем (газ, жидкость, твердое тело) число частиц очень велико (число частиц в 1 моле вещества $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ – число Авогадро), что делает невозможным задание граничных условий. Можно только выделить некий объем возможных начальных значений, а состояние системы описывать статистически с помощью N -частичной функции распределения $f_N(x_1, \dots, x_N, t)$. Эволюцию фазового объема, занимаемого ансамблем частиц, в фазовом пространстве со временем дает уравнение Лиувилля

$$\frac{df_N}{dt} \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) = 0. \quad (6.5)$$

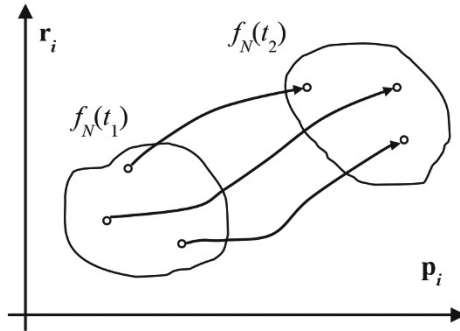


Рис. 6.1. Движение фазового объема

Подставляя значения производных от координат и импульсов из уравнений Гамильтона (6.4), с учетом выражения для гамильтониана системы из N независимых частиц, получим

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \sum_{i \neq j} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} = 0. \quad (6.6)$$

Полученное уравнение (6.6) описывает изменение со временем N -частичной функции распределения, хотя для описания электромагнитных процессов в веществе достаточно одночастичных распределений. Попытаемся, используя соотношение (6.3), получить уравнение для одночастичной функции распределения. Умножим уравнение (6.6) на объем V и проинтегрируем его по $dx_2 \dots dx_N$ по всему фазовому объему. Рассмотрим выражения почленно:

$$1. \quad V \int \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial t} dx_2 \dots dx_N = \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial t} .$$

$$2. \quad V \sum_i \int \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i} dx_2 \dots dx_N = \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial \mathbf{r}_1} ,$$

где использовалось выражение

$$\int_{(V)} \mathbf{p}_i \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i} d^3 r_i = \int_{(V)} \operatorname{div}(\mathbf{p}_i f_N(x_1, \dots, x_N, t)) d^3 r_i =$$

$$= \int_{(\Sigma)} \mathbf{p}_i f_N(x_1, \dots, x_N, t) \hat{\mathbf{N}} d^2 r_i ,$$

иногда называемое многомерной формулой интегрирования по частям, Σ – поверхность, граничная объему V . Переход от интегрирования по объему к интегралу по поверхности осуществлен по теореме Гаусса. С учетом граничных условий

$$f_N(x_1, \dots, x_N, t) \Big|_{\mathbf{r}_i \rightarrow \infty} = 0 ,$$

то есть всегда можно выбрать объем V столь большой, что на его границе частиц нет. Соответственно все члены суммы обращаются в 0, кроме первой.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial U_0(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{p}_i} dx_2 \dots dx_N = \frac{\partial U_0(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1} \equiv \\ & \equiv -\mathbf{F}_{01} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1} , \end{aligned}$$

где так же использовалась формула интегрирования по частям, но в пространстве импульсов, а соответствующие граничные условия там имеют вид:

$$f_N(x_1, \dots, x_N, t) \Big|_{\mathbf{p}_i \rightarrow \infty} = 0 ,$$

то есть всегда существует предел по скоростям в ансамбле. \mathbf{F}_0 – сила, действующая на частицу со стороны внешнего поля.

$$4. \quad i_4 \equiv V \int \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{p}_i} dx_2 \dots dx_N = \\ = V \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 \dots dx_N \quad \text{– как и предыду-}$$

щие члены.

Вообще говоря, взаимодействие любой частицы с 1-й в ансамбле статистически неотлично. Поэтому сумму по j можно заменить взаимодействием с выбранной 2-й и умножением на $(N-1)$. Следовательно этот член можно представить в виде

$$i_4 = V(N-1) \int \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 \dots dx_N \\ = \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 \approx n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2,$$

где учтено, что нормировка V^2 у двухчастичной функции распределения; $n = N/V$ – концентрация частиц в среде.

Собирая все члены вместе, получим уравнение для одночастичной функции распределения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_{01} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2. \quad (6.7)$$

Особенность полученного уравнения для $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ заключается в том, что оно зависит в правой части от двухчастичной $f_2(x_1, x_2, t)$. Если мы попытаемся получить уравнение для двухчастичной функции распределения $f_2(x_1, x_2, t)$, то оно уже будет зависеть от трехчастичной:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_{01} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + \right. \\
& \left. + \mathbf{F}_{02} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right\} f_2(x_1, x_2, t) = \\
& = n \int \left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_3(x_1, x_2, x_3, t) dx_3. \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Тем самым мы имеем не одно уравнение, а целую систему уравнений (говорят, иерархическую цепочку), эквивалентную уравнению Лиувилля. Эту систему принято называть цепочкой ББГКИ: Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона.

Цепочка ББГКИ является строгим следствием уравнения Лиувилля, и, соответственно, ее решение ничуть не проще. Однако на основе анализа зависимости частиц в ансамбле ее можно упростить на приближенную, оборванную на некотором члене. Особый интерес представляет случай, когда f_2 , пусть и приближенно, можно выразить через f_1 .

Из цепочки ББГКИ видно, что частицы как таковой в ансамбле взаимодействующих частиц не существует, наоборот весь ансамбль представляет единую систему, а цепочка есть движение совокупности из 1, 2, 3 и т.д. частиц. Более того, поскольку в электромагнитном поле сила действующая на заряженную частицу со стороны поля есть

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E} + \frac{e}{cm}[\mathbf{p}, \mathbf{B}], \quad (6.9)$$

то ББГКИ связывается в единую цепочку и с уравнениями Максвелла, а, следовательно, и поле образует с частицами вещества неразрывную систему.

Версию об ослаблении начальных корреляций выдвинул Н.Н. Боголюбов. Как уже указывалось ранее, число частиц в реальном объеме среды столь велико, что в судьбе каждой частице происходит так много коллизий (столкновения, поглощения света, излучение), что начальными корреляциями частиц при описании

их движения с течением некоторого времени можно пренебречь. Это позволяет представить движение частицы в некотором среднем, эффективном поле всех остальных частиц.

Введем в рассмотрение следующие характерные времена движения частицы в ограниченном объеме: τ_0 – время столкновения, t_0 – время свободного пробега, T_0 – время пересечения объема вещества (сосуда).

В соответствии с введенными характерными временами можно выделить следующие этапы взаимодействия частиц по времени t (рис. 6.2).

1. *Начальная стадия* $0 < t < \tau_0$, когда частицы еще не сталкивались, движение определяется исключительно начальными условиями, для описания ансамбля применимо только уравнение Лиувилля.

2. *Кинетическая стадия* $\tau_0 < t < t_0$, когда после ряда столкновений частицы приобретают черты сходства и по среднему состоянию одной из частиц можно представить себе движение других.

3. *Термализация* $t_0 < t < T_0$, когда каждая частица испытала так много столкновений, что начальные корреляции полностью забыты, поведение всех частиц абсолютно эквивалентно друг другу, поведение ансамбля определяется средними по ансамблю параметрами: плотность вещества $\rho(\mathbf{r},t)$ или концентрация частиц $n(\mathbf{r},t)$, средняя скорость потока $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и средняя энергия $e(\mathbf{r},t)$ или температура $T(\mathbf{r},t)$ – гидродинамическое приближение.

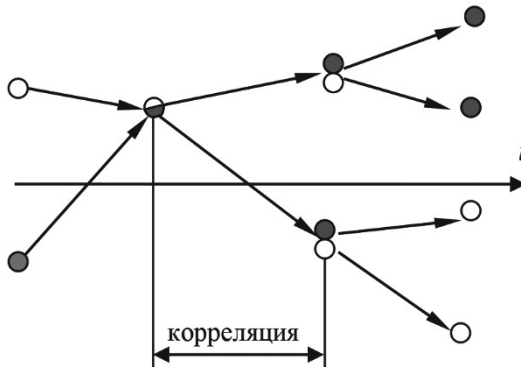


Рис. 6.2. Ослабление начальных корреляций

Рассмотрим выражение для корреляционной функции двух частиц

$$g_2(x_1, x_2, t) = f_2(x_1, x_2, t) - f_1(x_1, t)f_1(x_2, t), \quad (6.10)$$

что для упрощения записи можно представить в виде:

$$f_2 = g_2 + f_1 f_1,$$

опуская очевидные аргументы.

Перепишем правую часть (6.7) с учетом (6.10)

$$\begin{aligned} n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 &= n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial g_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 + \\ &+ n \int f_1(x_2, t) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} dx_2 \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Первый член в правой части (6.11) выражается через корреляционную функцию двух частиц и называется интегралом столкновений. Второй член связан со средней силой действия второй частицы на первую. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{coll} &\equiv n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial g_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 - \text{интеграл столкновений;} \\ \langle \mathbf{F} \rangle &\equiv \mathbf{F}_0 - n \int f_1(x_2, t) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} dx_2 - \text{эффективная сила, дей-} \end{aligned}$$

ствующая на 1 частицу;

$$\frac{Df_1}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \langle \mathbf{F} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \text{«полная» производная по вре-}$$

мени.

Введенные обозначения позволяют переписать (6.7) в виде

$$\frac{Df_1}{Dt} = \left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{coll}. \quad (6.12)$$

Вид интеграла столкновений в (6.12) определяется видом приближения для трехчастичной функции распределения:

$$f_3 = g_3 + f_1 f_1 f_1 + f_1(1)g_2(2,3) + f_1(2)g_2(1,3) + f_1(3)g_2(1,2), \quad (6.13)$$

где для наглядности записи опущены аргументы и сохранены только индексы.

Мы в своем анализе ограничимся приближением парных столкновений для разряженных систем: $g_3 = 0$. При этом возможны следующие ситуации.

1. $\forall g_2 = 0$ – уравнение Власова.

$$\frac{Df_1}{Dt} = 0. \quad (6.14)$$

Вещество, описываемое уравнением (6.14), часто называют «бесстолкновительным», что неверно, поскольку в уравнение входит эффективная сила $\langle \mathbf{F} \rangle$ со стороны всех остальных частиц. Обычно уравнение (6.14) решается итерационно, в первой итерации полагается $\langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{F}_0$ и определяется функция f_1 , что позволяет уточнить $\langle \mathbf{F} \rangle$ и т.д. По этой причине уравнение называется уравнением движения в самосогласованном поле.

2. $g_2(1,2) \neq 0$, $g_2(1,3) \neq 0$ – упругие столкновения, уравнение Больцмана – приближение парных столкновений. В этом случае выписывается явно интеграл столкновений

$$\left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{ell} = \sum_b \int [f_a(\mathbf{v}_1) f_b(\mathbf{v}'_1) - f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}')] w \sigma_{ab}(w, \theta) d\Omega d^3v', \quad (6.15)$$

где \mathbf{v} – скорость частицы, скорости соответствуют упругим столкновениям частицы сорта a с частицей сорта b :

$$a(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}') \rightarrow a(\mathbf{v}_1) + b(\mathbf{v}'_1);$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}', \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1 = w w_1 \cos \theta, \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1.$$

3. $\forall g_2 \neq 0$ – поляризация среды: парное столкновение в присутствии третьей частицы. Достаточно сложный случай, известны несколько вариантов приближений Ландау, Ленард-Балеску.

Полученные уравнения представляют собой разновидность общей группы кинетических уравнений, описывающих различные явления переноса частиц, заряда, энергии и т.д. Независимо от физической природы процессов кинетические уравнения представляют собой соотношения баланса энергии, числа частиц, заряда и т.д. УПИ является линеаризованным вариантом кинетических уравнений и с успехом может применяться не только для из-

лучения, но и для частиц. Одним из наиболее важных требований в математической модели процессов переноса является локальная компактность фазового пространства частиц. Тем самым существенно ограничивается класс физических объектов, отвечающих модели переноса. В этот класс попадают только объекты, допускающие классическое описание в том или ином приближении. Квантовые объекты и волновые поля в этот класс не входят, так как их фазовые пространства свойством локальной компактности не обладают. Требование локальной компактности для электромагнитного поля эквивалентно переходу к приближению геометрической оптики. Условием применимости этого приближения в случае произвольного частично-когерентного (случайного) поля является требование квазиоднородности.

Для совместного переноса частиц вещества и излучения имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{el} + \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{inel} + \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{rad}, \\ (\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon(\mathbf{r}) L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' + Q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}); \end{cases} \quad (6.16)$$

причем $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, $\varepsilon(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$, $x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$, $Q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$ опреде-

ляются через функцию распределения f_a , а $\left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{rad}$ – через яркость поля $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})$.

Решение такой системы уравнений представляет значительные трудности, и на сегодняшний день известны решения для простейших ситуаций. Обычно на практике прибегают к различным приближениям и аппроксимациям, чаще всего основанным на близости решения к равновесному состоянию, при котором все интегралы столкновений равны 0. Каждый интеграл столкновений имеет вид разности прямых и обратных элементарных процессов

$$\left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right) = \sum_b \left[\left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{b \rightarrow a} - \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_{a \rightarrow b} \right]. \quad (6.17)$$

При равенстве прямого и обратного процесса данного взаимодействия – детальное равновесие, при полном термодинамическом равновесии все прямые компенсируются обратными, причем невозможна компенсация одного процесса другим – принцип детального равновесия. Детальное равновесие приводит в каждом из процессов к специальному равновесному виду функции распределения. Пусть имеем процесс

$$A(E_A^i) + B(E_B^i) \rightarrow A(E_A^f) + B(E_B^f). \quad (6.18)$$

Из закона сохранения энергии

$$E_A^i + E_B^i = E_A^f + E_B^f \text{ или } E_A^f = E_A^i + w, \quad E_B^f = E_B^i - w. \quad (6.19)$$

По принципу детального равновесия имеем равенство вероятности прямого и обратного переходов

$$\begin{aligned} p(i \rightarrow f) N_A^i N_B^i (G_A^f + \alpha N_A^f) (G_B^f + \alpha N_B^f) = \\ = p(f \rightarrow i) N_A^f N_B^f (G_A^i + \alpha N_A^i) (G_B^i + \alpha N_B^i), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p(i \rightarrow f) N_A^i N_B^i G_A^f G_B^f (1 + \alpha Z_A^f) (1 + \alpha Z_B^f) = \\ = p(f \rightarrow i) N_A^f N_B^f G_A^i G_B^i (1 + \alpha Z_A^i) (1 + \alpha Z_B^i), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где $Z = N/G$ – статистическая сумма.

В квантовой механике различается статистика частиц с целым и полуцелым спином на основе принципа Паули, который гласит, что два или более идентичных фермиона (частицы с полуцелым спином) не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии в системе. На частицы с целочисленным спином или бозоны не распространяется принцип исключения Паули: любое количество идентичных бозонов может занимать одно и то же квантовое состояние – статистика Бозе–Эйнштейна. Коэффициент α в (6.20) позволяет включить статистику как фермионов, так и бозонов: $\alpha = 1$ для бозонов и $\alpha = -1$ для фермионов.

В соответствии с принципом причинности в квантовой механике $p(i \rightarrow f) = p(f \rightarrow i)$, что приводит к выражению

$$\frac{Z_A^i}{1 + \alpha Z_A^i} : \frac{Z_A^f}{1 + \alpha Z_A^f} = \frac{Z_B^f}{1 + \alpha Z_B^f} : \frac{Z_B^i}{1 + \alpha Z_B^i}. \quad (6.21)$$

Введем обозначение

$$\chi(E) = \frac{Z(E)}{1 + \alpha Z(E)}.$$

Тогда выражение (6.21) примет вид

$$\frac{\chi_A(E_A^i)}{\chi_A(E_A^i + w)} = \frac{\chi_B(E_B^i - w)}{\chi_B(E_B^i)} \equiv r(w), \quad (6.22)$$

то есть не зависит от физической природы частиц в состоянии равновесия, а определяется только изменением энергии за процесс, но тогда и χ зависит только от энергии

$$\chi(E + w) \cdot r(w) = \chi(E). \quad (6.23)$$

Единственная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (6.23), есть экспонента, т.е.

$$\chi(E) = e^{-\beta E}, \quad r(w) = e^{\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad (6.24)$$

где T – температура тела, а k – постоянная Больцмана.

Соответственно для статистической суммы получим

$$Z(E) = \frac{\chi(E)}{1 - \alpha \chi(E)} = \frac{1}{e^{\beta E} - \alpha}. \quad (6.25)$$

Для фотонного газа получим

$$\alpha = 1, \quad E = h\nu, \quad Z = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (6.26)$$

где ν – частота фотонов, h – постоянная Планка.

Далее, поскольку $N_\nu = G_\nu Z(\nu)$, $G_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V$, где V – объем, занимаемый фотонным газом, то

$$N_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

или для концентрации фотонов и объемной плотности их энергии

$$n_\nu = \frac{N_\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad u_\nu = n_\nu h\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (6.27)$$

Последнее выражение является распределением Планка фотонов по частоте при лучистом равновесии. С учетом соотношения между плотностью энергии и яркостью получим

$$L_\nu = \frac{c u_\nu}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (6.28)$$

Аналогично имеем равновесные распределения (при $\beta E \gg 1$):

– по уровням внутренней энергии – Больцман

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_{21}}{kT}}; \quad (6.29)$$

– по скоростям частиц – Максвелл

$$f(E) = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}; \quad (6.30)$$

– по степени ионизации – Саха

$$\frac{n_e n_+}{n_0} = \frac{2g_+}{g_0} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_{+0}}{kT}}. \quad (6.31)$$

Практические расчеты излучения черного тела проводятся в относительных координатах, что позволяет избавиться от сильной зависимости распределения от температуры. Обычно расчет проводится для спектральной плотности энергетической светимости. В соответствии с (6.28) и связи частоты ν с длиной волны λ имеем для спектральной плотности яркости

$$L_\nu d\nu = -l_{eS}(\lambda T) d\lambda, \quad d\nu = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

что приводит к выражению для яркости

$$l_{eS}(\lambda T) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{2hc^3}{c^3 \lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} = \frac{2hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (6.32)$$

и светимости

$$m_{eS}(\lambda T) = \pi l_{eS}(\lambda T) = \frac{2\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \equiv \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \quad (6.33)$$

где $c_1 = 2\pi hc = 3,742 \cdot 10^{-16}$ Вт·м², $c_2 = \frac{hc}{k} = 1,439 \cdot 10^{-2}$ м·К.

Перейдем в (6.33) к безразмерной переменной $x = c_2/\lambda T$:

$$m_{eS}(\lambda T) = \frac{c_1}{c_2^6} T^5 \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \equiv \frac{c_1}{c_2^6} T^5 \cdot y(x). \quad (6.34)$$

Определим максимум выражения (6.34), для чего продифференцируем его

$$y'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 (5e^x - xe^x - 5)}{(e^x - 1)^2} = 0,$$

или, если отбросить тривиальное решение $x = 0$,

$$\begin{aligned} 5e^x - xe^x - 5 = 0 &\Rightarrow (x - 5)e^x = -5 \Rightarrow (x - 5)e^{x-5} = \\ &= -5e^{-5} \Rightarrow we^w = -5e^{-5}. \end{aligned}$$

Решение последнего уравнения известно как функция Lambert

$$x_{\max} = 5 + \text{LambertW}(-5e^{-5}) \simeq 4,965114232.$$

Функция LambertW() имеется в библиотеке MATLAB и Maple.

В соответствии с определением x получим

$$\frac{c_2}{\lambda_{\max} T} = x_{\max} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{c_2}{x_{\max} T} \approx \frac{2898}{T} \text{ мкм}, \quad (6.35)$$

что соответствует закону смещения Вина.

Соответственно в точке максимума

$$y_{\max} = \frac{x_{\max}^5}{e^{x_{\max}} - 1}, \quad m_{eS \max} = \frac{c_1}{c_2^6} T^5 \cdot \frac{x_{\max}^5}{e^{x_{\max}} - 1} \approx 1,286 \cdot 10^{-11} T^5, \quad (6.36)$$

где светимость выражается в Вт·м⁻²·мкм⁻¹.

Последние соотношения позволяют переписать выражение спектрального распределения энергии черного тела в относительных координатах

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\lambda}{\lambda_{\max}} = \frac{c_2/xT}{\frac{c_2}{x_{\max} T}} = \frac{x_{\max}}{x}, \\ \eta &= \frac{y}{y_{\max}} = \frac{(x_{\max}/\xi)^5}{e^{x_{\max}/\xi} - 1} \cdot \frac{x_{\max}^5}{e^{x_{\max}} - 1} = \frac{e^{x_{\max}} - 1}{\xi^5 \left(e^{\frac{x_{\max}}{\xi}} - 1 \right)} \approx \frac{142.3}{\xi^5 \left(e^{\frac{4,965}{\xi}} - 1 \right)}. \quad (6.37) \end{aligned}$$

Выражение (6.37) не зависит ни от длины волны, ни от температуры. Используя закон смещения Вина и выражение (6.36), нетрудно перейти от относительных координат к длине волны и спектральной плотности энергетической светимости.

По анализу Боголюбова при $\tau_0 < t < T_0$ частицы испытывают так много столкновений, что их распределения выравниваются, и в области длины свободного пробега устанавливается локальное термодинамическое равновесие – распределения Максвелла, Планка, Больцмана и Саха, но с параметрами $\rho(\mathbf{r}, t)$ ($n(\mathbf{r}, t)$), $T(\mathbf{r}, t)$ ($e(\mathbf{r}, t)$) и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ локальными для данного объема.

В соответствии с определением одночастичной функции распределения

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \\ e(\mathbf{r}, t) &= \int \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + e_a \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Соответственно усредняя уравнение Больцман по всему пространству скоростей с весами \mathbf{v}^0 , \mathbf{v}^1 , \mathbf{v}^2 получим систему уравнений гидродинамического приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla(\overline{\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{P}}) &= \langle \mathbf{F} \rangle, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla(e \mathbf{u} + \mathbf{Q} + \mathbf{E}) &= -\tilde{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{jE}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где $\overline{\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}} \equiv \begin{bmatrix} g_x v_x & g_x v_y & g_x v_z \\ g_y v_x & g_y v_y & g_y v_z \\ g_z v_x & g_z v_y & g_z v_z \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \int \overline{(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$ –

тензор давления, $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} m \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^3 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$ – поток тепла;

\mathbf{jE} – закон Джоуля–Ленца; $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ – световой вектор.

В этом приближении в УПИ справедлив закон Кирхгофа:

$$Q_v = \kappa_v L_{sv}(T(\mathbf{r})).$$

Оценим вклад различных составляющих в процесс переноса энергии:

$$- \text{поток энергии теплопроводностью} = \frac{3}{2} k T n \sqrt{\frac{2kT}{m}};$$

$$- \text{поток энергии излучением} = \sigma T^4.$$

Рассмотрим равенство этих потоков, что приведет к неравенству

$$T = \sqrt[5]{\frac{9k^3 n^2}{2m\sigma^2}} \geq 10^4,$$

то есть реально перенос энергии излучением и веществом становится равным при температурах ~ 10000 К, что возможно в плазме. При более высоких температурах (атмосферы звезд) излучение является основным способом переноса энергии.

Поскольку перенос излучения часто происходит при температурах существенно меньших полученной, то влиянием излучения на вещество можно пренебречь и разделить на два независимых процесса переноса.

6.2. Квантовая теория переноса

Процессы поглощения и излучения света веществом носят принципиально квантовый характер. В квантовой механике физика взаимодействия фотонов с частицами и описание этого взаимодействия имеют отличный от классической физики характер. Язык описания квантовых процессов во многом определяется не только физикой явлений, но и историческими причинами. Если постараться описывать квантовые и классические явления аналогичными языками, то физика явлений становится более ясной.

При классическом описании с помощью уравнений Гамильтона (6.4)

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad (6.40)$$

вместе с начальными условиями

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \quad (6.41)$$

однозначно определяет траекторию одной частицы в заданном поле $U(\mathbf{r})$.

Однако, если начальные условия (6.41) не заданы, то уравнениям (6.40) будет соответствовать не одна траектория, а семейство траекторий. Семейство всех возможных траекторий можно описывать с помощью поверхности, которая в каждой точке пространства перпендикулярна возможной траектории. Здесь прослеживается аналогия связи лучевой оптики и волновой оптики, но для дальнейших обобщений важны экспериментально установленные свойства частиц.

Эйнштейн в 1926 г. убедительно показал, что свет обладает как свойствами волны, так и частицы. В 1924 г. Луи де Бройль в докторской диссертации связал движение частиц с распространением волн, которые он назвал волнами материи. В 1926 г. американские исследователи Дэвиссон и Джермер экспериментально получили дифракцию электронов на кристалле никеля. Аналогичный эксперимент независимо провел англичанин Томсон. В 1948 г. сотрудники кафедры физики МЭИ Биберман, Сушкин и Фабрикант экспериментально подтвердили, что волновые свойства присущи не только потоку электронов, но и каждому электрону в отдельности. Это позволило Шрёдингеру получить волновое уравнение движения частиц по обратной аналогии с тем, что мы проделали в обосновании лучевого приближения из волнового уравнения в параграфе 1.4.

Однако для перехода к кинетическому уравнению необходимо записать квантовый аналог уравнения Лиувилля аналогично (6.5), впрочем в квантовой механике невозможно совместное распределение вероятностей импульса и координаты $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в соответствии с принципом неопределенности. Тем не менее это можно проделать на основе функции Вигнера для волновых функций аналогично выводу УПИ из волнового уравнения, что позволит сформулировать кинетическое уравнение для частиц. Более сложным является анализ интегрального члена столкновений, хотя для большинства практических ситуаций он принимает вид парных столкновений, где все элементарные процессы подчиняются квантовым законам. Конечно, вид интеграла столкновений зависит от конкретных условий, но мы сосредоточимся над переносом излучения в спектральной линии.

Поскольку процессы поглощения и излучения системой частиц связаны с энергетическими переходами, то прежде всего проанализируем энергетический спектр атомов, молекул, кристаллов. Энергетический спектр отдельного атома определяется энергией движения электронов по отношению к ядру. Возможные ситуации изображены на рис. 6.3. Решение волнового уравнения для атома приводят к двум видам «орбит» (в квантовой механике понятие орбита очень условно): $E > 0$ – гиперболическая орбита, $E < 0$ – эллиптическая орбита. Если энергия электрона $E < 0$, то электрон находится в связанном состоянии, что, выражаясь классическим языком, соответствует движению по эллиптическим орбитам, а его энергетический спектр имеет дискретные значения. Если $E > 0$, то электрон независим от атома – свободное состояние, движение происходит по гиперболическим орбитам, а энергетический спектр имеет непрерывные значения – континуум.

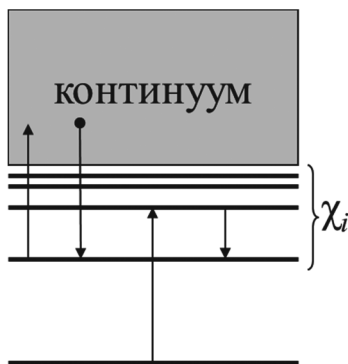


Рис. 6.3. Энергетический спектр отдельного атома

Главная особенность эллиптических орбит, связанных с атомом электронов, состоит в том, что их энергия относится к дискретному ряду значений E_n , и определяется выражением

$$E_n = -\frac{\text{const}}{(n + a(l, m, s))^2}.$$

Состояние электрона в атоме определяется четырьмя квантовыми числами:

1) n – главное квантовое число, целое число, обозначающее номер энергетического уровня; характеризует энергию электронов, занимающих данный энергетический уровень;

2) l – азимутальное квантовое число, определяющее азимутальное распределение амплитуды волновой функции электрона в атоме, то есть форму электронного облака; может принимать значения $l = 0, 1, \dots, n - 1$; является собственным значением оператора орбитального момента электрона;

3) m – магнитное квантовое число характеризует ориентацию в пространстве орбитального момента количества движения электрона; может принимать значения $m = -l, \dots, 0, \dots, l$; каждое из $2l + 1$ возможных значений магнитного квантового числа определяет проекцию вектора орбитального момента на данное направление;

4) s – спиновое квантовое число, определяющее величину спина электрона, т.е. величину собственного, внутреннего момента количества движения (момента импульса); может принимать для электронов (фермионов) только два значения $\pm 1/2$. Спиновое квантовое число определяет спин-орбитальное взаимодействие в многоэлектронных системах и возможность нахождения электрона в данном состоянии в соответствии с принципом Паули: в пределах одной квантовой системы в данном квантовом состоянии может находиться только одна частица, состояние другой должно отличаться хотя бы одним квантовым числом.

Эти четыре квантовых числа определяют уникальное состояние электрона в атоме (его волновую функцию). Точное поведение «функции эллипсов» нельзя описать однозначным способом по следующей причине: одному значению E_n соответствует не одно, а ровно n^2 независимых решений волнового уравнения. С математической точки зрения это есть исключение, обусловленное особой формой потенциальной энергии, а именно ее сферической симметрией. При этом каждому состоянию должна соответствовать определенная энергия, если энергия не зависит от одного из квантовых чисел, то состояние называется вырожденным.

Переход электрона из одного состояния в другое возможно при поглощении или излучении кванта электромагнитного излучения. Возможны излучательные переходы из одного энергетического состояния в другое, при которых выполняются законы сохранения энергии:

- *связано-связанные переходы* – дискретный спектр: излучение – возбуждение

$$h\nu_{ik} = E_k - E_i;$$

- *свободно-связанные переходы* – непрерывный спектр: ионизация-рекомбинация

$$h\nu_i = \chi_i + \frac{1}{2}mv^2;$$

- *свободно-свободные* – непрерывный спектр: тормозное излучение

$$h\nu = \Delta(\frac{1}{2}mv^2),$$

где ν – частота кванта электромагнитного излучения; v – скорость движения свободного электрона; i, k – номера электронных уровней; χ_i – энергия ионизации электрона с i -го уровня; Δ – изменение кинетической энергии свободного электрона.

В молекуле наряду с электронными уровнями возникают состояния связанные с дополнительными степенями свободы (рис. 6.4):

1. Колебательные движения:

$$E_v = \left(Q + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad \Delta E = E_{Q+1} - E_Q = h\nu,$$

где Q – колебательное квантовое число; ν – частота колебания.

Обратим внимание, что линии спектра колебательного движения располагаются на равном расстоянии – эквидистантный спектр.

2. Вращательные движения:

$$E_j = B j(j+1), \quad \Delta E = E_{j+1} - E_j = B(j+1),$$

где j – вращательное квантовое число; B – момент инерции системы.

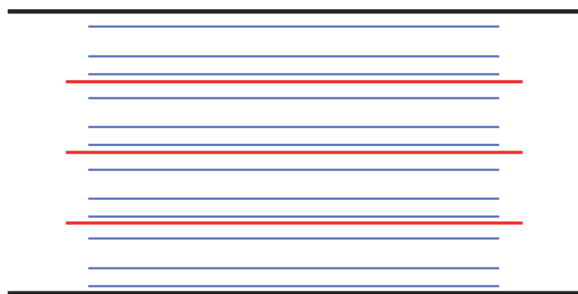


Рис. 6.4. Энергетический спектр молекул:
 черная линия – электронные уровни;
 красная – колебательный спектр; синие – вращательный

В молекуле поле перестает быть сферически симметричным за счет орбитально-орбитального и орбитально-спинового взаимодействия, что снимает вырождение электронных уровней.

Однако переходы определяются не только законом сохранения энергии, но и законами сохранения других динамических переменных: импульса, момента импульса, которые для квантовых систем приобретают форму правила отбора. Правилами отбора в спектроскопии называют ограничения и запрет на переходы между уровнями квантовой системы с поглощением или излучением фотона. В частности, для переходов требуется $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m = 0, \pm 1$. Отметим, что правила отбора, как и многие законы в квантовой механике, не имеют жесткого детерминистского характера, а являются вероятностными.

При объединении атомов в жидкое или твердое вещество происходит дополнительное снятие, вырождение и перекрытие уровней, возникают зоны. Можно ввести приближенное соответствие спектров излучений и электронных переходов:

- электронные уровни $E > 10^5 \text{ см}^{-1}$ – УФ и видимый;
- колебательные уровни $E \sim 10^2 - 10 \text{ см}^{-1}$ – ближний ИК;
- вращательные уровни $E \sim 1 - 10^2 \text{ см}^{-1}$ – дальний ИК.

В зависимости от вырождения имеет место линейчатый, полосатый и непрерывный спектр.

Возможные процессы взаимодействия излучения с веществом приведены на рис. 6.5. В первой колонке таблицы на рисунке представлены для аналогии классические процесс взаимодействия электромагнитной волны с осциллятором. Возможны три типа процессов: волна синфазно с осциллятором – осциллятор будет раскачиваться, поглощение; в противофазе – усиление, осциллятор сам по себе будет излучать, как система движущаяся с ускорением и излучение колеблющейся системы. Соответственно, им можно сопоставить три квантовых процесса: поглощение, индуцированное излучение и спонтанное излучение. Впервые такой квантовый анализ взаимодействия фотонов с атомом провел в 1905 г. А.Эйнштейн. Он разделил эти процессы на две группы: первые два с излучением (по нем. *Einstrahlung*), а спонтанное излучение вне излучения (*Ausstrahlung*).

Соответственно он ввел для их описания коэффициенты, которые определяют вероятность процессов в единицу времени (рис. 6.5). Если для второй группы это только вероятность A_{21} , то для процессов с излучением вероятность пропорциональна плотности энергии поля: $B_{12}\rho_{21}$ и $B_{21}\rho_{21}$.


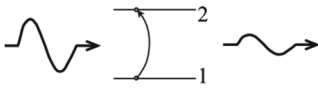
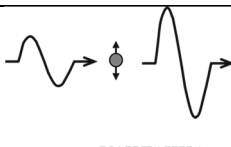
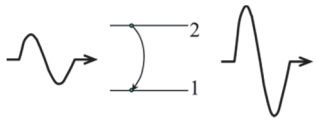

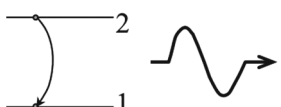
Классическая теория	Квантовая теория	Эйнштейн
 <p>поглощение</p>		$B_{12}\rho_{21}$
 <p>усиление</p>		$B_{21}\rho_{21}$
 <p>излучение</p>		A_{21}

Рис. 6.5. Коэффициенты Эйнштейна

Поскольку с излучением проходит два обратных процесса (поглощение и вынужденное излучение), то истинное поглощение определится их разностью:

$$n_1 \rho_{21} B_{12} - n_2 \rho_{21} B_{21} = n_1 \rho_{21} B_{12} \left(1 - \frac{n_2 B_{21}}{n_1 B_{12}} \right) = \begin{cases} > 0 - \text{поглощение,} \\ < 0 - \text{усиление.} \end{cases} \quad (6.42)$$

Из выражения (6.42) видно, что при взаимодействии с веществом возможно как поглощение излучения, так и его усиление – лазер. Именно из анализа данного выражения в 1940 г. В. Фабрикантом и Ф. Бугаевой была предсказана возможность использования вынужденного излучения среды с инверсией населённости для усиления электромагнитного излучения.

За счет спонтанных переходов происходит убывание численности атомов в возбужденном состоянии: величина экспериментально измеряема

$$dn_2 = -n_2 A_{21} dt \Rightarrow n_2(t) = n_2(0) e^{-A_{21}t} = n_2(0) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{1}{A_{21}}.$$

Из последнего выражения видно, что величину A_{21} можно измерить экспериментально по времени послесвечения атома. Так же A_{21} можно получить теоретически в квазиклассическом приближении квантовой механики:

$$A_{21} = \frac{16\pi^2 e^2 \nu_{21}^3}{3hc^3} |(\mathbf{r})_{21}|^2, \quad (\mathbf{r})_{21} = \int \psi_2 \mathbf{r} \psi_1^* d^3 r. \quad (6.43)$$

Равновесие процессов поглощения и излучения должно привести к термодинамическому равновесию – закону Планка. При детальном равновесии процессов поглощения и излучения имеем:

$$n_1 \rho_{21} B_{12} \left(1 - \frac{n_2 B_{21}}{n_1 B_{12}} \right) = n_2 A_{21}. \quad (6.44)$$

Откуда имеем для плотности поля в условиях ТДР

$$\rho_{21} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} \left(1 - \frac{n_2 B_{21}}{n_1 B_{12}} \right)} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}} - 1}. \quad (6.45)$$

В условиях ТДР имеет место законы Больцмана и Планка:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{h\nu_{21}/kT}, \quad \rho_{21} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (6.46)$$

Сравнивая (6.45) и (6.46), можно получить соотношения между коэффициентами Эйнштейна

$$B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} A_{21}, \quad g_2 B_{21} = g_1 B_{12}. \quad (6.47)$$

Соотношения получены в условиях ТДР, но от них не зависят и носят общий характер.

6.3. Уширение спектральной линии

Все рассуждения об энергетическом спектре электронов в атоме строились в предположении, что каждая линия является бесконечно тонкой, это не соответствует реальной физике явления. Спектральные линии не являются строго монохроматическими, что соответствует многим физическим явлениям. Прежде всего, при спонтанном переходе атом излучает не бесконечную во времени гармонику, а убывающий по времени цуг волн:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi\nu_0 t) = \operatorname{Re} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-i2\pi\nu_0 t} \right). \quad (6.48)$$

Тогда контур спектральной линии представляет собой спектральное разложение временной зависимости в интеграл Фурье

$$\begin{aligned} f_L(\nu) &= 2\operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{i2\pi\nu_0 t} \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = 2\operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{\tau} + i2\pi(\nu - \nu_0)\right]t} dt = \\ &= 2\operatorname{Re} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i2\pi(\nu - \nu_0)} = \frac{\frac{2}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + [2\pi(\nu - \nu_0)]^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \tau} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Введем следующее обозначение

$$\Delta\nu_L = \frac{1}{2\pi\tau}, \quad (6.50)$$

тогда выражение для контура спектральной линии примет вид так называемого лоренцевского контура

$$f(\nu) = \frac{1}{\pi \Delta \nu_L} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_L} \right)^2}. \quad (6.51)$$

Вид лоренцевского контура приведен на рис. 6.6. Проинтегрируем контур (6.51) по полному спектру

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_L(\nu) d\nu \Big|_{y = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_L}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1, \quad (6.52)$$

то есть полная энергия в лоренцевском контуре равна 1 – далее именно распределение с нормировкой на единицу и будем называть контуром спектральной линии.

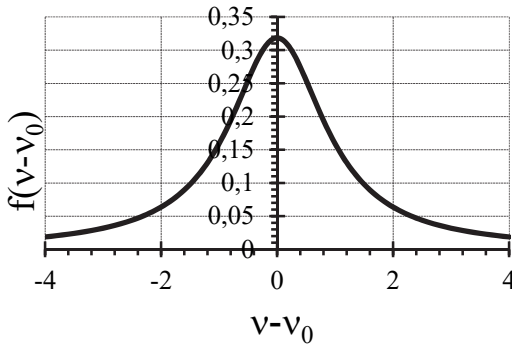


Рис. 6.6. Лоренцевский контур линии

Рассмотрим уменьшение спектра по энергии на расстоянии $\Delta \nu$ от центра линии ν_0 :

$$\frac{f_L(\nu_0 + \Delta \nu_L)}{f_L(0)} = \frac{1}{2}, \quad (6.53)$$

поэтому $\Delta \nu$ называется полушириной контура Лоренца.

Для реальных газов соответствующая полуширина в длинах волн находится в интервале $\Delta\lambda_L = 0,001\text{\AA}$, $1\text{\AA} = 10^{-8}\text{ см} = 0,1\text{ нм}$.

Другой причиной уширения спектральных линий является эффект Доплера – изменение частоты и длины волн, регистрируемых приёмником, вызванное движением их источника или приёмника:

$$v_D = v_0 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{v}}{2\pi} = v_0 - \frac{\hat{\mathbf{s}} \mathbf{v}}{c} v_0 = \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{s}} \mathbf{v}}{c}\right) v_0, \quad (6.54)$$

где v_0 – частота света в лабораторной системе отсчета; $\mathbf{k}_0 = \frac{2\pi v_0}{c} \hat{\mathbf{s}}$ – волновой вектор; \mathbf{v} – скорость движения излучающей частицы.

При излучении движущейся частицей это приводит к смещению линии, и выражение для контура спектральной линии можно представить в виде

$$f(v) = \delta(v - v_D) = \delta\left(v - v_0 + \frac{\hat{\mathbf{s}} \mathbf{v}}{c} v_0\right). \quad (6.55)$$

Допустим условия ТДР и распределение излучающих частиц по скоростям v является максвелловским

$$f_p(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}\right), \quad (6.56)$$

где m – масса частицы, T – абсолютная температура ансамбля частиц.

Контур линии при уширении Доплера в этом случае можно представить в виде

$$f_D(v) = \int f_0(v(\mathbf{v})) f_p(\mathbf{v}) d^3v. \quad (6.57)$$

Эффект Доплера приводит лишь к смещению линии, а распределение по скоростям – к уширению.

Подставим в (6.57) распределение (6.56). Выберем полярную систему координат относительно направления излучения $\hat{\mathbf{s}}$. Тогда скалярное произведение имеет вид

$$\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v} = v \cos \theta \equiv v\mu,$$

что позволяет записать выражение

$$f_D(\nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \delta\left(\nu - \nu_0 + \frac{v\mu}{c} \nu_0\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} d\mu v^2 dv d\varphi. \quad (6.58)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$y = \sqrt{\frac{m}{2kT}} v, \quad \left(\frac{m}{2kT}\right) d^3 v = d^3 y, \\ \mathbf{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \mathbf{y}, \quad \Delta v_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta v_D},$$

что позволяет переписать (6.58) в форме

$$f_D(\nu) = \frac{2\pi}{\pi^{3/2} \Delta v_D} \int_0^\infty e^{-y^2} y^2 \int_{-1}^{+1} \delta(x + y\mu) d\mu dy. \quad (6.59)$$

Рассмотрим последний интеграл по μ :

$$\int_{-1}^{+1} \delta(x + y\mu) d\mu = \frac{1}{y} \int_{x-y}^{x+y} \delta(\xi) d\xi = \frac{\theta(y-x)}{y}. \quad (6.60)$$

Соответственно,

$$f_D(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_0^\infty e^{-y^2} y^2 \frac{\theta(y-x)}{y} dy = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_x^\infty e^{-y^2} y dy = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_{x^2}^\infty e^{-\xi} d\xi, \quad (6.61)$$

или окончательно для контура Допплера получим

$$f_D(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta v_D}\right)^2\right]. \quad (6.62)$$

На рисунке 6.7 приведено сравнение контуров при одинаковой полуширине. Лоренцевский контур ниже в центре, но его крылья спадают значительно медленнее доплеровского. Средняя полуширина доплеровского контура для комнатной температуры $\Delta\lambda_D = 0,1 \text{ \AA}$.

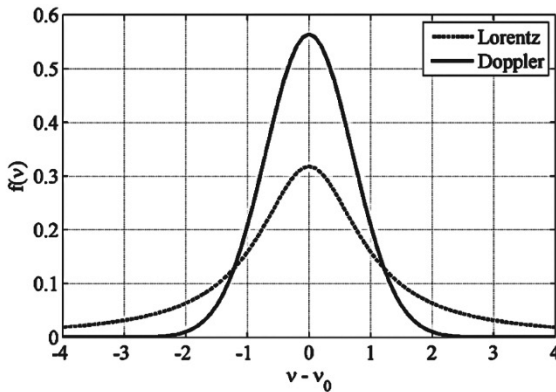


Рис. 6.7. Сравнение контуров уширения спектральных линий

Рассмотренные механизмы уширения относятся к изолированному атому. В реальности имеем ансамбль взаимодействующих частиц, что принято называть эффектом давления:

- ударное уширение – в результате парных соударений сокращается время жизни атома в возбужденном состоянии.

При существовании столкновений нескольких типов за время жизни принимается их среднегармоническое

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_i}. \quad (6.63)$$

Из кинетической теории нетрудно получить среднее время между столкновениями

$$\frac{1}{\tau} = \pi \sum_i n_i d_i^2 \sqrt{\frac{kT}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_i} \right)}, \quad (6.64)$$

где d_i – среднее расстояние между частицами, n_i – концентрация.

Последнему выражению для идеальных газов можно придать вид

$$\tau = \tau_0 \frac{p_0}{p} \sqrt{\frac{T_0}{T}}. \quad (6.65)$$

Важный вывод для оптики атмосферы – время жизни уменьшается с давлением и температурой: поглощение частиц воздуха различно на разных высотах:

- приближение квазистатического поля – атом в стохастическом поле ансамбля атомов, что приводит к сдвигу линии, а их хаотическое движение к уширению.

Рассмотрим подробнее квазистатическое уширение. Влияние поля соседних частиц: кулоновское взаимодействие для заряженных и ван-дер-ваальсово для нейтральных частиц; среднее поле определяет смещение линии, а распределение поля – контур. В основе лежит смещение линии в силовом поле – эффект Штарка:

$$\Delta v = \frac{C_k}{r^k} \Rightarrow r = \left(\frac{C_k}{\Delta v} \right)^{1/k}, \quad (6.66)$$

где C_k – некоторая константа; k – показатель степени для данного типа взаимодействия.

Распределение частиц по расстояниям в условиях однородной среды можно принять пуассоновским:

$$W(r) d^3 r \sim e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^3} d\left(\frac{r}{r_0}\right)^3, \quad (6.67)$$

где r_0 – среднее расстояние между частицами, которое можно выразить через концентрацию частиц:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 n = 1 \Rightarrow r_0^3 = \frac{3}{4\pi n}.$$

Следовательно,

$$r^3 = \left(\frac{C_k}{\Delta v} \right)^{3/k} \Rightarrow dr^3 = \frac{C_k^{3/k}}{(\nu - \nu_0)^{(3+k)/k}} d\nu, \quad (6.68)$$

и имеем для штарковского уширения

$$\begin{aligned} f_p(\nu) &= \frac{\text{const}}{(\nu - \nu_0)^{(3+k)/k}} \exp\left(-\frac{4\pi n}{3} \frac{C_k^{3/k}}{(\nu - \nu_0)^{3/k}}\right) = \\ &= \frac{\text{const}}{(\nu - \nu_0)^{(3+k)/k}} \exp\left(-\frac{\Delta v_p^{3/k}}{(\nu - \nu_0)^{3/k}}\right). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Откуда видно, что полуширина квазистатического уширения

$$\Delta v_p = C_k \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{k/3} \sim \sqrt[3]{n},$$

что и определило название – эффект давления.

Отметим, что контур квазистатического уширения резко несимметричен – смещение линии в эффекте Штарка происходит только в одну сторону.

На основании проделанного анализа процессов излучения и поглощения света атомом сформулируем выражение для показателя поглощения. В случае поглощение отдельной линией в элементарном объеме вещества:

- энергия, поглощенная в объеме dV за время dt равна

$$n_1 B_{12} \rho_{21} \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \frac{B_{21}}{B_{12}} \right) h \nu_{21} dV dt;$$

- та же энергия, но по определению показателя поглощения равна

$$\begin{aligned} \int \kappa_\nu(\mathbf{r}) L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{N}}) dS dt d\nu &= \int \kappa_\nu(\mathbf{r}) \oint L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}} dV dt d\nu = \\ &= c \int \kappa_\nu \rho(\nu) d\nu dV dt. \end{aligned}$$

Приравнивая оба выражения, получим

$$c \int \kappa_\nu \rho(\nu) d\nu = n_1 B_{12} \rho_{21} \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \frac{B_{21}}{B_{12}} \right) h \nu_{21}. \quad (6.70)$$

Представим спектральный коэффициент линии в виде

$$\kappa_\nu = k_{12} f_{12}(\nu),$$

где $\int f_{12}(\nu) d\nu = 1$ – контур линии.

При этом обычно контур линии является существенно более резкой функцией, чем распределение поля по частоте $\rho(\nu)$, что позволяет провести допущение:

$$\int \kappa_\nu \rho(\nu) d\nu = k_{12} \int f_{12}(\nu) \rho(\nu) d\nu \approx k_{12} \rho_{21}.$$

Откуда (6.70) можно переписать в виде

$$k_{12} = \frac{n_1 h \nu_{21}}{c} B_{12} (1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (6.71)$$

Выражая коэффициенты Эйнштейна, получим

$$k_{12} = \frac{h \nu_{21}}{c} n_1 \frac{g_2}{g_1} B_{21} (1 - e^{-h\nu/kT}) = \frac{c^2}{8\pi \nu_{21}^2} \frac{g_2}{g_1} n_1 A_{21} (1 - e^{-h\nu/kT}).$$

Последнему выражению с учетом малости эффекта индуцированного излучения можно придать простой и удобный для практических расчетов вид

$$k_{12} \approx \frac{c^2}{8\pi \nu_{21}^2} \frac{g_2}{g_1} n_1 A_{21}. \quad (6.72)$$

Контур линии в реальных условиях является сверткой двух контуров: Лоренца (ударное уширение) и Доплера – контур линии Фойгта

$$\begin{aligned} f_{12}(\nu) &= f_L(\nu) \cdot f_D(\nu) \cdot f_p(\nu) \Big|_{L,D} = \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2} \Delta \nu_D} \int \frac{\exp\left[-\left(\frac{\Delta \nu_L}{\Delta \nu_D}\right)^2 y^2\right]}{1 + (y - y_0)^2} dy, \end{aligned} \quad (6.73)$$

где $y_0 = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_L}$.

На основе полученного выражения для показателя поглощения рассмотрим ослабление излучения в чисто поглощающей среде. В этом случае закон Бугера имеет вид для изменения яркости вдоль луча

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) \exp \left\{ - \int_0^{\zeta} \kappa_v(\mathbf{r} - \xi \hat{\mathbf{l}}) d\xi \right\} = L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-\tau}. \quad (6.74)$$

Поскольку концентрацию частиц на нижнем уровне можно представить через плотность вещества

$$n_1 = \frac{\rho}{m},$$

то оптическая плотность с учетом выражения (6.72) представима в виде

$$\tau = \int_0^{\zeta} \kappa_v(\xi) d\xi = \frac{c^2}{8\pi\nu_{21}^2} \frac{g_2}{g_1} A_{21} \frac{1}{m} \int_0^{\zeta} \rho(\xi) f_v(\xi) d\xi. \quad (6.75)$$

Последнее выражение для однородной трассы

$$\tau = bf(v) \int_0^{\zeta} \rho(\xi) d\xi = b_v M,$$

где b_n – некоторая константа, а M – полная масса вещества на трассе распространения излучения в столбе с единичным сечением.

Откуда закон Бугера (6.74) приобретает вид зависимости от массы вещества на трассе измерения:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{r} - \zeta \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-b_v M}. \quad (6.76)$$

Поскольку M на единицу площади, то часто используют толщину эквивалентной трассы (оптика атмосферы):

$$\Delta l_{\text{экр}} = \frac{M}{\rho_0}. \quad (6.77)$$

Если вещество находилось в парообразном состоянии, то применяют понятие толщины слоя осажденной воды. Для неоднородных трасс необходимо учитывать зависимость контура от давления и температуры, что в оптике атмосферы приводит к зависимости от высоты.

6.4. Кинетическая теория переноса излучения в плазме

Рассмотрим перенос излучения в однородной двухуровневой плазме. Пусть n_1, n_2 – концентрации атомов на 1 и 2 уровнях. В основу анализа положим систему кинетики частиц и излучения (6.16). При анализе интеграла столкновений мы будем включать элементарные процессы: ударное возбуждение и гашение при столкновении атомов с вероятностями w_{12} и w_{21} ; поглощение и излучение атомами фотонов. Кинетическое уравнение сформулируем для концентрации частиц на втором уровне:

$$n_2(\mathbf{r}, t) = \int f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p.$$

При указанных условиях можно записать систему кинетических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial n_2}{\partial t} = A_{21}n_2 - w_{21}n_2 + w_{12}n_1 + \frac{1}{4\pi} \int \oint L_\nu(\hat{\mathbf{i}})[B_{12}n_1 - B_{21}n_2]f(\nu) d\hat{\mathbf{i}} d\nu, \\ (\hat{\mathbf{i}}, \nabla)L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r})L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}), \end{cases} \quad (6.78)$$

где $\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}[B_{12}n_1 - B_{21}n_2]f(\nu)$, $\varepsilon_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}A_{21}n_2f(\nu)$. Коэффициенты Эйнштейна в записи уравнений используются для краткости записи.

Проинтегрируем УПИ в системе (6.78) вдоль луча. Это приведет к выражению для яркости

$$\begin{aligned} L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) &= L_\nu^0(\mathbf{r} - \xi\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp\left(-\int_0^\xi \kappa_\nu(\mathbf{r} - \zeta\hat{\mathbf{i}}) d\zeta\right) = \\ &= \int_0^\xi \varepsilon_\nu(\mathbf{r} - t\hat{\mathbf{i}}) \exp\left(-\int_0^t \kappa_\nu(\mathbf{r} - \zeta\hat{\mathbf{i}}) d\zeta\right) dt. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Сделаем дополнительные допущения:

- 1) внешнее излучение отсутствует: $L_\nu^0 \equiv 0$;
- 2) среда однородна: $\kappa_\nu \neq \kappa_\nu(\mathbf{r})$.

Это приведет (6.79) к решению

$$L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \int_0^\xi \varepsilon_\nu(\mathbf{r} - t\hat{\mathbf{i}}) \exp(-\kappa_\nu t) dt. \quad (6.80)$$

Рассмотрим отдельно интеграл первого уравнения системы (6.78):

$$\begin{aligned}
 J &\equiv \frac{1}{4\pi} \int \oint L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) [B_{12}n_1 - B_{21}n_2] f(\nu) d\hat{\mathbf{l}} d\nu = \\
 &= \frac{B_{12}n_1 - B_{21}n_2}{4\pi} \int \oint L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}} f(\nu) d\nu = \\
 &= \frac{B_{12}n_1 - B_{21}n_2}{4\pi} \int E_0(\mathbf{r}, \nu) f(\nu) d\nu.
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

Пространственную облученность $E_0(\mathbf{r}, \nu)$ вычислим из полученного решения (6.80)

$$\begin{aligned}
 E_0(\mathbf{r}, \nu) &= \oint L_\nu(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}} = \oint \int_0^\xi \varepsilon_\nu(\mathbf{r} - t\hat{\mathbf{l}}) e^{-\kappa_\nu t} \frac{t^2}{t^2} dt d\hat{\mathbf{l}} = \\
 &= \int_{(V)} \varepsilon_\nu(\mathbf{r}') \frac{e^{-\kappa_\nu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d^3 r',
 \end{aligned}$$

где сделан переход к интегрированию по всему объему, содержащему плазму, с учетом выражения $d^3 r = r^2 dr d\hat{\mathbf{l}}$.

Подставим полученное выражение в формулу (6.81)

$$J = \frac{B_{12}n_1 - B_{21}n_2}{4\pi} \int \int_{(V)} \varepsilon_\nu(\mathbf{r}') \frac{e^{-\kappa_\nu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d^3 r' f(\nu) d\nu,$$

что с учетом выражений для показателя поглощения κ_ν , функции источников ε_ν и заменой порядка интегрирования можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{B_{12}n_1 - B_{21}n_2}{4\pi} \int \int_{(V)} \frac{h\nu}{4\pi} A_{21}n_2(\mathbf{r}') f(\nu) \frac{e^{-\kappa_\nu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d^3 r' f(\nu) d\nu = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} A_{21}n_2(\mathbf{r}') \int \kappa_\nu(\mathbf{r}') f(\nu) \frac{e^{-\kappa_\nu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\nu d^3 r'.
 \end{aligned}$$

Определим новую функцию

$$K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \kappa_\nu(\mathbf{r}') f(\nu) \frac{e^{-\kappa_\nu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\nu, \quad (6.82)$$

которая есть вероятность того, что фотон излученный в точке \mathbf{r}' поглотится в точке \mathbf{r} .

Тогда выражение для интеграла примет форму

$$J = \int_{(V)} A_{21} n_2(\mathbf{r}') K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3 r', \quad (6.83)$$

что позволяет записать уравнение переноса возбуждения в плазме

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = A_{21} n_2 - w_{21} n_2 + w_{12} n_1 + \int_{(V)} A_{21} n_2(\mathbf{r}') K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3 r', \quad (6.84)$$

что является полученным в 1947 г. независимо друг от друга уравнением Бибермана–Холстейна.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климонтович, Ю.Л. Статистическая физика / Ю.Л. Климонтович. – М.: Наука, 1982. – 608с.

Курс отличается от существующих как по содержанию, так и по характеру изложения. Весь материал излагается на основе единого метода – теория неравновесного состояния служит стержнем всего курса. Это позволяет выявить внутреннюю связь явлений как простейших, так и самых сложных системах. Наряду с традиционным материалом излагается ряд проблем, служащих основой общих и специальных курсов, а именно: теория неравновесных флуктуации в нелинейных системах, кинетическая теория электромагнитных процессов, неравновесные фазовые переходы, кинетическая теория химически реагирующих систем.

2. Климонтович, Ю.Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов / Ю.Л. Климонтович. – М.: Наука, 1980. – 374с.

В книге дается систематическое изложение классической и квантовой кинетической теории процессов в системах многих частиц (как связанных, так и свободных) и поля. К числу основных рассмотренных проблем относятся следующие: статистическое обоснование уравнений Максвелла; кинетические уравнения для систем свободных и связанных заряженных частиц; кинетическая теория флуктуаций в химически реагирующих системах; кинетическая теория уширения спектральных линий излучения атомов; влияние корреляций положений атомов на процессы индуцированного и спонтанного излучения атомов; поглощение и рассеяние света в неидеальных системах; флуктуационно-диссипационная теорема для неравновесных состояний флуктуации в классических и квантовых автоколебательных системах; равновесные и индуцированные фазовые переходы в системах атомы–поле.

3. Климонтович, Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы / Ю.Л. Климонтович. – М.: Наука, 1975. – 352с.

В книге впервые дано систематическое изложение кинетической теории неидеального газа и неидеальной плазмы. Основное внимание уделено изложению новых результатов. Традиционный материал изложен лишь в той мере, в какой это необходимо для создания полной картины кинетических процессов в неидеальных системах. Большое внимание уделено, в частности, кинетической теории крупномасштабных флуктуаций, т.е. флуктуаций с временами корреляции порядка или больше времени свободного пробега и с длинами корреляции порядка или больше длины свободного пробега. Учет крупномасштабных флуктуации необходим, например, при построении кинетических уравнений для плотных газов и плазмы и при описании турбулентной плазмы.

4. Силин, В.П. Введение в кинетическую теорию газов: монография / В.П. Силин. – М.: Наука, 1971. – 464с.

Монография посвящена широкому кругу вопросов кинетической теории газов. Изложены основные положения теории и описано ее применение к наиболее типичным задачам. Большое

внимание уделено кинетике разреженной плазмы. Дано общее обоснование теории, позволившее выйти за рамки больцмановской кинетики газов. Физическая общность изложения и рассмотрение большого числа конкретных физических задач позволяют этой книге служить пособием для всех изучающих физическую кинетику.

5. Татарский, В.И. Вигнеровское представление квантовой механики / В.И. Татарский // Успехи физических наук. – 1983. – Т.139. – Вып.4. – С. 587–619.

Предложенное Вигнером в 1932 г. представление квантовой механики при помощи совместных распределений вероятностей для координаты и импульса в последнее время находит все более широкое применение в неравновесной квантовой статистической механике. Вигнеровское представление содержит лишь такие понятия, которые являются общими как для квантовой, так и для классической механики. Поэтому оно особенно удобно для последовательного обоснования полуклассических методов, в которых, например, одна из взаимодействующих друг с другом систем описывается квантовой, а другая – классической теорией.

7. ОПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

7.1. Оптическая схема глаза, назначение основных элементов

Прежде чем начать говорить об оптической системе глаза человека, имеет смысл обратиться к физиологии и строению глаза. В дальнейшем это позволит понять устройство оптической системы и её непосредственную связь с физиологической структурой зрительной системы. На рисунке 7.1 показано анатомическое строение глаза.

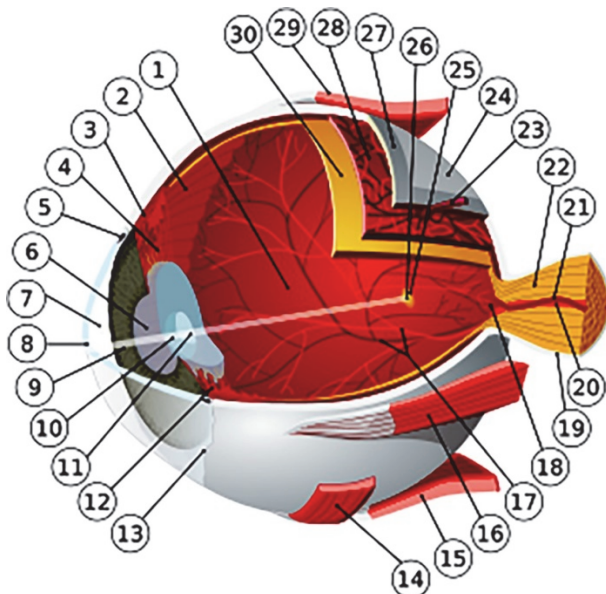


Рис. 7.1. Внутреннее физиологическое схематичное строение глаза:

- 1 – задняя камера; 2 – зубчатый край; 3 – ресничная аккомодационная мышца;
- 4 – ресничный (цилиндрический) поясок; 5 – шлеммов канал; 6 – зрачок;
- 7 – передняя камера; 8 – роговица; 9 – радужная оболочка; 10 – кора хрусталика;
- 11 – ядро хрусталика; 12 – цилиарный отросток; 13 – конъюнктивa;
- 14 – нижняя косая мышца; 15 – нижняя прямая мышца;
- 16 – медиальная прямая мышца; 17 – артерии и вены; 18 – слепое пятно;
- 19 – твердая мозговая оболочка; 20 – центральная артерия сетчатки;
- 21 – центральная вена сетчатки; 22 – зрительный нерв; 23 – варикозная вена;
- 24 – влагалнице глазного яблока; 25 – желтое пятно; 26 – центральная ямка;
- 27 – склера; 28 – сосудистая оболочка глаза;
- 29 – верхняя прямая мышца; 30 – сетчатка

Основные части зрительной системы: склеротическая, роговая, радужная и сетчатая оболочки; передняя и задняя камеры; зрачок и хрусталик; стекловидное тело и зрительный нерв представлены объёмными и окружёнными другими реальными элементами. С функциональной точки зрения в глазу существует три аппарата: рефракционный (светопреломляющий), аккомодационный (приспособительный) и сенсорный (рецепторный). Светопреломляющий аппарат глаза представляет собой сложную систему линз, формирующую на сетчатке уменьшенное перевернутое изображение внешнего мира. Он включает в себя роговицу, камеруную влагу, хрусталик, стекловидное тело.

Аккомодационный аппарат обеспечивает построение на сетчатке качественного изображения объектов, находящихся на разных расстояниях, а также позволяет приспособиться глазу к изменению освещения. Он включает в себя радужную оболочку с отверстием в центре – зрачком – и ресничное тело с ресничным пояском хрусталика. При ярком свете кольцевые мышцы радужки сокращаются, а зрачок, представляющий собой диафрагму в радужке глаза с переменным диаметром, регулирует количество света, попадающего в глаз. При увеличении потока, падающего на сетчатку, радиальные мышцы расслабляются – зрачок сужается. При тусклом освещении зрачок расширяется.

Построение изображения объектов, находящихся на разных расстояниях от глаза наблюдателя, происходит благодаря изменениям показателя преломления и радиуса кривизны хрусталика, за что отвечают цилиарные мышцы. При этом меняется фокусное расстояние линзы – хрусталика. Расслабление мышц приводит к фокусировке на удаленных предметах, напряжение – на ближних объектах. Таким образом, автоматический процесс изменения параметров хрусталика и зрачка называется аккомодацией. Аккомодация – изменение оптической силы хрусталика глаза, позволяющее четко сфокусировать изображение объекта на сетчатке.

Давно известны случаи замены хрусталика, этого органического объектива, на искусственный. При этом существует несколько видов последних. Искусственные хрусталики подразде-

ляются на фокальные и бифокальные. У многих искусственных хрусталиков нет возможности совершать аккомодацию глаза человека. В настоящее время существует «мягкий» мультифокальный хрусталик, исключаящий этот недостаток.

Рецепторный аппарат представлен зрительной частью сетчатки, а также телами и аксонами нейронов. Сетчатка имеет слоистое строение и сложное устройство. Выделяют 10 слоев сетчатки. Наружные (по ходу светового потока) слои образованы проводящими нервное раздражение клетками и нервными волокнами. Внутренний слой является свето-цвето-воспринимающим. Он состоит из нейроэпителиальных клеток – палочек и колбочек. Колбочки – фоторецепторы сетчатки, содержащие чувствительные к свету пигменты, которые обеспечивают возможность дневного зрения. Дневное зрение обычно реализуется при адаптации глаза к уровням яркости не менее 5 кд/м^2 . Палочки – фоторецепторы сетчатки, содержащие чувствительный к свету пигмент, который обеспечивает возможность ночного зрения. Ночное зрение обычно реализуется при адаптации глаза к уровням яркости менее $\sim 10^{-3} \text{ кд/м}^2$. В сравнении с дневным зрением, ночное зрение характеризуется отсутствием восприятия цвета и сдвигом кривой спектральной чувствительности в сторону коротких длин волн. Палочки имеют удлиненную форму (рис. 3.13), с их помощью нельзя видеть цвета, но они существенно чувствительнее колбочек к свету. Сумеречное зрение – нормальное зрение, промежуточное между дневным и ночным зрением. При сумеречном зрении достаточно активно работают как колбочки, так и палочки.

В сетчатке человека насчитывают около 130 млн палочек и 7 млн колбочек. Расположены они неравномерно: в центре сетчатки находятся преимущественно колбочки, дальше от центра – колбочки и палочки, а на периферии преобладают палочки.

Выделяют область наиболее чувствительного зрения – желтое пятно с центральной ямкой (рис. 3.6, 7.1). Жёлтое пятно – слой светостойкого пигмента, покрывающего участки сетчатки в центральной ее области максимальной чувствительности. Эта область называется фовеа – центральная часть сетчатки, тонкая и

углубленная, содержащая почти исключительно колбочки и обеспечивающая наиболее отчетливое зрение. Фовета соответствует поле зрения размером 0,087 рад (5°).

В области желтого пятна сосредоточена большая часть рецепторов, отвечающих за цветоощущение, колбочек. То есть вся световая информация, которая попадает на желтое пятно, передается в мозг наиболее полно.

Место на сетчатке, где нет ни палочек, ни колбочек называется слепым пятном, отсюда зрительный нерв выходит на другую сторону сетчатки и далее в мозг. Площадь слепого пятна сетчатки глаза человека составляет от 2,5 до 6 мм².

Колбочки обеспечивают четкое восприятие формы и цвета предмета. Они малочувствительны к свету и, в отличие от палочек, возбуждаются только при достаточно ярком освещении. Изображения, которые строятся на периферии сетчатки, там, где преобладают палочки, различаются хуже. Колбочки обладают селективной чувствительностью, т.е. реагируют на определенный спектр излучения по-разному. Существует три вида колбочек: «красные» (правильнее «жёлтые», так как максимум спектральной чувствительности приходится на жёлтую часть видимого спектра), «зеленые» и «синие». В иностранных источниках эти рецепторы подразделяются на колбочки L-типа (L от англ. *Long* – длинноволновый спектр) – чувствительные в желто-красной области, M-типа (M от англ. *Medium* – средневолновый) – в зелено-желтой и S-типа (S от англ. *Short* – коротковолновый) – в фиолетово-синей частях спектра. Оптическим смешением трёх линейно-независимых цветов (каждый не может быть получен из двух других) можно получить остальные цвета и оттенки. Если все три типа колбочек возбуждаются одновременно и примерно одинаково – возникает ощущение белого цвета.

Существует множество нарушений в работе зрительной системы, которые можно встретить у людей, в том числе отклонения, связанные с цветовосприятием. Расстройство цветового зрения называют цветоаномалией или аномальным цветовым зрением – пониженной способностью отличать друг от друга несколько цветов или все цвета.

Нарушение аккомодационной способности хрусталика приводит к нарушению остроты зрения и возникновению близорукости или дальнозоркости. Близорукость (миопия) – отклонение от нормальной способности оптической системы глаза преломлять лучи, которое заключается в том, что при аккомодации на бесконечность изображение строится не на сетчатке глаза, а перед ней. В этом случае четко видны предметы, расположенные на близком расстоянии, а изображение удаленных предметов расплывчатое. Для коррекции близорукости используются очки с двояковогнутыми линзами.

Дальнозоркость (гиперметропия) – отклонение от нормальной способности оптической системы глаза преломлять световые лучи, при котором изображение строится за сетчаткой. В таком случае человек плохо видит близко расположенные предметы. Одной из причин развития близорукости является перенапряжение ресничных мышц хрусталика при работе с очень мелкими предметами и связанного с необходимостью близкого расположения предметов к хрусталику для увеличения угловых размеров этих предметов. Дальнозоркость возникает в основном с возрастом, вследствие уменьшения эластичности хрусталика. При дальнозоркости нужны очки с двояковыпуклыми линзами.

Нарушение зрения, связанное с неравномерным или несимметричным преломлением света роговицей или хрусталиком, когда их оптические оси не совпадают, а также, когда нарушаются форма хрусталика и роговицы, называют астигматизмом. Астигматизм устраняется при помощи очков с особыми (цилиндрическими) стеклами.

Аномалия зрения, при которой имеет место существенное ослабление, сильно выражено частичное или полное отсутствие ночного зрения называется куриной слепотой или «ночной слепотой».

Следует отметить, что зрительная система способна различать ассоциативно материалы предметов, оценивать угловую скорость движения. Оценка расположения того или иного предмета производится мозгом также опираясь на положение осей глазных яблок. Это свойство зрительной системы называется бинокулярным зрением.

Часть информации система человеческого глаза получает при помощи обработки изображения, полученного в результате движения глаз. Однако и в неподвижном состоянии поле зрения человеческого глаза составляет не менее 110° (по другим данным 125°) по горизонтали и 150° по вертикали. Поле зрения – часть пространства, в пределах которого находящийся в заданном положении глаз видит объекты. С возрастом поле зрения уменьшается.

Заметим, что приведенные данные далеко не охватывают весь диапазон возможных характеристик и описаний глаза. Нужны новые исследования и знания о зрительной системе, нужно учитывать особенности моделирования оптики глаза. Тогда можно будет попробовать создать индивидуальную модель оптической системы конкретного человека и, таким образом, добиться лучших результатов в понимании зрительной системы вообще.

Подробнее остановимся на рис. 3.6 и 7.1, на которых представлены все основные элементы оптической системы правого глаза – сферы с диаметром около 30 мм. Самая внешняя оболочка – склеротическая (склера) толщиной примерно 1 мм. Основная функция оболочки – защита глаза от внешних воздействий. Кроме того, это так называемый биологический термостат, обеспечивающий постоянную температуру (изменение не превышает 1°).

Передняя часть этой оболочки называется роговой (роговицей). Она более прозрачная, выпуклая и тонкая (толщина 0,5 мм) с показателем преломления 1,39. Её хирургическая замена производится только из биологического материала. Это на время ограничивает возможности этой операции. Однако современные медицинские исследования позволяют надеяться на создание роговицы из искусственно выращенной материи. Роговица – это сильный оптический компонент глаза человека, поэтому небольшие отклонения в форме поверхности роговицы могут привести к существенным отклонениям в создании изображения.

Роговица вместе с хрусталиком, передней и задней камерами является необходимым элементом светопреломляющего аппарата. Очень важно, что этот аппарат создаёт качественное изображение на сетчатке глаза.

Следующая оболочка толщиной 0,3 мм называется сосудистой, так как в ней размещены кровеносные капилляры и сосуды, через которые осуществляется питание всех элементов глаза. Утолщение в передней части сосудистой оболочки называется радужной оболочкой. Название связано с тем, что в ней может находиться особое вещество – меланин, отвечающее за цвет глаз от чёрного (много меланина) через карий (среднее количества меланина) до голубого (меланин отсутствует). Меланин выполняет защитные функции, поглощая рассеянный, избыточный, а значит лишний свет.

Очень важно, что венчается радужка отверстием (диафрагмой), которое называется зрачком. В полной темноте диаметр зрачка составляет 8 мм, а на ярком свете автоматически уменьшается до 2 (1,5) мм. Эта защита от избыточного излучения чрезвычайно важна, особенно если меланина в радужной оболочке нет или очень мало (серый цвет глаз).

Самая тонкая, толщиной 0,2 мм, внутренняя оболочка – сетчатая оболочка (сетчатка или ретина). В ней расположены, прежде всего, приёмники дневного зрения – колбочки, ночного – палочки. Избыточный свет, оказавшись в сетчатке, поглощается кожным эпителием. Когда через зрачок глаза проходит много света – кожный эпителий набухает, приёмники излучения оказываются внутри него, а коэффициент поглощения кожного эпителия возрастает. Поскольку палочки и колбочки расположены на задней поверхности сетчатой оболочки, падающий свет должен пройти через все её слои, чтобы стимулировать, возбудить палочки или колбочки. Почему сетчатка устроена так странно – как бы перевернута – точно неизвестно до сих пор.

Позади всех рецепторов находится слой клеток, содержащих черный пигмент. Он поглощает прошедший через сетчатку свет, не давая ему отражаться назад, рассеиваться внутри глаза и снижать контраст изображения. Он играет ту же роль, что и черная окраска внутренней фотокамеры.

Контраст, в смысле восприятия, является оценкой разницы восприятия двух (или более) частей поля зрения, наблюдаемых одновременно или последовательно, а в физическом смысле – это величина, соответствующая воспринимаемому контрасту светло-

ты, которая обычно определяется по одной из формул, включающих в себя значения яркостей рассматриваемых стимулов. Например, может выражаться через относительную разность яркостей вблизи порога яркости или, при значительно больших яркостях, через отношение яркостей.

В центральной части сетчатки расположено жёлтое пятно (названо по цвету его пигмента, представляющее собой овал размером 1,0 мм на 0,8 мм. Углубление в жёлтом пятне, в 2,5 раза меньшее его размера, называется центральной ямкой или фовеа.

При этом его центральная часть в 4 раза меньше фовеа и носит название фовеола. Фовеола не содержит кровеносных сосудов. Ее размер соответствует полю зрения размером 0,017 рад (1°). Центральная часть фовеолы, которой соответствует поле зрения размером примерно 0,003 рад ($0,2^\circ$), не содержит колбочки, чувствительные к синему цвету, а только чувствительные к зеленому и красному.

Наблюдая за объектом, глаз поворачивается, чтобы изображение объекта строилось на жёлтом пятне. Поэтому ось, соединяющая хрусталик и центр фовеолы, называется зрительной. Смещение точек пересечения зрительной и оптической осей с сетчаткой, отложенное на поверхности сетчатки, составляет всего 1,25 мм.

Пространство между роговицей и зрачком называется передней, а между зрачком и хрусталиком – задней камерами. Они заполнены водянистой жидкостью и имеют показатель преломления 1,35. Однако, главное, они участвуют в построении изображения объекта.

Эту же функцию выполняет двояковыпуклая биологическая линза – хрусталик, имеющий сложнейшее устройство из десятка слоёв. Они смещаются друг относительно друга при аккомодации под воздействием мышц, меняя радиус кривизны хрусталика. В центральной части или ядре хрусталика показатель преломления равен 1,41, но он плавно уменьшается к коре (периферии) до 1,39. При приближении объекта наблюдения к человеку – выпуклость хрусталика увеличивается, радиус кривизны и фокусное расстояние уменьшаются.

В зрительной системе есть ещё стекловидное тело – упругое, похожее на стекло, вещество (с показателем преломления 1,35), обеспечивающее на долгие годы жизни человека постоянное расстояние между хрусталиком и сетчатой оболочкой.

Таким образом, на сетчатке строится действительное, перевёрнутое и мало абберационное (например, сферическая абберация – минимальная) изображение, отсюда неравномерное распределение освещённости по сетчатке и разная частота импульсов тока действия, направляемых от рецепторов по нейронам к другим клеткам, а затем по зрительному каналу (нерву) в кору головного мозга. Похожим образом работают фотоаппараты, имеющие объективы с переменным фокусным расстоянием, и видеокамеры. Правда, в них изменение фокусного расстояния происходит возвратно-поступательным движением отдельных компонентов объектива. В глазу нет этого тяжело реализуемого в конструкциях движения.

7.2. Редуцированный глаз по В.К. Вербицкому

Для проведения большинства расчётов зрительной системы человека необходимы упрощённые, но в то же время достаточно точные для инженерной практики, модели. Построению таких моделей предшествовали многочисленные исследования, которые позволили определить средние цифры размеров, показателей преломления и других параметров глаза. Исследователи установили, что зрительная система глаза человека не только децентрированная (оптические оси элементов не совпадают), но и иммерсионная. Это значит, что изображение объекта и сам объект размещаются в средах с разными показателями преломления. Причём изображение строится в среде с показателем преломления $n_2 > 1$. При этом переднее фокусное расстояние (по принятому в оптике правилу записывается с минусом) не равно по абсолютной величине заднему фокусному расстоянию (записывается с плюсом).

Напомним, что фокусом сферической поверхности называется точка, в которой сходятся после преломления параллельные лучи, т.е. лучи, идущие от бесконечно удаленной точки. Для построения четкого изображения фокус оптической системы глаза должен находиться на сетчатке.

Практически все модели зрительной системы не учитывают децентрированность оптической системы глаза и не могут исключить по соображениям точности расчётов ее иммерсионность.

Отметим, что приемлемые для практики модели не могут обойтись без статистически обоснованных выводов. Первым достаточно интересные выводы сделал шведский офтальмолог и учёный, лауреат Нобелевской премии 1911 г. за исследования глазных сред Альвар Гульстранд. Он предложил упрощённую модель на базе трёхлинзовой схемы с двумя узловыми точками. Узловая точка – точка на оптической оси в пространстве предметов (изображений), для которой угловое увеличение равно $+1$. Лучи, проходящие через такие точки в оптической системе, не преломляются. Одним из недостатков такой модели является неудобство, связанное с близким расстоянием между узловыми точками в этой модели – 0,25 мм.

В нашей стране используется не модель Гульстранда, а модель редуцированного (упрощённого) глаза, предложенная Вячеславом Константиновичем Вербицким (1928 г.). Основным элементом этой модели является сферическая преломляющая поверхность, заменяющая собою роговицу, переднюю и заднюю камеры, а также хрусталик (рис. 7.2). Все эти элементы необходимы в зрительной системе для построения на сетчатке качественного изображения объекта. Оно строится в данной модели для параксиальной области на фокальной плоскости, расположенной внутри глазной среды с показателем преломления $n_2 = 1,4$ (в реальном глазе изображение строится на сферической поверхности).

Узловая точка, отстоящая от центра сферы-сетчатки на 6,2 мм в модели Вербицкого одна, радиус кривизны сферической поверхности с центром в узловой точке $R_{\text{пор}} = 6,8$ мм. Главная плоскость – плоскость в пространстве изображений, сопряжённая с плоскостью в пространстве предметов, для которой линейное увеличение равно $+1$ – также одна.

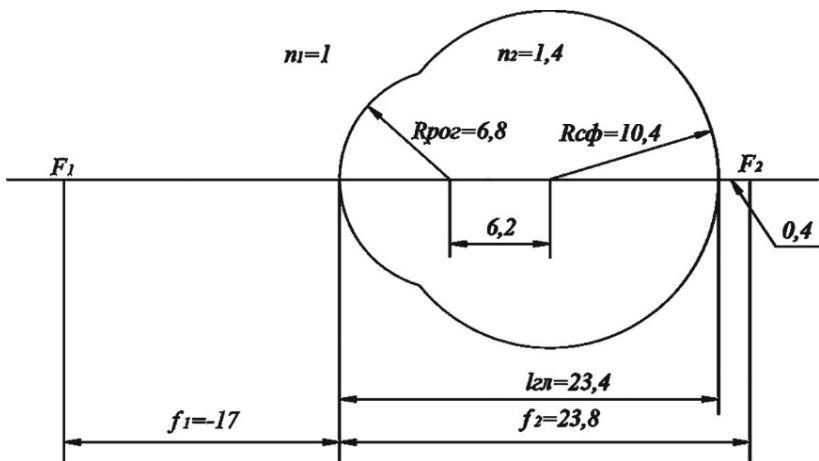


Рис. 7.2. Схематичное изображение модели В.К. Вербицкого

Если параллельный пучок света падает из пространства предметов на оптическую систему, он собирается в фокусе – точке фокальной плоскости на этом расстоянии, называемой задним фокусом. Заднее фокусное расстояние f_2 равно в этой модели 23,8 мм. Таким образом, оптическая система глаза – короткофокусный объектив. При этом так называемая глубина глаза $l_{гл}$ чуть меньше, а именно 23,4 мм. Такое несоответствие Δl в 0,4 мм объясняется тем, что из-за сферической аберрации изображение точечного объекта имеет наименьший размер не в фокальной плоскости, а смещено от нее на 0,4 мм.

Если параллельный пучок света падает из пространства изображений на линзовую систему, он собирается в точке фокальной плоскости пространства предметов, в которой показатель преломления $n_1 = 1,0$, в точке переднего фокуса. Переднее фокусное расстояние f_1 равно -17 мм (знак « \leftarrow » означает, что точка расположена слева от вершины преломляющей поверхности). Основные параметры редуцированного глаза по Гульстранду и Вебицкому указаны в табл. 7.1.

Таблица 7.1

**Основные параметры редуцированного глаза
по Гультранду и по Вербицкому**

Параметр	По Гультранду	По Вербицкому
Преломляющая сила (рефракция), дптр	58,64	58,82
Длина глаза, мм	24,0	23,4
Радиус кривизны роговицы, мм	7,7	6,8
Показатель преломления стекловидного тела	1,34	1,40
Радиус кривизны поверхности сетчатки, мм	10,5	10,2
Местоположение* главных точек, мм	–	0
Местоположение* узловых точек, мм	–	6,8
Переднее фокусное расстояние, мм	–17,055	–17,0
Заднее фокусное расстояние, мм	22,785	23,8
*Относительно вершины роговицы		

Важный, в том числе для модели Вербицкого, параметр – оптическая сила F преломляющей поверхности в зрительной системе человека меняется при изменении расстояния до объекта наблюдения. Процесс изменения оптической силы глаза из-за изменения заднего фокусного расстояния f_2 для того, чтобы четкое изображение строилось на сетчатке, является аккомодацией. Названные выше цифры для $R_{\text{рог}}$ и f_2 соответствуют так называемому не аккомодированному глазу или состоянию покоя аккомодации, когда объект находится в бесконечности. Оптическую силу рассчитывают по формуле:

$$F = \frac{n_2}{f_2}. \quad (7.1)$$

Причём, чтобы получить F в диоптриях (дптр), в формулу (7.1) f_2 нужно подставлять в метрах (м), с учетом знака.

Для того чтобы связать заднее и переднее фокусные расстояния и получить новое выражение для оптической преломляющей силы, рассмотрим преломление на сферической поверхности (рис. 7.3).

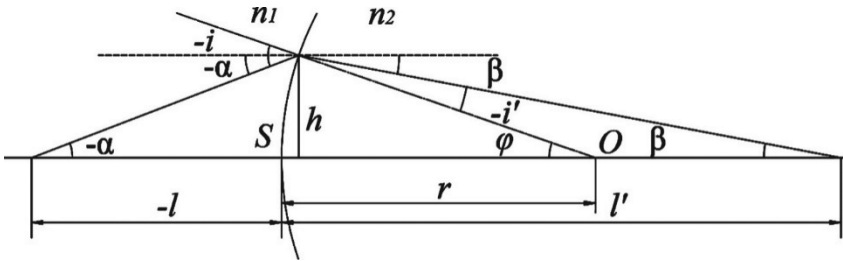


Рис. 7.3. Схема для использования инварианта Аббе

Предположим, что две среды с показателями преломления n_1 и n_2 разделяются сферической поверхностью, центр которой находится в точке O .

Рассмотрим узкий пучок лучей, падающий на сферическую поверхность, для которого угол α настолько мал, что можем считать, что $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Такой пучок будем называть параксиальным, а область, в которой происходит преломление в направлениях близких к осевому, называть параксиальной областью. Тогда луч, падая на сферическую поверхность под малым углом i , после преломления на границе двух сред выходит под углом i' . По закону преломления:

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(i') \rightarrow n_1 \sin(\varphi + \alpha) = n_2 \sin(\varphi - \beta). \quad (7.2)$$

Далее для параксиальной области и малых углов:

$$n_1 \left(\frac{h}{r} + \frac{h}{l} \right) = n_2 \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{l'} \right). \quad (7.3)$$

Разделим обе части на $(-h)$ и, учитывая, что расстояние l берется с отрицательным знаком, получаем:

$$n_1 \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r} \right) = n_2 \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{r} \right). \quad (7.4)$$

Это выражение называется инвариантом Аббе и справедливо для любого пучка лучей в параксиальной области.

Используя это выражение, найдем переднее и заднее фокусное расстояние для редуцированного глаза. Если объект наблюдения находится на достаточно большом расстоянии от глаза, которое можно принять за бесконечность $l = -\infty$, при этом глаз находится в условиях покоя аккомодации, то заднее фокусное расстояние будет равно l' . Согласно формуле (7.4), получаем:

$$f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}. \quad (7.5)$$

Аналогично можно получить выражение для переднего фокусного расстояния $f_1 = l$, подставляя l с отрицательным знаком, полагая $l' = \infty$:

$$n_1 \left(\frac{1}{-f_1} - \frac{1}{r} \right) = n_2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right) \rightarrow f_1 = -\frac{n_1 r}{n_2 - n_1}. \quad (7.6)$$

или

$$f_1 = -f_2 \frac{n_2}{n_1}. \quad (7.7)$$

Согласно (7.1) получим выражение для оптической силы глаза:

$$F = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (7.8)$$

Для инженерных расчётов фактически аккомодацией можно пренебречь уже при расстоянии наблюдения 5 метров. При этом $F = 58,82$ дптр, а для максимальной аккомодации при минимальном расстоянии наблюдении заднее фокусное расстояние способно уменьшиться на 20%. Это соответствует максимальной оптической силе $F = 70,58$ дптр. При этом максимальное изменение оптической силы $\Delta F \approx 12$ дптр.

Для учета изменений, которые происходят в оптической системе глаза при аккомодации, при расчетах принимается, что при приближении объекта наблюдения уменьшается радиус кривизны сферической преломляющей поверхности и увеличивается показатель преломления n_2 . В реальном глазе хрусталик становится более выпуклым благодаря цилиарным мышцам, роль его ядра с большим, чем на периферии, показателем преломления – увели-

чивается. В модели Вербицкого достаточно формально принято считать, что увеличение на 1 дптр вызвано уменьшением $R_{\text{рог}}$ на 0,04 мм и увеличением n_2 на 0,004.

Предложенный способ учёта аккомодации при значительных сложностях запоминания этих неудобных чисел даёт при решении некоторых задач небольшую точность. Так, при расчётах смещение поверхности сетчатки от фокальной плоскости Δl может доходить до 0,7 мм (погрешность 0,3 мм). Поэтому Андрей Владимирович Луизов ещё более формально предложил при увеличении оптической силы в редуцированном глазе на 1 дптр уменьшать $R_{\text{рог}}$ на более удобные 0,1 мм, а показатель преломления сохранять постоянным 1,4. Оказалось, что при этом расчётное Δl отличается от экспериментально установленного не больше, чем на 0,1 мм – погрешность стала в три раза меньше.

Важным параметром зрительной системы глаза являются границы пространства, в пределах которого наблюдатель может отчетливо видеть все предметы благодаря аккомодационной способности.

Расстояние четкого (ясного) видения – расстояние, при котором объект-знак может быть прочитан при неограниченном времени наблюдения. Время наблюдения имеет значение и при расчетах особых условий, иногда используется понятие расстояния четкого видения при быстром взгляде (на знак) – расстояние, при котором знак может быть прочитан при быстром взгляде на него.

Расстояние ясного видения при неограниченном времени наблюдения, выраженное в единицах оптической силы, называется объёмом аккомодации D (дптр), ограничивается ближней и дальней точками ясного видения и определяется по формуле:

$$D = \frac{1}{l_d} - \frac{1}{l_b}, \quad (7.9)$$

где l_b и l_d – ближнее (минимальное) и дальнее (максимальное) расстояния до объекта (берутся с отрицательным знаком, поскольку оба находятся слева от вершины роговицы), при которых глаз способен отчетливо различать этот объект. Для глаза с нормальной рефракцией дальняя точка ясного видения находится в бесконечности ($l_d = -\infty$).

Расположение ближней точки зависит от возраста. Для здорового ребёнка D может быть в районе 14 дптр, для 20-летнего человека 12 дптр, а для 60-летнего 1 дптр. Расстоянием наилучшего зрения считается 0,2–0,3 м. С возрастом эластичность хрусталика ухудшается, нужная его выпуклость не достигается, соответственно, уменьшается объем аккомодации (рис. 7.4). При этом часто развивается дальнозоркость, и для наблюдения близких предметов нужны очки.

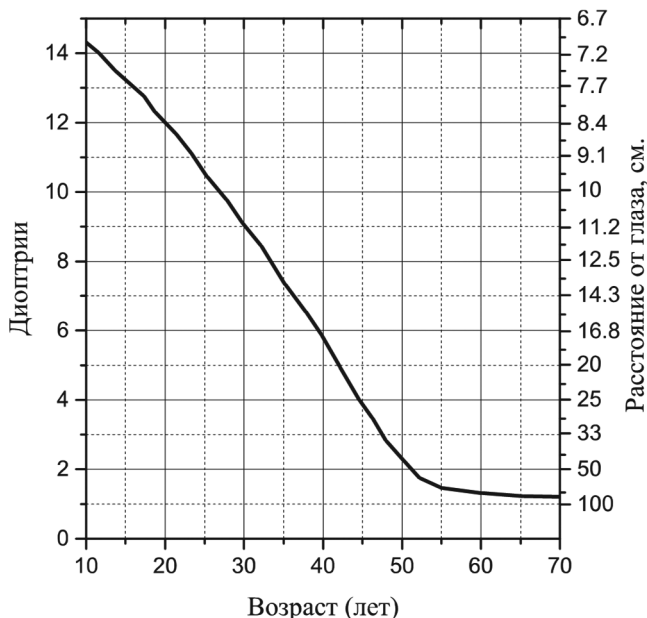


Рис. 7.4. Зависимость объема аккомодации (левая ось ординат) и модуля точки ближнего видения для эметропа (правая ось ординат) от возраста

Однако, если тренировать глаза, а именно вращать, смотреть по очереди на близкие и дальние предметы – можно несколько поддержать уровень зрения.

Различают эметропический или нормальный глаз и аметропический или аномальный глаз. Зрительная аномалия бывает врождённой и приобретённой. Величина аметропии A_d характери-

зует изменение преломляющей способности глаза, в результате которого при расслаблении аккомодационной мышцы изображение фокусируется не на сетчатке, а перед ней ($A_d < 0$) или за ней ($A_d > 0$).

$$A_d = \frac{1}{l_d}. \quad (7.10)$$

Когда заднее фокусное расстояние у аномального глаза меньше, чем у нормального, явление называется миопией или близорукостью (рис. 7.5).

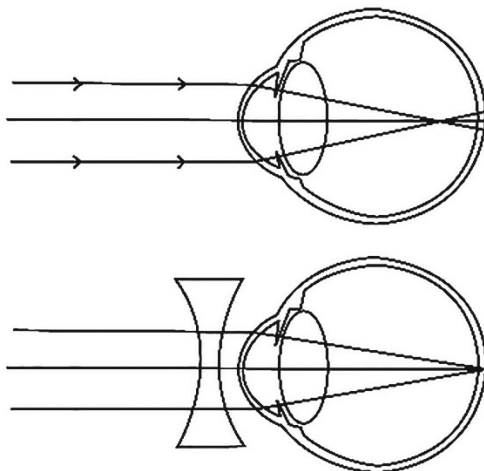


Рис. 7.5. Схема исправления миопии

В этом случае для исправления дефекта необходимо использовать отрицательную или рассеивающую линзу, т.е. развести лучи, чтобы изображение объекта оказалось на сетчатке, а не перед нею.

Другая распространённая аномальность – противоположный случай – называется гиперметропией или дальнозоркостью. При этом заднее фокусное расстояние больше требуемого. Чтобы увеличить оптическую силу или свести лучи применяют положительную (собирающую) линзу (рис. 7.6).

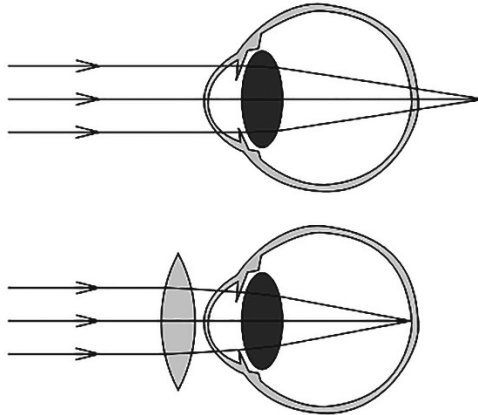


Рис. 7.6. Схема исправления гиперметропии

В настоящее время используют индивидуальные контактные линзы, накладываемые непосредственно на роговицу. Радиус кривизны линзы нужно точно измерить. С помощью слезы линза приклеивается к роговице. С помощью цветных линз можно изменить не только оптическую силу, но и цвет глаз.

Отдельно следует упомянуть о движениях глаз, помогающих в формировании правильного зрительного образа. Существует несколько достаточно сложных видов движений глаз.

Во-первых, для исключения двоения изображений необходима, например, согласованные движения осей зрения глаз. Это так называемые макродвижения глаз.

Во-вторых, для фокусировки на объектах, находящихся на достаточно близком к глазу расстоянии, бывает необходимо свести оси зрения глаз, т.е. осуществить конвергенцию. Причём наибольший возможный угол конвергенции составляет около 32° .

В-третьих, бывает обратная ситуация, когда необходимо развести оси, а именно произвести дивергенцию.

В-четвёртых, важное значение, например, в фиксации мозгом линии раздела границ объектов разной яркости или перехода между ними имеет вид движения, называемый тремором. Это произвольное колебательное движение, близкое к периодическому.

му закону. Специалисты установили, что в центральные участки коры головного мозга не передаётся избыточная информация о том или ином неизменном распределении яркости. А вот границы и переходы обязательно фиксируются благодаря тремору и выделяются мозгом. Если с помощью дополнительных приспособлений и зеркал исключить тремор – человек может вообще перестать видеть получаемое неподвижное изображение объекта.

7.3. Зрачок. Освещённость на сетчатке

Одним из приспособлений зрительной системы к изменениям внешних условий является изменение в процессе адаптации внутреннего диаметра отверстия радужной оболочки, а именно зрачка. В общем случае под термином зрительная адаптация понимается процесс изменения состояния зрительной системы при изменении воздействия световых стимулов, которые имеют различные яркости, спектральные составы излучения и угловые размеры, а также состояние зрительной системы после завершения процесса адаптации.

Для того, чтобы предотвратить чрезмерное раздражение сетчатой оболочки глаза, по мере увеличения яркости поля зрения происходит уменьшение диаметра глазного зрачка. В случае уменьшения яркости – диаметр зрачка увеличивается. Эта реакция человека называется зрачковым рефлексом. В таком случае используются термины «световая адаптация» и «темновая адаптация», первый из которых применяется тогда, когда яркости световых стимулов достигают по крайней мере 10 кд/м^2 , а второй – когда их яркости не превышают нескольких сотых долей кд/м^2 .

В тёмное время суток или в темном помещении диаметр зрачка может увеличиваться до 8 мм, а при хорошей освещённости окружающего пространства и при взгляде на яркий объект – уменьшаться до 2–1,5 мм. При этом скорость реакции зрачка неодинакова для его сужения и расширения. Сужение зрачка происходит значительно быстрее.

Сотрудник национальной физической лаборатории Великобритании Кроуфорд предложил следующую удобную аппроксимацию зависимости диаметра зрачка от яркости объекта на основе гиперболического тангенса:

$$d_{\text{зр}} = 5 - 3 \cdot \text{th}(0,4 \lg(L_{\phi})), \quad (7.11)$$

где L_{ϕ} – яркость фона, на которую адаптируется человек.

Для количественного выражения уровня зрительного ощущения от излучающего объекта, вызывающего зрительное ощущение используется термин светлота. Светлота – свойство зрительного восприятия, в соответствии с которым объект воспринимается как излучающий или отражающий больше или меньше света. Свет, проходя через зрачок и глазные среды, попадает на сетчатку. Уровень зрительного ощущения определяется освещенностью сетчатки в зоне изображения объекта.

Для определения освещенности на сетчатке не используют модель Вербицкого из-за её сложности. Делают некоторые упрощения: совокупность роговицы и хрусталика заменяют одной линзой; считают, что «глубина глаза» равна заднему фокусному расстоянию; диаметр линзы полагают равным диаметру зрачка (рис. 7.7).

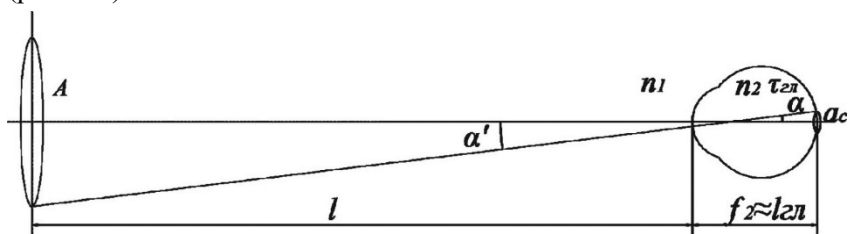


Рис. 7.7. Схема для расчёта освещённости на сетчатке

Освещённость на сетчатке E_{vc} можно записать через световой поток, прошедший через зрачок:

$$E_{\text{vc}} = \frac{\Phi_{\text{в зр}} \tau_r}{a_c}, \quad (7.12)$$

где $\Phi_{\text{в зр}}$ – световой поток, упавший на зрачок; τ_r – коэффициент пропускания глазных сред (часто принимают $\tau_r = 0,56$); a_c – площадь изображения на сетчатке.

Проведя преобразования, мы можем получить:

$$E_{\text{вс}} = \frac{E_{\text{взр}} A_{\text{зр}} \tau_{\Gamma}}{a_c} = \frac{I_{\text{в}} A_{\text{зр}} \tau_{\Gamma}}{a_c l^2}, \quad (7.13)$$

где $E_{\text{взр}}$ – освещённость зрачка малоразмерным источником света; $A_{\text{зр}} = \frac{\pi d_{\text{зр}}^2}{4}$ – площадь входного зрачка; $I_{\text{в}}$ – сила света источника в направлении на зрачок; l – расстояние от источника до зрачка глаза (рис. 7.7).

Применим закон преломления $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\alpha')$, возведём правую и левую часть в квадрат, перейдём для малых углов α , α' к тангенсам и получим:

$$\frac{n_1^2 A}{l^2} = \frac{n_2^2 a_c}{f_2^2}, \quad (7.14)$$

где A – площадь малоразмерного источника.

Используя полученные соотношения, определение яркости $L_{\text{в}}$ и формулу (7.7), можно получить, что

$$E_{\text{вс}} = \frac{A_{\text{зр}} \tau_{\Gamma}}{f_1^2} L_{\text{в}}. \quad (7.15)$$

Подставляя в формулу (7.15) выражение для площади зрачка с учётом (7.11) получим:

$$E_{\text{вс}} = \frac{\pi \tau_{\Gamma}}{4 f_1^2} \left(5 - 3 \cdot \text{th} \left(0,4 \lg(L_{\text{вф}}) \right) \right)^2 L_{\text{в об}}, \quad (7.16)$$

где $L_{\text{вф}}$ – яркость фона или яркость адаптации, $L_{\text{в об}}$ – яркость объекта наблюдения.

Выражение (7.16) очень важное для светотехники, так как освещённость сетчатки, а значит реакция приемников (в виде импульсов тока действия), таким образом связана и с яркостью объекта и с яркостью адаптации.

Для решения отдельных задач используют понятие условной освещённости или освещённости сетчатки в Троландах. Условная освещённость сетчатки – произведение яркости в заданном направлении и видимой с этого направления кажущейся площади зрачка (естественного или искусственного). Единицей изме-

рения условной освещенности является Троланд (Тд.) Один Троланд соответствует освещенности сетчатки при яркости объекта $L = 1$ кд/м² и площади зрачка $A_{зр} = 1$ мм². Тогда 1 Тд по формуле (7.16) равен $\frac{\tau_r}{f_1^2}$, а выражение (7.16) для освещенности сетчатки

в Тд ($E_{трс}$) можно записать как:

$$E_{трс} = \frac{\pi}{4} \left(5 - 3 \cdot \text{th} \left(0,41 \lg(L_{\text{вф}}) \right) \right)^2 L_{\text{вф}}. \quad (7.17)$$

В 1933 г. ученые В. Стайлс и Б. Кроуфорд обнаружили, что лучи одинаковой яркости, попавшие на одно и то же место сетчатой оболочки через центр и периферию зрачка глаза, воспринимаются неодинаковыми по светлоте. Причиной такого эффекта является то, что лучи, падающие на колбочки под разными углами к оси, проходят разные расстояния внутри рецепторов и поглощаются неодинаково. Стайлс и Кроуфорд предложили учитывать эффект, введя понятие относительной зрительной эффективности $\beta(r)$, которая зависит от линейного смещения пучка r , в мм, относительно оптической оси, и предложили такую эмпирическую зависимость:

$$\beta(r) = 10^{-ar^2} = \exp(-2,3ar^2), \quad (7.18)$$

где $a = 0,05$ мм⁻² для белого света.

Другие ученые П. Мун и Д.Э. Спенсер предложили несколько более точную эмпирическую зависимость, описывающую эффект Стайлса–Кроуфорда:

$$\beta(r) = 1 - 0,085r^2 + 0,002r^4. \quad (7.19)$$

Учитывая различие относительной светлоты излучений, поступающих внутрь глаза через различные зоны зрачка, необходимо ввести поправку в определение площади зрачка при расчете

эффективного значения освещенности сетчатки. Тогда выражение для эффективной площади зрачка примет вид:

$$A_{\text{эф}} = 2\pi \int_0^{r_{\text{зп}}} r\beta(r)dr, \quad (7.20)$$

где $r_{\text{зп}} = \frac{d_{\text{зп}}}{2}$.

Проведя интегрирование с использованием для $\beta(r)$ выражений (7.18) и (7.19), для эффективной площади зрачка получаем: по Стайлсу–Кроуфорду:

$$A_{\text{эф}} = \frac{\pi}{2,3a} \left[1 - \exp(-2,3ar_{\text{зп}}^2) \right], \quad (7.21)$$

по Муну–Спенсер:

$$A_{\text{эф}} = \pi r_{\text{зп}}^2 (1 - 0,0425r_{\text{зп}}^2 + 0,00067r_{\text{зп}}^4). \quad (7.22)$$

Имея выражения эффективных значений площади зрачка, можно получить эффективное значение освещенности сетчатки:

$$E_{\text{вс}} = \frac{A_{\text{эф}}\tau_r}{f_1^2} L_v. \quad (7.23)$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

Наиболее полный и авторитетный труд по оптике в мировой литературе, учитывающий все последние достижения классической теории. Излагаются макроскопические уравнения Максвелла с формально введенными константами и подробно разбираются вопросы распространения электромагнитных волн в среде, а также связь этих констант с поляризацией и намагничиванием. Уравнения геометрической оптики последовательно выводятся из уравнений Максвелла (при этом автоматически учитывается попереч-

ность и векторный характер световых волн) и затем применяются к теории оптического изображения и к расчету aberrаций. Рассматриваются интерференция, элементарная и строгая теория дифракции, дифракционная теория aberrаций и дифракция света на ультразвуковых волнах. Подробно излагаются вопросы распространения, интерференции и дифракции частично когерентного света; основное внимание уделяется случаю квазимонохроматического излучения, причем общее рассмотрение строится на использовании метода корреляционных функций. Излагаются вопросы металлооптики и кристаллооптики. Во вся книга много внимания уделяется изложению математического аппарата.

2. Заказнов, Н.П. Теория оптических систем: учебник для студентов / Н.П. Заказнов, С.И. Кирюшин, В.И. Кузичев. – СПб.: Лань, 2008. – 448 с.

Рассмотрены основные понятия и законы геометрической оптики, необходимые для обоснования действия оптических систем. Описаны конструкции оптических деталей и узлов, входящих в состав этих систем. Изложена теория основных видов оптических систем (микроскопов, телескопических систем, фотографических объективов и проекционных систем) и некоторых специальных систем (осветительных, телевизионных, фотоэлектрических, лазерных анаморфотных) и голографических устройств. Расчет оптических систем выполнен с использованием ЭВМ.

3. Луизов, А.В. Глаз и свет / А.В. Луизов. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 142 с.

В книге даются сведения об устройстве и работе глаза – приемника информации, получаемой человеком с помощью света. Определяется зависимость зрительных функций от световой обстановки. Рассматриваются вопросы создания оптимальных световых условий для зрительной работы. Материал приведен к виду, удобному для практического использования: при решении некоторых светотехнических задач, расчете сигнальных устройств, конструировании наблюдательных приборов, определении видимости вооруженным и невооруженным глазом.

8. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ВОСПРИЯТИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

8.1. Световоспринимающая система глаза

Рассмотрение световоспринимающей части зрительной системы начинается со знакомства с основными элементами сетчатой оболочки глаза. На рисунке 8.1 представлена упрощенная схема структуры сетчатки.

В верхнюю часть рисунка, которую часто называют мозговым слоем, входят нервное волокно (зрительный оптический канал), ганглиозные, амакриновые (амакриновые), горизонтальные и биполярные клетки. По ганглиозным и биполярным клеткам осуществляется так называемая «вертикальная» передача информации по сетчатке навстречу поступающему потоку (на рис. 8.1 – падающий на глаз поток распространяется сверху вниз). Отметим, что по современным научным представлениям среди ганглиозных клеток есть клетки, которые отвечают за синхронизацию биологических ритмов. Эти клетки отправляют в мозг информацию о количестве и спектральном распределении поступающего излучения (если коротковолнового, точнее ультрафиолетового, фиолетового и синего излучения в падающем потоке мало, выделяется гормон усталости мелатонин, ответственный за сон; если много – гормон бодрости – кортизол).

Амакриновые и горизонтальные клетки отвечают за кодирование информации (борьба за уменьшение потока информации, которая передается в центральные участки коры головного мозга по нейронам и зрительному оптическому каналу). Преобразование сигналов при кодировании происходит сложением и вычитанием, т.е. преобразование является линейным процессом. В нижней части рисунка (светочувствительный слой) расположены светочувствительные рецепторы. Среди них так называемые палочки (приемники ночного зрения с веществом – родопсином) и три типа колбочек (приемники дневного зрения с веществом – иодопсином). При падении потока на рецепторы происходит фотохимическая

реакция: родопсин и/или иодопсин разлагаются, образуя ионы. Когда последних скапливается достаточное количество, происходит «пробой» синапса – места перехода от одного нервного волокна (нейрона) к другому, и информация распространяется дальше в виде нервного импульса (на рис. 8.1 – вертикально снизу вверх). Этот этап необходимо отметить как нелинейный.

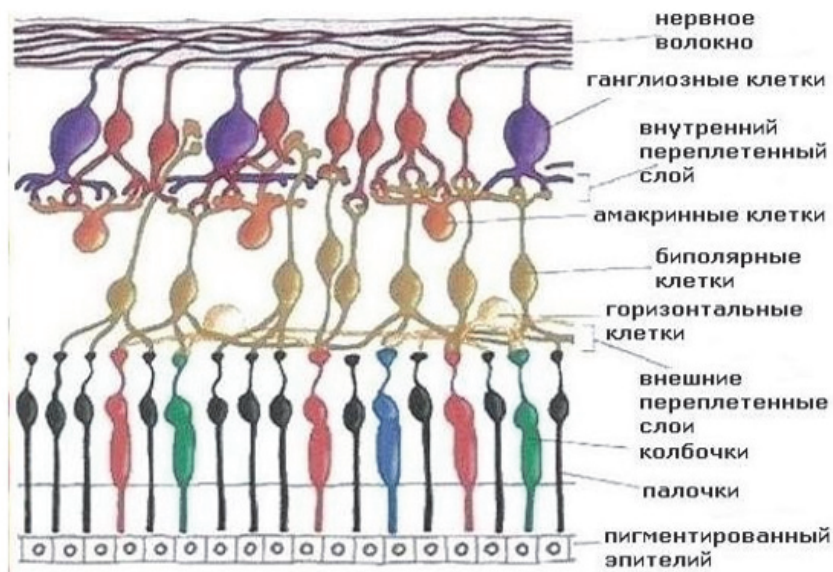


Рис. 8.1. Строение сетчатки

Нервные клетки (нейроны) состоят из ядра, главного отростка в виде нити, передающего сигнал, – аксона и других волокон – дендритов. Вся клетка покрыта мембраной, аксон обычно кончается разделяющимися веточками, почти вплотную примыкающими к телам или дендритам другой клетки. В областях, называемых синапсами, химическим путём происходит передача информации к следующей нервной клетке. Сам нейрон имеет внутри хлористые натрий, калий и кальций. Большинство молекул диссоциировано, т.е. внутри и снаружи клеток содержатся положительные ионы Na, K, Ca и отрицательные ионы Cl. В состоянии

покоя электрические потенциалы снаружи и внутри клетки отличаются на 70 мВ, причём плюс находится снаружи. Передаваемые нейронами сигналы представляют собой быстрые изменения потенциала, перемещающиеся по клетке. Её мембрана состоит из миллионов пор, через которые вещества могут проходить то внутрь, то наружу. Разность потенциалов на мембране в любой момент определяется концентрацией ионов на ней и зависит от количества открытых и закрытых пор.

Ионы образуют местные токи, переходя внутрь или наружу мембраны, и так перемещаются, что возникает некоторое событие или процесс. Когда нейрон находится в покое, большинство калиевых каналов открыто, а натриевых – закрыто; снаружи будет положительный потенциал. При возбуждении клетки на коротком её отрезке открываются новые натриевые поры, что приводит к кратковременному преобладанию потока этих ионов, и этот участок становится электроотрицательным по отношению к внутреннему пространству нейрона. Затем натриевые поры вновь закрываются, а калиевые поры остаются открытыми, причём даже в большем количестве, чем в состоянии покоя. Оба этих процесса приводят к быстрому восстановлению положительного потенциала покоя снаружи мембраны. Вся последовательность событий занимает тысячную долю секунды.

Нервный импульс приходит к окончанию аксона и вызывает высвобождение так называемых нейромедиаторных молекул. Последние воздействуют на мембрану в месте синапса так, что либо понижают её потенциал, либо препятствуют её понижению. При понижении частота импульсации возрастает, тогда такой синапс называется возбуждающим. Если же мембранный потенциал не доходит до порогового уровня, импульсы не возникают (или возникают с меньшей частотой), и тогда синапс не пропускает сигнал и называется тормозящим. В любой момент времени существует один активный участок нейрона, который передвигается со скоростью от 0,1 до 10 м/с. Это и есть процесс распространения импульса. При повышении падающего на сетчатку потока частота следования импульсов может возрастать.

Для кодирования сигнала может использоваться, например, совместное действие двух нервных клеток (рис. 8.2). Нейрон с условным названием "on" увеличивает частоту следования импульсов при возникновении постоянного светового сигнала на сетчатке, а совместно с ним действующий нейрон "off" – при завершении такого светового сигнала. Таким образом, мозг получает команду об изменении светового потока с помощью получения минимальной информации.

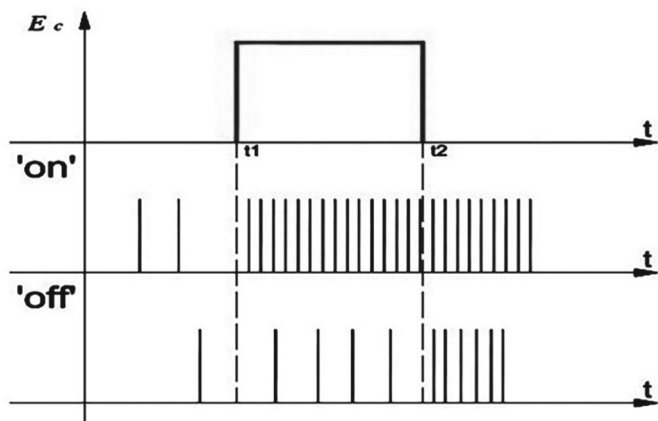


Рис. 8.2. Совместное действие "on" и "off" нервных клеток

В сетчатке содержатся около 120–130 миллионов палочек и около 7–10 миллионов колбочек. У колбочек обнаружены разные спектральные чувствительности (максимумы в желтой, зеленой и синей частях спектра, рис. 8.3). Именно с них начинается первый этап спектрального анализа излучения и передачи первичной информации о цвете. Самый нижний элемент рисунка – пигментированный эпителий или кожный эпителий – предохранительная система с веществом – фусцином. С возрастанием потока эпителий разбухает, и его коэффициент поглощения возрастает. Таков один из механизмов защиты зрительной системы от большого («лишнего») света. А именно чёрный пигмент эпителия – это своеобразная ловушка рассеянного света, снижающего контраст изображения.

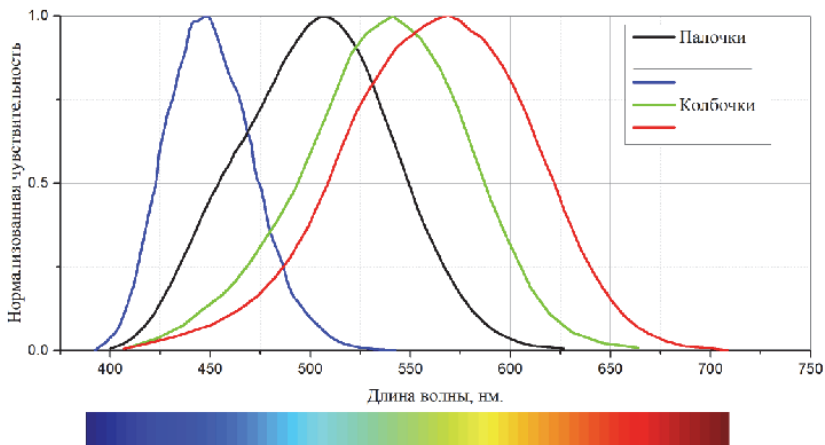


Рис. 8.3. Относительные спектральные чувствительности К, S и С колбочек и палочек

8.2. Этапы преобразования зрительной информации

На рисунке 8.4 (нижняя часть) представлены важнейшие этапы преобразований в сетчатке (С). Первый из них представляет собой линейный этап фотохимических реакций, второй – нелинейный из-за синапсов. Пока не превышена определённая (пороговая) частота импульса сигнала, информация в следующий нейрон через синапс не поступает. Третий этап является линейным преобразованием, а именно сложением и вычитанием сигналов, которое происходит, например, при кодировании в амакриновых и горизонтальных клетках сетчатки. В оптическом канале, который иногда называют четвёртым этапом, также происходит линейная передача информации. В целом, из-за второго этапа, весь процесс преобразования сигналов в сетчатке принципиально нелинейный.

Существуют ряд моделей дальнейшего преобразования сигналов. Например, свет, обработанный сетчатой оболочкой по модели восприятия Аткинса–Шифрина (верхняя часть рис. 8.4), поступает в виде чувственной информации в блок иконической (икона – образ) памяти (ИП) в виде ощущения. Комбинация сиг-

налов, ещё не обработанная мозгом, может задержаться в блоке кратковременной памяти (КП) на малый период, если будет не очень важной (т.е. невостребованной). Если её часто вспоминать, повторять или использовать, она переходит в долговременную (ДП), где хранится дольше.

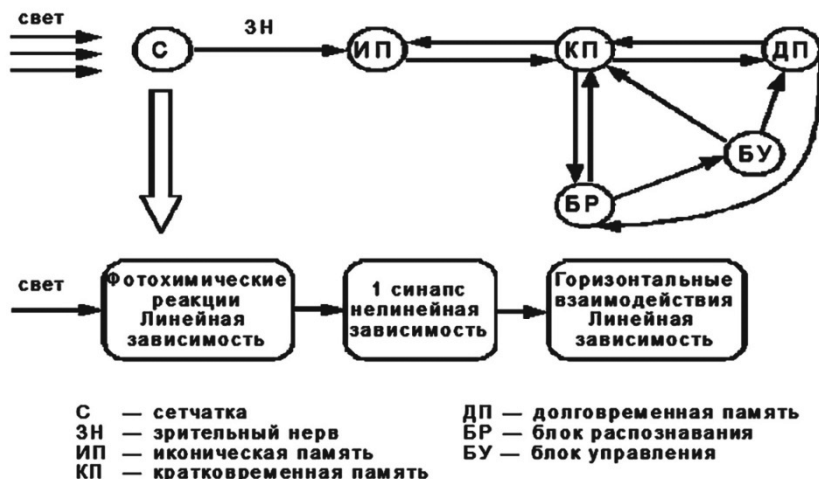


Рис. 8.4. Модель восприятия Аткинса-Шифрина и этапы преобразования информации в сетчатке

Однако из ДП информация снова может возвратиться в КП, если очень долго к ней человек не обращается. Опознавание объекта, построенного на сетчатке, осуществляется блоком распознавания (БР) на основе сравнения информации из ИП с признаками, хранящимися в КП и ДП. Блок управления (БУ) руководит блоками КП, ДП и БР. Именно с помощью БР человек в конечном итоге принимает решение и делает вывод, какой именно образ зафиксирован зрительной системой. Если в образе, который человек внутренне изучает, содержатся некоторые характерные признаки изображаемого объекта, так что понятен смысл, человек может восстановить образ целиком. Сделать это возможно благодаря КП и ДП, где могут храниться и признаки, и сами эти образы.

8.3. Нарушения цветового восприятия

Состояние цветовоспринимающей системы организма, при котором полноценно воспринимаются все цвета и оттенки, называется нормальной трихромазией. В этом случае все три элемента колбочковой системы («красный», «зеленый» и «синий») работают в полноценном режиме. В случае снижения чувствительности одного или нескольких цветовоспринимающих рецепторов глаза, а также при отклонении их функций спектральной чувствительности от средних значений, у человека ослабляется или вовсе пропадает способность различать некоторые цвета.

У аномальных трихроматов нарушение цветовосприятия выражается в неразличении каких-либо оттенков того или иного цвета. Выраженность изменений напрямую зависит от степени тяжести патологии. Люди со слабыми цветоаномалиями часто даже не догадываются о своей особенности и узнают о ней только после прохождения медкомиссий, которые по результатам обследований могут внести значительные ограничения в их профориентацию и дальнейшую трудовую деятельность. Аномальная трихромазия имеет следующую классификацию по Крису–Нагелю–Рабкину:

1. *Протанопия* – это цветовая слепота с низкой спектральной чувствительностью на длинноволновом конце спектра. Протаноп отождествляет светло-красные цвета с темно-зелеными, голубые и синие с пурпурными и фиолетовыми. Встречается примерно у 2% мужчин и 0,04% женщин.

2. *Дейтеранопия* – это цветовая слепота, при которой зона максимума спектральной чувствительности сдвинута в сторону более длинных волн. Дейтераноп отождествляет темно-красные цвета со светло-зелеными, голубые с фиолетовыми. Все многообразие цветов дейтеранопы, как и протанопы, воспринимают в виде различных оттенков желтого, коричневого и синего. Встречается примерно у 6,5% людей.

3. *Тританопия* – это очень редкая цветовая слепота, характеризуется укорочением видимого участка спектра с коротковолновой стороны. Максимум спектральной чувствительности практически не

смещен по спектру. Тританопы отождествляют желтовато-зеленые тона с синевато-зелеными, пурпурные с оранжево-красными. Встречается крайне редко (0,001–0,002%). На рисунках 8.5 и 8.6 представлены схемы самых распространенных цветовых аномалий и некоторые примеры видения цвета цветоаномалами.

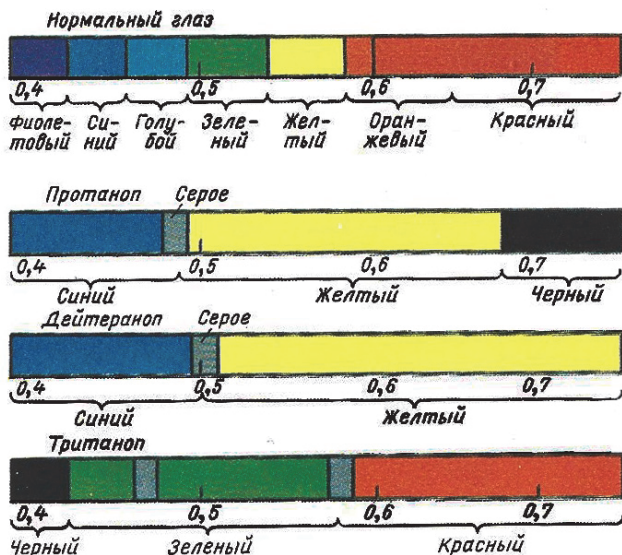


Рис. 8.5. Схемы нормального и аномального цветового зрения

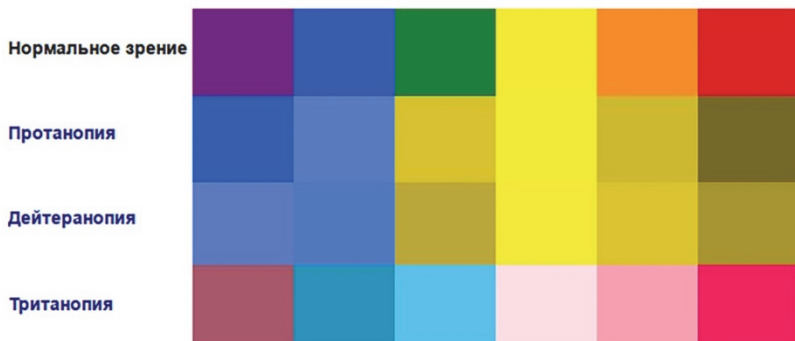


Рис. 8.6. Примеры видения цвета некоторыми цветоаномалами

Протаномалия и дейтераномалия могут быть разных степеней выраженности: А, Б и С (по убывающей). При *дихромазии* у человека отсутствует один тип колбочек, и он воспринимает только два основных цвета. Аномалия, вследствие которой не воспринимается красный цвет, называется протанопия, зеленый – дейтеранопия, синий – тританопия. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, понять, как же на самом деле видят люди с измененным цветоощущением, крайне сложно.

Наличие одного не функционирующего приемника, например красного, не говорит о том, что человек видит все цвета, кроме этого. Эта гамма в каждом случае индивидуальна, хоть и имеет определенное сходство с таковой у других людей с дефектом цветового зрения. В некоторых случаях может наблюдаться комбинированное снижение функционирования колбочек различного типа, что вносит «смуту» в проявление воспринимаемого спектра. По происхождению все нарушения цветовосприятия могут быть врожденными и приобретенными.

Самой тяжелой степенью нарушения цветовосприятия является *монохромазия* – полная цветовая слепота. Выделяют палочковую монохромасию (ахроматопсию), когда на сетчатке полностью отсутствуют колбочки, а при полном нарушении функционирования двух из трех видов колбочек – колбочковую монохромасию. В случае с палочковой монохромазией, когда на сетчатке отсутствуют колбочки, все цвета воспринимаются как оттенки серого. Такие пациенты, помимо этого, обычно имеют низкую остроту зрения, светобоязнь и нистагм, т.е. произвольные колебательные движения глаз высокой частоты (до нескольких сотен колебаний в минуту). При колбочковой монохромазии разные цвета воспринимаются как один цветовой тон, однако зрение обычно относительно неплохое.

Для обозначения дефектов цветовосприятия в РФ одновременно применяются две классификации (рис. 8.7 и рис. 8.8).

Основное различие между ними кроется лишь в установлении частичных нарушений цветового зрения посредством их опытной проверки. Согласно классификации Ньюберга–Раутиана-Юстовой ослабление функции колбочек называется цветослабо-

стью, и в зависимости от вида задействованных фоторецепторов может разделяться на прото-, дейто-, тритодефицит, а по степени нарушения – I, II и III степень (по возрастанию). В верхней части схематически отраженных классификаций различий нет.



Рис. 8.7. Классификация врожденных нарушений цветовосприятия по Крису–Нагелю–Рабкину



Рис. 8.8. Классификация врожденных нарушений цветовосприятия по Нюбергу–Раутиану–Юстовой

По мнению авторов последней классификации, изменение кривых цветочувствительности возможно как по оси абсцисс (изменение диапазона спектральной чувствительности), так и по оси ординат (изменение чувствительности колбочек). В первом случае это свидетельствует об аномальности цветовосприятия (аномальной трихромазии), а во втором – об изменении цветосилы (цветослабости). Лица с цветослабостью имеют сниженную цветочувствительность одного из трёх цветов, и для правильного различения им необходимы более яркие оттенки этого цвета. Требуемая яркость зависит от степени цветослабости. Аномальная трихромазия и цветослабость, по мнению авторов, существуют независимо друг от друга, хотя зачастую встречаются вместе. Однако понятия «аномальная трихромазия» и «цветослабость» не тождественны. Лица с цветослабостью имеют сниженную цветочувствительность одного из трёх цветов, и для правильного различения им необходимы более яркие оттенки этого цвета, в то время как люди аномальной трихромазией не различают каких-либо оттенков того или иного цвета вне зависимости от яркости.

Цветоаномалы, так же как и люди с нормальным цветовым зрением, работают, переходят дороги, да и просто сталкиваются с различными цветами каждый день. Для цветоаномала может оказаться непосильной задачей то, что не составит труда обычному человеку. Однако организм человека так устроен, что может компенсировать некоторые врождённые аномалии. В последнее время установлено, что некоторые цветоаномалы – протанопы различают существенно больше (до 2,5 раз) оттенков цветов хаки, чем люди с нормальным цветовым зрением (трихроматы). Этот факт значим не только с научной точки зрения, но и для повышения самооценки цветоаномалов. Вполне возможно, они смогут лучше, чем трихроматы, справляться с деятельностью, связанной с желто-зелёной и коричневой гаммой цветов.

Например, будут лучше ориентироваться и работать непосредственно в лесных массивах и в пустынях, а также с их визуализациями в средствах отображения информации или с картами лесной и горной местности. Не исключено, что область высокой цветовой различимости не единственная даже у тех же протанопов. Физиологи и светотехники должны заинтересоваться в свете сказанного и другими цветоаномалами. Эксперт по зрительному восприятию из университета Глазго Д. Симонс в интервью журналу *Nature* назвал полученные результаты захватывающим открытием и серьёзным достижением в области цветоведения последних лет. Он предположил, что в прошлом эта особенность цветоаномалов давала её носителям определённые эволюционные преимущества.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джадд, Д. Цвет в науке и технике. / Д. Джадд, Г. Вашецки. – М.: Мир, 1978 – 592 с.

Книга написана выдающимися специалистами в области цветоведения и выдержала за рубежом три издания, последнее из которых было существенно переработано и дополнено. Она охватывает широкий круг вопросов и проблем, связанных с цветовым зрением, измерениями цвета, цветовыми системами, цветовыми шкалами, цветопередачей источников света, цветовыми наименованиями, гармонией цветов, физикой и психофизикой окрашенных пленок.

2. Хьюбел, Д. Глаз, мозг, зрение / Д. Хьюбел. – М.: Мир, 1990. – 239с.

Он как бы приглашает проследить за историей развития своих исследований и ведет от проблемы к проблеме. Стараясь быть понятным широкому кругу читателей, в том числе не имеющих запаса физиологических знаний, автор часто обращается к их здравому смыслу. В книге не только описаны оригинальные ис-

следования автора, но и изложены его представления о работе всей зрительной системы. Раздел, посвященный глазу и сетчатке, по необходимости содержит довольно много чисто учебного материала, но не может претендовать на полноту и адекватность описания. К примеру, ни словом не упомянуто о такой удивительной особенности организации сетчатки, как широкая электрическая связь между фоторецепторами и особенно между горизонтальными клетками, о «детекторной» концепции Дж. Летвина с соавторами, разработанной в 1959 г. и сыгравшей весьма конструктивную роль в последующих исследованиях сетчатки и зрительной системы, особенно у низших позвоночных. С другой стороны, в книге хорошо представлены сведения о цветовом зрении человека, включая такое важное его свойство, как константность цветовосприятия, и о бинокулярном зрении.

9. МОДЕЛИ ПОРОГОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА

9.1. История исследований контрастной чувствительности зрительной системы

Назначение любых установок искусственного освещения – создание в освещаемой зоне характеристик светового поля, обеспечивающих выполнение человеком различных зрительных задач. Это могут быть задачи обнаружения и опознавания объектов, измерения их параметров, оценки степени отличия параметров от эталонных значений и ряд других. Эффективность решения любой зрительной задачи человеком определяется характеристиками комплексной системы приема и обработки оптической информации, приводящей к возникновению ощущения яркости и цветности объектов, получившей в светотехнике название зрительной системы (ЗС) человека. Вопросы, связанные с работой зрительной системы и ее элементов при решении разнообразных задач рассмотрены в гл. 3, 7 и 8. Для объяснения работы ЗС создавались различные теории, объясняющие процессы, которые в ней происходят. В теории зрения описывают явления нормального и аномального зрения. Наиболее фундаментальными опытными фактами, на которых должна основываться каждая теория зрения, являются факты, относящиеся к зрительному уравниванию яркостей и цветов. Эксперименты показывают, что ЗС плохо оценивает абсолютное значение светотехнических параметров объектов, но с высокой точностью определяет наличие отличий между ними.

В истории развития экспериментальных методов светотехники исследования контрастной чувствительности человека занимают особое место. Благодаря им был открыт ряд психофизических законов. Они оказались связующим звеном между фотометрией и физиологией, медициной, техникой средств записи, обработки и воспроизведения видеоинформации, а также многими современными методами компьютерной обработки изображений.

На русском языке представлено большое количество обзоров, написанных в разные годы и отражающих различные аспекты данной тематики (Бондарко и др., 1999 г.; Волков и др., 1987 г.; Кравков, 1950 г.; Лазарев и др., 1978 г.; Леонов, 1977 г.; Островская, 1969 г.; Травникова, 1985 г.; Шелепин и др., 1985 г., 1992 г.).

Вопросы, связанные с исследованиями контрастной чувствительности, имеют более чем двухтысячелетнюю историю. Первые теоретические представления о порогах восприятия принадлежат еще Пифагору, а в практических целях контрастную чувствительность измеряли уже с древнейших времен. Так, например, в македонской армии отбирали наблюдателей по числу звезд (от 4 до 7), которые они могли видеть в звездном скоплении Плеяды. В римской армии для отбора лучших наблюдателей использовали две близкие друг к другу звезды в созвездии Большой Медведицы – Мицар и Алькор. Выбор звезд был сделан верно: бледный Алькор, расположенный на расстоянии 12 угл. мин от яркого Мицара, можно разглядеть, только обладая хорошей контрастной чувствительностью при максимальной остроте зрения. Гиппарх в период 161–126 гг. до н. э. разделил по яркости все звезды, видимые глазом, на шесть классов. Самые яркие он называл звездами первой величины, а едва различимые невооруженным глазом – звездами шестой величины. Система «звездных величин», по сути, описывала особенность нашего зрения: если сила источника света изменяется в геометрической прогрессии, то наше ощущение от него – в арифметической.

В новое время исследования контрастного порога были начаты французским ученым Пьером Бугером. В своих экспериментах он использовал простейшее оборудование – две свечи, расположенные на разном расстоянии от экрана (белой стены). Между первой свечой и экраном была расположена ширма, образующая на экране тень. Тень подсвечивалась второй свечой. Изменяя расстояния между экраном и свечами, П. Бугер менял яркость фона и контраст тени. Он обнаружил, что тень различима, если отношение разности яркостей тени и фона к яркости фона не превышает $1/64$, причем от абсолютного значения яркости эта ве-

личина не зависит. Таким образом Бугер смог установить дифференциальный порог восприятия яркости (~2%). Это была прекрасная методика для получения первых результатов о так называемом «слабо различимом пороге», который позже был назван «пороговым контрастом». Психологи и физиологи XVIII в. не обратили должного внимания на работу Бугера, но она сразу получила признание у оптиков, которые считают его основоположником фотометрии.

Особенность подхода Бугера состояла в том, что он исследовал как оптические свойства источников, т.е. физику формирования воспринимаемого изображения, так и общие законы восприятия этих изображений (Бугер, 1950 г.). Поэтому справедливо считать, что именно этой работой Бугера было положено начало светотехники в новое время.

Дальнейшие исследования в этой области были связаны с именами немецких ученых Эрнста Вебера и Густава Фехнера. Вебер, как когда-то и Пифагор, работал с различными сенсорными раздражителями. В частности, он обнаружил, что два отрезка выглядят неодинаковыми по длине, если разность их длин превышает 1% от их абсолютных величин. Аналогичная закономерность оказалась справедливой и для тактильных ощущений. Так был открыт психофизический закон, названный позже законом Вебера: минимально различимое изменение интенсивности стимуляции ($\Delta I_{\text{пор}}$) составляет постоянную долю ($K_{\text{пор}}$) ее исходной интенсивности (I): $\frac{\Delta I_{\text{пор}}}{I} = K_{\text{пор}}$. Позднее эти исследования были продолжены Густавом Фехнером для зрения. Он заметил, что мало-контрастные детали облаков остаются хорошо различимыми, если рассматривать их через затемненное стекло; следовательно, восприятие небольших перепадов яркости не зависит от их абсолютной величины. Повторив затем эксперимент П. Бугера с двумя свечами, он установил, что для различения яркости двух источников света необходимо, чтобы их яркость отличалась более, чем на 1/100 независимо от абсолютного значения яркостей, тем самым подтвердив и уточнив закон Вебера.

В 1860 г. Фехнер дополнил отношение Вебера для зрительной системы, добавив величину ($L_{\text{п}}$): $\frac{\Delta L_{\text{пор}}}{L + L_{\text{п}}} = K_{\text{пор}}$, где $L_{\text{п}}$ – для

здоровых наблюдателей небольшая по численному значению величина. Константа $L_{\text{п}}$ не только обеспечивает более точное соответствие экспериментальным данным, но имеет вполне реальное физическое и физиологическое объяснение. Г. Фехнер и Г. Гельмгольц назвали его «собственным светом сетчатки». В современной терминологии эта величина отражает «внутренний шум» сенсорного канала, который имеет различные источники: тепловой шум, самопроизвольный распад зрительного пигмента в рецепторах, спонтанную активность сенсорных нейронов различных уровней. Этот «шум» можно видеть в полной темноте в виде вспыхивающих точек разной яркости – фосфенов.

Г. Фехнер также предложил использовать дифференциальные пороги (понятие о которых впервые ввел П. Бугер) для построения шкалы «интенсивности ощущений». Он сформулировал «основной психофизический закон», согласно которому интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности

стимула: $B = a \log \frac{L}{L_{\text{пор}}}$, где B – интенсивность ощущения;

a – константа, L – интенсивность стимула; $L_{\text{пор}}$ – его абсолютный порог.

Предложенные П. Бугером приемы измерения контрастной чувствительности, основанные на варьировании расстояний между свечами и экраном, были хотя и просты, но недостаточно удобны для работы. Поэтому начались поиски технологически более удобных приемов исследования. Французский физик Антуан Массон для исследования порогового контраста использовал быстро вращающийся диск из белой бумаги с короткими черными секторами. Когда диск вращался достаточно быстро (около 50 оборотов в сек), черный и белый секторы сливались в однородный серый фон. Изменяя соотношение между площадями черного и белого секторов, можно было плавно менять яркость диска: от почти белого до почти черного. Чтобы создать различ-

ные перепады яркости, Массон использовал диски с несколькими секторами различных радиусов. Минимально различимое значение перепада Массон называл «пороговым контрастом». Он предложил также использовать измерение контрастной чувствительности с помощью дисков в клинической практике. Интерес к измерению контрастного порога в клинике особенно усилился после публикации результатов исследований Георга Юнга. Юнг представил изобретенный им новый метод измерения контрастного порога. В своих экспериментах он использовал альбом, на страницах которого на серых листах были расположены квадраты с чернильными пятнами в центре. Пятна были сделаны разбавленными чернилами и имели различную интенсивность. Контраст пятна, который испытуемый уже не мог различить, записывался как пороговый для данного человека. Пороговый тест Юнга оказался первым подобным тестом, удобным для использования в клинической практике.

В 1924 г. Джонас Фриденвуд разработал методику исследования контрастной чувствительности для измерения степени астигматизма с помощью «астигматических» таблиц. Таблицы состояли из узких черных линий с белыми краями, расположенных на сером фоне и имевших различную ориентацию. Фриденвуд придавал особое значение контрасту между элементами таблицы, которые мог видеть пациент с неоткоррегированным астигматизмом. Пациент видел линии определенной ориентации в фокусе и ортогонально расположенные линии вне фокуса. Линии в фокусе выделялись из фона, а линии вне фокуса сливались с ним. Ошибки в определении пациентом ориентации решетки свидетельствовали об осевом астигматизме и о его степени. В этом аспекте исследования астигматизма были аналогичны исследованиям контрастной чувствительности у здоровых испытуемых при установленной ориентации.

Исследования пороговой контрастной чувствительности на здоровых наблюдателях проводились также Коннером и Ганунгом (1935 г.), Зидентопфом (1950 г.) и Г. Блэкуэллом (1946 г.). Ими было установлено, что пороги контрастной чувствительности зависят от длительности предъявления стимула и размеров площади

стимуляции. Критические значения размеров площади стимуляции ощущения яркости связаны с дискретной структурой сетчатки и размерами рецептивных полей сетчатки. В 1875 г. Рикко была продемонстрирована зависимость пороговой интенсивности стимулов $L_{\text{пор}}$ от площади этих стимулов S : $L_{\text{пор}}S = \text{const}$. Эта закономерность, названная законом полной пространственной суммации, показывает, что чем больше площадь светового стимула, тем меньше интенсивность сигнала, необходимая для возникновения порогового ощущения.

Поскольку величина едва различимых (*пороговых*) отличий в светотехнических параметрах освещаемых объектов является объективным критерием для сравнения различных осветительных установок между собой, эти вопросы детально исследуются и в настоящее время экспериментально и теоретически. Современная светотехника оперирует рядом характеристик ЗС, которые часто называют *основными функциями зрения*.

Пороговой яркостью (световым порогом) называется минимальная яркость светового пятна, обеспечивающая возможность впервые обнаружить с заданной вероятностью это пятно на фоне с яркостью, практически равной нулю. Величина, обратная пороговой яркости светового пятна с угловым размером $\alpha > 50^\circ$, определяет абсолютную световую чувствительность зрительной системы. Как показывают результаты экспериментальных исследований, увеличение размера тест-объекта сверх 50° не приводит к снижению пороговой яркости. Тест-объектом называется световое пятно различной формы (круг, квадрат и т. п.), которое наблюдатель должен обнаружить или опознать в процессе исследований той или иной функции зрения.

Из приведенного определения следует, что измерение абсолютной световой чувствительности зрительной системы сводится к измерению пороговой яркости пятна с угловым размером $\alpha > 50^\circ$, называемой абсолютным световым порогом. Воздействие на глаз точечных излучателей оценивается по освещенности на зрачке, которую принято называть блеском. Световой порог точечных излучателей с угловым размером $\alpha < 15'$ принято характе-

ризовать пороговой освещенностью зрачка наблюдателя, создаваемой точечным источником света, впервые обнаруживаемым с заданной вероятностью на фоне с яркостью, близкой к нулю. Пороговую освещенность зрачка наблюдателя принято называть *пороговым блеском* точечного источника света.

Для характеристики зрительного обнаружения объекта на фоне с ненулевой яркостью вводят понятие *пороговой разности яркости*, определяемой минимальной разностью яркости двух смежных участков поля зрения наблюдателя, обеспечивающей в условиях оптического контакта обнаружение неравенства яркостей с заданной вероятностью. Для яркости фона (L_{ϕ}) отличной от нуля вводится *пороговый перепад яркости* $\Delta L_{\text{пор}} = (L_o - L_{\phi})_{\text{пор}}$. При неизменной яркости фона: $\Delta L_{\text{пор}} = L_{o \text{ пор}} - L_{\phi}$, где $L_{o \text{ пор}}$ – пороговое для заданного L_{ϕ} значение яркости объекта (*не путать с абсолютным порогом $L_{\text{пор}}$ определяемым на нулевом фоне*). Отношение порогового перепада яркости к яркости фона называют *пороговым контрастом* объекта с фоном:

$$K_{\text{пор}} = \frac{\Delta L_{\text{пор}}}{L_{\phi}} = \frac{L_{o \text{ пор}} - L_{\phi}}{L_{\phi}}. \quad (9.1)$$

Величину, обратную минимальному пороговому контрасту, называют *контрастной чувствительностью*. *Контрастная чувствительность* характеризует способность зрительной системы обнаруживать малые различия яркости с заданной вероятностью. Она определяется как

$$S_k = \frac{1}{\xi_k}, \quad (9.2)$$

где $\xi_k = K_{\text{пор}}^{\min}(L)$ – минимальный для заданной яркости фона пороговый контраст.

Способность зрительной системы различать форму предмета или его деталей, называемая *остротой различения*, выражается величиной, обратной минимальному разрешаемому углу ($\alpha_{\text{пор}}$).

При этом само значение $\alpha_{\text{пор}}$ определяется рядом факторов: ди-

фракцией на зрачке глаза, дефектами зрения, флуктуационным размытием изображения и т.д.

$$S_{\alpha} = \frac{1}{\alpha_{\text{пюп}}}. \quad (9.3)$$

Способность зрительного опознавания цветности принято характеризовать *порогом цветоощущения*. Порог цветоощущения точечных излучателей определяется минимальной освещенностью зрачка глаза, при которой наблюдатель опознает с заданной вероятностью цветность излучения на фоне с $L_{\phi} \approx 0$. Для тест-объектов конечных размеров порог цветоощущения определяется яркостью, обеспечивающей заданный уровень вероятности опознавания цветности объекта.

Способность различения цветовых оттенков двух смежных участков поля зрения характеризуется цветоразличительной чувствительностью зрительной системы, определяемой величиной, обратной порогу цветоразличения (цветовому порогу). *Цветовой порог* принято оценивать наименьшим, впервые различаемым с заданной вероятностью отличием цвета оптически смежных участков центральной части поля зрения наблюдателя.

Для характеристики точности зрительного обнаружения разноудаленности двух предметов, наблюдаемых бинокулярно, пользуются понятием *порога глубинного* (стереоскопического) *зрения*.

Самая общая структурная схема ЗС для решения задач в пороговых условиях представлена на рис. 9.1.

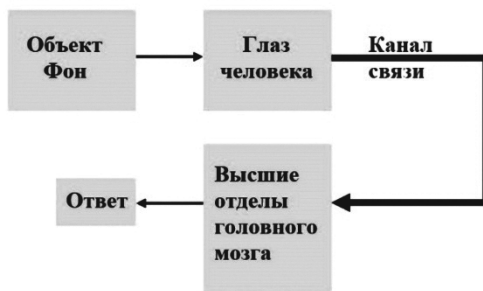


Рис. 9.1. Обобщенная структурная схема ЗС человека при решении зрительных задач

9.2. Модели пороговой чувствительности Блэкуэлла, Люса

Как отмечалось выше, проблема порога в психофизике была поставлена в 1870 г. Фехнером. За прошедшее полтора столетия теоретические представления о пороге прошли сложный путь развития, формируясь в борьбе различных направлений.

Высокопороговая модель Г. Блэкуэлла (1953 г.) исходит из классического представления о пороге как о некоей критической точке в ряду множества значений стимула, в которой стимул вызывает ощущение. Если стимул не достиг этого критического значения, ощущение не возникает. При методике принудительного выбора наблюдатель может давать только два варианта ответов – объект в поле зрения есть (ответ Да) или его нет (ответ Нет). В ситуации, когда по выработанному наблюдателем критерию принятия решения он не уверен ни в одном из этих ответов, то он вынужден прибегать к случайному угадыванию. При этом в эксперименте наблюдаются случаи, когда испытуемый при отсутствии стимула (пустая проба) дает положительный ответ о наличии сигнала в поле зрения и наоборот, т.е. возникают ошибки и это не имеет отношения к работе зрительной системы, которая обнаруживает объект с вероятностью $P_{об}$. Возможные варианты ответов наблюдателя и вероятности таких событий приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Варианты ответов наблюдателей и вероятности ответов

Наличие объекта/ Ответ	Есть	Нет
Есть	Правильное обнаружение ($P_{об}$)	Ложная тревога ($P_{лт}$)
Нет	Пропуск сигнала ($P_{нс}$)	Правильная констатация отсутствия сигнала ($P_о$)

В то же время угадывание (вероятность случайного угадывания P_{cy}) увеличивает общее число положительных ответов в эксперименте (вероятность $P_{об}^3$) за счет верно угаданных ситуаций, когда значение стимула было ниже его порогового значения.

$$P_{об}^3 = P_{об} + P_{cy}. \quad (9.4)$$

Поскольку наблюдатель заранее не знает, что ему предъявляется, то, при случайном угадывании, вероятность p_1 выдачи ответа «Да» будет одной и той же как при предъявлении объекта, так и при предъявлении пустой пробы. Исходя из теории *высокого порога* зрительной системы человека Г. Блэкуэлла считается, что в отсутствие объекта шумы зрительной системы настолько малы, что они никогда не превысят значение порога (рис. 9.2), поэтому вероятность ложных тревог, определенная в эксперименте

$$P_{лт}^3 = p_1. \quad (9.5)$$

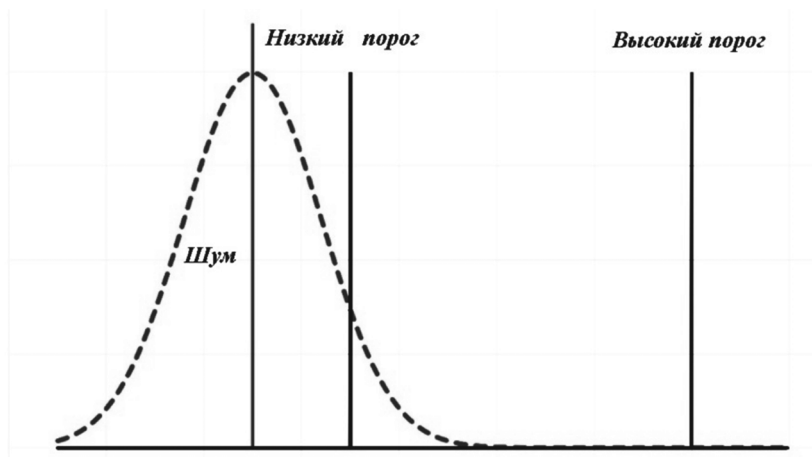


Рис. 9.2. Высокий и низкий порог ЗС

Поскольку к случайному угадыванию наблюдатель прибегает только когда его ЗС не обнаруживает объект, то вероятность $P_{\text{cy}} = p_1(1 - P_{\text{об}})$. Подставляя это выражение и выражение (9.5) в (9.4), получаем из него «истинную» вероятность обнаружения объекта ЗС ($P_{\text{об}}$):

$$P_{\text{об}} = \frac{P_{\text{об}}^3 - P_{\text{лт}}^3}{1 - P_{\text{лт}}^3}. \quad (9.6)$$

Это и есть поправка на случайный успех, полученная Г. Блэкуэллом исходя из его теории высокого порога и позволяющая исключить влияние случайного угадывания на результаты эксперимента.

Теория Люса вытекает из стандартного предположения о существовании критической точки на оси стимулов, выше которой наблюдатель обнаруживает сигнал, а ниже которой обнаружение отсутствует. В то же время предполагается, что при отсутствии сигнала существует некоторая вероятность положительного ответа. Кроме того, в процессе обнаружения наблюдатель может угадывать результат, причем использовать угадывание он может по-разному.

Если наблюдатель ставит целью обнаруживать как можно больше сигналов, то он принимает стратегию риска, подключая механизм угадывания для увеличения положительных ответов. Правда, при этом растет и число ложных тревог.

Если наблюдатель ставит целью избегать ложных тревог, то он использует угадывание для уменьшения их числа, при этом пропуская больше сигналов, чем при стратегии риска. Такое поведение обуславливается стратегией осторожности. Таким образом наблюдатель реализует стратегию с изменением правила принятия своих решений.

Обозначим вероятность обнаружения сигналов наблюдателем на основе сенсорной информации через $P_{\text{об}}$. Тогда $(1 - P_{\text{об}})$ будет характеризовать вероятность появления сигналов, не обнаруженных наблюдателем. При стратегии риска наблюдатель будет пытаться угадать наличие сигнала в этой серии необнаруженных сигналов. Если обозначить через p вероятность того, что наблю-

дателю это удалось, то вероятность угадывания сигналов из числа необнаруженных будет $p \cdot (1 - P_{об})$. Таким образом, экспериментально зарегистрированная вероятность положительных ответов за счет сенсорного обнаружения и угадывания будет

$$P_{об}^3 = P_{об} + p(1 - P_{об}). \quad (9.7)$$

Аналогично рассуждая, можно определить вероятность ложной тревоги. Она будет складываться, во-первых, из вероятности ложной тревоги в пустой пробе за счет спонтанного возбуждения зрительной системы $P_{лт}$ и, во-вторых, из вероятности угадывания, когда сигнала не было и не было спонтанного возбуждения. Так как p характеризует вероятность угадывания, то вероятность положительных угадываний в пустой пробе будет $p \cdot (1 - P_{лт})$. Суммарная вероятность ложных тревог, регистрируемая в эксперименте, будет

$$P_{лт}^3 = P_{лт} + p(1 - P_{лт}). \quad (9.8)$$

Величина p – показатель риска лежит в пределах $0 \leq p \leq 1$. Чем больше его значение, тем более рискованна стратегия наблюдателя. Изменение p в пределах от 0 до 1 определяет пределы изменения вероятности обнаружения сигнала (9.7) и ложных тревог (9.8):

$$\left. \begin{aligned} P_{лт} &\leq P_{лт}^3 \leq 1 \\ P_{об} &\leq P_{об}^3 \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (9.9)$$

Решая совместно (9.7) и (9.8) и исключая величину p , получаем зависимость вероятности обнаружения от вероятности ложных тревог

$$P_{об}^3 = \frac{P_{лт}^3 (1 - P_{об}) + P_{об} - P_{лт}}{1 - P_{лт}}. \quad (9.10)$$

При стратегии осторожности наблюдатель, стараясь избежать ложных тревог, будет давать положительный ответ только в том случае, если зрительная система возбуждена. Поскольку возбуждение в модели Люса может иметь место и при отсутствии

сигнала (низкий порог, рис. 9.2), то избежать ложных тревог невозможно. Пусть p_1 – вероятность того, что наблюдатель дает положительный ответ при сверхпороговом возбуждении. Тогда вероятность обнаружения сигнала и вероятность ложных тревог, полученные в эксперименте, равны

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{лт}}^3 &= p_1 P_{\text{лт}} \\ P_{\text{об}}^3 &= p_1 P_{\text{об}} \end{aligned} \right\}. \quad (9.11)$$

Величина p_1 характеризует меру осторожности наблюдателя. Чем меньше p_1 , тем выше осторожность. Аналогично рассмотренной выше стратегии риска, для стратегии осторожности можно получить:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq P_{\text{лт}}^3 \leq P_{\text{лт}} \\ 0 &\leq P_{\text{об}}^3 \leq P_{\text{об}} \\ P_{\text{об}}^3 &= P_{\text{лт}}^3 \frac{P_{\text{об}}}{P_{\text{лт}}} \end{aligned} \right\}. \quad (9.12)$$

При минимальной осторожности ($p_1 = 1$) и минимальном риске ($p = 0$) наблюдатель всегда дает отрицательный ответ, если нет возбуждения ЗС, и положительный, если возбуждение есть. В этой точке одна стратегия переходит в другую.

Помимо двухуровневой модели Люса, Аткинсон предложили модели с тремя уровнями.

9.3. Методы измерения порогов

Психофизика развилась как наука на экспериментальной основе. В классической психофизике основными методами измерения порогов и сенсорной чувствительности явились три метода: *метод средней ошибки*, *метод пределов (метод минимальных изменений)* и *метод постоянных стимулов*. Все три метода введены в психофизику Фехнером.

Современные методы измерений пороговой чувствительности можно рассматривать как варианты классических методов, в которые введены уточнения в соответствии с тем или иным теоретическим представлением (моделью) пороговой чувствительности. Подробный обзор психофизических методов измерения порогов чувствительности приведен в работе Бардина.

Все методы основаны на создании дискретных или непрерывных последовательностей предъявляемых наблюдателю стимулов, которые он должен идентифицировать как впервые обнаруживаемые в некоторых стабильных условиях наблюдения. Если учесть высокую чувствительность и совершенство глаза в решении подобных задач, то весьма важным является вопрос точности, с которой измеряется предъявляемый стимул. Особенно остро этот вопрос встает при измерении дифференциальной чувствительности зрения (дифференциальный порог), когда наблюдатель должен обнаружить объект на некотором фоне. В этом случае дифференциальный порог вычисляется как разность обнаруживаемого стимула и стимула, характеризующего фон.

Если учесть, что глаз при наиболее благоприятных условиях с вероятностью 0,5 (и даже более высокой) различает объект с угловым размером более 1° , когда его яркость отличается от яркости фона всего на 0,5%, то становится понятным специфика создания экспериментальных установок для измерения пороговых значений, где погрешность измерения разности стимулов не должна превышать 0,05%. В фотометрии практически отсутствуют установки для измерения световых величин с такой точностью. Поэтому при измерении порогов, как правило, используются косвенные методы измерения пороговых значений. В частности, пороговая яркость или разность яркостей вычисляются с использованием закона обратных квадратов, углов поворота поляроида с последующим вычислением яркости на основе закона Малюса, а также на основе сложения яркости двух независимых каналов, моделирующих яркость фона и перепад яркости объект – фон.

Метод средней ошибки. Другие названия этого метода – метод подравнивания или метод воспроизведения. Характерной особенностью этого метода в отличие от всех других является то, что изменение стимула здесь производит сам испытуемый, в то время как в других методах это прерогатива экспериментатора.

Суть метода сводится к тому, что испытуемому предъявляется некий стандартный (эталонный) стимул и он должен, регулируя второй переменный стимул, воспроизвести такое его значение, которое с точки зрения испытуемого было бы равно стандартному. Разброс в установке равенства будет связан с порогом чувствительности. Значение порога в этом методе определяется как среднеквадратичное отклонение переменного стимула. Иначе говоря, метод исходит из гипотезы равенства порога и среднеквадратичного отклонения.

Поскольку испытуемый производит подравнивание переменного стимула самостоятельно, он может пользоваться различными стратегиями. Поэтому результаты эксперимента могут оказаться различающимися при разных стратегиях. Если испытуемый избрал стратегию постепенного увеличения или уменьшения переменного стимула до момента, когда он перестанет ощущать различие, то результаты окажутся смещенными относительно стандартного стимула. Если же он в процессе уравнивания проходит зону, в пределах которой различий между стимулами не обнаруживалось, и, дойдя до положения едва заметного различия, начинает изменять стимул в обратном направлении до появления различия (*метод «вилки»*), то результаты будут не смещенными относительно стандартного стимула. Именно поэтому в процессе проведения эксперимента испытуемый должен быть проинструктирован с тем, чтобы он придерживался единой стратегии при измерениях. Другим недостатком метода средней ошибки является зависимость результатов эксперимента не только от чувствительности ЗС, но также и от чувствительности двигательного аппарата испытуемого.

Метод пределов или едва заметного различия основан на предъявлении испытуемому последовательного ряда сначала увеличивающихся, а потом уменьшающихся дискретных значений

переменного стимула, которые он должен сопоставить со стандартным. В серии опытов при последовательном предъявлении переменного стимула до момента, когда объект будет обнаружен, устанавливается *порог на появление*. Изменяя последовательно переменный стимул от значения, при котором испытуемый уверенно различает объект наблюдения, до момента его исчезновения с точки зрения испытуемого, определяют *порог на исчезновение*. Как показывает эксперимент, эти пороги не одинаковы. Это объясняется появлением характерных для испытуемых двух типов ошибок. В первом случае испытуемый запаздывает с ответом о появлении объекта наблюдения, поскольку изначально он объекта не видит (*ошибка ожидания*). Во втором случае испытуемый все время видит объект и запаздывает с ответом о его исчезновении (*ошибка привыкания*).

Значение порога определяется как среднее арифметическое порогов на исчезновение $L_n^{\text{и}}$ на появление $L_n^{\text{п}}$:

$$L_n = \frac{L_n^{\text{п}} + L_n^{\text{и}}}{2}. \quad (9.13)$$

Учитывая одинаковую значимость порогов на появление и на исчезновение, в эксперименте число определений этих порогов принимают одинаковым. Каждое пороговое значение определяется по результатам 10–20 *предъявлений*. При этом следует так организовать эксперимент, чтобы в разных предъявлениях скорость изменения стимулов варьировалась. Это необходимо, чтобы исключить реакцию испытуемого не на стимул, а на время, прошедшее с начала его изменения. При проведении эксперимента рекомендуется также, для уменьшения влияния ошибок привыкания и ожидания, чередовать восходящие и нисходящие ряды предъявлений.

Среднее значение порога определяется по 10–20 *сериям* измерений порогов на появление и исчезновение. Таким образом, общее число предъявлений, позволяющее с необходимой для практики точностью определить порог, составляет от 100 до 400 предъявлений.

Если в методе средней ошибки и методе минимальных изменений величина стимула непрерывно изменяется для получения порогового значения, то особенностью *метода постоянных стимулов* является то, что нем используется набор стимулов, значения которых отличаются между собой на дискретные величины, не меняются в процессе эксперимента (*постоянные стимулы*), но предъявляются наблюдателю в случайном порядке.

Совокупность постоянных значений стимулов в этом методе определяется на основе предварительного эксперимента, проведенного, например методом минимальных изменений, который существенно менее трудоемок и состоит из значений стимула как выше, так и ниже его ожидаемого порогового значения. В ходе эксперимента наблюдатель, в зависимости от инструкции, дает ответы о том, что он видит в поле зрения. По полученным результатам рассчитываются рассмотренные в разд. 9.1 вероятности обнаружения и ложных тревог ($P_{об}^3, P_{лт}^3$) для каждого стимула в наборе. Затем на основании выбранной модели пороговой чувствительности в зависимости от величины стимула рассчитывается $P_{об}$ и определяется пороговое значение стимула. Для определения ложных тревог среди набора предъявляемых стимулов обязательно должны присутствовать стимулы, совпадающие со стандартным (*пустые пробы*).

Пример ответов, которые может давать наблюдатель при решении задачи обнаружения отличия характеристик объекта от характеристик фона (*обнаружение объекта*), приведен ниже.

1. В поле зрения обнаружен объект, ответ – *есть объект*.
2. Объект в поле зрения не обнаружен, ответ – *нет объекта*.
3. В поле зрения обнаружен фон без объекта, ответ – *есть фон*.
4. Фон без объекта в поле зрения не обнаружен, ответ – *нет фона*.
5. Непонятно, что находится в поле зрения, ответ – *непонятно, что это*.

Для уменьшения дисперсии ответов наблюдателей и сокращения времени на проведение эксперимента наблюдателю часто дается инструкция исключить часть возможных ответов. Например, в рассмотренном случае обнаружения объекта вместо пяти возможных вариантов ответов допускается давать только два: «объект» или «фон» он увидел. Методика с такой инструкцией называется *принудительным выбором*. Применительно к задаче обнаружения такая методика вынуждает наблюдателя прибегать к процедуре случайного угадывания.

Так как число предъявлений стимулов N конечно, то оценка вероятности событий $V = \frac{n}{N}$ (см. гл. 2) не будет равна вероятности обнаружения стимула $P_{о6}$, поскольку это равенство будет иметь место лишь при бесконечно большом числе предъявлений. Для построения зависимости вероятности $P_{о6}$ от значения стимула (при измерении порога яркости стимулом будет яркость L) необходимо определить доверительные интервалы, в пределах которых должна пройти искомая зависимость. Как показали многочисленные исследования зрительных порогов, характер зависимости вероятности обнаружения от стимула можно достаточно хорошо аппроксимировать функцией нормального распределения (2.86):

$$f(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} \exp \left[-\frac{(L - \bar{L}_n)^2}{2\sigma_L^2} \right]. \quad (9.14)$$

Тогда $P_{о6}$ определится выражением:

$$P_{о6} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} \int_{-\infty}^L \exp \left[-\frac{(t - \bar{L}_n)^2}{2\sigma_L^2} \right] dt = \Phi(y), \quad (9.15)$$

где $y = \frac{L - \bar{L}_n}{\sigma_L}$,

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt - \text{интеграл вероятности.} \quad (9.16)$$

Поскольку сама оценка вероятности V случайна и подчиняется при больших N нормальному закону распределения, то *нижняя и верхняя границы доверительного интервала*, в пределах которого находится полученная оценка вероятности, зависит от *доверительной вероятности*. Связь доверительного интервала и доверительной вероятности можно пояснить примером: если мы провели m измерений и определили доверительный интервал для измеренного события с доверительной вероятностью P_d , то $m \cdot P_d$ измеренных значений попадут в пределы доверительного интервала, а $m \cdot (1 - P_d)$ выйдут за его пределы.

Таким образом, для одних и тех же измерений с ростом доверительной вероятности доверительные интервалы возрастают.

С вероятностью P_d выполняется соотношение:

$$(V - P)^2 \leq \frac{g^2}{N} P(1 - P), \quad (9.17)$$

где V – оценка вероятности события P , $g = \Phi^{-1}(P_d)$; $\Phi^{-1}(P)$ – функция обратная интегралу вероятности. Значения g для типовых значений P_d приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

**Зависимость аргумента интеграла вероятности (g)
от величины вероятности (P_d)**

P_d	0,85	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
g	1,036	1,282	1,645	2,326	2,575	3,09

Решая квадратное уравнение (9.17), получаем верхнее и нижнее значения доверительных интервалов для V :

$$P_{1,2} = \frac{NP + \frac{g^2}{2} \pm g\sqrt{P(1-P)N + \frac{g^2}{4}}}{N + g^2}. \quad (9.18)$$

На рисунках 9.3 и 9.4 представлены зависимости доверительных интервалов от числа испытаний N для различных значений доверительной вероятности. Как показывают расчеты, наибольшая разность между P_1 и P_2 наблюдается для вероятности 0,5 и она наиболее сильно изменяется в диапазоне $N < 100$. Следует отметить, что в пороговых условиях ($P = 0,5$) доверительные интервалы симметричны, а при приближении искомой вероятности к 1 или 0 симметрия нарушается (рис. 9.4), так как вероятность не может быть меньше нуля и больше единицы.

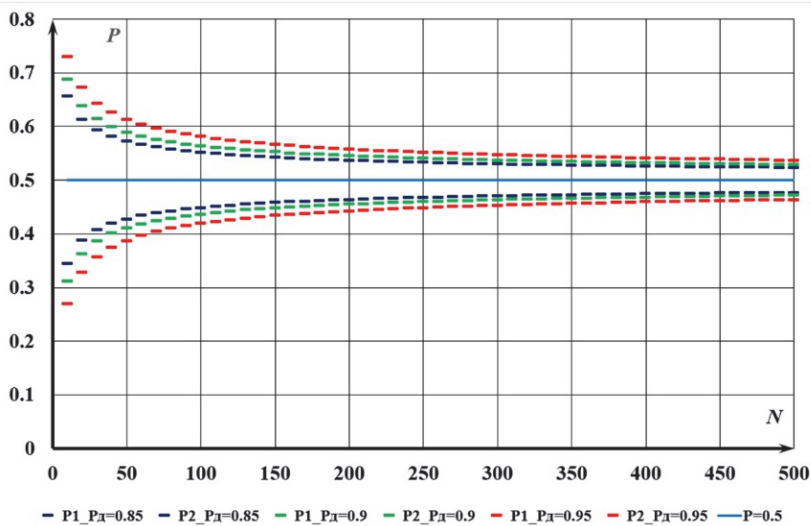


Рис. 9.3. Зависимости доверительных интервалов от числа предъявлений стимула для разных доверительных вероятностей и вероятности обнаружения стимула 0,5

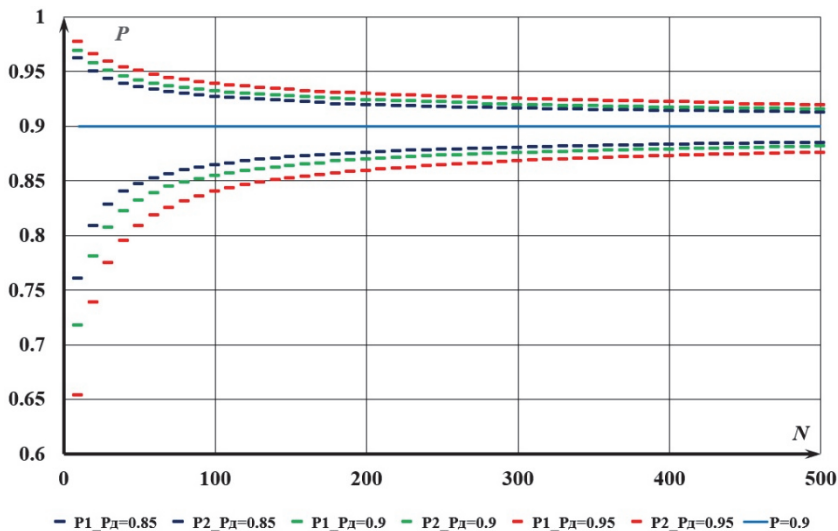


Рис. 9.4. Зависимости доверительных интервалов от числа предъявлений стимула для разных доверительных вероятностей и вероятности обнаружения стимула 0,9

9.4. Статистический подход к обнаружению сигналов. Структурная схема статистической модели зрительной системы

Применение теории статистических решений (ТСР) к зрительному обнаружению сигналов впервые было описано в работе Светса Дж. с соавторами.

При статистическом подходе используется функция отношения правдоподобия Λ . Если величина сенсорного отклика равна x , то отношение правдоподобия Λ записывается в виде:

$$\Lambda = \frac{f_{sn}(x)}{f_n(x)}, \quad (9.19)$$

где $f_{sn}(x)$ – закон распределения смеси сигнала и шума (sn);
 $f_n(x)$ – закон распределения шума (n).

Решение о наличии сигнала принимается в случае $\Lambda > \Lambda_n$. При таком подходе порог не связан непосредственно с чувствительностью наблюдателя, а может устанавливаться им произвольно, в процессе обучения.

Отношение сигнала к шуму или чувствительность наблюдателя характеризуется «обнаружимостью» dX :

$$dX = \frac{M[f_{sn}(x)] - M[f_n(x)]}{\sigma[f_n(x)]}, \quad (9.20)$$

где $M[f_{sn}(x)]$, $M[f_n(x)]$ и $\sigma[f_n(x)]$ – соответственно математические ожидания смеси сигнала с шумом, самого шума и СКО законов распределения.

Теория статистических решений рассмотрена только для одномерного случая. Сводя к нему многомерную задачу зрительного обнаружения, авторы считают, что в качестве реакции следует брать сумму всех ответов рецепторов. Слабая зависимость Λ от углового размера фона показывает, что данное утверждение неверно даже для случая наблюдения равнояркого объекта на равномерном фоне. Кроме того, одномерное представление не позволяет объяснить влияние формы объекта, размытия границ, неоднородностей фона на характеристики обнаружения объектов наблюдателем.

Дальнейшее развитие статистического подхода к ЗС связано с одним из важных выводов ТСП о существовании оптимального приемника излучения. Оказывается, среди всех алгоритмов выделения сигналов на фоне мешающих шумов есть только один алгоритм, лучше которого никакой другой алгоритм не может решить задачу обнаружения объектов на фоне шумов. Такой алгоритм получил название алгоритма «оптимального приемника излучения», а для анализа двумерных полей яркости – «оптимального приемника изображения» или просто алгоритм «оптимального приемника». Обоснованием применения алгоритма оптимального приемника к ЗС является то, что в процессе эволюции плотояд-

ные, обладающие менее совершенным зрением, должны были умереть от голода при конкуренции с более совершенными, а аналогичные травоядные съедались в первую очередь. И те и другие не успевали давать потомство и не участвовали в последующем естественном отборе.

Существуют различные математические методы описания данного алгоритма. Наиболее наглядный способ его описания основан на функции отношения правдоподобия, которую впервые использовал Светс. При этом вовсе не предполагается, что где-то в мозгу человека происходит вычисление именно этой функции. Считается, что за счет неизвестных пока нервных связей, мозг человека реализует алгоритм, близкий к алгоритму оптимального приемника. Функция отношения правдоподобия – это только удобный способ математического описания этого алгоритма.

Структурная схема модели ЗС отражает самые общие знания о строении глаза и базируется на схеме оптимального приемника изображения (рис. 9.5). Сетчатка глаза представлена в виде мозаики из n независимых ПИ. При этом под независимыми приемками понимаются либо отдельные рецепторы, либо рецептивные поля – группы рецепторов, подключенных через промежуточные нейроны к одному волокну зрительного нерва. Совокупность случайных сигналов мозаики (μ_i) поступает на устройство анализа (УА), содержащее в памяти априорную информацию о фоне и объекте. УА вычисляет *одномерную* функцию отношения правдоподобия Λ , которая равна отношению вероятности возникновения совокупности μ_i в опыте по обнаружению (случайной реализации Y) при условии наличия объекта ($P[Y/S]$) к вероятности возникновения *той же реализации* Y при условии его отсутствия ($P[Y/0]$).

$$\Lambda = \frac{p P[Y/S]}{q P[Y/0]}, \quad (9.21)$$

где p, q – априорные вероятности наличия и отсутствия объекта, $p + q = 1$.

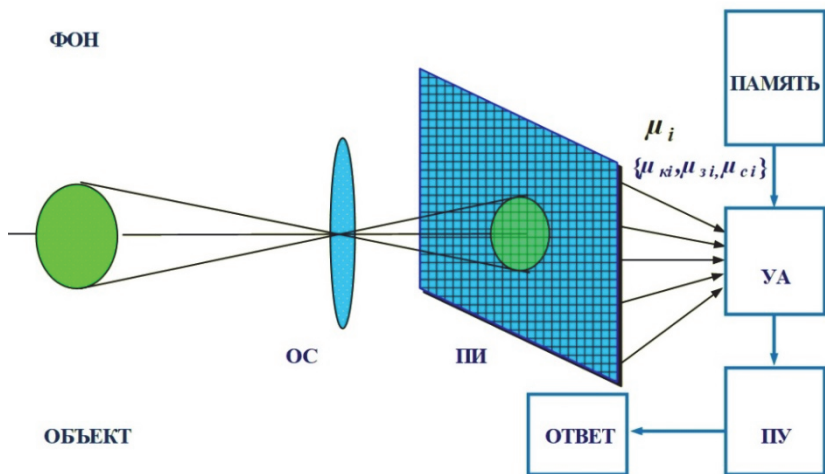


Рис. 9.5. Структурная схема оптимального приемника изображения

По сути, отношение правдоподобия на вероятностном языке показывает на что больше похож видимый человеком образ (совокупность значений μ_i) – на изображение фона с объектом ($\Lambda \geq 1$), или на изображение фона без объекта ($\Lambda < 1$).

Решение о наличии объекта в поле зрения принимается в соответствии с решающим правилом:

$$\Lambda \geq \Lambda_{п.} \quad (9.22)$$

Из теории статистических решений известно, что работа по решающему правилу (9.22) позволяет реализовать любой критерий принятия решения. При этом различные критерии характеризуются лишь различными численными значениями $\Lambda_{п.}$ При разработке модели ЗС важным является не конкретное выражение для $\Lambda_{п.}$ через параметры алгоритма обработки сигналов (поскольку этот алгоритм для наблюдателя в настоящее время не известен), а тот факт, что каким бы ни был этот алгоритм, в модели зрительной системы он будет характеризоваться конкретным численным значением $\Lambda_{п.}$ Таким образом, если взять в качестве рабочей гипотезу о постоянстве критерия принятия наблюдателем решения о наличии объекта при решении определенного круга задач (обнаружение или опознавание), то, определив значение $\Lambda_{п.}$ один раз

для простейших экспериментальных ситуаций, можно использовать модель зрительной системы с этим численным значением Λ_{Π} для всех задач, где оно остается постоянным.

Хотя математическая модель ЗС базируется на теории оптимального приемника изображения, структурная схема которого представлена на рис. 9.5, она не совпадает с ней. Получение выводов для выходных характеристик оптимального приемника изображения является необходимой, но недостаточной задачей. Отличие модели ЗС от оптимального приемника изображения заключается в следующем.

1. Чувствительность рецепторов сетчатки реального глаза непостоянна по полю зрения и зависит от яркости адаптации. При удалении от оси зрения и изменении яркости адаптации она изменяется весьма сложным образом.

2. Оптимальный приемник изображения остается оптимальным при любой величине Λ_{Π} , но описывать реакцию наблюдателя он будет только при одном единственном ее значении, которое необходимо определить.

Для математического описания модели ЗС необходимо, прежде всего, определить закон распределения выходных сигналов рецепторов.

9.5. Расчет вероятности обнаружения объекта

Поскольку процесс преобразования излучения в сетчатке глаза случаен, то его можно характеризовать эффективным коэффициентом преобразования (η), т.е. отношением математического ожидания частоты импульсов тока действия к фотонному потоку. Учитывая, что квантовый выход зрительного пигмента не превышает 20%, а для образования одного импульса тока действия необходим распад 5–7 молекул светочувствительного вещества, можно считать, что во всем диапазоне работы зрительной системы величина η много меньше единицы. При этих условиях можно аналитически определить закон распределения импульсов тока действия, т.е. выходного сигнала приемников излучения в модели зрительной системы.

Для случая $\eta \ll 1$, вероятностью возникновения за счет одного кванта излучения двух и более импульсов тока действия можно пренебречь. При этом условный закон распределения выходного сигнала любого приемника излучения, при условии, что на него упало m квантов ($P[\mu/m]$), определится биномиальным законом распределения (2.81). Распределение упавших на приемник излучения квантов подчиняется закону Пуассона (2.84). Если обозначить за x_0^1 математическое ожидание числа квантов, упавших за время интегрирования приемником излучения на его поверхность, то закон распределения выходного сигнала приемника излучения определится по формуле полной вероятности суммированием по всем возможным значениям m :

$$P[\mu] = \sum_{m=\mu}^{\infty} C_m^{\mu} \eta^{\mu} (1-\eta)^{m-\mu} \frac{(x_0^1)^m}{m!} \exp(-x_0^1). \quad (9.23)$$

Ряд (9.23) определяет функцию плотности вероятности закона распределения Пуассона с математическим ожиданием $x_0 = \eta x_0^1$:

$$P[\mu] = \frac{(\eta x_0^1)^{\mu}}{\mu!} \exp(-\eta x_0^1) = \frac{(x_0)^{\mu}}{\mu!} \exp(-x_0). \quad (9.24)$$

При малых уровнях яркости существенным для обнаружения может оказаться собственный шум приемников излучения. Наличие импульсов тока действия и, следовательно, зрительного ощущения в полной темноте обнаружено экспериментально и названо Гельмгольцем «собственным светом сетчатки глаза». В модели ЗС собственные шумы приемников излучения могут быть учтены достаточно просто, если предположить, что их закон распределения описывается функцией Пуассона. Поскольку процессы генерации сигналов рецепторов за счет теплового движения и за счет упавших квантов независимы, то результирующий закон распределения определится сверткой двух законов распределения Пуассона:

$$P[\mu] = \sum_{y=0}^{y=\mu} \frac{(x_{ш})^y}{y!} \exp(-x_{ш}) \frac{(x_0)^{\mu-y}}{(\mu-y)!} \exp(-x_0), \quad (9.25)$$

где $x_{ш}$ – математическое ожидание шумового сигнала приемника излучения.

Закон распределения Пуассона относится к устойчивым законам распределения, поэтому ряд (9.25) приводится к виду:

$$P[\mu] = \frac{(x_o + x_{\text{ш}})^\mu}{\mu!} \exp(-x_o + x_{\text{ш}}). \quad (9.26)$$

Если величина математического ожидания в законе распределения Пуассона (т.е. $x_o + x_{\text{ш}}$) больше 6, аппроксимация его нормальным законом распределения дает интегральную погрешность в диапазоне вероятностей 0,1–0,9, не превышающую единиц процентов. С ростом математического ожидания эта погрешность стремится к нулю по центральной предельной теореме.

Воспользовавшись нормальной аппроксимацией в выражении (9.26), получим:

$$P[\mu] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (x_o + x_{\text{ш}})} \exp\left[-\frac{(\mu - (x_o + x_{\text{ш}}))^2}{2(x_o + x_{\text{ш}})}\right]. \quad (9.27)$$

Учитывая выражение (9.27) и независимость приемников излучения модели ЗС, получаем выражения для условных вероятностей, определяющих значение функции отношения правдоподобия (9.21) для случая обнаружения объектов:

$$P[Y / S] = \prod_{i=1}^N \frac{(x_{oi} + x_{\text{ш}i})^{\mu_i}}{\mu_i!} \exp(-(x_{oi} + x_{\text{ш}i})). \quad (9.28)$$

$$P[Y / 0] = \prod_{i=1}^N \frac{(x_{\phi i} + x_{\text{ш}i})^{\mu_i}}{\mu_i!} \exp(-(x_{\phi i} + x_{\text{ш}i})), \quad (9.29)$$

где N – число приемников в мозаике; x_{oi} , $x_{\phi i}$ – математические ожидания выходных сигналов приемников с номером i , при условии, что в поле зрения наблюдателя находится объект, или фон.

После логарифмирования (9.21), с учетом (9.28) и (9.29), получаем:

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^N \mu_i \ln \left[\frac{x_{oi} + x_{\text{ш}i}}{x_{\phi i} + x_{\text{ш}i}} \right] - \sum_{i=1}^N (x_{oi} - x_{\phi i}). \quad (9.30)$$

Поскольку закон распределения μ_i можно аппроксимировать функцией нормальной плотности, которую не изменяют линейные преобразования выражения (9.30), то закон распределения $\ln\Lambda$ подчиняется нормальному закону распределения.

$$P[\ln \Lambda] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Lambda^2}} \exp\left[-\frac{(\ln \Lambda - m_\Lambda)^2}{2\sigma_\Lambda^2}\right]. \quad (9.31)$$

Согласно теории статистических решений, вероятность обнаружения объекта определяется вероятностью выполнения условия (9.22) при наличии объекта в поле зрения, поэтому m_Λ , σ_Λ – условные математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) $\ln\Lambda$, вычисленные при условии наличия объекта в поле зрения наблюдателя. При этом вероятность обнаружения объекта определится выражением:

$$P_{об} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Lambda^2}} \int_{\ln \Lambda_n}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z - m_\Lambda)^2}{2\sigma_\Lambda^2}\right] dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt, \quad (9.32)$$

где

$$y = \frac{m_\Lambda - \ln(\Lambda_n)}{\sigma_\Lambda}. \quad (9.33)$$

Учитывая линейность операций вычисления математического ожидания и суммирования, из (9.30) следует выражение:

$$\begin{aligned} m_\Lambda &= \sum_{i=1}^N M[\mu_i] \ln \left[\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right] - \sum_{i=1}^N (x_{oi} - x_{\phi i}) = \\ &= \sum_{i=1}^N (x_{oi} + x_{wi}) \ln \left[\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right] - \sum_{i=1}^N (x_{oi} - x_{\phi i}). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Дисперсия $\ln\Lambda$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} \sigma_\Lambda^2 &= M\left[(\ln \Lambda - m_\Lambda)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - (x_{oi} + x_{wi})) \ln \left(\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right)\right)^2\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M\left[(\mu_i - x_{oi} - x_{wi})(\mu_j - x_{oj} - x_{wj})\right] \ln \left(\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right) \ln \left(\frac{x_{oj} + x_{wj}}{x_{\phi j} + x_{wj}} \right). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Для независимых приемников излучения коэффициенты корреляции $M[(\mu_i - x_{oi} - x_{wi})(\mu_j - x_{oj} - x_{wj})]$ равны нулю для всех $i \neq j$, поэтому двойная сумма преобразуется в однократную:

$$\sigma_{\Lambda}^2 = \sum_{i=1}^N M [(\mu_i - x_{oi} - x_{wi})^2] \ln^2 \left(\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right). \quad (9.36)$$

Для закона распределения Пуассона, которому подчиняется сигнал на выходе приемников излучения, дисперсия равна математическому ожиданию, поэтому:

$$\sigma_{\Lambda}^2 = \sum_{i=1}^N (x_{oi} + x_{wi}) \ln^2 \left(\frac{x_{oi} + x_{wi}}{x_{\phi i} + x_{wi}} \right). \quad (9.37)$$

Для яркостей фона больших 10^{-3} кд/м² собственным шумом рецепторов в выражениях (9.34), (9.37) можно пренебречь. При большом значении N вести расчеты по полученным выражениям неудобно, поэтому можно ввести вместо реакций отдельных рецепторов плотности распределения их реакций в виде:

$$x(\eta, \theta) = \frac{x_i}{\Delta\eta\Delta\theta}, \quad (9.38)$$

где η, θ – угловые координаты пространства, визируемого приемником с номером i ; $\Delta\eta\Delta\theta$ – его угловая площадь.

Тогда суммы (9.34), (9.37) станут интегральными суммами и выражения для математического ожидания и дисперсии логарифма Λ примут вид:

$$m_{\Lambda} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ x_o(\eta, \theta) \cdot \ln \left[\frac{x_o(\eta, \theta)}{x_{\phi}(\eta, \theta)} \right] - x_o(\eta, \theta) + x_{\phi}(\eta, \theta) \right\} d\eta d\theta. \quad (9.39)$$

$$\sigma_{\Lambda}^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x_o(\eta, \theta) \cdot \ln^2 \left[\frac{x_o(\eta, \theta)}{x_{\phi}(\eta, \theta)} \right] d\eta d\theta. \quad (9.40)$$

где $x_o(\eta, \theta), x_{\phi}(\eta, \theta)$ – плотности математических ожиданий выходных сигналов приемников при условии наличия и отсутствия объекта в поле зрения наблюдателя.

Для расчета вероятности обнаружения объекта по выражению (9.32) необходимо численное значение $\ln(\Lambda_n)$, которое соответствует критерию, по которому работает зрительная система человека.

9.6. Определение величины порогового отношения правдоподобия и поправки на случайное угадывание

Рассмотрим выражение для аргумента интеграла вероятности (9.33) и определяющие его выражения (9.39) и (9.40) в случае обнаружения объекта с произвольным распределением яркости по его поверхности и по поверхности фона.

Ограничимся случаем малых контрастов объекта с фоном, когда в разложении функции $x(\eta, \theta)$ зависящей от яркости в ряд по степеням L достаточно учесть только линейные члены:

$$x_o(\eta, \theta) = \frac{dx(\eta, \theta)}{dL} \Delta L(\eta, \theta) + x_\phi. \quad (9.41)$$

Разлагая в (9.39), (9.40) логарифм в ряд и ограничившись (с учетом малого контраста) двумя членами разложения, получаем:

$$y = \frac{\iint_{\Omega} \frac{1}{2x(\eta, \theta)} \left[\frac{dx}{dL} \right]^2 \Delta L^2(\eta, \theta) d\eta d\theta - \ln \Lambda_n}{\sqrt{\iint_{\Omega} \frac{1}{x(\eta, \theta)} \left[\frac{dx}{dL} \right]^2 \Delta L^2(\eta, \theta) d\eta d\theta}}. \quad (9.42)$$

При наблюдении равнояркого объекта на равномерном фоне, $\Delta L(\eta, \theta) = KL_\phi$, где K – исходный яркостной контраст. Тогда выражение (9.42) примет вид:

$$y = \frac{\frac{K^2}{2} Z - \ln \Lambda_n}{\sqrt{K^2 Z}}, \quad (9.43)$$

где $Z = L^2 \iint_{\Omega} \frac{1}{x(\eta, \theta)} \left[\frac{dx}{dL} \right]^2 d\eta d\theta$.

Важно отметить, что при малых контрастах объекта с фоном величина Z зависит от яркости фона, функции $x(\eta, \theta)$, размеров и формы объекта, но не зависит от его контраста. Запишем выражение (9.43) в пороговых условиях ($y = 0$) и выразим Z через пороговый контраст (K_n) и Λ_n :

$$Z = \frac{2 \ln \Lambda_n}{K_n^2}. \quad (9.44)$$

Тогда выражение (9.43) преобразуется к виду:

$$y = \sqrt{\frac{\ln \Lambda_n}{2} \left| \left| \frac{K}{K_n} \right| - \left| \frac{K_n}{K} \right| \right|}. \quad (9.45)$$

Как следует из (9.45), для определения величины $\ln \Lambda_n$ достаточно использовать зависимость вероятности обнаружения объекта от величины отношения наблюдаемого контраста объекта с фоном к его пороговому значению. Уровень яркости фона и тип объекта при этом безразличны. Единственное ограничение на условия проведения эксперимента следует из предположения, сделанного при выводе выражения (9.45): контраст объекта и пороговый контраст должны быть много меньше единицы.

На рисунке 9.6 приведены результаты экспериментальных исследований вероятности обнаружения прямоугольников на равномерном фоне в зависимости от отношения исследуемого контраста к пороговому при разных яркостях фона и угловых размерах прямоугольников. Расчеты показали, что с доверительной вероятностью 0,95 значение $\ln(\Lambda_n)$ статистически неотличимо от 4,0. Сплошной кривой на рисунке показаны результаты расчета по выражениям (9.32) и (9.45) при значении $\ln(\Lambda_n) = 4,0$.

При определении пороговых значений сигналов по методу постоянных стимулов при наличии принудительного выбора наблюдатель вынужден прибегать к случайному угадыванию тогда, когда по сенсорному критерию он не может дать ответ «объ-

ект» или «фон», а дать ответ «не знаю, что это» он не может согласно инструкции. Для исключения случайно угаданных ответов, основанных на вне сенсорной информации, Блэкуэлл, исходя из теории высокого порога ЗС, получил поправку на случайный успех в виде (9.6). Статистический подход позволяет уточнить этот результат.

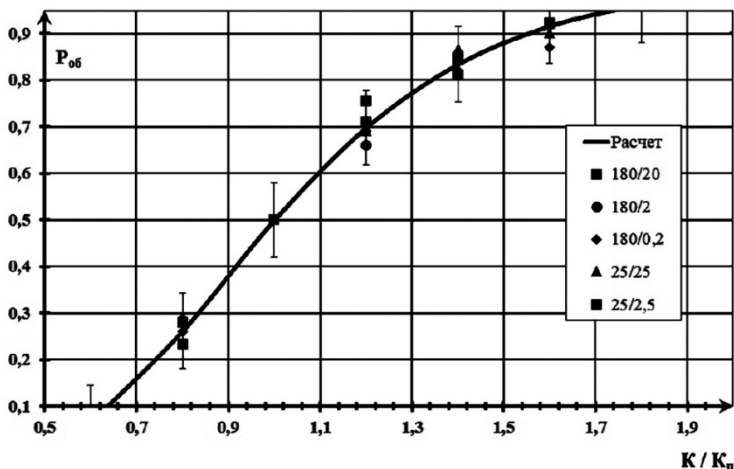


Рис. 9.6. Зависимость вероятности обнаружения прямоугольников с отношением сторон 1:5 от отношения их контраста (K) к пороговому контрасту (K_n)
(обозначения: угловой размер большей стороны в угловых минутах / яркость фона в кд/м²)

Согласно статистической модели, в отсутствие принудительного выбора наблюдатель, работающий по алгоритму оптимального приемника с фиксированным критерием принятия решения, может дать четыре варианта ответов в восьми возможных случаях.

При условии *наличия объекта в поле зрения наблюдателя*:

- 1) $\Lambda \geq \Lambda_n$ – правильное обнаружение объекта, ответ – *есть объект*;
- 2) $\Lambda < \Lambda_n$ – пропуск объекта, ответ – *нет объекта*;

3) $\Lambda_1 = \frac{P[Y/0]}{P[Y/S]} \geq \Lambda_n$ – ложная тревога по фону, ответ –

есть фон;

4) $\Lambda_1 < \Lambda_n$ – правильная констатация отсутствия фона, ответ – *нет фона;*

5) $\Lambda \geq \Lambda_n$ – ложная тревога, ответ – *есть объект;*

6) $\Lambda < \Lambda_n$ – правильная констатация отсутствия объекта, ответ – *нет объекта;*

7) $\Lambda_1 \geq \Lambda_n$ – правильное обнаружение фона, ответ – *есть фон;*

8) $\Lambda_1 < \Lambda_n$ – пропуск фона, ответ – *нет фона.*

Условия (5–8) возникают, когда в поле зрения наблюдателя объект отсутствует, т.е. находится только фон:

При принудительном выборе из четырех возможных вариантов ответов у наблюдателя остаются только два – объект или фон находятся в поле его зрения. Для того, чтобы по установившемуся критерию (Λ_n) наблюдатель смог дать ответ *есть объект*, необходимо, чтобы одновременно выполнялись условия 1 и 4 в случае наличия объекта в поле зрения, а 5, 8 – при его отсутствии.

Эти условия непротиворечивы, поскольку $\Lambda_1 = \frac{1}{\Lambda}$. Действительно, если выполняется условие 1, т.е. $\Lambda \geq \Lambda_n$, то при $\Lambda_n > 1$ всегда выполняется условие 4, так как из 1 следует, что $\Lambda_1 = \frac{1}{\Lambda} < \Lambda_n$. Аналогично и с условиями 5, 8.

Для того, чтобы по выбранному критерию можно было дать ответ – *есть фон*, необходимо одновременное выполнение условий 2, 3 при условии наличия объекта в поле зрения и условий 6, 7 при наличии фона. Легко видеть, что и эти условия непротиворечивы в области $\Lambda_1 \geq \Lambda_n$ или $\Lambda \leq \frac{1}{\Lambda_n}$. Однако, эти условия охватывают лишь часть всех возможных значений Λ . Остается область значений, определяемая неравенством:

$$\frac{1}{\Lambda_n} \leq \Lambda \leq \Lambda_n. \quad (9.46)$$

В этой области наблюдатель *по выбранному критерию* не может отнести полученную реализацию ни к объекту, ни к фону. Если бы не было принудительного выбора, то наблюдатель дал бы ответ: *непонятно, что это*. Поскольку при принудительном выборе такой ответ не допускается, то, стремясь наилучшим образом решить задачу, наблюдатель вынужден прибегать к случайному угадыванию.

При проведении экспериментов наблюдателю априорно неизвестно, находится ли объект в его поле зрения, поэтому вероятность случайного угадывания наблюдателем предъявления объекта определится выражением:

$$P_{\text{cy}} = p_1 P[\Lambda_n^{-1} \leq \Lambda \leq \Lambda_n / S], \quad (9.47)$$

где $P[./S]$ – вероятность выполнения условия (.) при условии предъявления объекта (вероятность попадания в зону неопределенности).

С учетом случайного угадывания вероятность обнаружения объекта, полученная в эксперименте, определится выражением:

$$P_{\text{об}}^2 = P_{\text{об}} + P_{\text{cy}} = P[\Lambda \geq \Lambda_n / S] + p_1 P[\Lambda_n^{-1} \leq \Lambda \leq \Lambda_n / S]. \quad (9.48)$$

Величина $P_{\text{об}}$ рассчитывается по выражению (9.32).

Поскольку в пороговых условиях ($P_{\text{об}} = 0,5$) аргумент интеграла вероятности, определяемый выражением (9.33) равен нулю, то $m_\Lambda = \ln(\Lambda_n)$.

Это позволяет определить вероятность случайного угадывания в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{\text{cy}} &= p_1 \left[P[\Lambda \leq \Lambda_n / S] - P[\Lambda \leq \Lambda_n^{-1} / S] \right] = \\ &= p_1 \left[1 - P_{\text{об}} - \Phi \left(-\frac{2 \ln \Lambda_n}{\sqrt{2 \ln \Lambda_n}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Поскольку величина $\ln(\Lambda_n)$, полученная ранее, равна четырем, то значением интеграла вероятности

$$\left(\Phi \left[-\frac{2 \ln \Lambda_n}{\sqrt{2 \ln \Lambda_n}} \right] = \Phi \left[-\sqrt{8} \right] \approx 0,00235 \right)$$

в выражении (9.44) можно пренебречь по сравнению с $1 - P_{\text{оф}}$. Тогда:

$$P_{\text{cy}} = p_1(1 - P_{\text{оф}}). \quad (9.50)$$

После подстановки полученного выражения в (9.48) получаем выражение совпадающее с промежуточной формулой Г. Блэуэлла (разд. 9.2). Это позволяет сделать вывод о том, что предположение Г. Блэуэлла о высоком пороге зрительной системы вполне правомерно. Ошибка появляется на этапе расчета вероятности ложных тревог, определяемых в эксперименте.

Ложные тревоги появляются, когда в поле зрения наблюдателя находится фон без объекта. Выражения для математического ожидания и дисперсии $\ln \Lambda$ в этом случае примут вид:

$$m_{\Lambda}^1 = \iint_{\Omega} \left[X_{\phi}(\eta, \theta) \ln \left(\frac{X_{\phi}(\eta, \theta)}{X_{\text{o}}(\eta, \theta)} \right) - X_{\phi}(\eta, \theta) + X_{\text{o}}(\eta, \theta) \right] d\eta d\theta, \quad (9.51)$$

$$\sigma_{\Lambda}^1 = \sqrt{\iint_{\Omega} X_{\phi}(\eta, \theta) \ln^2 \left(\frac{X_{\phi}(\eta, \theta)}{X_{\text{o}}(\eta, \theta)} \right) d\eta d\theta}. \quad (9.52)$$

Вероятность ложных тревог, получаемая в эксперименте, определяется выражением:

$$P_{\text{лт}}^{\text{з}} = P_{\text{лт}} + P_{\text{cy}}^1 = P[\Lambda \geq \Lambda_n / 0] + p_1 P[\Lambda_n^{-1} \leq \Lambda \leq \Lambda_n / 0], \quad (9.53)$$

где $P_{\text{лт}}$ – вероятность ложных тревог, возникающая за счет сенсорной информации (превышение Λ над Λ_n); P_{cy}^1 – вероятность ложных тревог, возникающая за счет случайного угадывания.

Нетрудно показать, что для малых контрастов объекта с фоном $m_{\Lambda}^1 = -m_{\Lambda}$; $\sigma_{\Lambda}^1 = \sqrt{2m_{\Lambda}}$. Тогда вероятность $P_{\text{лт}}$ определится выражением:

$$P_{\text{лт}} = \Phi \left(-\frac{m_{\Lambda} + \ln \Lambda_n}{\sqrt{2m_{\Lambda}}} \right). \quad (9.54)$$

В пороговых условиях величина m_{Λ} равна $\ln(\Lambda_n)$, а $P_{\text{лт}} \approx 0,00235$ и ею, в расчетном выражении (9.53) можно пренебречь. Тогда вероятность ложных тревог, определяемую в эксперименте, можно рассчитать с помощью выражения:

$$P_{\text{лт}}^3 = p_1 P[\Lambda_n^{-1} \leq \Lambda \leq \Lambda_n / 0] = p_1 \left[\Phi \left(-\frac{m_{\Lambda} - \ln \Lambda_n}{\sqrt{2m_{\Lambda}}} \right) - P_{\text{лт}} \right]. \quad (9.55)$$

Повторно пренебрегая малым значением $P_{\text{лт}}$ и учитывая, что $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, получим:

$$P_{\text{лт}}^3 = p_1 (1 - P_{\text{об}}). \quad (9.56)$$

С учетом (9.50), после подстановки (9.56) в (9.48), получаем новое выражение для «поправки на случайный успех»:

$$P_{\text{об}} = P_{\text{об}}^3 - P_{\text{лт}}^3. \quad (9.57)$$

Причина отличия полученного выражения от предложенной Г. Блэкуэллом поправки на «случайный успех» в том, что, сделав правильное предположение о высоком пороге зрительной системы, он ошибочно предположил, что при предъявлении фона наблюдатель всегда прибегает к случайному угадыванию. Анализ на основе статистической модели зрительной системы показал, что по установившемуся у наблюдателя критерию он с вероятностью, близкой к вероятности обнаружения объекта, правильно обнаруживает наличие фона без объекта. Только в оставшихся $(1 - P_{\text{об}})$ случаях он вынужден прибегать к случайному угадыванию. Расчеты с использованием уточненной поправки на «случайный успех» показывают, что рассчитанные значения пороговых контрастов получаются в среднем на 14% больше, чем при использовании поправки на «случайный успех» Г. Блэкуэлла, а это сравнимо с погрешностью визуальных экспериментов.

9.7. Пороговые характеристики зрительной системы, полученные из статистической модели

Статистическая модель ЗС позволяет установить и уточнить некоторые закономерности наблюдения в пороговых ($P_{об} = 0,5$) условиях.

Для модели одноканального приемника излучения на базе порогового отношения сигнала к шуму получено выражение, экспериментально подтвержденное при низких яркостях адаптации, когда рецепторы ЗС являются линейными приемниками:

$$K_n^2 L_\phi \omega = m^2, \quad (9.58)$$

где K_n – пороговый контраст объекта с фоном; L_ϕ – яркость равномерного фона; ω – телесный угол объекта; m – пороговое отношение сигнала к шуму.

Если в выражении (9.39) предположить линейную зависимость между реакцией приемников и визируемой им яркостью ($X_\phi = cL_\phi$), то, для равнорярого объекта и фона несложно получить:

$$m_\lambda = ((1 + K) \ln(1 + K) - K) X_\phi \omega, \quad (9.59)$$

где $K = \frac{X_o - X_\phi}{X_\phi}$ – контраст объекта с фоном.

Поскольку в пороговых условиях $m_\lambda = \ln \Lambda_n$, получим:

$$((1 + K_n) \ln(1 + K_n) - K_n) L_\phi \omega = \frac{\ln \Lambda_n}{c}. \quad (9.60)$$

Расчеты по выражениям (9.58) и (9.60) существенно отличаются в области больших пороговых контрастов. Отличия полученных выражений связано с тем, что закон распределения выходного сигналов приемника излучения Роуз и Луизов взяли нормальным, а не вывели его, исходя из закона распределения Пуассона, которому подчиняется статистика падающих квантов излучения. Если в выражении (9.60) рассмотреть область малых контрастов объектов (что соответствует большим яркостям фона), когда закон Пуассона хорошо аппроксимируется функцией нормальной плотности, то из (9.60) можно получить выражение

$K_n^2 L_\Phi \omega = \frac{2 \ln \Lambda_n}{c}$, которое полностью совпадает с выражением (9.58). На рисунке 9.7 приведены расчетные зависимости пороговых контрастов, полученных по расчетному выражению (9.58) – K_1 , и (9.60) – K_2 . Для пороговых контраста ~ 2 отличия достигают 20%.

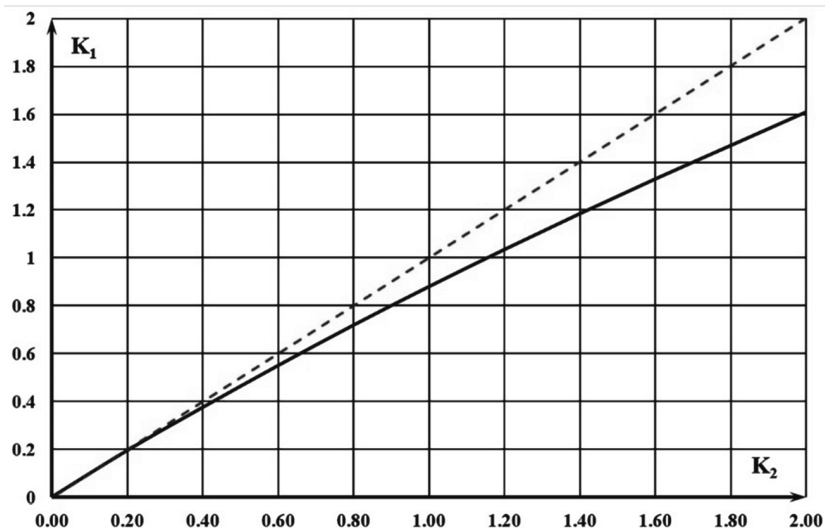


Рис. 9.7. Сопоставление расчетов пороговых контрастов по модели Роуза-Луизова (K_1) и статистической модели (K_2)

В пороговых условиях величина u в выражении (9.33) равна нулю. Для этих условий из (9.33) можно установить *связь положительных K_n^+ пороговых контрастов с величиной отрицательных пороговых контрастов K_n^-* при одной и той же яркости равномерного фона и угловом размере объекта. Записав аргумент интеграла вероятности для случаев положительного и отрицательного контрастов при $x_m \ll x_\Phi$ и выразив отрицательный контраст через его абсолютное значение $|K_n^-|$, получим:

$$(1 + K_n^+) \ln(1 + K_n^+) - K_n^+ = (1 - |K_n^-|) \ln(1 - |K_n^-|) + |K_n^-|. \quad (9.61)$$

Анализ выражения (9.56) показывает, что $|K_n^-|$ всегда меньше K_n^+ , что согласуется с экспериментальными результатами.

На рисунке 9.8 представлены расчетные зависимости, построенные на основе выражения (9.61).

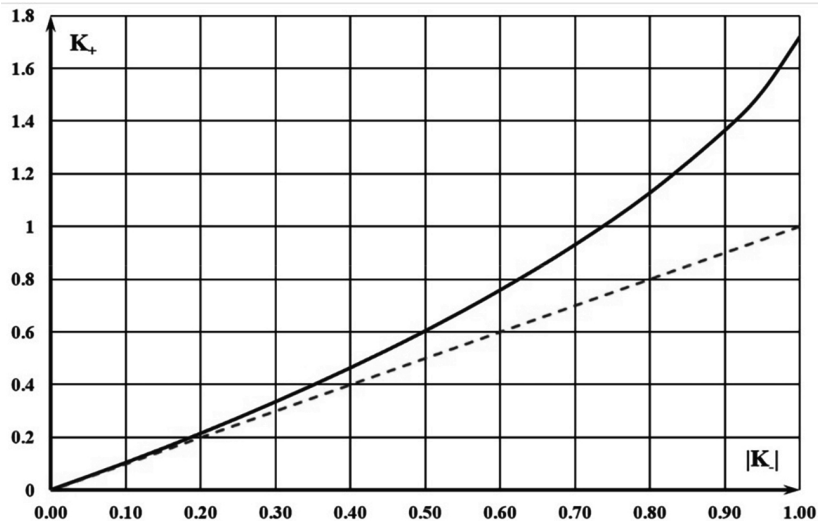


Рис. 9.8. Связь положительных (K_+) и эквивалентных по обнаружению абсолютных значений отрицательных пороговых контрастов ($|K_-|$)

Рассмотрим *предельный случай* максимального отрицательного контраста объекта, когда $K_n^- = -1$ или $|K_n^-| = 1$.

Преобразуем (9.61) к следующему виду:

$$(1 + K_n^+) \ln(1 + K_n^+) - K_n^+ = \ln \left[(1 - |K_n^-|)^{(1 - |K_n^-|)} \right] + |K_n^-|. \quad (9.62)$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} (x^x) = 1$, то при $|K_n^-| = 1$, $\ln \left[(1 - |K_n^-|)^{(1 - |K_n^-|)} \right] = 0$

и из (9.62) следует, что $\ln(1 + K_n^+) = 1$. Это означает, что объекту абсолютного контраста ($K_n^- = -1$) эквивалентен по обнаружению объект положительного величинной $\exp(1) - 1$, или приближенно 1,72.

Соотношения (9.59), (9.60) совместно позволяют установить связь пороговых контрастов на появление K_n^\uparrow и на исчезновение K_n^\downarrow объекта при проведении экспериментальных исследований по методу пределов или минимальных изменений.

При исчезновении объекта наблюдатель решает задачу *виден ли еще объект*. Математическое ожидание $\ln \Lambda$ для решения этой задачи описывается выражением (9.59), и пороговый контраст на исчезновение можно определить из выражения (9.60):

$$(1 + K_n^\downarrow) \ln(1 + K_n^\downarrow) - K_n^\downarrow = \frac{\ln \Lambda_n}{X_\phi}. \quad (9.63)$$

При определении порогового контраста на появление объекта наблюдатель вначале его не видит и визирует равномерный фон. При увеличении яркости объекта наблюдателю приходится решать задачу *виден ли еще равномерный фон*. С точки зрения теории статистических решений, эта задача соответствует задаче правильной констатации наличия фона, в то время как задача с исчезновением объекта эквивалентна задаче правильной констатации наличия объекта. Для случая правильной констатации наличия фона математическое ожидание $\ln \Lambda$ определяется выражением (9.51), тогда

$$K_n^\uparrow - \ln(1 + K_n^\uparrow) = \frac{\ln \Lambda_n}{X_\phi}. \quad (9.64)$$

Приравнивая левые части выражений (9.63) и (9.64), получаем аналитическую связь K_n^\uparrow и K_n^\downarrow :

$$(1 + K_n^\downarrow) \ln(1 + K_n^\downarrow) - K_n^\downarrow = K_n^\uparrow - \ln(1 + K_n^\uparrow). \quad (9.65)$$

Зависимость, рассчитанная по выражению (9.65), приведена на рис. 9.9.

При больших пороговых контрастах ($K_n > 2$) отличия в контрастах на появление и исчезновение объекта превышают 25%.

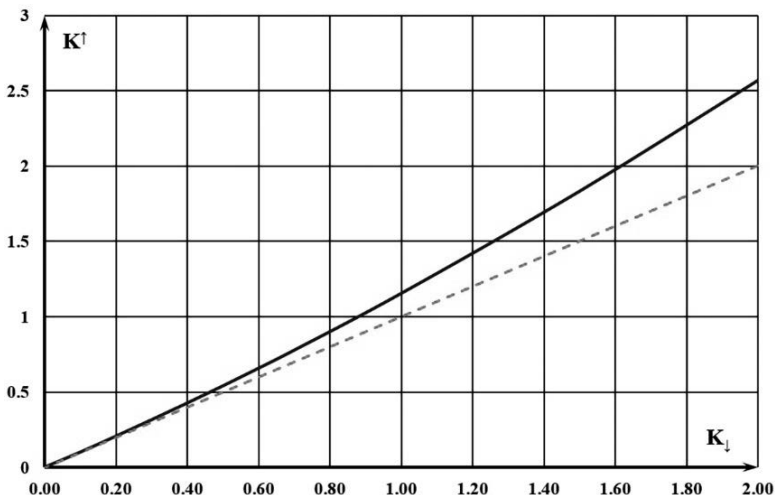


Рис. 9.9. Связь пороговых контрастов на появление (K_{\uparrow}) и на исчезновение (K_{\downarrow}) объектов

Статистическая модель ЗС позволяет получить выражение для предела *флуктуационного разрешения* глаза наблюдателя (δ),

полученное Луизовым А.В.: $\delta = \frac{C}{DK_n \sqrt{\theta L_{\phi}}}$, где C – некоторая по-

стоянная. Задача определения предельного углового разрешения описывается в статистической модели как задача опознавания двух распределений яркости. Одно из них представляет кольцо Ландольта на равномерном фоне, а другое – обычное кольцо без разрыва, характерного для кольца Ландольта, расположенное на том же фоне (рис. 9.10).

Если обозначить математические ожидания реакций приемников излучения на кольцо без разрыва через $x_{oi}^{(1)}$, а на кольцо Ландольта через $x_{oi}^{(2)}$, то выражение для расчета m_{Λ} в области яркостей, где $X_{\phi} \ll X_{\text{ш}}$, примет вид:

$$m_{\Lambda} = \sum_{i=1}^N x_{oi}^{(1)} \ln \left[\frac{x_{oi}^{(1)}}{x_{oi}^{(2)}} \right] - \sum_{i=1}^N (x_{oi}^{(1)} - x_{oi}^{(2)}). \quad (9.66)$$

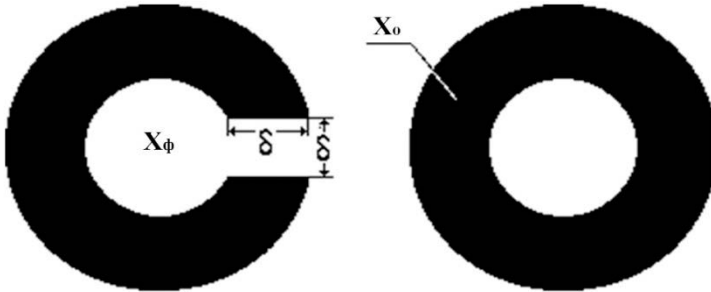


Рис. 9.10. Изображения опознаваемых объектов

Поскольку $x_{oi}^{(1)} \neq x_{oi}^{(2)}$ только в пределах разрыва кольца Ландольта, то определив, как и раньше, $K = (X_o - X_\phi)/X_\phi$, преобразуем (9.60) к виду:

$$[(1 + K_n \ln(1 + K_n) - K_n)]X_\phi - \ln(\Lambda_n) = 0. \quad (9.67)$$

Для расчета X_ϕ можно воспользоваться предложенным Луизовым выражением: $X_\phi = A\eta S\theta L_\phi \delta^2$, где A – число фотонов в люмен-секунде; η – квантовый выход сетчатки; S – площадь входного зрачка $[\pi D^2/4]$; θ – постоянная времени глаза; δ – величина разрыва в кольце Ландольта.

Выражая δ из (9.67), получаем

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{\ln \Lambda_n}{A\eta S\theta L_\phi [(1 + K_n) \ln(1 + K_n) - K_n]}} = \\ &= \frac{C_1}{D\sqrt{\theta L_\phi [(1 + K_n) \ln(1 + K_n) - K_n]}}, \end{aligned} \quad (9.68)$$

где $C_1 = 2\sqrt{\ln(\Lambda_n)/A\pi\eta}$.

При малых K_n , разложение $\ln(1 + K_n)$ в выражении (9.68) в ряд дает соотношение: $(1 + K_n)\ln(1 + K_n) - K_n = K_n^2/2$. При этом, из выражения (9.68) следует:

$$\delta = \frac{C_2}{D|K_n|\sqrt{\theta L_\phi}}. \quad (9.69)$$

Выражение (9.69) совпадает с выражением, полученным Луизовым. Как следует из приведенных выкладок, оно верно только для малых контрастов колец Ландольта с фоном. В общем случае более точные результаты дает расчет по выражению (9.68).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардин, К.В. Проблема порогов чувствительности и психофизические методы / К.В. Бардин. – М.: Наука, 1976. – 395 с.

В книге в систематизированном виде излагаются теории и методы первого из двух больших разделов, составляющих психофизику, именно – учения о порогах и измерении сенсорной чувствительности. Рассматриваются основные теоретические модели, на базе которых создавались соответствующие психофизические методы. Описываются и анализируются методы классической и современной психофизики: их процедура, способы регистрации и обработки данных, область применения, практика использования.

2. Джадд, Д. Цвет в науке и технике. / Д. Джадд, Г. Вышецкий. – М.: Мир, 1978 г. – 592 с.

Книга написана выдающимися специалистами в области цветоведения и выдержала за рубежом три издания, последнее из которых было существенно переработано и дополнено. Она охватывает широкий круг вопросов и проблем, связанных с цветовым зрением, измерениями цвета, цветовыми системами, цветовыми шкалами, цветопередачей источников света, цветовыми наименованиями, гармонией цветов, физикой и психофизикой окрашенных пленок.

3. Роуз, А. Зрение человека и электронное зрение / А. Роуз. – М.: Мир, 1977. – 148 с.

Книга охватывает чрезвычайно широкий круг проблем, связанных с системами отображения оптической информации, от зрительной системы человека, достигшей поразительного совершенства в ходе естественной эволюции, до многообразных фотографических, фотоэлектрических и электронных методов преобразования и усиления световых сигналов. Не заменив зрения, электронные системы позволили существенно расширить возможности восприятия, преобразования и хранения оптических изображений в разных областях спектра.

4. Шестов, Н.С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех / Н.С. Шестов. – М.: Советское радио. – 1967. – 348 с.

В книге на основе статистической теории обнаружения рассматриваются вопросы оптимального выделения сигналов на фоне помех, причем, в основном, имеется в виду случай оптических (световых и тепловых) сигналов.

Особое внимание уделено анализу систем с модуляцией лучистого потока и сканированием, а также способам осуществления многоканальных систем обнаружения. Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров и практических рекомендаций.

10. ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О ЦВЕТЕ

10.1. Основные понятия колориметрии

На основании спектрофотометрических экспериментов было установлено, что в сетчатке имеются три типа колбочек (рис. 10.1) с разными спектральными чувствительностями. На рисунке 10.2 представлена упрощенная схема преобразования информации в сетчатке по современным научным представлениям. На первом этапе кодирования в клетку Я поступают сигналы от всех трех типов колбочек, условно названных К, З и С. Эта клетка может быть названа «яркостной», так как благодаря ей в мозг поступает информация о яркости объекта или фона. Поэтому распределение реакции R от длины волны клетки Я соответствует $V(\lambda)$ – относительной спектральной световой эффективности монохроматического излучения стандартного фотометрического наблюдателя МКО 1931 г. На этом же этапе информация от К и З колбочек поступает в клетку Ж, которая сыграет еще свою роль на втором этапе преобразования, когда на одну, так называемую оппонентную клетку Ж-С поступают сигналы от Ж клетки и С колбочки, а на другую оппонентную К-З – от К и З колбочек. Когда в падающем на сетчатку световом потоке преобладает длинноволновая составляющая (желтая или красная часть света соответственно) реакция оппонентных клеток выражается повышением потенциала, если преобладает коротковолновая составляющая (синяя или зеленая соответственно) – уменьшением потенциала.

Для описания реакций разных приемников дневного зрения используют понятия эффективных потоков. Так эффективный поток для колбочек с максимумом спектральной чувствительности в длинноволновой части видимого спектра, условно называемых «красными», можно записать как:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{эк}} &= K^0 \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{k}(\lambda) d\lambda \\ \Phi_{\text{эз}} &= Z^0 \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \\ \Phi_{\text{эс}} &= C^0 \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{c}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (10.1)$$

где $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$ – функции сложения, тождественные спектральным чувствительностям «красных», «зеленых» и «синих» колбочек; K^0 , Z^0 , C^0 – единичные значения уровней возбуждения К, З, С колбочек (для каждого типа колбочек имеет место своя мера и, значит, своя эффективная система); $\Phi_{e\lambda}(\lambda)$ – спектральная плотность энергетического потока излучения.

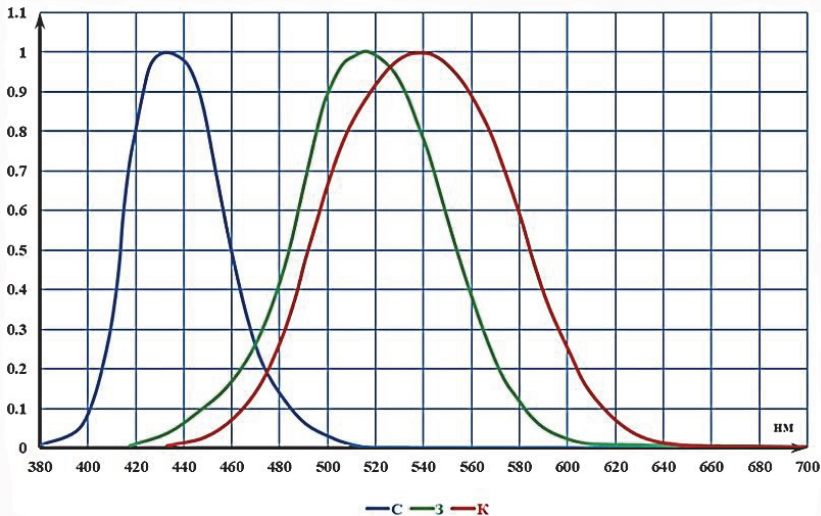


Рис. 10.1. Относительные спектральные чувствительности К, З и С колбочек

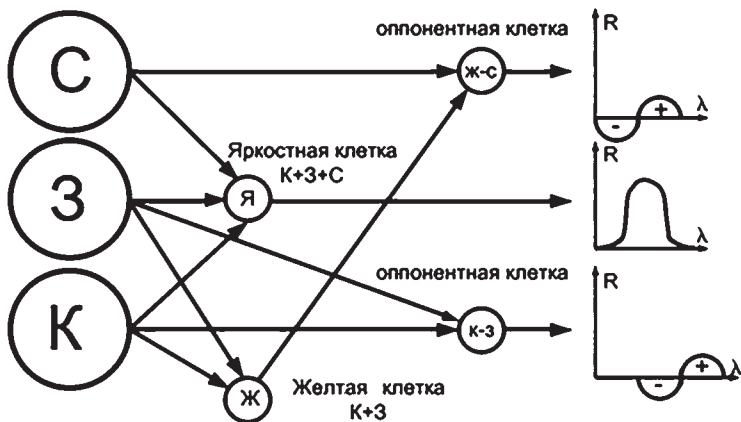


Рис. 10.2. Схема преобразования информации в сетчатке

Общий световой поток или яркость в колориметрии принято записывать суммированием трех световых величин, опуская индекс эффективного потока:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_v &= \Phi_k + \Phi_3 + \Phi_c \\ L_v &= L_k + L_3 + L_c \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Подробнее:

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \beta_k \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{k}(\lambda) d\lambda \\ L_3 &= \beta_3 \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \\ L_c &= \beta_c \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{c}(\lambda) d\lambda \\ L_v &= 683(L_k + L_3 + L_c) \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

$$L_v = 683 \left(\beta_k \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{k}(\lambda) d\lambda + \beta_3 \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda + \beta_c \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{c}(\lambda) d\lambda \right) \quad (10.4)$$

где $L_{e\lambda}(\lambda)$ – спектральная плотность энергетической яркости; $\beta_k, \beta_3, \beta_c$ – яркостные коэффициенты основных цветов.

Таким образом, для цветовых расчетов необходимы такие понятия, как координаты цвета и яркостный коэффициент. Координаты цвета К, З, С определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\Phi_k}{K^0} = \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{k}(\lambda) d\lambda \\ Z &= \frac{\Phi_3}{Z^0} = \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \\ C &= \frac{\Phi_c}{C^0} = \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{c}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

и характеризуют количество красной, зеленой и синей составляющих в произвольном цвете F .

Яркостный коэффициент β_F произвольного цвета F определяется как:

$$\beta_F = \frac{L_{vF}}{683\sigma}, \quad (10.6)$$

где $\sigma = K + Z + C$ – называется модулем цвета.

Для монохроматического энергетического потока излучения $\Phi_e(\lambda)$ выражения (10.5) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} K &= \Phi_e(\lambda)\bar{k}(\lambda) \\ Z &= \Phi_e(\lambda)\bar{z}(\lambda) \\ C &= \Phi_e(\lambda)\bar{c}(\lambda) \end{aligned} \right\}. \quad (10.7)$$

Выражение (10.7) показывает физическое содержание удельных координат цвета: координаты цвета монохроматического излучения мощностью 1 Вт совпадают с удельными координатами цвета.

Для характеристики цветности, как двухмерной величины, достаточно двух координат цветности, например, k и z :

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{K}{K+Z+C} \rightarrow k = \frac{K}{\sigma} \\ z &= \frac{Z}{K+Z+C} \rightarrow z = \frac{Z}{\sigma} \end{aligned} \right\}. \quad (10.8)$$

Третья координата, «с» определяется выражением

$$c = 1 - k - z. \quad (10.9)$$

Таким образом, цвет полностью определяется координатами цвета, например K, Z, C или координатами цветности например, k, z и яркостью L .

Учитывая известное фотометрическое соотношение, связывающее световые и энергетические величины (гл. 3) получим:

$$L_v = 683 \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda)V(\lambda)d\lambda. \quad (10.10)$$

из выражения (10.4) можно получить:

$$V(\lambda) = \beta_k \bar{k}(\lambda) + \beta_z \bar{z}(\lambda) + \beta_c \bar{c}(\lambda), \quad (10.11)$$

где $\beta_k, \beta_z, \beta_c$ – яркостные коэффициенты, а, по существу, весовые коэффициенты, связывающие колориметрию и фотометрию, т.е. относительную спектральную световую эффективность и спектральные чувствительности колбочек.

10.2. Законы Грассмана и цветовое пространство

На основании проведенных исследований Г. Грассман сформулировал важнейшие законы колориметрии. На рисунке 10.3 представлена схема, по которой любой цвет F в этих экспериментах уравнивался несколькими цветами (их количества изменялись ослабителями или регуляторами до тех пор, пока наблюдатели переставали замечать отличия цветов полей сравнения).

Схема выравнивания полей сравнения

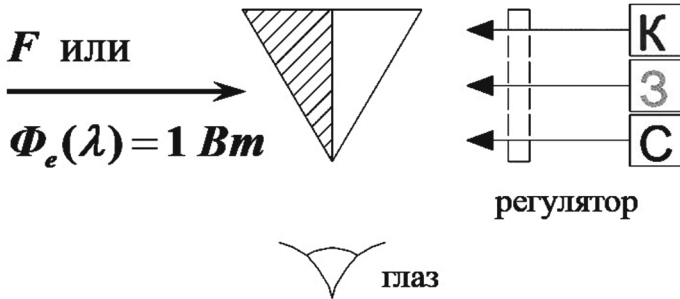


Рис. 10.3. Упрощенная схема выравнивания цветов двух полей сравнения

1-й закон Грассмана

Любой цвет может быть получен алгебраическим сложением в определенных количествах трех линейно независимых (каждый из них не может быть получен из двух других) основных цветов, например, K , Z , C :

$$F = \pm KK \pm ZZ \pm CC. \quad (10.12)$$

Чтобы вычесть цвет, его с плюсом нужно перенести в левую часть уравнения, что в эксперименте соответствует его добавлению к исследуемому цвету. Эту запись называют цветовым уравнением.

Поскольку любой 4-й цвет, добавленный к 3 основным цветам, выражается через них, то он является линейно зависимым.

2-й закон Грассмана

При непрерывном изменении спектрального состава любого излучения цвет меняется непрерывно.

При изменении $\Phi_{el}(\lambda)$ в соответствии с (10.5) будут изменяться и координаты цвета K, Z, C .

3-й закон Грассмана

Цвет смеси цветов зависит только от цветов, составляющих (компонентов) смеси и не зависит от спектрального состава излучения:

$$\left. \begin{aligned} K_{см} &= \sum_{i=1}^N K_i \\ Z_{см} &= \sum_{i=1}^N Z_i \\ C_{см} &= \sum_{i=1}^N C_i \end{aligned} \right\}, \quad (10.13)$$

где K_i, Z_i, C_i – координаты i -го цвета смеси из N цветов.

Следствие: существуют так называемые «метамерные цвета», имеющие разные спектральные распределения, но одинаковый цвет.

Цвета описываются в векторной форме. На рисунке 10.4: \mathbf{F} – вектор цвета, а его проекции на координатные оси основных цветов K, Z, C – координаты цвета K, Z, C .

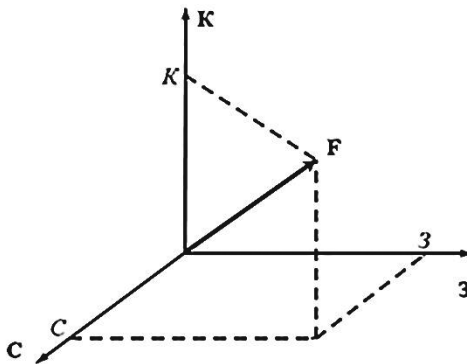


Рис. 10.4. Вектор цвета \mathbf{F} в цветовом пространстве КЗС

При постоянном σ_F уравнение (10.12) – это уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях K , Z , C отрезки K/σ_F , Z/σ_F , C/σ_F .

Отметим, что векторное цветовое пространство отличается от евклидового пространства. Если в евклидовом пространстве модуль вектора определяется как $F = \sqrt{K^2 + Z^2 + C^2}$, то в цветовом векторном пространстве модуль вектора цвета F обозначается σ_F и определяется выражением:

$$\sigma_F = K + Z + C . \quad (10.14)$$

На рисунке 10.5 представлен треугольник единичных цветов, построенный на основных цветах в цветовом пространстве. Каждой точке плоскости треугольника единичных цветов соответствует свой вектор. Если модуль этих векторов равен единице, то получается плоскость единичных цветов ($\sigma = 1$).

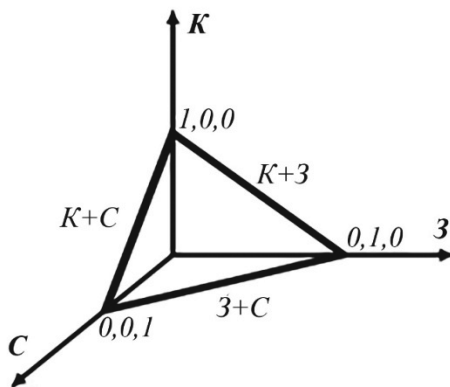


Рис. 10.5. Цветовое пространство, треугольник единичных цветов и стороны треугольника, как линии расположения цветов, полученных от суммы двух основных цветов

10.3. Международные цветовые системы RGB , XYZ , стандартные излучения и цветовая система $(KZC)_{\text{физ}}$

Международная цветовая система была предложена Д. Максвеллом в 1860 г. В дальнейшем Международная комиссия по освещению (МКО) подкорректировала его основные цвета и с

1931 г. они являются монохроматическими с длинами волн (в округленном виде): $\lambda_B = 436$ нм, $\lambda_G = 546$ нм, $\lambda_R = 700$ нм. Большое достоинство этой системы в том, что ее основные цвета не только реальные, но и достаточно легко реализуемы на практике. Первые два цвета – это мощные линии излучения разряда в парах ртути. Третий цвет может быть получен от лампы накаливания с помощью светофильтров или монохроматора. На рисунке 10.6 изображена диаграмма цветности цветовой системы RGB , представляющая собой проекцию плоскости единичных цветов на координатную плоскость $R-G$ цветового пространства. На рисунке 10.7 изображены функции сложения системы RGB , полученные в 20-х гг. XX в. усреднением результатов экспериментов, проведенных по схеме рис. 10.3, независимо друг от друга В. Райтом и И. Гилдом.

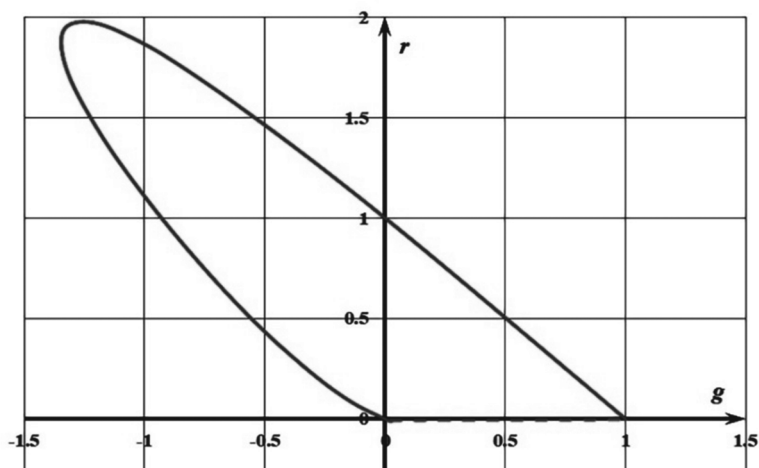


Рис. 10.6. Диаграмма цветности с основными цветами RGB , локусом – кривой монохроматических цветов и пунктирной линией пурпурных (смесь фиолетовых и красных) цветов

Важно подчеркнуть физический смысл ординат функций сложения (удельных координат цвета). На рисунке 10.7 можно увидеть, какое количество основных цветов R , G и B нужно сложить или вычесть, чтобы получить цвет монохроматического излучения с длиной волны λ и потоком излучения 1 Вт.

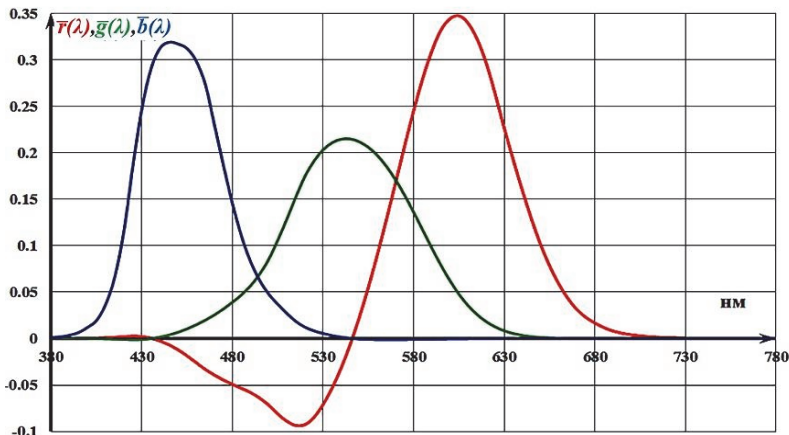


Рис. 10.7. Функции сложения системы RGB

Из выражения (10.7) следует определение удельных координат цвета в системе RGB:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}(\lambda) &= \frac{R(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)} \\ \bar{g}(\lambda) &= \frac{G(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)} \\ \bar{b}(\lambda) &= \frac{B(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Яркостные коэффициенты в системе RGB: $\beta_R = 1,00$; $\beta_G = 4,59$ и $\beta_B = 0,06$. Именно такие значения позволяют поместить цветность равноэнергетического белого излучения E в центр треугольника основных цветов. При таком расположении цветности равноэнергетического белого цвета, цветности других реальных цветов достаточно равномерно размещаются внутри треугольника и в целом на диаграмме цветности. Если бы яркостные коэффициенты были одинаковыми, область белых цветов была бы незначительной и непосредственно окруженной желтыми и оранжевыми цветами. Даже небольшая ошибка при измерении или в расчете координат цветности приводила бы к значительной неточности определения той или иной цветности по графику цветности.

Подчеркнем еще раз основные особенности системы RGB .

1. Основные цвета системы – цвета реальных монохроматических излучений.

2. Достаточно большое количество реальных цветов, расположенных за пределами треугольника основных цветов, получается с отрицательными координатами цвета.

3. Яркость – величина одномерная, а в системе RGB ее значение определяется всеми тремя координатами цвета:

$$L_v = 683(\beta_R R + \beta_G G + \beta_B B). \quad (10.16)$$

Из-за двух последних недостатков системы RGB МКО в 1931 г. одновременно с ней разработала и утвердила стандартную цветовую систему XYZ .

Модуль вектора цвета в системе RGB определяется как:

$$\sigma = R + G + B, \quad (10.17)$$

а яркостный коэффициент:

$$\beta = \frac{L_v}{683\sigma}. \quad (10.18)$$

Для единичных цветов яркость цветов этой плоскости L° определяется через координаты цветности:

$$L^0 = 683(\beta_R r + \beta_G g + \beta_B b). \quad (10.19)$$

Как следует из выражения (10.19), чтобы исключить третий недостаток системы RGB необходимо сделать два из трех яркостных коэффициента системы XYZ равными нулю. Для нахождения координат основных цветов системы XYZ , в системе RGB строится алихна – линия, которая в цветовом векторном пространстве получается при пересечении плоскости нулевой яркости и диаграммы цветности r, g (проекции плоскости единичных цветов системы RGB на плоскость $R-G$). Координаты двух из трех цветов системы XYZ необходимо расположить на алихне. Математически

задача сводится к решению системы уравнений, в которую входит уравнение единичной плоскости и уравнение плоскости нулевой яркости:

$$\left. \begin{aligned} r + g + b &= 1 \\ 683(\beta_R r + \beta_G g + \beta_B b) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10.20)$$

Решением этой системы уравнений является уравнение алихны:

$$g = -0,208r - 0,013b. \quad (10.21)$$

Для устранения второго недостатка системы RGB , в системе XYZ не должно быть отрицательных координат цвета реальных цветов, поэтому locus в этой системе должен находиться внутри координатного треугольника основных цветов. Это приводит к тому, что координаты основных цветов должны лежать в цветовом пространстве за пределом локуса, т.е. это должны быть нереальные цвета. Исходя из сказанного выше координаты основных цветов X и Z были выбраны на алихне, а координаты основного цвета Y – из условия максимального заполнения площади координатного треугольника основных цветов площадью локуса. В результате яркость цвета в системе XYZ определяется по аналогии с (10.16) только одной координатой цвета Y :

$$L_v = 683Y, \quad (10.22)$$

так как

$$\left. \begin{aligned} \beta_X &= 0 \\ \beta_Y &= 1 \\ \beta_Z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10.23)$$

С учетом этого, записав выражение (10.11) в системе XYZ , получим:

$$\bar{y}(\lambda) = V(\lambda), \quad (10.24)$$

где $\bar{y}(\lambda)$ – функция сложения цвета Y в системе XYZ .

Из курса векторного анализа следует, что при известных координатах основных цветов системы XYZ в координатной системе RGB можно определить матрицы перехода от координат цвета в системе RGB к их координатам цвета в системе XYZ и наоборот:

$$\begin{aligned} & (\bar{x}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \bar{z}(\lambda)) = \\ & = (\bar{r}(\lambda) \bar{g}(\lambda) \bar{b}(\lambda)) \cdot \begin{pmatrix} 2,768505 & 0,999935 & 0,000055 \\ 1,751491 & 4,589942 & 0,056629 \\ 1,130003 & 0,060123 & 5,593316 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{r}(\lambda) \bar{g}(\lambda) \bar{b}(\lambda)) = \\ & = (\bar{x}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \bar{z}(\lambda)) \cdot \begin{pmatrix} 0,418762 & -0,09117 & 0,000902 \\ -0,15887 & 0,252449 & -0,00251 \\ -0,0829 & 0,015708 & 0,178602 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Подстановка в выражение (10.25) экспериментально определенных удельных координат цвета системы RGB позволяет рассчитать удельные координаты цвета системы XYZ . Диаграмма цветности и графики функций сложения цвета системы XYZ приведены на рис. 10.8 и 10.9.

Аналогично выражению (10.5), расчет координат цвета в системе XYZ производится по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ Y &= \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ Z &= \int_{380}^{780} \Phi_{e\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\}. \quad (10.27)$$

Для того чтобы однозначно определить цвет, достаточно знать три координаты цвета или две координаты цветности и яркость (световой поток): 1) X, Y, Z ; 2) $L_v(\Phi_v), x, y$.

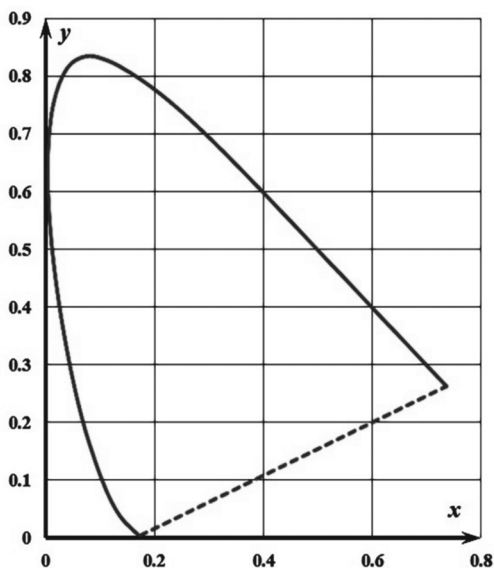


Рис. 10.8. Диаграмма цветности с основными цветами XYZ, локусом – кривой монохроматических цветов и пунктирной линией пурпурных (смесь фиолетовых и красных) цветов

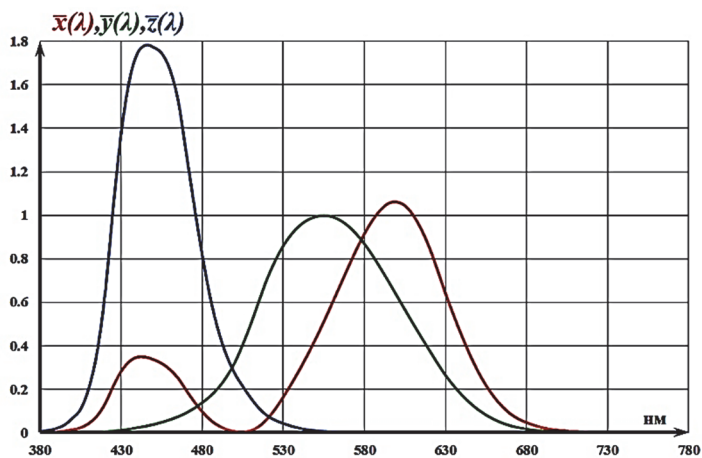


Рис. 10.9. Функции сложения системы XYZ

Иногда бывает удобнее вместо координат цветности x, y использовать параметры λ и p (это система $L\lambda p$ – модификация системы XYZ). В ней доминирующая длина волны λ – такая длина волны монохроматического излучения, при смешении которого со стандартным белым излучением, получается искомый цвет.

Чистота p цвета F определяется выражением:

$$p = \frac{L_v(\lambda)}{L_{vF}} = \frac{L_{v\lambda}}{L_{v\lambda} + L_{vB}}, \quad (10.28)$$

где $L_{v\lambda}$ – яркость монохроматического излучения с длиной волны λ , добавляя которую к яркости источника стандартного белого цвета (L_{vB}) получают цвет F .

Например, если доминирующая длина волны $\lambda = 530$ нм и $p = 0,8$ (80%), то это насыщенный зеленый цвет; а если $p = 0,2$ (20%), то это почти белый цвет, со слабым оттенком зеленого.

Чистоту цвета можно рассчитать и по координатам цветности:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{y_\lambda(y - y_\lambda)}{y(y_\lambda - y_B)} \\ p &= \frac{x_\lambda(x - x_\lambda)}{x(x_\lambda - x_B)} \end{aligned} \right\}, \quad (10.29)$$

где $x_\lambda, y_\lambda, x_B, y_B$ – координаты цветности монохроматического и белого излучений, обеспечивающих в смеси цветов заданную цветность излучения с координатами x, y .

Стандартные излучения (иллюминанты) МКО бывают нескольких типов:

- стандартное излучение типа *A*: газополная электрическая лампа накаливания с коррелированной цветовой температурой излучения $T_{\text{кц}} = 2856$ К. Воспроизводит условия искусственного освещения электрическими лампами накаливания;

- стандартное излучение типа *B*: излучение с коррелированной цветовой температурой $T_{\text{кц}} = 4874$ К. Воспроизводит условия прямого солнечного освещения;

- стандартное излучение типа *C*: излучение с коррелированной цветовой температурой $T_{\text{кц}} = 6774$ К. Воспроизводит условия освещения рассеянным дневным светом;

- стандартное излучение типа D_{65} : излучение с коррелированной цветовой температурой $T_{ки} = 6504$ К. Воспроизводит условия освещения усредненным дневным светом с достаточно большой долей излучения в ультрафиолетовой части спектра. Используется, например, для измерения цвета люминесцирующих образцов. Лучше всего этот тип реализуется излучением импульсной ксеноновой лампы.

Цветовая система КЗС в нашей стране называется физиологической по предложению С.О. Майзеля. Функции сложения в ней совпадают со спектральными чувствительностями К, З, С колбочек. В середине XX в. группа исследователей ВНИИМ им. Д.И. Менделеева под руководством Н.Д. Ньюберга и Е.Н. Юстовой провели экспериментальные и расчетные работы, которые позволили определить спектральные чувствительности и основные цвета системы (КЗС)_{физ.} Они воспользовались идеей Д. Максвелла, который еще в 1860 г. предположил, что полюс пучка прямых, определяющих геометрические места точек цветностей, неразличимых дихроматами, совпадает с одной из вершин координатного треугольника основных цветов колориметрической системы. При этом предполагалось, что причиной дихроматизма является полное отсутствие одного из цветоразличающих аппаратов (К или З или С колбочек), а у двух других, нормально работающих рецепторов, спектральные чувствительности точно такие же, как у людей с нормальным цветовым зрением. Многие известные специалисты взяли за основу исследований этот подход, но наиболее тщательные и достоверные, на наш взгляд, результаты получены Юстовой. Она организовала эксперименты таким образом, что дихроматы устанавливали колориметрические равенства при переменной доли участия цвета, не воспринимаемого этими людьми.

Результаты этих экспериментов, а также расчетов и предположений Ньюберга представлены на рис. 10.10. На этом же рисунке помещены результаты спектрофотометрических измерений коэффициента поглощения пигментов отдельных колбочек приматов и человека, выполненных П. Брауном и Г. Уолдом. Там же приведены результаты прямых измерений спектральной чувстви-

тельности колбочек глаза наблюдателя при искусственной дихроматии, которые провел тот же Уолд. Кривые, полученные разными методами и авторами, достаточно хорошо для таких сложных исследований согласуются между собой.

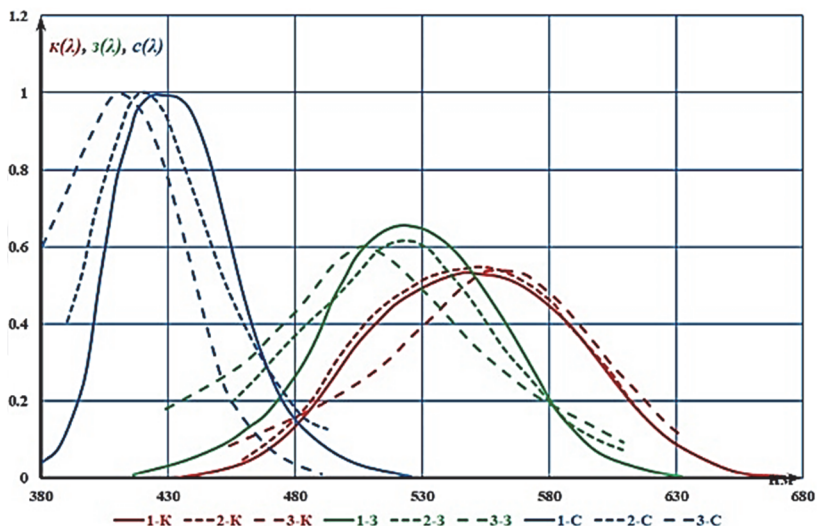


Рис. 10.10. Относительные спектральные чувствительности цветовоспринимающих рецепторов (колбочек) $S_{отн}(\lambda)$ по данным разных авторов:

- 1 – зависимости по Ньюбергу и Юостовой; 2 – по данным Уолда;
3 – по данным Брауна и Уолда

Формулы расчета координат цвета и цветности, модуля цвета были приведены уже в разд. 10.1 и 10.2. После упоминания результатов исследований Ньюберга–Юостовой нам остается привести яркостные коэффициенты, которые необходимы для расчета яркости (светового потока) в цветовой системе (КЗС)физ:

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= 0,5894 \\ \beta_z &= 0,4043 \\ \beta_c &= 0,0063 \end{aligned} \right\} . \quad (10.30)$$

$$L_v = 683 (0,5894 K + 0,4043 Z + 0,0063 C). \quad (10.31)$$

Переход от функций сложения в системе XYZ к функциям сложения в системе $(K3C)_{\text{физ}}$ можно осуществить аналогично (10.26):

$$\begin{aligned} & (\bar{k}_{\text{физ}}(\lambda) \bar{z}_{\text{физ}}(\lambda) \bar{c}_{\text{физ}}(\lambda)) = \\ & = (\bar{x}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \bar{z}(\lambda)) \cdot \begin{pmatrix} 0,318 & -0,463 & 0,0 \\ 0,754 & 1,374 & 0,0 \\ -0,072 & 0,089 & 1,0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

10.4. Принцип построения математической модели зрительной системы для пороговых наблюдений цветных объектов на цветных фонах

Существующие теории цветового зрения направлены на объяснение психофизических аспектов цветового восприятия, в частности, такого экспериментально установленного факта, как возможность человека зрительно уравнивать цвета. Теорий, объясняющих причины возникновения цветовых порогов и позволяющих рассчитывать вероятность обнаружения цветных объектов человеком, до последнего времени не существовало. Наиболее перспективный способ построения такого математического метода расчета, за которым будущее, базируется на физиологических моделях процесса обнаружения и опознавания объектов человеком, однако колоссальные трудности в исследовании этих процессов не позволяют в настоящее время получить сколь-нибудь существенные для расчета осветительных установок результаты.

Оптимальное решение данной проблемы лежит в направлении максимального использования известных данных физиологии зрения о строении глаза человека и привлечении результатов, полученных в других областях, для восполнения недостающих знаний. Если данные физиологии о строении оптической системы

глаза человека, его сетчатки достаточно подробны, то механизмы переработки зрительной информации в сетчатке и особенно в высших отделах головного мозга находятся на начальной стадии изучения. В работах XX в. доказана эффективность применения теории статистических решений для расчета порогов обнаружения одноцветных изображений (см. разд. 9.3), поэтому естественным можно считать обобщение статистического подхода к процессам обнаружения цветных объектов, построение статистической теории порогового цветового зрения для задач обнаружения объектов зрительной системой человека.

Уточним понятия порогов цветового зрения. Поскольку цветовое пространство трехмерно, то цвет можно характеризовать его яркостью и двумя координатами цветности (либо тремя другими параметрами, однозначно с ними связанными). Если рассматривать наблюдение объекта (или объектов) на каком-либо фоне, то для объектов, совпадающих по цветности с фоном, пороговое обнаружение наступает только за счет их отличия по яркости (*яркостной порог*). Для разноцветных объектов и фонов возможны несколько порогов обнаружения и опознавания. Из порогов обнаружения цветного объекта на цветном фоне наиболее общим является *порог обнаружения по цвету (цветовой порог)*. В этом случае отличие цвета объекта и фона возникает за счет несовпадения их яркости и цветности. Если яркость объекта и фона в процессе измерений не изменяется, то при изменении цветности объекта относительно фона будет получен *порог обнаружения по цветности*. В светосигнальных установках используют *порог обнаружения по доминирующей длине волны (или по ощущению, т.е. по цветовому тону)* ($\Delta\lambda_{\text{п}}$). Это частный случай порога обнаружения по цветности, когда цвет объекта и фона создается монохроматическими излучениями, отличающимися по длинам волн на $\Delta\lambda_{\text{п}}$. Иногда этот порог называют *порогом цветоразличения по доминирующей длине волны или цветовому тону*. Для проектирования осветительных и светосигнальных установок важен *порог опознавания цветности*. Величина этого порога для малоразмер-

ных объектов называется *пороговым блеском цветоощущения* который рассчитывается для заданной вероятности. Для протяженных объектов такой порог называют *порогом цветоощущения*. Пороги по опознаванию цвета следует определять методом постоянных стимулов, поскольку они зависят от набора цветов опознаваемых объектов, например, 4 для светосигнальных установок (синий, желтый, зеленый, красный) или 7 для цветов радуги и др.)

Структурная схема ММПЦЗ базируется на схеме оптимального приемника изображения, представленной на рис. 9.5. Отличие схемы оптимального приемника, рассмотренной ранее, для наблюдения одноцветных изображений от ММПЦЗ в том, что реализация Y представляет из себя реакцию трех различных типов колбочек $\{\mu_{ki}, \mu_{zi}, \mu_{ci}\}$.

Согласно алгоритму оптимального приемника решение о наличии объекта в поле зрения должно приниматься в соответствии с решающим правилом (9.22): $\Lambda \geq \Lambda_n$. Поскольку в пороговых условиях переадаптации ЗС не происходит, а приемники К, З и С статистически независимы, то их законы распределения определяются выражением (9.26). Поскольку в области цветового зрения собственным светом сетчатки можно пренебречь, то

$$\left. \begin{aligned} P[Y / S] &= \prod_{i=1}^N \frac{(x_{oi})^{\mu_i}}{\mu_i!} \exp(-x_{oi}) \\ P[Y / 0] &= \prod_{i=1}^N \frac{(x_{\phi i})^{\mu_i}}{\mu_i!} \exp(-x_{\phi i}) \end{aligned} \right\}, \quad (10.33)$$

где N – число К, З, С приемников в мозаике; x_{oi} , $x_{\phi i}$ – математические ожидания выходных сигналов приемников с номером i , при условии, что в поле зрения наблюдателя находится объект, или фон.

Поскольку случайные сигналы μ_i представляют из себя совокупность сигналов трех типов приемников – К, З и С, то обозначив случайные сигналы этих рецепторов через μ_{ki} , μ_{zi} , μ_{ci} , из (10.33) для $\ln(\Lambda)$ получим выражение:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_{оки}}{x_{фки}} \right)^{\mu_{ki}} \left(\frac{x_{ози}}{x_{фзи}} \right)^{\mu_{zi}} \left(\frac{x_{оци}}{x_{фци}} \right)^{\mu_{ci}} \exp(-(x_{оки} - x_{фки}) - (x_{ози} - x_{фзи}) - (x_{оци} - x_{фци})), \quad (10.34)$$

где n – число триад К, З, С рецепторов.

Тогда:

$$\ln(\Lambda) = \ln(\Lambda_K \Lambda_Z \Lambda_C) = \ln(\Lambda_K) + \ln(\Lambda_Z) + \ln(\Lambda_C), \quad (10.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \ln \Lambda_K &= \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \ln \left(\frac{x_{оки}}{x_{фки}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{оки} - x_{фки}) \\ \ln \Lambda_Z &= \sum_{i=1}^n \mu_{zi} \ln \left(\frac{x_{ози}}{x_{фзи}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{ози} - x_{фзи}) \\ \ln \Lambda_C &= \sum_{i=1}^n \mu_{ci} \ln \left(\frac{x_{оци}}{x_{фци}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{оци} - x_{фци}) \end{aligned} \right\}. \quad (10.36)$$

Как и для (9.30), закон распределения $\ln \Lambda$ определяется функцией плотности вероятности нормального закона распределения (9.31) с параметрами:

$$m_{\Lambda} = m_{\Lambda_K} + m_{\Lambda_Z} + m_{\Lambda_C}, \quad (10.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{\Lambda_K} &= \sum_{i=1}^n x_{оки} \ln \left(\frac{x_{оки}}{x_{фки}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{оки} - x_{фки}) \\ m_{\Lambda_Z} &= \sum_{i=1}^n x_{ози} \ln \left(\frac{x_{ози}}{x_{фзи}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{ози} - x_{фзи}) \\ m_{\Lambda_C} &= \sum_{i=1}^n x_{оци} \ln \left(\frac{x_{оци}}{x_{фци}} \right) - \sum_{i=1}^n (x_{оци} - x_{фци}) \end{aligned} \right\}.$$

Дисперсия определится выражением, аналогичным (9.37), а вероятность обнаружения – выражениями (9.32), (9.33).

В выражение (9.32) входит $\ln(\Lambda_n)$, определяющий порог принятия решения о наличии объекта. Для случая наблюдения одноцветных изображений в разд. 9.6 было получено, что это значение близко к 4,0. При выводе расчетного выражения (9.45) не накладывалось никаких ограничений на спектральные чувствительности приемников в математической модели ЗС, поэтому по методике, изложенной в разд. 9.6 можно определить величину $\ln(\Lambda_n)$ и для случая наблюдения цветных изображений. На рисунке 10.11 приведены экспериментальные результаты, полученные на кафедре светотехники МЭИ, по обнаружению равноярких цветных объектов на цветных фонах. Сплошная красная кривая на рисунке – расчет по выражению (9.45) со значением $\ln(\Lambda_n) = 4,0$. Полученные результаты показывают, что $\ln(\Lambda_n)$ – порог принятия решения в зрительной системе не зависит от цветности, яркости, формы и угловых размеров обнаруживаемых объектов.

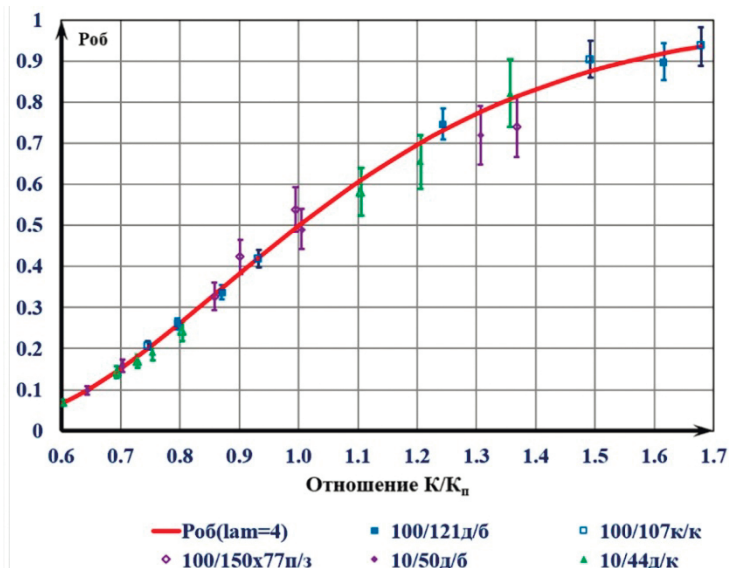


Рис. 10.11. Зависимость вероятности обнаружения дисков, квадратов и прямоугольников от отношения наблюдаемого контраста объектов к их пороговому контрасту (обозначения: яркость фона в кд/кв.м/угловой размер в минутах / тип объекта (к – квадрат, д – диск, п – прямоугольник)/цвет объекта (к – красный ($\lambda_d \sim 630$ нм), з – зеленый ($\lambda_d \sim 520$ нм), б – синий ($\lambda_d \sim 450$ нм))

10.5. Пороговое обнаружение монохроматического объекта на цветном фоне

Для получения расчётного выражения, определяющего вероятность обнаружения цветных объектов, необходимо установить зависимость выходной реакции приемников математической модели от визируемой яркости. Это связано с сильной нелинейностью рецепторов в области дневного зрения ($L_v \geq 10$ кд/м²), т.е. с нелинейной зависимостью частоты импульсов «тока действия» в волокнах зрительного нерва от фотонного потока излучения. Это приводит к тому, что фотометрический контраст наблюдаемых объектов отличается от контраста сигналов на выходе рецепторов математической модели.

На рисунке 10.12 представлена качественная зависимость математического ожидания (X) реакции рецепторов ОЗ от визируемой яркости (L).

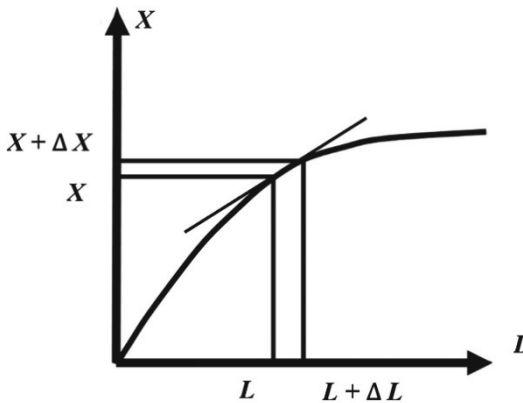


Рис. 10.12. Нелинейная зависимость реакции приемника излучения от визируемой яркости

В разделе 9.6 приведена важная зависимость реакций ПИ от визируемой яркости, однако она получена при наличии только одного типа рецепторов, что недостаточно для модели цветового зрения.

Один из основных принципов колориметрии утверждает, что в области дневного зрения цветность объектов постоянного спектрального состава не зависит от яркости объектов при изменении последней в широких пределах.

Согласно колориметрии, расчёт координат цвета ведется по классическим выражениям:

$$\Xi = \int_{380}^{780} L_{e\lambda}(\lambda) \bar{\xi}(\lambda) d\lambda, \quad (10.38)$$

где $\Xi = \{K, Z, C\}$, $L_{e\lambda}(\lambda)$ – спектральная плотность энергетической яркости; λ – длина волны излучения; $\bar{\xi}(\lambda) = \{\bar{k}(\lambda), \bar{z}(\lambda), \bar{c}(\lambda)\}$ – функции сложения. Из (10.38) следует, что реакции К, З и С рецепторов $\{X_K, X_Z, X_C\}$ пропорциональны координатам цвета физиологической колориметрической системы КЗС, поэтому:

$$\frac{X_K}{X_K + X_Z + X_C} = \xi \rightarrow X_\xi = \xi X, \quad \xi = \{k, z, c\}, \quad (10.39)$$

где $X = X_K + X_Z + X_C$ – сумма реакций К, З, С рецепторов, которая зависит от яркости фона, а k, z, c – не зависящие от яркости координаты цветности.

Используя (10.39), можно установить связь контраста на выходе рецепторов $K_R = \Delta X/X$ с фотометрическим контрастом $K = \Delta L_v/L_v$:

$$K_R = \frac{X_{ок} + X_{оз} + X_{ос} - X_{фк} - X_{фз} - X_{фс}}{X_{фк} + X_{фз} + X_{фс}}, \quad (10.40)$$

где $X_{ок}, X_{оз}, X_{ос}$ и $X_{фк}, X_{фз}, X_{фс}$ – математические ожидания выходных реакций любого К, З и С рецептора, визирующего область внутри контура объекта при условии визирования цветного объекта на фоне и цветного фона без объекта соответственно.

С учетом (10.40) несложно получить:

$$K_R = \frac{X_o - X_\phi}{X_\phi}, \quad (10.41)$$

где X_o , X_ϕ – суммы математических ожиданий сигналов К, З и С рецепторов в пределах контура объекта, при условии визирования объекта и фона, соответственно.

Стандартные объекты, которые используются в колориметрии, имеют угловые размеры от 2 до 10°. При таких угловых размерах и яркости адаптации в областях дневного и сумеречного зрения значения пороговых яркостных контрастов, так же как значения контрастов сигналов на выходе рецепторов, много меньше единицы.

Это позволяет в выражении (10.41) ограничиться двумя членами разложения функции $X_o(L)$ в ряд Тейлора в окрестности $X = X_\phi$. Тогда:

$$K_R = \frac{dX}{dL_v} \frac{\Delta L_v}{X} = \frac{dX}{dL_v} \frac{L_v}{X} K. \quad (10.42)$$

Использование данного выражения в ММПЦЗ позволяет получить дифференциальное уравнение для зависимости $X(L)$. Преобразуем выражение (2.50) для m_Λ и σ_Λ^2 , воспользовавшись разностью сигналов приёмников (ΔX_i), визирующих объект и фон:

$$\left. \begin{aligned} m_\Lambda &= \sum_{i=1}^n (X_i + \Delta X_i) \ln \left(1 + \frac{\Delta X_i}{X_i} \right) - \sum_{i=1}^n \Delta X_i, \\ \sigma_\Lambda^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i + \Delta X_i) \ln^2 \left(1 + \frac{\Delta X_i}{X_i} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (10.43)$$

Разложим в (10.43) логарифмы в ряд Тейлора в окрестности единицы, ограничимся двумя членами разложения и рассмотрим часто встречающийся при проведении экспериментов случай наблюдения равных объектов на равномерном фоне. При этих

условиях, вне контура объекта $\Delta X_i = 0$, а внутри него разность сигналов приёмников имеет постоянную величину ΔX . В пределах контура объекта X_i также не зависит от номера приёмника и равно X , поэтому выражения (10.43) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} m_{\Lambda} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta X_i)^2}{X_i} = \frac{1}{2} t \frac{(\Delta X)^2}{X}, \\ \sigma_{\Lambda}^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta X_i)^2}{X_i} = t \frac{(\Delta X)^2}{X} \end{aligned} \right\}, \quad (10.44)$$

где t – число ПИ, визирующих область пространства внутри контура объекта.

При малых перепадах ΔX , характерных для пороговых контрастов объектов большого углового размера, её можно выразить через производную от искомой зависимости реакции приёмника X от яркости фона L_v в виде:

$$\Delta X = \Delta L_v \frac{dX}{dL_v}, \quad (10.45)$$

где ΔL_v – перепад яркости объект – фон.

Тогда, с учетом (10.45), выражение (9.33) для аргумента интеграла вероятности, определяющего вероятность обнаружения объекта, примет вид:

$$y = \frac{m_{\Lambda} - \ln \Lambda_{\Pi}}{\sqrt{2m_{\Lambda}}}. \quad (10.46)$$

Согласно экспериментальным исследованиям яркостных пороговых контрастов, при угловых размерах объектов, больших чем 2° , и яркостях фона, больших чем 10 кд/м^2 , выполняется закон Вебера–Фехнера, т.е. при изменении яркости фона пороговый контраст остаётся постоянным. Это означает, что вероятность обнаружения также не зависит от яркости фона, а значит производная $dy/dL_v = 0$. Поскольку в пороговых условиях ($P_{об} = 0,5$) аргу-

мент интеграла вероятности равен нулю, то из выражений (10.44), (10.45), (10.46) следует дифференциальное уравнение для зависимости X от яркости L_v :

$$\frac{t}{2} \frac{d}{dL_v} \left[K^2 \left(\frac{dX}{dL_v} L_v \right)^2 / X \right] = 0. \quad (10.47)$$

Поскольку пороговый фотометрический контраст $K = \Delta L_v / L_v$ в области Вебера–Фехнера не зависит от яркости, то решением (10.47) является *функция квадратичного логарифма от яркости*:

$$X = C_1 \ln^2(C_2 L_v), \quad (10.48)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, не зависящие от яркости.

Поскольку цветность объекта не зависит от яркости (константность цветовосприятия), полученный результат, с учетом (10.39), позволяет сделать вывод о том, что *нелинейность всех трёх типов колбочек одинакова* и определяется выражением (10.48) с разными значениями C_1 для К, З и С рецепторов и совпадающими для них значениями C_2 .

Продифференцировав выражение (10.48) по яркости, получим:

$$\frac{dX}{dL_v} = C_1 \cdot 2 \ln(C_2 L_v) \cdot \frac{1}{C_2 L_v} \cdot C_2 \Rightarrow \frac{dX}{dL_v} = \frac{2C_1 \ln(C_2 L_v)}{L_v}. \quad (10.49)$$

Из выражения (9.55) гл. 9 при малых контрастах объекта с фоном для m_Λ несложно получить, что:

$$m_\Lambda = \frac{(K_R)^2}{2} X \cdot \omega. \quad (10.50)$$

С учетом (10.42) связывающего фотометрический контраст K с контрастом K_R сигналов на выходе нелинейных рецепторов, для любого К, З или С рецептора получим:

$$m_{\Lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4C_1^2 \ln^2(C_2L)}{L^2 C_1 \ln^2(C_2L)} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 L^2 \omega = 2C_1 \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \omega, \quad (10.51)$$

где ΔL – перепад составляющей световой яркости монохроматического объекта $\Delta L_{\kappa}, \Delta L_{\lambda}$ или ΔL_c и соответствующей составляющей световой яркости фона – $L_{\kappa\phi}, L_{\lambda\phi}$, или $L_{c\phi}$.

При условии одинаковой нелинейности всех ПИ, что соответствует широкому диапазону яркостей, в которой цветность излучения не зависит от яркости, выражение для математического ожидания $\ln(\Lambda)$ принимает вид:

$$m_{\Lambda} = 2 \left[C_{1\kappa} \left(\frac{\Delta L_{\kappa}}{L_{\kappa\phi}} \right)^2 + C_{1\lambda} \left(\frac{\Delta L_{\lambda}}{L_{\lambda\phi}} \right)^2 + C_{1c} \left(\frac{\Delta L_c}{L_{c\phi}} \right)^2 \right] \cdot \omega, \quad (10.52)$$

где $\Delta L_{\xi} = 683\beta_{\xi} L_{e\lambda}(\lambda)\xi(\lambda)$ – составляющая перепада световой яркости монохроматического объекта при визировании его рецепторами

$\xi = \{\bar{\kappa}, \bar{\lambda}, \bar{c}\}$; $L_{\xi\phi} = 683\beta_{\xi} \int_0^{\infty} L_{e\lambda\phi}(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda$ – составляющие световой

яркости цветного фона при визировании его рецепторами ξ .

Из (10.52) следует:

$$m_{\Lambda} = 2\omega \left\{ C_{1\kappa} \left[\frac{\Delta L_{e\kappa}(\lambda)\bar{\kappa}(\lambda)}{\int_{380}^{780} L_{e\lambda\phi}(\lambda)\bar{\kappa}(\lambda)d\lambda} \right]^2 + C_{1\lambda} \left[\frac{\Delta L_{e\lambda}(\lambda)\bar{\lambda}(\lambda)}{\int_{380}^{780} L_{e\lambda\phi}(\lambda)\bar{\lambda}(\lambda)d\lambda} \right]^2 + C_{1c} \left[\frac{\Delta L_{e\lambda}(\lambda)\bar{c}(\lambda)}{\int_{380}^{780} L_{e\lambda\phi}(\lambda)\bar{c}(\lambda)d\lambda} \right]^2 \right\}, \quad (10.53)$$

где $\Delta L_{\text{ео}}(\lambda)$ – перепад спектральных энергетических яркостей объект – фон; $L_{\text{елф}}(\lambda)$ – спектральная плотность энергетической яркости излучения фона; $C_{1к}, C_{1з}, C_{1с}$ – постоянные коэффициенты статистической модели независимые от длины волны, а в области Вебера–Фехнера независимые и от яркости.

Из (10.53) можно определить энергетическую яркость объекта, соответствующую величине m_{λ} . В пороговых по обнаружению условиях выражение для $\Delta L_{\text{ен}}(\lambda)$ имеет вид:

$$\Delta L_{\text{ен}}(\lambda) = \frac{C_3}{\sqrt{C_{1к} \left(\int_0^{\infty} L_{\text{елф}}(\lambda) \kappa(\lambda) d\lambda \right)^2 + C_{1з} \left(\int_0^{\infty} L_{\text{елф}}(\lambda) \beta(\lambda) d\lambda \right)^2 + C_{1с} \left(\int_0^{\infty} L_{\text{елф}}(\lambda) \gamma(\lambda) d\lambda \right)^2}}, \quad (10.54)$$

где квадрат $C_3 = \frac{\ln \Lambda_{\text{п}}}{2\omega}$.

Данное выражение определяет *цветовой порог* для монохроматического объекта, так как $\Delta L_{\text{ен}}(\lambda)$ создает пороговый цветовой сдвиг ΔE за счет изменения и яркости, и цветности объекта по отношению к фону.

10.6. Определение удельных координат цвета трихроматов на основе ММЩЗ

В современной литературе высказываются сомнения по поводу правомерности подхода с использованием дихроматов вместо трихроматов и сомнения остаются, даже при их отборе по тестам ДНК. Это связано с тем, что кривые сложения зрительной системы человека определяются не только чувствительностью колбочек. Ощущение яркости и цветности предметов появляется у человека не на выходе рецепторов, а после обработки их сигналов головным мозгом, а этот, пока неизвестный алгоритм, может быть существенно разным у трихроматов, обрабатывающих сигналы

трех приемников, и дихроматов, у которых один приемник отсутствует, а цветовое восприятие сохраняется. Эти сомнения делают актуальным определение спектральной чувствительности зрительной системы трихромата без привлечения к исследованиям дихроматов.

Физиологические системы описываются в ряде работ. Все они основаны на использовании в качестве наблюдателей дихроматов, их результаты хорошо согласуются между собой (рис. 10.13), далее будет показано, что полученные удельные координаты цвета характеризуют именно дихроматов и не соответствуют кривым сложения трихромата. Для отличия разработанных колориметрических систем, которые все авторы называют физиологическими, мы будем использовать следующие обозначения:

- модель *CIEPO06* или система *LMS* с функциями $\bar{l}(\lambda)$, $\bar{m}(\lambda)$, $\bar{s}(\lambda)$;
- цветовая физиологическая система (КЗС) физ Н.Д. Ньюберга и Е.Н. Юстовой – *(LMS)NY*;
- разработанная на кафедре светотехники МЭИ система на основе статистической модели *(LMS)phys* с функциями сложения $\bar{l}_{phys}(\lambda)$, $\bar{m}_{phys}(\lambda)$, $\bar{s}_{phys}(\lambda)$.

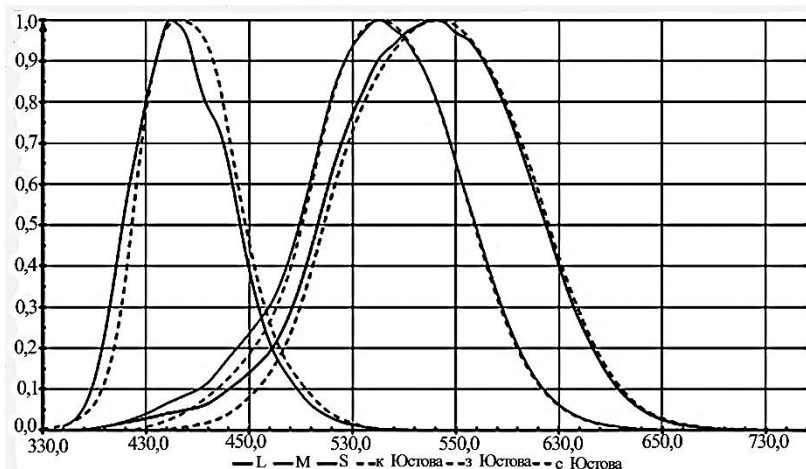


Рис. 10.13. Функции сложения, полученные Юстовой и Стокманом при использовании дихроматов в качестве наблюдателей

На рисунке 10.14 в системе XYZ изображены треугольники ОЦ дихроматов $(K3C)_{\text{физ}}$ и треугольники на основе матрицы перехода из системы LMS . На этом же рисунке приведены и диаграммы цветности (пунктирные кривые) XYZ , LMS и $(LMS)NY$ в системе XYZ .

Отрицательное значение координаты M для цветовых систем полученных с использованием дихроматов, приводит к тому, что цветности значительной части реальных цветов систем дихроматов в системе XYZ имеют отрицательное значение координаты y . На рисунке 10.14 – это цветности излучений, лежащие ниже алихны (ось x) до пунктирных красного и зеленого графиков, соответствующих диаграммам цветности систем LMS и $(LMS)NY$.

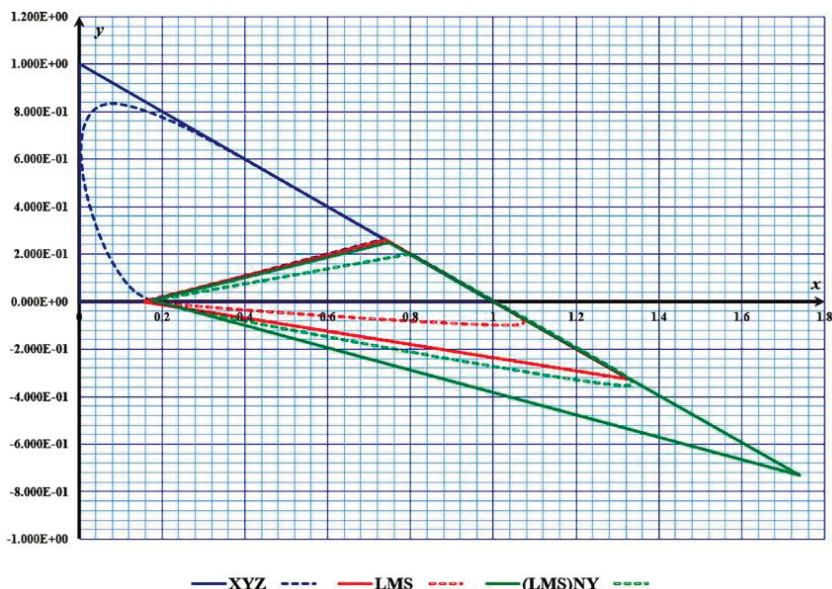


Рис. 10.14. Треугольники ОЦ и диаграммы цветности XYZ , LMS и $(LMS)NY$ в системе XYZ

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере LMS . Матрица перехода позволяет преобразовать координаты цветов, полученные в LMS в систему XYZ . При этом функции сложения для всех

цветов в LMS имеют положительное значение, а после преобразования вышеприведенной матрицей, с приемлемой точностью совпадают с функциями сложения XYZ .

С точки зрения математических преобразований здесь все в порядке, поэтому такая колориметрическая система может описывать цветовые преобразования, но она не соответствует физиологической системе трихромата. Возникает вопрос – почему? Авторы не учли одно важное обстоятельство: для физиологической системы трихроматов, полученного соответствия недостаточно. Необходимо, чтобы и сумма положительных координат цветов исходной системы LMS , после преобразования в XYZ , также имела положительное значение координаты Y , поскольку только она оценивает суммарный уровень возбуждения рецепторов трихромата. Для систем LMS и $(LMS)NY$ это условие не выполняется.

Удельные координаты цвета физиологической системы входят в уравнение (10.54), определяющее пороговые условия наблюдения трихромата. Это уравнение решает прямую задачу – расчет порогового перепада энергетической яркости объект фон при известных функциях сложения. Опишем методику решения обратной задачи.

Неопределенными функциями математической модели являются $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$. Получить на основе выражения (10.54) функции $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$ не представляется возможным, так как одно и то же пороговое значение может быть получено при различных значениях этих функций. Определение $\bar{k}(\lambda_i)$, $\bar{z}(\lambda_i)$, $\bar{c}(\lambda_i)$, $i \in [1, n]$ из уравнения (10.54) традиционным способом путем решения системы уравнений:

$$L_{eo}^n(\lambda_i) = \frac{C_1}{\sqrt{C_2 \left(\int_{380}^{780} L_{el\phi}(\lambda) \bar{k}(\lambda) d\lambda \right)^2 + C_3 \left(\int_{380}^{780} L_{el\phi}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \right)^2 + \left(\int_{380}^{780} L_{el\phi}(\lambda) \bar{c}(\lambda) d\lambda \right)^2}} \quad (10.55)$$

невозможно, так как:

1) для расчета $L_{eo}^n(\lambda_i)$ в выражении (10.35) необходимы три значения – $\bar{k}(\lambda_i)$, $\bar{z}(\lambda_i)$, $\bar{c}(\lambda_i)$, т.е. число неизвестных в системе уравнений всегда в три раза больше числа уравнений;

2) для вычисления интегралов, входящих в систему уравнений, необходимо знать искомые функции $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$ во всей видимой области спектра, а они в начале расчета неизвестны.

Решение было найдено на основе анализа возможных видов функций $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$. Проведенный авторами анализ показал, что $\bar{z}(\lambda)$ – это четная функции с одним максимумом, а для $\bar{k}(\lambda)$ и $\bar{c}(\lambda)$ – это несимметричные функции с одним максимумом. Это позволило использовать для функций сложения следующие аппроксимирующие выражения:

$$\bar{z}(\lambda) = \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda_{3M})}{\sigma_3} \right]^2 \right\};$$

$$\bar{k}(\lambda) = f_k(\lambda) \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda_{KM})}{\sigma_k} \right]^2 \right\} + (1 - f_k(\lambda)) \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda_{KM})}{C_k \sigma_k} \right]^2 \right\}; \quad (10.56)$$

$$\bar{c}(\lambda) = f_c(\lambda) \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda_{CM})}{\sigma_c} \right]^2 \right\} + (1 - f_c(\lambda)) \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda_{CM})}{C_c \sigma_c} \right]^2 \right\},$$

где λ_{KM} , λ_{3M} , λ_{CM} – длины волн, на которых функции достигают максимумов; σ_k , σ_3 , σ_c – параметры, определяющие полуширину функций; $f_k(\lambda)$, $f_c(\lambda)$ – функции, равные единице, если $\lambda < \lambda_{KM}$ или $\lambda < \lambda_{CM}$ соответственно, и нулю в противоположном случае.

Поскольку $L_{eo}^n(\lambda_i)$ не зависит от максимальных значений $\bar{k}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$, $\bar{c}(\lambda)$, то в систему уравнений (10.55) будет входить (с учетом C_1-C_3) одиннадцать неизвестных, что делает эту систему уравнений решаемой, если число экспериментальных значений $L_{eo}^n(\lambda_i)$ будет больше, либо равно 11. Для реализации этой части разработанной методики была создана установка для определения порогов обнаружения наблюдателем монохроматических объектов $L_{eo}^n(\lambda_i)$ на цветных (в том числе и белых) фонах. Структурная

схема и вид основных узлов установки представлен на рис. 10.15. Установка позволяет определять методом минимальных изменений пороговый перепад яркости объект–фон. Поток фонового излучения белого светодиода (1), прошедший набор цветных фильтров (3) с помощью оптического волокна (5), передается в фотометрическую сферу (6), на стенку которой проектируется изображение тест-объекта (13), освещаемого двойным монохроматором (11), поток которого плавно регулируется нейтральным клином (15). Результаты измеренной пороговой чувствительности 10 наблюдателей на 17 длинах волн при яркости белого фона 11 кд/м^2 представлены на рис. 10.16, а результаты решений системы уравнений для каждого наблюдателя – на рис. 10.17.

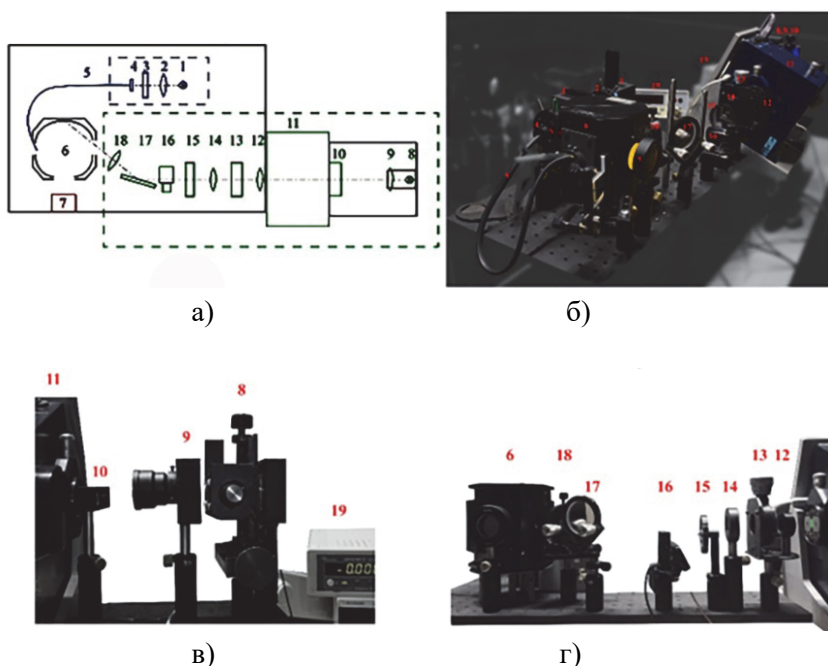


Рис. 10.15. Установка для экспериментальных исследований:
а – структурная схема установки; б – внешний вид основных узлов установки;
в – узел осветителя канала объекта;
г – узел формирования и регулировки яркости объекта

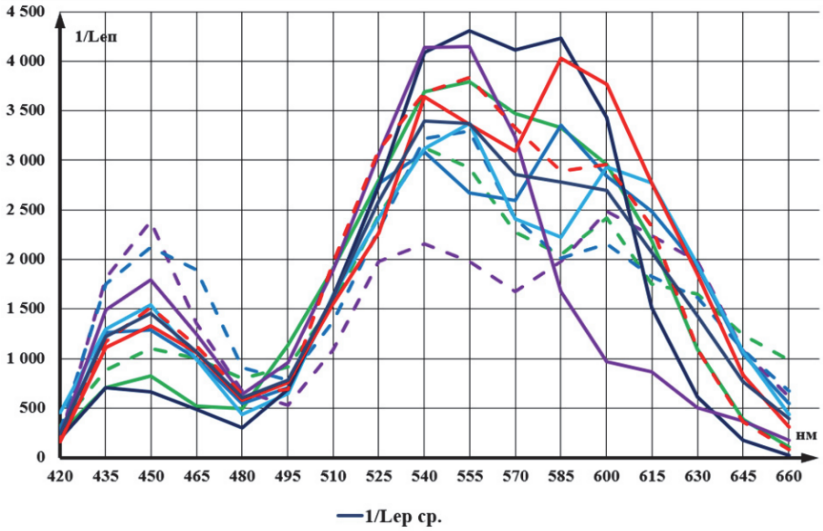


Рис. 10.16. Зависимость пороговой чувствительности 10 наблюдателей от длины волны монохроматического объекта с угловым размером 2°

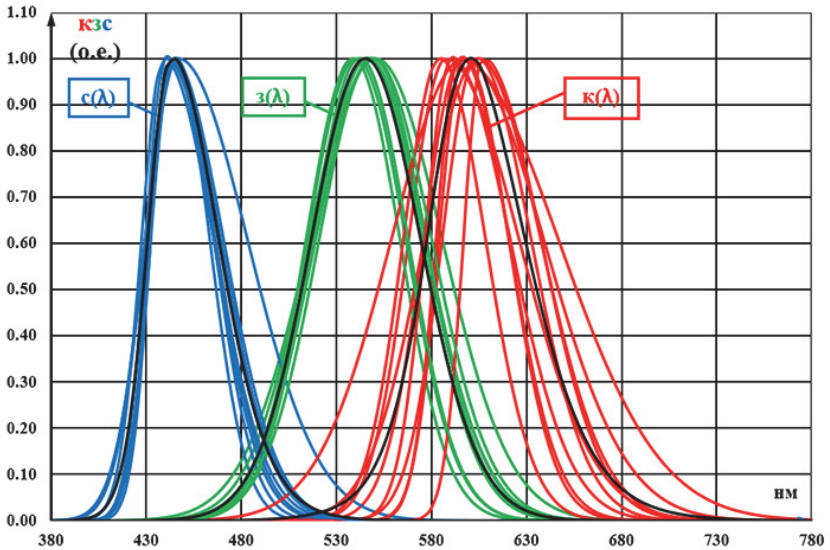


Рис. 10.17. Удельные координаты цвета для 10 наблюдателей

Обработка полученных результатов позволила построить треугольники основных цветов для всех наблюдателей и для среднего наблюдателя (рис. 10.18). Поскольку средние спектральные характеристики набора наблюдателей, по которым строилась система XYZ , не совпадают с характеристиками исследованных наблюдателей, то их треугольники основных цветов пересекают диаграмму цветности, что не удивительно. Следующие важные результаты, полученные для всех исследованных наблюдателей, позволяют построить физиологическую систему $(LMS)_{phys}$, согласованную с XYZ .

1. Координата основного цвета 3 трихромата в системе XYZ имеет положительное значение.

2. Координаты основных цветов К и 3 трихромата в системе XYZ лежат на прямой $y = 1 - x$.

3. Третий необходимый результат можно сформулировать следующим образом: основной цвет К цветовой системы трихромата является реальным цветом и совпадает с основным цветом R цветовой системы RGB (МКО 1931 г.), т.е. имеет в системе XYZ координаты цветности $(0,7346657271; 0,2653342729; 0)$.

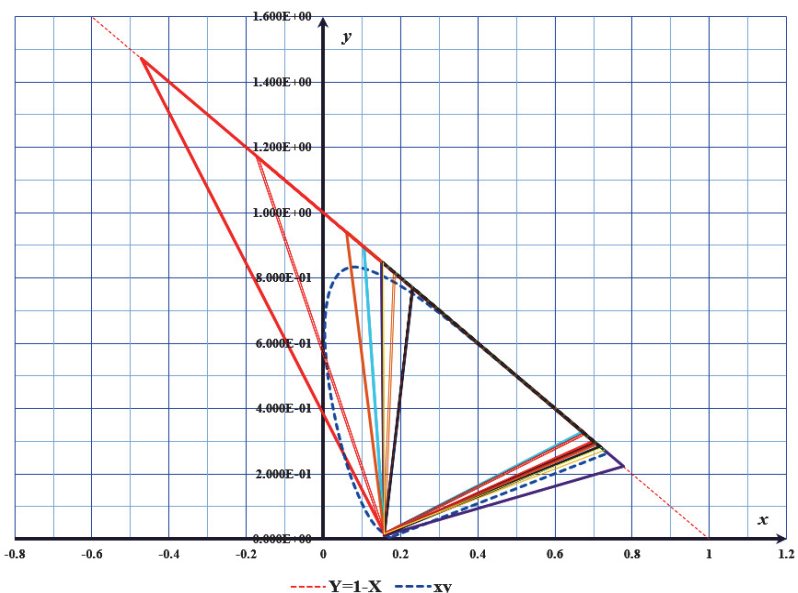


Рис. 10.18. Треугольники основных цветов 10 исследованных наблюдателей в системе XYZ

10.7. Цветовая физиологическая система $(LMS)_{phys}$

Методика определения характеристик цветовой системы трихромата $(LMS)_{phys}$ основана на определении координат цветности ее основных цветов в цветовом пространстве XYZ . При этом в координатном треугольнике известны координаты вершины основного цвета L_{phys} и участок прямой на которой расположена вершина с координатой основного цвета M_{phys} ($y = 1 - x$). Энергетические ограничения установки на краях спектральных диапазонов позволили провести исследования пороговых перепадов яркости только в диапазоне 420–660 нм, что привело к значительному разбросу координат основного цвета S_{phys} при решении системы уравнений (10.55), поэтому для их определения использовалась методика, описанная в работе Н.Д. Ньюберга. Суть методики заключается в том, что если воспользоваться тем свойством физиологической системы, что реакции ее рецепторов не могут принимать отрицательных значений, то область возможного положения вершины S_{phys} треугольника основных цветов в системе XYZ оказывается очень ограниченной. Во-первых, при положительном значении координаты y основного цвета M_{phys} координатный треугольник цветовой системы трихромата должен охватывать диаграмму цветности XYZ , не пересекая ее, а во-вторых, значение координаты y самого основного цвета S_{phys} не может быть меньше нуля, так как иначе реакция на него станет отрицательной. Область возможного положения основного цвета S_{phys} имеет вид треугольника и изображена на рис. 10.19.

Прямая 1-5-4 на рис. 10.19 – это алихна, т.е. в системе XYZ координатная ось x , ниже которой координата y становится отрицательной. Прямая 1-2-3 – это продолжение линии пурпурных цветов диаграммы цветности XYZ , совпадающая с направлением на вершину треугольника с основным цветом L_{phys} . Прямая 4-3 – это линия параллельная прямой $y = 1 - x$, касательная к диаграмме цветности XYZ слева, которая соответствует предельному случаю, когда значение координаты Y основного цвета M_{phys} меняет знак с $+\infty$ на $-\infty$. Рассмотрено 6 вариантов положения основного цвета

S_{phys} (точки 1-6 на рис. 10.19). Точки 1, 3, 4 расположены в вершинах треугольника; 2,5 – на серединах его сторон, а точка 6 в его геометрическом центре. Наиболее близкие к среднему значению зависимостей удельных координат цвета от длины волны дает расположение основного цвета S_{phys} в центре треугольника рис. 10.19, т.е. в точке 6. Это позволяет рассчитать координаты основных цветов физиологической системы $(LMS)_{phys}$, которые приведены в табл. 10.1.

Используя данную матрицу можно получить все необходимые параметры $(LMS)_{phys}$, а именно функции сложения $\bar{l}_{phys}(\lambda)$, $\bar{m}_{phys}(\lambda)$, $\bar{s}_{phys}(\lambda)$; координаты и диаграмму цветности $l_{phys}(\lambda)$, $m_{phys}(\lambda)$; яркостные коэффициенты системы, матрицы перехода из $(LMS)_{phys}$ в стандартные колориметрические системы XYZ , RGB 1931 г. и наоборот, а также координаты ее основных цветов в этих системах. Ниже приведены эти данные.

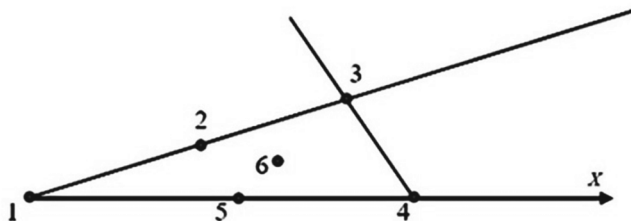


Рис. 10.19. Область допустимого расположения вершины S_{phys} координатного треугольника цветовой системы трихромата

Таблица 10.1

Координаты цветности основных цветов физиологической колориметрической системы трихромата $(LMS)_{phys}$ в системе XYZ

Координаты цветности	x	y	z
l_{phys}	0,734665727	0,265334273	0
m_{phys}	-5,942971132	6,942971132	0
S_{phys}	0,169147999	0,001096000	0,829756001

На рисунке 10.20 приведены удельные координаты цвета, а на рис. 10.21 – диаграмма цветности $(LMS)_{phys}$.

Выражения (10.57) описывают взаимосвязь $(LMS)_{phys}$ со стандартными колориметрическими системами МКО.

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{l}_{phys}(\lambda) \bar{m}_{phys}(\lambda) \bar{s}_{phys}(\lambda) \right) = \left(\bar{x}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \bar{z}(\lambda) \right) \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} 0,605698611 & -0,507865231 & 0,0 \\ 0,518459503 & 1,406192931 & 0,0 \\ -0,124158114 & 0,101672300 & 1,0 \end{pmatrix}; \\
 & \left(\bar{x}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \bar{z}(\lambda) \right) = \left(\bar{l}_{phys}(\lambda) \bar{m}_{phys}(\lambda) \bar{s}_{phys}(\lambda) \right) \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} 1,261118115 & 0,455469536 & 0,0 \\ -0,464970813 & 0,543209593 & 0,0 \\ 0,203852698 & 0,001320870 & 1,0 \end{pmatrix}; \tag{10.57} \\
 & \left(\bar{l}_{phys}(\lambda) \bar{m}_{phys}(\lambda) \bar{s}_{phys}(\lambda) \right) = \left(\bar{r}(\lambda) \bar{g}(\lambda) \bar{b}(\lambda) \right) \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} 2,195536519 & 0,0 & 0,0 \\ 3,434036778 & 5,571394241 & 0,056506753 \\ 0,021101958 & 0,079281015 & 5,594168503 \end{pmatrix}; \\
 & \left(\bar{r}(\lambda) \bar{g}(\lambda) \bar{b}(\lambda) \right) = \left(\bar{l}_{phys}(\lambda) \bar{m}_{phys}(\lambda) \bar{s}_{phys}(\lambda) \right) \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} 0,45546953 & 0,0 & 0,0 \\ -0,28076040 & 0,17951408 & -0,00181327 \\ 0,00226086 & -0,00254408 & 0,17878327 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

В таблице 10.2 приведены яркостные коэффициенты β системы $(LMS)_{phys}$.

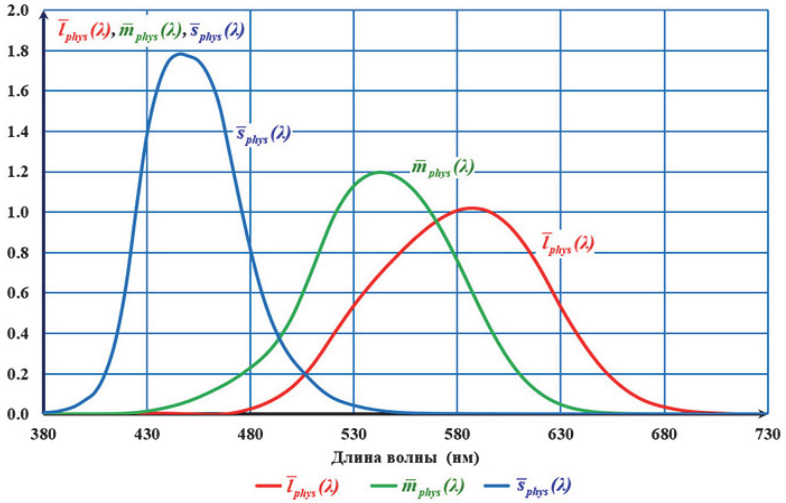


Рис. 10.20. Удельные координаты цвета $(LMS)_{phys}$

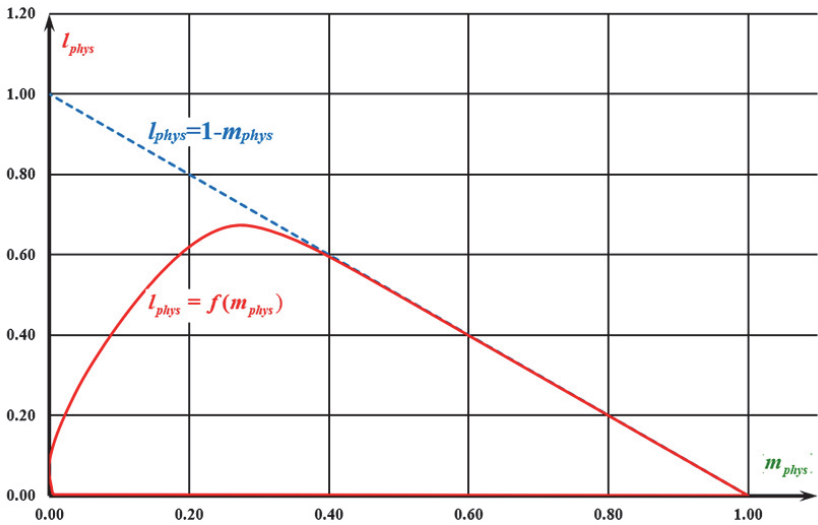


Рис. 10.21. Диаграммы цветности $(LMS)_{phys}$

Яркостные коэффициенты β системы $(LMS)_{phys}$

β_L	β_M	β_S
0,455469525	0,543209604	0,001320871

Таким образом, все параметры физиологической системы трихромата $(LMS)_{phys}$, необходимые для использования ее в колориметрических расчетах, определены.

$RGB, XYZ, (LMS)_{phys}$ – это все колориметрические (математические) системы в которых не определено расстояние между цветами. Но порой важно не только уметь идентифицировать или рассчитывать цвет, но и оценивать восприятие цветов человеком. Для этого были разработаны равноконтрастные системы, в которых расстояние между двумя точками линейно связано с числом цветовых порогов восприятия.

В качестве примера приведем равноконтрастную диаграмму цветности Д. Мак Адама uv :

$$\left. \begin{aligned} u &= 4x / (12y - 2x + 3) \\ v &= 9y / (12y - 2x + 3) \end{aligned} \right\}, \quad (10.58)$$

где u, v – координаты цветности в равноконтрастной системе $L^*u^*v^*$.

По этой равноконтрастной диаграмме цветности можно оценить, заметит ли человек изменение цвета или насколько сильно, с точки зрения человека, цвета отличаются друг от друга. Она также позволяет рассчитать цветопередачу источников света или устройств воспроизведения цветных изображений.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джадд, Д. Цвет в науке и технике. / Д. Джадд, Г.М. Вышецки. – М.: Мир, 1978. – 592 с.

Книга написана выдающимися специалистами в области цветоведения и выдержала за рубежом три издания, последнее из которых было существенно переработано и дополнено. Она охватывает широкий круг вопросов и проблем, связанных с цветовым зрением, измерениями цвета, цветовыми системами, цветовыми шкалами, цветопередачей источников света, цветовыми наименованиями, гармонией цветов, физикой и психофизикой окрашенных пленок.

2. Кубарко, А.И. Зрение (нейрофизиологические и нейроофтальмологические аспекты): В 2 т.: монография / А.И. Кубарко, Н.П. Кубарко. – Минск: БГМУ, 2007. – Т.1. – 210 с.

В систематизированной форме изложены морфологические и нейрофизиологические основы организации сенсорной функции зрения и ее нарушений. Описаны процессы и механизмы зрения от уровня фоторецепторов сетчатки глаза до зрительной коры и других нейронных структур мозга, формирующие современные представления о зрительной системе и ее функциях. Приведены методы лабораторных и клинических исследований важнейших показателей зрения, примеры трактовки клинической значимости их изменений. Рассмотрены наиболее часто встречаемые нарушения сенсорной функции зрения у больных при заболеваниях ЦНС и других систем организма.

3. Луизов, А.В. Цвет и свет / А.В. Луизов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 256с.

В книге рассмотрены факторы, определяющие цвет предмета. Показано, что цвет зависит не только от свойств самого предмета, но и от условий освещения и являете физической величиной. Описаны способы ее измерения. Даны сведения о значении цвета товаров и продуктов, о роли цвета в повседневной жизни, в технике, искусстве и архитектуре, где особенно важно надлежащее сочетание цвета и освещения. Приведены формулы и таблицы для колориметрических расчетов.

4. Мешков, В.В. Основы светотехники: В 2 Ч. Ч 2. Физиологическая оптика и колориметрия: учеб. пособие для вузов. / В.В. Мешков, А.Б. Матвеев. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 430 с.

Рассматриваются строение и принцип работы органа зрения, зрительный процесс, оценки чувствительности, явления адаптации. Описаны методы расчета цвета, принципы воспроизведения цвета, методы оценки качества воспроизведения. При изложении материала показана тесная связь физиологии зрения с учением о цвете, поскольку колориметрия, используя аппарат преобразования цветных систем, все же основывается на соотношениях действительных реакций трех рецепторов органа зрения.

5. Фершильд, М.Д. Модели цветового восприятия / М.Д. Фершильд: пер. А.Е. Шадрина. – СПб.: 2006. – 438с.

Современное и фундаментальное учебное пособие, закладывающее смысловой базис высшего профессионального образования в сфере работы с изображениями. Представленная книга Марка Д. Фершильда расскажет вам о физиологических законах цветового восприятия различных зрительных факторов, а также о законах цветопродукционного процесса. С помощью этой книги вы выясните насколько связаны между собой цветопродукционный процесс и процесс моделирования цветового восприятия (оригинала и его будущей репродукции). Материал книги ориентирован на специалистов в области зрения, а также людей, напрямую связанных с обработкой изображений, будь то фотография или киносъемка и др.

6. Хант, Р.В.Г. Цветовоспроизведение / Р.В.Г. Хант: пер. А.Е. Шадрина. – СПб.: 2009. – 888с.

Книга дает прочный понятийный фундамент, на котором сегодня за рубежом (в первую очередь – в США и Великобритании) строится профильное образование инженеров-технологов фотографии, полиграфии, кинематографии и телевидения. Логичность, системность и лаконизм изложения в сочетании с полнотой материала по праву позволяют назвать хантовскую работу классикой: просто, но в то же время подробно автор повествует об основных

вехах в развитии нашей отрасли, умело и продуманно связывая ее психофизиологическую ипостась с ипостасью технологической. Иначе говоря, Хант предлагает вниманию будущих специалистов так называемый междисциплинарный подход, на котором начинают строиться (и, без сомнения, будут строиться далее) наука и технология XXI столетия, в частности наука и технология изображений.

Основные темы учебника: Общие принципы цветовоспроизведения; Цветная фотография; Цветное телевидение; Полноцветная полиграфия; Цифровое цветовоспроизведение; Модели цветового восприятия.

11. УСТАНОВИВШИЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ЗРИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

11.1. Спектральная чувствительность глаза

Функции зрения разделяются на установившиеся (стационарные) и неуставившиеся (нестационарные). К важнейшим из установившихся принадлежат: относительная спектральная световая эффективность зрительной системы к монохроматическому излучению; пороговая яркость или её обратная величина – абсолютная световая чувствительность; пороговый контраст или её обратная величина – контрастная чувствительность; острота зрения или остротная чувствительность. Все перечисленные пороговые характеристики определяются по большой статистике с заданной вероятностью, которая для большинства светотехнических задач равна 50%.

Основными неуставившимися процессами являются адаптация к изменившимся условиям, инерция зрительной системы и индукция.

Относительная спектральная световая эффективность среднего фотометрического наблюдателя (МКО 1931 г.) к монохроматическому излучению с заданной вероятностью $V(\lambda)$ является важнейшей функцией всей теоретической и прикладной фотометрии. Именно она представляет собой, по существу, стандартную спектральную чувствительность глаза. Для определения функции $V(\lambda)$ МКО в 10–20-х гг. XX в. были использованы тщательно проведённые эксперименты Кобленца, Эмерсона (1918 г.), Хейда, Форсайта и Кэйди (1918 г.), Джибсона, Тиндаля (1925 г.) и других специалистов из разных стран с общим количеством наблюдателей более 160 человек. Угловые размеры тест-объектов составляли 2° , а диапазон исследованных яркостей – от 2 до 130 кд/м².

Такую функцию как $V(\lambda)$ можно определить только визуально, т.е. с помощью глаза, как приёмника нуль-индикатора. Реакция зрительной системы человека на яркость характеризуется

светлотой. Глаз достаточно точно может фиксировать равенство светлоты или, наоборот, устанавливать неравенство, например полей сравнения, находящихся в хорошем фотометрическом контакте (рис. 11.1).

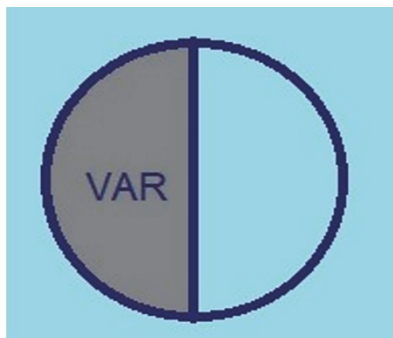


Рис. 11.1. Схема полей зрения наблюдателей при измерении $V(\lambda)$

В исторически первом методе измерения $V(\lambda)$ – методе постоянного поля сравнения сравнивались два поля, созданные при освещении монохроматическими излучениями λ_1 и λ_2 в простейшем случае двух граней, например гипсовой призмы. Самый распространённый вариант реализации, когда λ_1 соответствует максимальной спектральной чувствительности глаза в жёлто-зелёной части видимого спектра излучения. С этим неизменным (отсюда название метода «постоянного поля сравнения») по яркости полям сравнивались по очереди с шагом 1 нм поля всех остальных длин волн видимого спектра и с помощью ослабителей добивались равенства светлоты обоих полей. Прокалибровав ослабители по энергетической яркости, определяли соотношения яркостей, а по ним – $V(\lambda)$. Серьёзный недостаток метода: большинство сравнений осуществляется с полями разной цветности и уравнивать их по светлоте возможно только с очень большой, а значит неприемлемой погрешностью. В этом можно убедиться, мысленно представив себе сравнение по светлоте полей жёлто-зелёного и фиолетового или синего цветов.

В методе малых ступеней (его использовали при измерениях, например, вышеупомянутые Джибсон и Тиндаль) от главного недостатка предыдущего метода избавились, выбирая для сравнения поля с близкими длинами волн. Одно поле, которое правильно назвать образцовым с λ_1 , а другое, изменяемое по яркости, исследуемым с λ_2 . В отличие от метода постоянного поля сравнения разница λ_1 и λ_2 выбирается равной 1 нм. Далее исследуемое поле λ_2 становилось образцовым, а $\lambda_3 = \lambda_2 + 1$ – исследуемым и т.д. до конца видимого диапазона 380 и 780 нм. Уравнивать по яркости поля, близкие по длине волны, а значит по цветности, гораздо проще и точнее. Однако результаты, полученные таким методом, также неидеальны из-за того, что каждое новое образцовое поле будет определено со все большей и большей погрешностью. Обычно при длинах волн близких к максимуму спектральной чувствительности, погрешности изменений минимальны, а в конце видимого спектра – максимальны. А это в свою очередь значит, что точки на зависимости $V(\lambda)$ измерены с разной погрешностью.

В методе мелькающего фотометра, который использовали и используют большинство исследователей $V(\lambda)$, применялась установка, упрощённая схема которой приведена на рис. 11.2. Наполовину зеркальный, наполовину прозрачный диск D вращается так, что в глаз, вооружённый окуляром O , попадает монохроматическое излучение с длиной волны λ то от одного источника света ИС и монохроматора МХ, то от другого. Учитывая, что критическая частота мельканий, а именно минимальная частота следования вспышек, при которой они ещё воспринимаются слитно по цветности ниже, чем по яркости; частоту вращения диска выбирали между этими частотами. При этом наблюдателю не будут видны различия по цветности, а когда с помощью оптических клиньев ОК уравнивают поля сравнения по светлоте – мелькания пропадают совсем. Таким образом, наблюдатель видел поле с усреднённой цветностью и измерял отношение излучений длин волн по прокалиброванным шкалам оптических клиньев ОК. Однако приёмники дневного зрения, колбочки, оказываются, если можно так выразиться, «обманутыми» из-за искусственно созданной ситуации освещения.

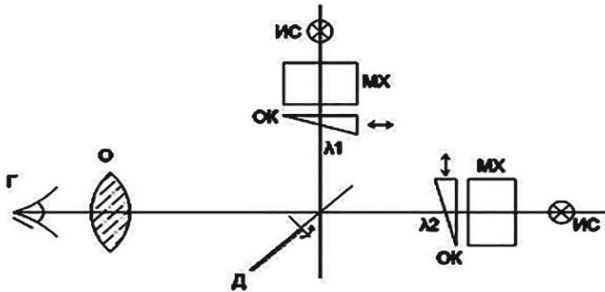


Рис. 11.2. Схема мелькающего фотометра

Функцию $V(\lambda)$ можно определить и косвенным методом: посредством определения пороговых характеристик, например, по обратной величине отношения пороговой разности яркости для сравниваемых длин волн.

Для функции относительной спектральной световой эффективности к монохроматическому излучению для ночного зрения $V'(\lambda)$ МКО использовались исследования Уивера (1949 г.), Вальтера и Райта (1969 г.) – рис. 11.3. Кроме того, уже в 1964 г. функция $V(\lambda)$ была утверждена благодаря исследованиям Бэрча и Стайлса (1952 г.) и Сперанской (1952 г.) для угловых размеров тест-объектов в 10° и стала обозначаться $V_{10}(\lambda)$.

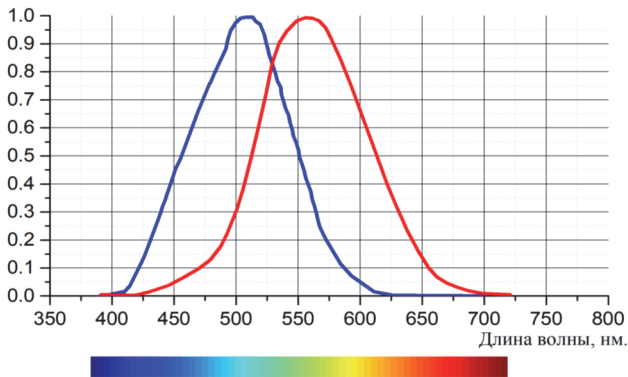


Рис. 11.3. Относительная спектральная световая эффективность к монохроматическому излучению среднего стандартного наблюдателя МКО к дневному (красная зависимость $V(\lambda)$) и ночному (синяя зависимость $V'(\lambda)$) зрению

В настоящее время МКО рекомендует использовать функцию $V(\lambda)$ для яркости адаптации не менее 10 кд/м^2 и угловых размеров объектов до 4° , функцию $V_{10}(\lambda)$ – выше 4° , а $V'(\lambda)$ – для яркости адаптации меньше $0,001 \text{ кд/м}^2$. Самый интересный, но и наиболее сложный вид адаптации – сумеречное зрение с диапазоном яркости адаптации от $0,001$ до 10 кд/м^2 . Сложный из-за того, что при изменении яркости адаптации в этом диапазоне, где работают совместно, но менее эффективно, и палочки, и колбочки, спектральная чувствительность глаза также изменяется.

Для практической светотехники используются примерные оценочные аппроксимации (λ – в нанометрах):

$$V(\lambda) = \exp(-275((\lambda - 560))); \quad (11.1)$$

$$V'(\lambda) = \exp(-346(\lambda - 503)). \quad (11.2)$$

Особенно грубой в свете вышесказанного будет аппроксимация для сумеречного зрения:

$$V_c(\lambda) = \left(\frac{V(\lambda) + V'(\lambda)}{2} \right). \quad (11.3)$$

11.2. Абсолютная световая чувствительность

Яркость, впервые заметная глазом в полной темноте, т.е. при адаптации равной нулю, с заданной вероятностью называется пороговой яркостью. Причём в этой темноте человек должен находиться не менее 40 минут. Обратная величина пороговой яркости называется абсолютной световой чувствительностью, так как это предельная величина для человека. Чтобы её правильно определить проводили эксперимент, наблюдая объект через окно так называемого адаптометра, чаще всего в виде сферы, окрашенной изнутри белой диффузной краской. Угловой размер наблюдаемого тест-объекта изменялся с помощью калиброванной диафрагмы. Для облегчения работы наблюдателя рядом с местом расположения объекта помещали светоизлучающий диод с крас-

ным излучением. Спектральная чувствительность глаза в красной области спектра очень мала, поэтому красное излучение светодиода на пороговые характеристики влияет незначительно.

На рисунке 11.4 представлена зависимость пороговой яркости от углового размера объекта, так как она очень информативна: значения $L_{\text{пор}}$ при угловых размерах порядка минут изменяется от углового размера резко (на порядки величин), а при α выше градуса почти не изменяется. По приведённой зависимости определяли минимальную при угловых размерах объекта (α не менее 50°) величину $L_{\text{пор}} = 10^{-6}$ кд/м², названную абсолютным световым порогом, а обратную величину – абсолютной световой чувствительностью. Характер зависимостей (рис. 11.4) объясняют тем, что при увеличении углового размера объекта увеличивается площадь изображения, что при малых угловых размерах приводит к существенному уменьшению пороговой яркости из-за сглаживания флуктуаций (разбросов) чувствительности приёмников в сетчатке, флуктуаций, падающих на них фотонов, а также флуктуаций среды, в которой распространяется излучение. Какие-то приёмники могут оказаться чуть более чувствительными и ещё на них попадёт чуть больше фотонов, а значит они могут прореагировать и послать в мозг сигнал о меньшей яркости объекта. При угловых размерах объекта больше десятка градусов, реакция 1–2 приёмников не изменит общей картины, так как при таких угловых размерах освещены сотни или тысячи приёмников, и вероятность увеличения результирующего сигнала очень мала.

Для расчётов, связанных с пороговыми величинами, важны аппроксимации. Наиболее часто в расчётах используется аппроксимация Муна-Спенсер:

$$L_{\text{пор}} \Omega = L_{\infty} \left(0,047 + \sqrt{\Omega} \right)^2, \quad (11.4)$$

где L_{∞} – пороговая яркость при бесконечно больших угловых размерах, на практике это $L_{\infty} = L_{50} = 10^{-6}$ кд/м²; Ω – угловой размер объекта, выраженный телесным углом в стерadiansах.

При Ω стремящемся к 2π , $L_{\text{пор}} = L_{\infty} = 10^{-6}$ кд/м², при бесконечно малом Ω , $L_{\text{пор}} \Omega = 2,1 \cdot 10^{-9}$ лк по Муну–Спенсер.

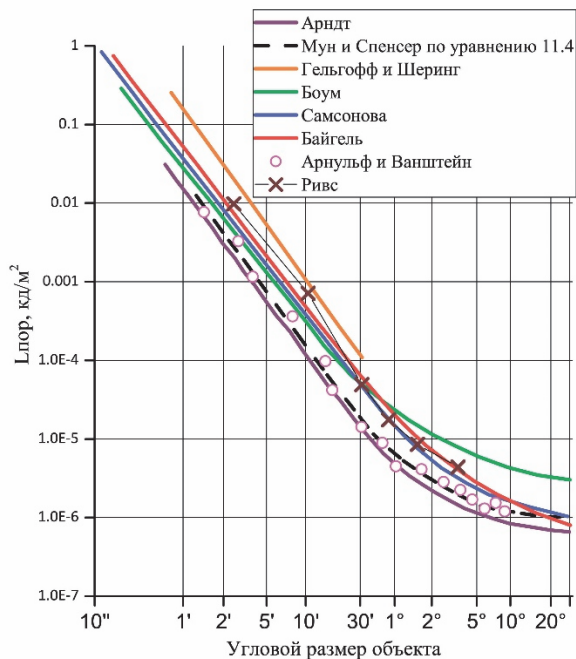


Рис. 11.4. Зависимость пороговой яркости от углового размера объекта

В нашей стране долгое время в светосигнальной технике это же произведение $L_{\text{пор}} \Omega = 2,06 \cdot 10^{-9}$ лк называлось пороговой освещённостью на зрачке.

Пороговая освещённость на зрачке или пороговый блеск по закону Рикко – величина постоянная при изменении угловых размерах объектов до 15 минут. Эта величина связана с так называемым дифракционным расширением изображения на сетчатке и размером рецептивного поля. Пока изображение точки с кружком рассеяния на сетчатке находятся в пределах рецептивного поля, пороговый блеск постоянен, при увеличении углового размера объекта выше 15 минут – он увеличивается из-за неполной суммации сигналов вновь задействованных рецепторов (рис. 11.4).

Обращаясь к формуле (7.15), можно представить пороговую освещённость на зрачке как:

$$E_{\text{с пор}} = \tau A_{\text{зр}} \frac{L_{\text{пор}}}{f_1^2}, \quad (11.5)$$

где τ – коэффициент пропускания глазных сред; $A_{\text{зр}}$ – площадь зрачка; $L_{\text{пор}}$ – пороговая разность яркости; f_1 – переднее фокусное расстояние.

С увеличением углового размера объекта, $L_{\text{пор}}$ согласно рис. 11.5 уменьшается. А вот пороговую освещённость на зрачке из-за закона обратных квадратов можно записать так:

$$E_{\text{зр пор}} = A \cos(\alpha) \frac{L_{\text{пор}}}{l^2}, \quad (11.6)$$

где A – площадь объекта, α – угол между направлением от объекта к глазу и нормалью к плоскости зрачка, l – расстояние от объекта до глаза.

Отсюда чисто математически (если не учитывать перестройку рецептивных полей сетчатки) следует, что при увеличении углового размера объекта вместе с уменьшением $L_{\text{пор}}$, сначала прямо пропорционально, а затем сильнее растёт $E_{\text{зр пор}}$.

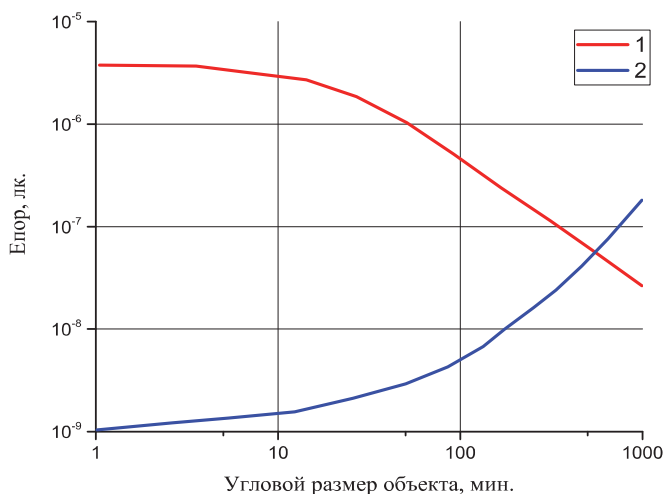


Рис. 11.5. Зависимость пороговой освещённости на сетчатке (1) и на зрачке (2) от углового размера объекта α

11.3. Контрастная чувствительность

Вместе с пороговой яркостью для расчётов используется пороговая разность яркости, которая как пороговая величина зависит от вероятности, с которой она определяется:

$$\Delta L_{\text{пор}} = (L_o - L_{\phi})_{\text{пор}}, \quad (11.7)$$

где L_o – яркость объекта; L_{ϕ} – яркость фона, а точнее яркость адаптации (в частном случае может быть и яркость другого объекта).

На рисунке 11.6 представлена зависимость $\Delta L_{\text{пор}}$ от яркости фона (адаптации).

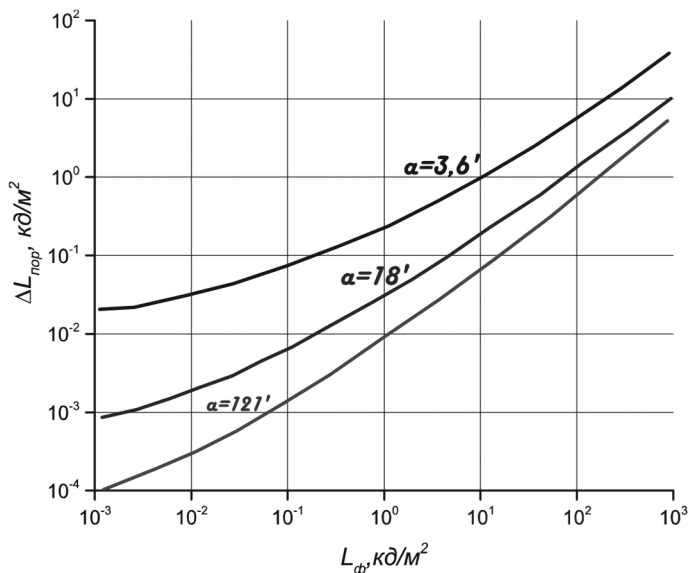


Рис. 11.6. Зависимость пороговой разности яркости $\Delta L_{\text{пор}}$ в кд/м^2 для разных угловых размеров объекта от яркости фона L_{ϕ} в кд/м^2

Увеличение $\Delta L_{\text{пор}}$ с ростом яркости фона (адаптации) связывают прежде всего с уменьшением диаметра зрачка и концентрации «свежих» или непрореагировавших молекул фотореагентов приёмников излучения.

В практической светотехнике чаще $\Delta L_{\text{пор}}$ используется её относительная величина – пороговый контраст:

$$K_{\text{пор}} = \frac{(L_o - L_{\phi})_{\text{пор}}}{L_{\phi}}. \quad (11.8)$$

Различают положительный контраст, когда яркость объекта больше яркости фона, и отрицательный контраст, при котором яркость фона больше яркости объекта. Обратная величина порогового контраста называется контрастной чувствительностью S_k . На рисунке 11.7 приведена зависимость $K_{\text{пор}}$ от яркости фона по данным Зидентопфа и Блэкуэлла.

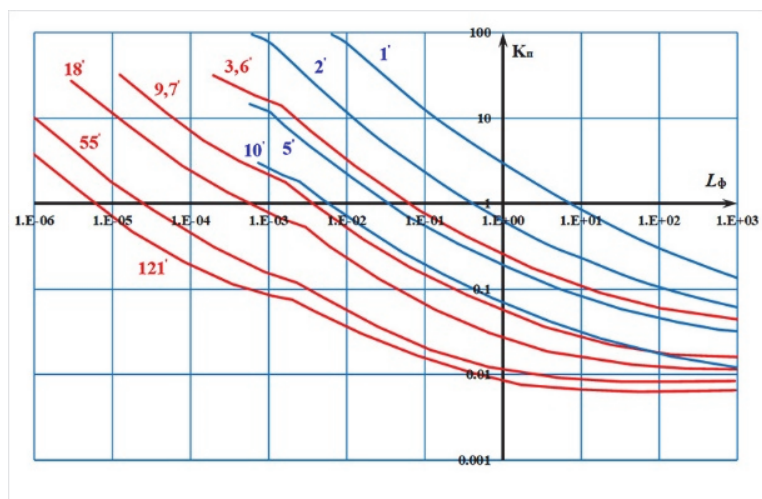


Рис. 11.7. Зависимость порогового контраста для разных угловых размеров объекта от яркости фона L_{ϕ} в кд/м²: красные линии по Блэкуэллу, синие по Зидентопфу

Отметим, что точки перегиба кривых заметнее при больших угловых размерах объектов, когда работает периферическая часть сетчатки с преобладанием палочек, это объясняется переходом от дневного зрения к ночному. Область постоянного $K_{\text{пор}}$ при яркостях больших 10 кд/м² часто называют областью Вебера–Фехнера. Минимальным при самых благоприятных для человека условиях

(угловые размеры объекта α не менее 2° и яркость фона не менее 350 кд/м^2) считается значение $K_{\text{пор}} = 0,007$. При α больше 2° нижняя кривая уже не опускается. $(K_{\text{пор}})_{\text{мин}}$ соответствует обратная величина – максимальная контрастная чувствительность $S_k = 145$.

Для характеристики установившегося процесса достаточно трёх параметров: порогового контраста, углового размера объекта и яркости фона (адаптации). Из зависимостей (рис 11.7) следует вывод о том, что каждому угловому размеру объекта соответствует определённое значение $K_{\text{пор}}$, меньше которого объект не может быть обнаружен даже при больших яркостях фона (адаптации), а каждому значению яркости фона соответствует минимальное значению $K_{\text{пор}}$, меньше которого объект не может быть обнаружен даже при больших угловых размерах объектов α . Большая роль угловых размеров объектов при яркости фона меньше $0,01 \text{ кд/м}^2$ объясняется решающим значением палочек, которых мало в центральной части сетчатки, а в фовеоле – совсем нет. Для расчёта $K_{\text{пор}}$ или $\Delta L_{\text{пор}}$ в нашей стране часто используются эмпирические формулы В.В. Мешкова, полученные для тест-объектов в виде дисков отрицательного контраста:

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{пор}} &= \frac{1}{bL_{\phi}^{1-a}} \\ \Delta L_{\text{пор}} &= \frac{(L_{\phi})^a}{b} \end{aligned} \right\}, \quad (11.9)$$

где коэффициенты a , b зависят от углового размера объекта и яркости фона.

Значения параметров a и b приведены табл. 11.1.

Важно, что эта зависимость, особенно для коэффициента b , очень резкая. Для примера приведём конкретное сравнение двух предельных случаев: при яркостях фона (адаптации) от $0,1$ до $1,0 \text{ кд/м}^2$ и угловых размеров объекта $0,5$ минут коэффициент $a = 0,33$; коэффициент $b = 0,13$; а при L_{ϕ} от 100 до 1000 кд/м^2 и угловых размеров объекта 100 минут коэффициент $a = 0,93$; коэффициент $b = 194$.

**Параметры a и b уравнений (11.9) для $P = 0,5$
и различных значений L_{ϕ} кд/м²**

Угловой размер объекта α , минут	$0,1 \leq L_{\phi} < 1$		$1 \leq L_{\phi} < 10$		$10 \leq L_{\phi} < 100$		$100 \leq L_{\phi} < 1000$	
	a	b	a	b	a	b	a	b
0,5	0,33	0,19	0,5	0,19	0,69	0,29	0,85	0,6
1	0,35	0,69	0,51	0,69	0,71	1,11	0,86	2,24
2	0,38	2,4	0,53	2,4	0,72	3,67	0,87	7,4
4	0,43	7,25	0,56	7,25	0,74	11	0,88	20,8
10	0,51	25	0,65	25	0,76	32,7	0,9	80,5
20	0,59	47,8	0,71	47,8	0,8	66	0,91	115
40	0,67	73	0,76	73	0,81	95,5	0,92	158
100	0,75	99,5	0,8	99,5	0,84	128	0,93	194

Свою эмпирическую формулу расчёта минимального порогового угла $\alpha_{\text{пор}}$ (минимальное угловое расстояние между точками, при котором человек ещё различает отдельно две близко расположенные точки в минутах), в которых представлены фотометрический контраст K и пороговый контраст $K_{\text{пор}}$ предложил А.В. Луизов:

$$\alpha_{\text{пор}} = \frac{0,44 + 0,63L_{\phi}^{-0,42}}{(K - 0,02)^{2/3}}. \quad (11.10)$$

Отдельные составляющие этой формулы имеют условный физический смысл, а не просто подобраны автором. Так число 0,44 соответствует угловому размеру среднего рецептивного поля в сетчатке (в градусах); число 0,02 – $K_{\text{пор}}$ при реальных условиях наблюдения. Вторая составляющая в числителе $L_{\phi}^{-0,42}$ характеризует влияние яркости фона на размер кружка рассеивания (несовершенство оптики глаза).

Бодманн Х.В. после исследований, возглавляемых МКО, предложил свою формулу расчёта $K_{\text{пор}}$ для стандартных условий: углового размера объекта $\alpha = 4$ минуты, возраста людей в 20–30 лет и времени наблюдения 0,2 секунды:

$$K_{\text{пор}} = 0,05936 \left[\left(\frac{1,639}{L_{\Phi}} \right)^{0,4} + 1 \right]^{2,5}. \quad (11.11)$$

Блэкуэлл обобщил результаты названных выше исследований, но ввёл в формулу угловой размер объекта и возраста людей, выполняющих определённую работу:

$$K_{\text{пор}} = 0,0923 \frac{1 + \left(\frac{S}{tL_{\Phi}} \right)^{0,4}}{1 + \left(\frac{S}{100t} \right)^{0,4}}. \quad (11.12)$$

где S – коэффициент, зависящий от углового размера объекта и возраста людей; t – коэффициент зависящий от возраста людей.

$$\lg(S) = 0,59 - 0,6235 \lg(\alpha) - \bar{s}. \quad (11.13)$$

Значения параметров уравнения (11.12) приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

**Значения параметров уравнения (11.12)
в зависимости от возраста наблюдателей**

A	\bar{s}	t
$20 \leq A < 30$	$\bar{s} = 0$	$\lg(t) = 0$
$30 \leq A < 44$	$\bar{s} = 0$	$\lg(t) = -0,1053(A - 30)$
$44 \leq A < 64$	$\bar{s} = 0,00406(A - 44)$	$\lg(t) = -0,1474 - 0,0134(A - 44)$
$64 \leq A < 80$	$\bar{s} = 0,0812 + 0,00667(A - 64)$	$\lg(t) = -0,4154 - 0,0175(A - 64)$

При уже упомянутых стандартных условиях формула (11.12) превращается в формулу Бодманна (11.11).

11.4. Острота зрения

Остротой зрения называют обратную величину уже упомянутого в разд. 11.1 минимального углового расстояния между точками, при котором они еще воспринимаются раздельно (с заданной вероятностью). В кабинете офтальмолога находится равномерно освещённая таблица Головина–Сивцова с буквами разных размеров, по которым определяется $\alpha_{\text{пор}}$ и острота зрения S_α пациентов. Для светотехнических экспериментов, например, при оценке зрительной работоспособности, используются кольца Ландольта толщиной A (рис. 11.8) с разрывом, также равным A , который в разных кольцах располагается в 8 различных местах.

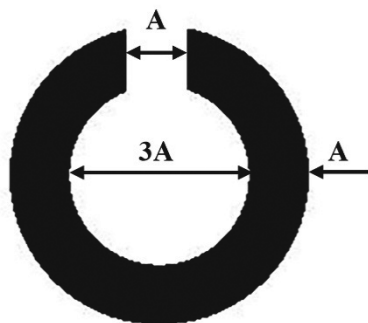


Рис. 11.8. Кольцо Ландольта с разрывом «на 12 часов»

Процент правильного определения разрыва наблюдателями даёт возможность набрать статистику и определить $\alpha_{\text{пор}}$. Однако по формуле (11.10) для восприятия разрыва имеют значение угловые размеры рецептивного поля в сетчатке и кружка рассеивания. На рисунке 11.9 приведено распределение освещённости разрыва кольца Ландольта.

Если полуширина размытия a больше расстояния между максимумами b , разрыв в кольце не будет замечен наблюдателем. Приведём и другой вариант расчёта неразличимости $(E_{\text{max}} - E_{\text{min}}) / E_{\text{max}}$ меньше 0,15. При малых угловых размерах толщина места разрыва видится меньшей по сравнению с другими частями кольца. По-

этому наблюдатель может угадать место разрыва по «утонышению» в кольце. Чтобы этого избежать, в месте разрыва кольца (иногда) делают большей толщины. Значение $\alpha_{\text{пор}}$ или его обратная величина – острота зрения (остротная чувствительность) S_α зависят от индивидуальной структуры сетчатки и несовершенства оптики глаза человека. Наибольшей чувствительностью S_α обладает жёлтое пятно сетчатки, а в ней – фовеа. По мере удаления от жёлтого пятна разрешение глаза падает, поэтому зрительная система автоматически «наводится» центральной областью на пятно при всех сложных работах человека. Зрительная система имеет aberrации, в том числе дифракционные, так как поток попадает в глаз через малое отверстие – зрачок. Дифракционные искажения неустранимы, поэтому, если другие aberrации удаётся снизить до дифракционных, оптическая система считается идеальной с точки зрения aberrаций. В глазу нет сферических поверхностей, а есть сложные по форме поверхности для борьбы с aberrациями. Кроме того, с той же целью коэффициент преломления хрусталика непостоянен и уменьшается от центра к периферии. В этом смысле зрительная система глаза также уникальна.

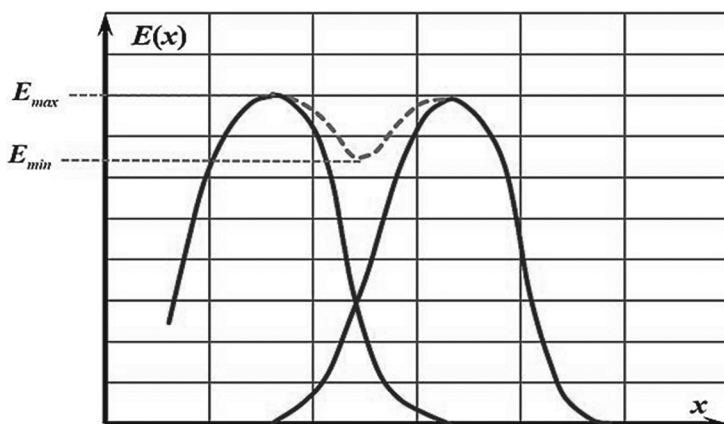


Рис. 11.9. Распределение освещённости (так называемый инструментальный контур) разрыва кольца Ландольта

Зависимость остроты различения от яркости записана Литго эмпирическим уравнением:

$$S_{\alpha} = a - 0,49 \lg(L_{\phi}), \quad (11.14)$$

где a – постоянная, зависящая от формы тест-объекта (для черного кольца Ландольта $a = 1,1$).

Муном и Спенсер также было составлено эмпирическое уравнение, описывающее зависимость остроты различения кольца Ландольта с отрицательным контрастом, близким к единице:

$$S_{\alpha} = S_{\alpha \text{ макс}} \frac{L_{\phi}}{(0,28 + \sqrt[3]{L_{\phi}})^3}, \quad (11.15)$$

где $S_{\alpha \text{ макс}}$ – максимальное значение остроты различения для исследуемого тест-объекта.

Оба эмпирических уравнения получены из условий измерения разрешаемого угла с вероятностью различения в пределах 0,5–0,6. В пределах 0,1–10² кд/м² оба уравнения достаточно хорошо описывают зависимость S_{α} . В области яркостей $L_{\phi} > 10^2$ кд/м² более точные результаты обеспечивает уравнение Муна и Спенсера (рис. 11.10).

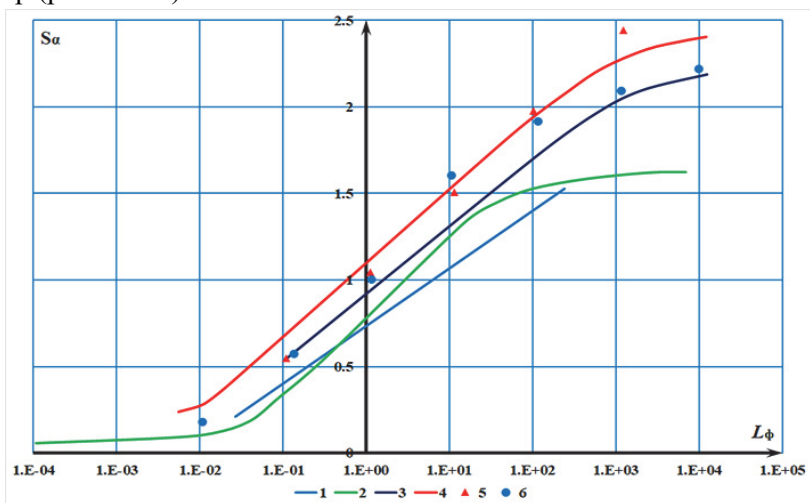


Рис. 11.10. Зависимость остроты различения от яркости:
 1 – Кобб и Мосс; 2 – Кениг и Гехт; 3 – Литго; 4 – Зидентопф;
 Δ – по (11.14); o – по (11.15)

Острота различения неодинакова для объектов, обладающих различными контрастами. Зависимость остроты различения от порогового контраста объекта с фоном приведена на рис. 11.11 по данным Г.Н. Раутиана и Н.И. Пинегина.

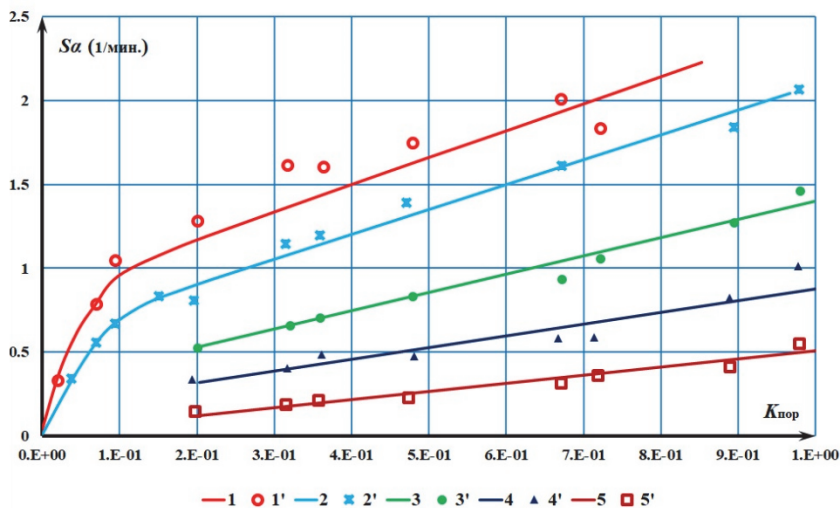


Рис. 11.11. Зависимость остроты различения от порогового контраста при различных значениях L_{ϕ} кд/м²:
1 – 10³; 2 – 10²; 3 – 10; 4 – 1; 5 – 0.1

С возрастом острота зрения ухудшается. Одна из возможных эмпирических формул расчёта относительного уменьшения остроты зрения с возрастом A – формула Адриана:

$$S_{\alpha \text{ отн}} = 1 - 1,317 \cdot 10^{-4} (A - 20)^m, \quad (11.16)$$

где $m = 1,024 + (K + 0,199)^{-0,148}$; K – фотометрический контраст; A – возраст человека.

11.5. Адаптация

Адаптация – процесс изменения зрительной системы под осуществляющим в настоящее или предшествующее время воздействием стимулов, имеющих разные яркости, спектральные составы и угловые размеры. Различают темновую и световую адаптации. Темновая адаптация сопровождается переходом от света к более темным условиям освещения. При темновой адаптации нет опасности для зрительной системы, поэтому это медленный процесс (40–50 минут). Переход из темноты к более яркому свету – световая адаптация, которая происходит гораздо быстрее, за 5–10 минут, чтобы не повредить зрительную систему.

Характер адаптации принято определять зависимостью пороговой яркости или абсолютной световой чувствительности от времени. Адаптация – сложный процесс комплексной работы зрительной системы, координируемой центральными участками коры головного мозга с нижеперечисленными основными механизмами. Если говорить о темновой адаптации, то её действие сопровождается повышением чувствительности зрительной системы. Первый механизм связан с переходом к приёмникам ночного зрения (от колбочек к палочкам). Второй – с увеличением диаметра зрачка от полутора-двух до восьми миллиметров. Третий механизм связан с увеличением времени зрительной инерции до четырёх раз.

Времени требуют, прежде всего, фотохимическая реакция, диффузия носителей в синапсе, биологические способы передачи импульсов. При увеличении времени – увеличивается число поглощённых фотонов, а значит и чувствительность. Четвёртый – механизм повышения чувствительности из-за переключения рецепторов и подключения до сотни рецепторов к одному нервному волокну. Площадь рецептивных полей при этом может увеличиться в семь тысяч раз. Пятый – фотохимическая реакция, в которой при уменьшении яркости увеличивается концентрация светочувствительного вещества. При этом чувствительность может возрасти до 14 раз. Шестой механизм – участие и повышение чувствительности центрального звена зрительной системы.

При совместном участии всех механизмов чувствительность зрительной системы при темновой адаптации может увеличиться в 60 миллионов раз. Что касается световой адаптации, то к уже описанным механизмам добавляют механизм защиты от большого потока, попадающего в глаз, например, поглощение «лишнего» света меланином радужной оболочки. Для световой адаптации все названные механизмы приводят к уменьшению чувствительности зрительной системы. На рисунке 11.12 представлены зависимости от времени чувствительности зрительной системы $(L_{\text{пор}})^{-1}$ при разных яркостях, на которые реагирует глаз при световой адаптации.

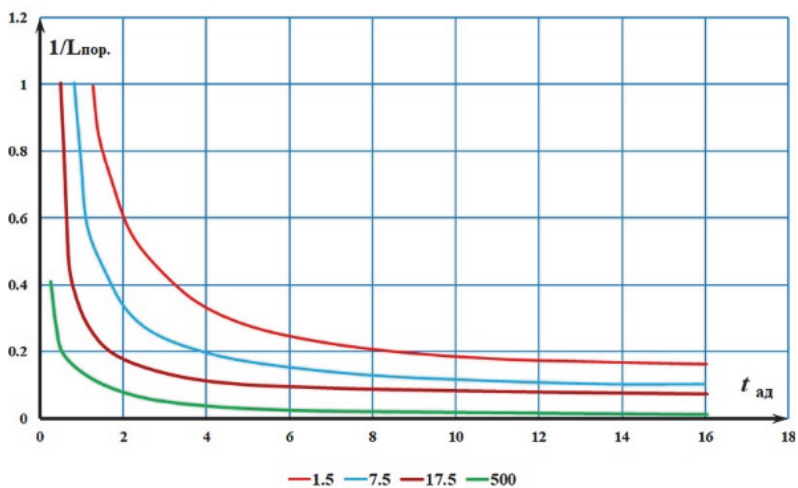


Рис. 11.12. Изменение световой чувствительности от времени адаптации (мин.) при различных яркостях адаптации, кд/кв.м

11.6. Инерция зрения

Инерция зрения – это свойство сохранять прежнее состояние из-за конечной длительности фотохимической реакции, диффузии ионов, образования импульсов и самого инерционного процесса – передачи импульсов по нервному волокну. Для коли-

чественного описания нужно представлять, какую характеристику при этом можно измерить. Вводится понятие эффективной яркости применительно к инерционным процессам L_3 , равной постоянной яркости, которая при длительном наблюдении создаёт такое же ощущение, как яркость, меняющаяся по времени. Обратимся опять к рис. 11.1, где на правом поле устанавливается выбранная постоянная яркость, а на левое подаётся сигнал переменной яркости. Фиксируется момент, когда светлоты обоих полей будут по мнению наблюдателей одинаковыми. Потом похожим образом поступают по очереди с другими постоянными яркостями для построения зависимости $L_3 = N(t)$. Чтобы математически выразить измеренные зависимости (рис. 11.13), А.В. Луизов предложил по примеру механики использовать дифференциальные уравнения.

При определении баланса процессов затухания и развития зрительного ощущения необходимо учитывать суммирующую способность зрительной системы. Эта способность выражается зависимостью уровня его реакции от совокупности числа фотонов, эффективно поглощенных сетчаткой в течение всего времени зрительной инерции, а также их распределением по этому промежутку времени. Следовательно, можно предположить, что бесконечно малому приросту действия излучения будет соответствовать некоторое, также бесконечно малое приращение эффективной яркости:

$$dN(\theta) = \frac{1}{\vartheta} L(t) A(\theta - t) dt, \quad (11.17)$$

где θ и t – координаты времени, зрительного ощущения и вызывающего его излучения; $L(t)$ – изменяющаяся при включении яркость сигнала; $A(\theta - t)$ – безразмерная функция формирования зрительной системы, характеризующая способность зрительной системы сохранять и суммировать ощущения во времени; ϑ – постоянная, имеющая размерность времени.

Функция формирования ощущения $A(\theta - t)$ определяется совокупностью функций затухания зрительного ощущения и его развития. Принимая в соответствии с суммирующим свойством

зрительной системы эффективную яркость, подчиняющуюся правилу аддитивности, получаем:

$$N(\theta) = \frac{1}{\vartheta} \int_{-\infty}^{\theta} L(t)A(\theta-t)dt, \quad (11.18)$$

На рисунке 11.13 есть ещё обозначение $\varphi(t)$ – функции затухания ощущения при выключении излучения.

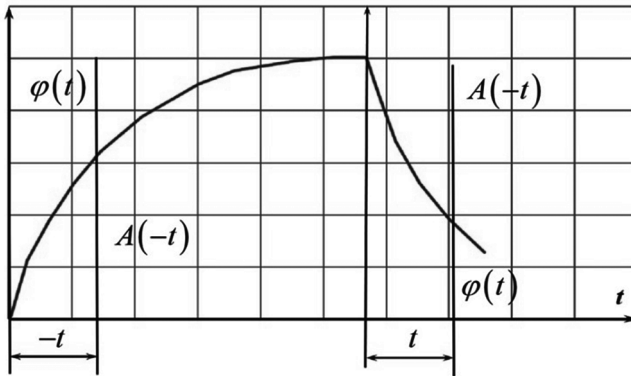


Рис. 11.13. Пример изменения ощущения при включении и выключении светового сигнала

А.В. Луизов предположил, что есть равенство числа ионов последствия числу фотонов, непретобразованных в зрительное ощущение в течение всего времени действия излучения. Из этого следует его гипотеза о том, что функция затухания ощущения $\varphi(t)$ идёт по той же кривой, что и функция $A(-t)$ только перевёрнутой:

$$A(-t) = 1 - \varphi(t). \quad (11.19)$$

Изменение эффективной яркости последствия можно принять в первом приближении пропорциональным уменьшению концентрации отрицательных ионов, скопившихся в сетчатке после прекращения действия излучения. Предполагая процесс эффективного уменьшения концентрации ионов за счет преобразования их в молекулы ретинена молекулярным, а процесс уменьшения концентрации за счет рекомбинации с положительными

ионами распада молекул фотореагента – бимолекулярным, можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$-\frac{dc}{dt} = ac + bc^2, \quad (11.20)$$

где $\frac{dc}{dt}$ – скорость уменьшения концентрации отрицательных ионов; a и b – коэффициенты скорости восстановления молекул фотореагентов.

Интегрируя полученное уравнение (11.20) после разделения переменных в пределах от c_0 до c и от 0 до t , получаем:

$$c = \frac{ac_0}{a \cdot \exp(at) + bc_0 \exp(at) + bc_0}, \quad (11.21)$$

где c_0 и c – начальное и текущее значения концентрации отрицательных ионов.

Обозначив $\gamma = \frac{bc_0}{a}$, получим согласно (11.19) выражение функции зрительной инерции:

$$\varphi(t) = \frac{c}{c_0} = \frac{1}{(1 + \gamma) \exp(at) - \gamma}. \quad (11.22)$$

Анализируя полученное уравнение, можно сделать следующие выводы:

- функция зрительной инерции $\varphi(t)$ приближается к экспоненте $\exp(-at)$ при уменьшении γ и обращается в нее при $\gamma = 0$;
- по мере увеличения γ функция зрительной инерции приближается к гиперболической зависимости типа

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\vartheta}\right)^2}, \quad (11.23)$$

где ϑ – постоянная времени в (11.18).

Из (11.18) следует, что интегрирование функции зрительной инерции дает некоторую величину, зависящую лишь от свойств зрительной системы. Эта величина имеет размерность времени.

Для доказательства этих положений рассмотрим соотношение эффективной и фотометрической яркостей, установившееся в результате длительного действия излучения постоянной яркости L . Согласно (11.18) получим:

$$N(\infty) = L = \frac{1}{\vartheta} \int_{-\infty}^0 L(t) A(t) dt = \frac{1}{\vartheta} L \int_0^{\infty} \varphi(t) dt. \quad (11.24)$$

Откуда

$$\vartheta = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt. \quad (11.25)$$

Таким образом, время зрительной инерции ϑ показывает, какое время зрительная система способна удерживать ощущение постоянным, чтобы потом его сразу потерять до нуля.

Приведём одну из самых удачных формул аппроксимирующих зависимость времени инерции от яркости адаптации:

$$\vartheta = 0,13 - 0,08 \text{th}(\lg(L) + 1), \quad (11.26)$$

Для ночного зрения часто принимают $\vartheta = 0,2$ с, а для дневного зрения при яркостях адаптации не менее $100 \text{ кд/м}^2 - 0,05$ с.

С инерцией зрительной системы связана ещё одна важная для светотехники величина критическая частота мелькания $f_{\text{кр}}$. По МКО $f_{\text{кр}}$ – это частота смены световых стимулов, выше которой мелькания в данных условиях не воспринимаются. Можно сказать и по-другому, что эта частота – минимальная частота, обеспечивающая слитное восприятие вспышек (проблесков) с заданной вероятностью; $f_{\text{кр}}$ исследовалась давно, было установлено, что она зависит от предъявляемой яркости. Для практических целей часто используют формулу Айвса–Портера:

$$f_{\text{кр}} = b + a \cdot \lg(L), \quad (11.27)$$

где a, b – коэффициенты зависящие от скважности световых импульсов, т.е. отношения периода следования вспышек к их дли-

тельности; L – яркость вспышек (в виде прямоугольных импульсов) в стильбах (1 стильб равен 10^4 кд/м²).

При частоте следования вспышек не менее $f_{кр}$ вместо яркости вспышки человек будет реагировать по закону Тальбота на так называемую достижимую яркость:

$$L_0 = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt, \quad (11.28)$$

где $L(t)$ – зависимость яркости вспышки от времени; T – период следования вспышек.

11.7. Индукция

Индуктивным действием называют воздействие одного участка поля наблюдения на другой. Оно зависит от распределения яркости в поле зрения. Положительная индукция сопровождается ростом зрительного ощущения ($K_{пор}$ уменьшается), а отрицательная – уменьшением зрительного ощущения ($K_{пор}$ увеличивается). Важнейшим проявлением индукции считается индуктивное действие находящегося в поле зрения источника света с яркостью, во много раз превышающей яркость окружающего фона. Свойства светящихся тел влиять на восприятие человека, наблюдающего фон, принято считать блёскостью. По МКО блёскость – условия видимости, при которых проявляется дискомфорт или уменьшается способность видимости детали объекта или объектов вследствие неблагоприятного распределения яркости или экстремальных контрастов.

Тогда *слепящая блёскость* – блёскость, ухудшающая видимость объекта, но не обязательно вызывающая дискомфорт. Дискомфотная блёскость (или просто *дискомфорт*) – блёскость, вызывающая неприятные ощущения или дискомфорт, но не обязательно ухудшающая при этом видимость объектов. Снижение чувствительности зрительной системы в результате отрицательного индуктивного действия блёскости называют ослеплённостью. Коэффициент ослеплённости S принято определять отношением

порогового контраста (контрастной чувствительности), как самой уязвимой функции зрения при рассмотрении объекта, или пороговой разности яркости, с блёским источником (величина с индексом s) и без него (рис. 11.14):

$$S = \frac{\Delta L_{\text{пор},s}}{\Delta L_{\text{пор}}} = \frac{K_{\text{пор},s}}{K_{\text{пор}}} . \quad (11.29)$$

Без учёта собственного света сетчатки можно считать, что пороговая разность яркости пропорциональна яркости фона (адаптации), для расчета порогового контраста с блёским источником вводят понятие эквивалентной вуалирующей яркости β_3 . Тогда коэффициент ослеплённости можно записать в следующем виде:

$$S = 1 + \frac{\beta_3}{L_\Phi} . \quad (11.30)$$

МКО рекомендовала для расчёта β_3 использовать следующую эмпирическую формулу:

$$\beta_3 = m \frac{E}{\theta^n} , \quad (11.31)$$

где θ – угол на блёский источник света по рис. 11.14; m, n – коэффициенты аппроксимации. По результатам исследований МКО были приняты следующие значения: $m = 10, n = 2$.

Если действуют несколько блёских источников, то МКО для нахождения результирующего β_3 предлагает суммировать β_3 от каждого слепящего источника.

В.В. Мешков существенно уточнил формулу (11.31) по результатам своих исследований:

$$\beta_3 = (3 \cdot \lg(L) - 8,54) \frac{I \cos(\theta)}{(\theta l)^2} , \quad (11.32)$$

где L, I – яркость и сила света блёского источника; l – расстояние от блёского источника до наблюдателя; θ – угол между направлением на блёский источник и линией зрения наблюдателя.

Для яркости блёского источника больше миллиона кд/м², формула (11.32) превращается в формулу МКО (11.31).

Для оценки возникающих от освещения напряжения и неудобства в работе используется показатель дискомфорта M :

$$M = L \frac{\Omega^{0,5}}{f(\theta)L_{\phi}^{0,5}}, \quad (11.33)$$

где L – яркость блёского источника; L_{ϕ} – яркость фона (адаптации) экрана по направлению линии зрения наблюдателя; $f(\theta)$ – функция, характеризующая позицию блёского источника (рис. 11.14); Ω – угловой размер блёского источника в виде телесного угла в стерadians.

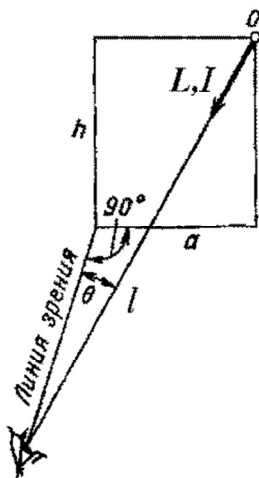


Рис. 11.14. Схема расположения блёского источника по отношению к линии зрения наблюдателя

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Луизов, А.В. Инерция зрения / А.В. Луизов. – М.: Оборонгиз, 1961. – 249с.

В книге на основе общей теории инерции зрения определена роль инерции в зрительных процессах при наблюдении различных объектов. В результате установления связи между квантовой природой света и инерцией зрения найден новый подход к вопросу о разрешающей силе глаза и зрительных приборов. Дан ряд формул, таблиц и графиков для практических расчетов в области видимости объектов, в особенности движущихся (при наблюдении просто глазом и с помощью стробоскопа), и сигнальных огней. Выведены формулы определения разрешающей силы зрительных приборов в зависимости от яркости фона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебник «Основы светотехники» содержит базовые сведения, необходимые для освоения всех дисциплин специальности светотехника. Светотехника – область науки и техники, предметом которой являются разработка способов генерации, пространственного перераспределения оптического излучения, а также его преобразования в другие виды энергии и использование в различных целях на базе научно обоснованного проектирования установок и устройств.

Задача светотехники – развитие науки о свете в рамках лучевых, фотометрических представлений и применения её результатов для комфортного освещения, эффективного использования электроэнергии, а также в технологических целях, медицине, при освоении мирового океана и космоса. Можно назвать XXI век веком света. Области применения света в настоящее время непрерывно расширяются. Глава 1 «Световое поле» является во многом мировоззренческой, определяющей основной объект исследования в светотехнике – свет, его характеристики, основные законы распространения в пространстве.

Преобразование энергии излучения в другие виды энергии осуществляется приемниками оптического излучения, которые детально исследуются в гл. 2. На свойствах оптических приемников основываются методы измерения характеристик излучения. Измерение энергетических величин, характеризующих излучение, называется радиометрией. Измерение величин, характеризующих излучение по производимому им зрительному ощущению (в условиях, определяемых известными соглашениями), именуется фотометрией. Системы величин, описывающих излучение по их действию на различные приемники, изучаются в гл. 3.

Перераспределение световых потоков в пространстве основано на законах геометрической оптики, что определяет предмет гл. 4. В однородных средах свет распространяется по прямой линии (лучу), что и дало название этому разделу – геометрическая оптика. Центральным элементом геометрической оптики является оптическая система, формирующая светораспределение заданного типа. Оптические системы, специально предназначенные для пространственного распределения световых потоков, называются световыми приборами (СП).

Без современных СП невозможно рационально и высококачественно создать светотехнические устройства искусственного и (или) естественного освещения – осветительные установки (ОУ). Они являются основным техническим средством, обеспечивающим создание требуемых условий освещения и сигнализации во всех сферах народного хозяйства и быта.

На распространение света существенно влияют характеристики среды. В среде возможно рассеяние и поглощение света, а на границах сред происходит отражение и преломление. Все процессы распространения света в среде принято называть переносом излучения, которое описывается уравнением переноса излучения в гл. 5. Без знания законов переноса излучения невозможно создание систем сигнализации, подводных осветительных систем, систем оптической связи, систем оптического мониторинга атмосферы и поверхности земли из космоса, взаимодействия излучения с биологическими тканями.

Но как вещество оказывает воздействие на излучение, так и излучение при взаимодействии с веществом изменяет его свойства. Поэтому перенос излучения в более общем смысле подразумевает совместную кинетику частиц вещества и излучения – гл. 6. Эти процессы составляют основу теории всех источников оптического излучения.

Эффективность решения любой зрительной задачи человеком определяется характеристиками комплексной системы приема и обработки оптической информации, приводящей к возникновению ощущения яркости и цветности объектов, получившей в светотехнике название зрительной системы (ЗС) человека. ЗС состоит из глаза, передающего сигналы рецепторов (приемников излучения) в высшие разделы головного мозга, где и формируется цветоцветовое ощущение окружающей среды. В главах 7–11 рассмотрены основные характеристики ЗС, необходимые для количественной и качественной оценки освещения, создаваемого осветительными установками.

Основные характеристики и математические модели оптической системы глаза человека, определяющие его пространственное разрешение, рассмотрены в гл. 7.

В главе 8 рассмотрены этапы преобразования зрительной информации в сетчатке глаза, ее устройство и аномалии цветового зрения, возникающие при врожденных заболеваниях.

Экспериментальные исследования показывают, что ЗС плохо оценивает абсолютное значение светотехнических параметров объектов, но с высокой точностью определяет наличие отличий между ними. На базе этого свойства зрения основано нормирование качественных и количественных характеристик освещения. Вопросы описания методик экспериментальных исследований и результаты математического моделирования пороговых характеристик ЗС рассмотрены в гл. 9.

Основы учения о цвете, современные цветовые пространства, с помощью которых идентифицируются, рассчитываются и измеряются цветовые характеристики материалов, источников света и световых приборов, а также принцип построения математической модели зрительной системы для пороговых наблюдений цветных объектов на цветных фонах рассмотрены в гл. 10.

ЗС человека принято характеризовать функциями зрения, которые разделяются на установившиеся или стационарные и неуставившиеся или нестационарные. Основное назначение функций зрения – оценивать эффективность работы ЗС при решении различных зрительных задач. В главе 11 рассмотрены экспериментальные зависимости основных зрительных функций от условий наблюдения, а также их аналитические аппроксимации. Рассмотрены вопросы неуставившихся процессов адаптация к изменяющимся условиям, инерция зрительной системы и индукция.

Приложение содержит указатель имен исследователей, внесших существенный вклад в темы учебника.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Указатель имен

Авогадро: Амедео, Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro di Quaregna e Cerreto, 9.08.1776, Турин – 9.07.1856, Турин – итальянский учёный-химик, первооткрыватель фундаментального физико-химического закона, названного в его честь: число молекул всегда одно и то же в одинаковых объемах любых газов.

Аллар: Эмиль, Émile Allard – генеральный инспектор маяков во Франции в конце XIX в., опубликовал свои измерения видимости прожекторных пучков в монографии *Les Phares* (Маяки), 1900 г.

Альгазен: Абу Али ибн аль-Хайсам: 965, Басра – 1039, Каир, латинизированное имя Alhazen – арабский учёный-универсал: математик, механик, физик и астроном, нередко его именуют «отцом оптики».

Амбарцумян: Виктор Амазаспович 5.09.1908, Тбилиси – 12.08.1996, Бюракан, Армения – армянский и советский астрофизик, астроном, один из основоположников теоретической астрофизики, основатель школы теоретической астрофизики СССР. Получил в 1943 г. аналитическое решение уравнения переноса.

Ампер: Андре-Мари, André-Marie Ampère, 20.01.1775, Лион – 10.06.1836, Марсель – французский физик, математик и естествоиспытатель, провёл множество опытов по исследованию взаимодействия между магнитом и электрическим током, открыл взаимодействие между электрическими токами.

Араго: Франсуа Жан Доминик, Dominique François Jean Arago, 26.02.1786, Эстажель – 2.10.1853, Париж – французский физик, астроном и политический деятель, открыл поляризацию рассеянного света неба, экспериментально подтвердил существование светлого пятна в центре геометрической тени непрозрачного объекта (пятно Пуассона-Араго), что стало одним из решающих доказательств правильности теории дифракции, разработанной Френелем, первый заметил, что железные опилки притягиваются проводником электричества в опыте Эрстеда.

Архимед: Ἀρχιμήδης, 287, Сиракузы – 212 гг. до н.э., Сиракузы – древнегреческий учёный и инженер, сделал множество открытий в области геометрии, предвосхитил многие идеи математического анализа, заложил основы механики, гидростатики.

Балеску: Раду, Radu Bălescu, 18.06.1932, Бухарест – 1.06.2006, Дробета-Турну-Северин, Румыния – румынский и бельгийский (с 1959 г.) физик. Его работы посвящены статистической физике заряженных частиц (оператор столкновений Балеску-Ленарда) и теории переноса магнитно-ограниченной плазмы.

Бардин: Кирилл Васильевич, 1.12.1929, Москва – 1995, Москва – советский и российский психолог, специалист в области психофизики, общей и педагогической психологии.

Бартолин: Расмус, Rasmus Bartholin, 13.08.1625, Роскилле, Дания – 4.11.1698, Копенгаген – датский учёный: медик, анатом, физик, математик и педагог XVII века. Известность к нему пришла после открытия эффекта расщепления в анизотропных средах луча света на две составляющие, известного теперь как двойное лучепреломление.

Бессель: Фридрих Вильгельм, Friedrich Wilhelm Bessel, 22.07.1784, Минден – 17.03.1846, Кёнигсберг, Германия – немецкий астроном, математик, физик и геодезист. Он был первым астрономом, определившим достоверные значения расстояния от Солнца до другой звезды методом параллакса. Некоторые важные математические функции были названы функциями Бесселя после его смерти, хотя первоначально они были открыты Даниэлем Бернулли, а затем были обобщены Бесселем.

Бете: Ханс Альбрехт, Hans Albrecht Bethe, 2.07.1906, Страсбург, Германия – 6.03.2005, Итака, США – американский астрофизик и ядерный физик. В сферу его интересов также входили квантовая электродинамика и физика твёрдого тела.

Биберман: Леон Михайлович, 7.04.1915, Поти – 23.09.1998, Москва – советский и российский физик, педагог. Один из основателей школы теплофизики в СССР.

Био: Жан-Батист, Jean-Baptiste Biot, 21.04.1774, Париж – 3.02.1862, Париж – французский учёный, физик, геодезист и астроном. Установил связи между молекулярным строением тел и свойствами проходящего через эти тела света, обуславливающими явление его поляризации. Исследовал магнитные поля токов, текущих по тонким проводам различной формы, что позволило получить формулу для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока – закон Био – Савара – Лапласа.

Блондель: Андре-Эжен, André-Eugène Blondel, 28.08.1863, Шомон, Верхняя Марна, Франция – 15.11.1938, Париж – французский физик и инженер, предложил систему фотометрических единиц измерения.

Блэкуэлл: Н. Richard Blackwell, 1921, Гáррисберг, США – 1995 – американский светотехник, исследователь зрения

Боголюбов: Николай Николаевич, 21.08.1909, Нижний Новгород – 13.02.1992, Москва – советский физик-теоретик и математик, основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике. Основные работы посвящены асимптотическим методам нелинейной механики, квантовой теории поля, статистической механике, вариационному исчислению, приближённым методам математического анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, теории устойчивости, теории динамических систем и другим областям теоретической физики.

Бозе: Шатъендрат, Satyendra Nath, 1.01.1894, Калькутта – 4.02.1974, Калькутта, Индия – индийский физик, специализировавшийся в математической физике. Один из создателей квантовой статистики (статистика Бозе–Эйнштейна), теории конденсата Бозе–Эйнштейна. В его честь назван класс элементарных частиц – бозоны.

Больцман: Людвиг Эдуард, Ludwig Eduard Boltzmann, 20.02.1844, Вена – 5.09.1906, Дуино, Австро-Венгрия – австрийский физик-теоретик, основатель статистической механики и молекулярно-кинетической теории.

Борн: Макс, Max Born, 11.12.1882, Бреслау – 5.01.1970, Гёттинген – немецкий физик-теоретик и математик, философ науки, один из создателей квантовой механики, сделал вклад в физику твёрдого тела и оптику.

Бройль де: Луи, Louis de Broglie, 15.08.1892, Дьеп, Франция – 19.03.1987, Лувесьен, Франция – французский физик-теоретик, один из основоположников квантовой механики. Ему принадлежит гипотеза о волновых свойствах материальных частиц (волны де Бройля, или волны материи).

Брунс: Эрнст Генрих, Ernst Heinrich Bruns, 4.09.1848, Берлин – 23.08.1919, Лейпциг – немецкий математик и астроном.

Брюстера: Дейвид Брюстер, Sir David Brewster, Джедборо, Шотландия, 11.12.1781, – 10.02.1868, Мелроуз, Шотландия – шот-

ландский физик, биограф и преподаватель, редактор. Специализировался на изучении оптических явлений, прежде всего спектральных и поляризационных. Открыл в 1815 г. связь между показателем преломления диэлектрика и углом падения света, при котором отражённый от поверхности диэлектрика свет полностью поляризован

Бугер: Пьер, Pierre Bouguer, 16.02.1698, Круазик (Croisic), Франция – 15.08.1758, Париж – французский физик, математик и астроном, основатель фотометрии.

Бэр: Август, August Beer, 31.07.1825, Трир, Пруссия – 18.11.1863, Бонн – физик, его университетские лекции после смерти изданы в виде курсов, пользующихся большой известностью, дал математическую формулировку фотометрии.

Ваальс: Йоханнес Дидерик ван дер, Johannes Diderik van der Waals; 23.11.1837, Лейден – 8.03.1923, Амстердам – голландский физик. В первую очередь известен как автор уравнения Ван-дер-Ваальса, с хорошей точностью описывающего поведение реального газа. В 1869 году он открыл силы взаимодействия между молекулами, которые впоследствии были названы его именем.

Вебер: Эрнст Генрих, Ernst Heinrich Weber, 24.06.1795, Виттенберг – 26.01.1878, Лейпциг – немецкий психофизиолог и анатом.

Вигнер: Юджин, Jenő Pál Wigner, 17.11.1902, Будапешт – 1.01.1995, Принстон, США – венгерско-американский физик-теоретик, внёсший вклад в математическую физику.

Вин: Вильгельм Карл Вернер Отто Фриц Франц, Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz, 13.01.1864, Фишхаузен: Приморск, Россия – 30.08.1928, Мюнхен – немецкий физик, открыл законы, управляющие тепловым излучением.

Винер: Норберт, Norbert Wiener, 26.11.1894, Колумбия, США – 18.03.1964, Стокгольм, Швеция – американский математик, один из основоположников кибернетики и теории искусственного интеллекта.

Витело: Эразмус Циолек, Erazmus Ciolek Witelo, ок. 1220, Силезия – ок. 1280 – средневековый учёный, поляк по матери и немец по отцу, написал между 1270 и 1278 гг. «Оптику» в 10 кн., которая представляет собой переработку «Книги оптики» Ибн аль-Хайсама, которую существенно дополнил своими приборами и экспериментами. Занимаясь исследованиями радуги, он сконструировал лучшую

для своего времени призму для изучения спектра. Трактат Витело оказал заметное влияние на последующих учёных, вплоть до Леонардо да Винчи и Иоганна Кеплера.

Власов: Анатолий Александрович, 20.08.1908, Балашов, Россия – 22.12.1975, Москва – советский и российский физик-теоретик, специалист по физике плазмы и статистической физике. Основные труды по оптике, физике плазмы, теории кристалла, теории гравитации, статистической физике, теории образования структур при различных типах коллективных взаимодействий

Гален: Γαληνός, сентябрь 129, Пергам, Малая Азия – ок. 216 г., Рим – древнеримский медик, хирург и философ, внёс весомый вклад в анатомию, физиологию, фармакологию и неврологию, а также философию и логику.

Галилей: Галилео, Galileo Galilei, 15.02.1564, Пиза – 8.01.1642, Арчетри – итальянский физик, механик, астроном, философ, математик.

Гамильтон: Уильям Роуэн, William Rowan Hamilton, 4.08.1805, Дублин – 2.09.1865, Дублин – ирландский математик, механик-теоретик, физик-теоретик, один из лучших математиков XIX в. Известен фундаментальными открытиями в математике (кватернионы, основы векторного анализа, вариационное исчисление, обоснование комплексных чисел), аналитической механике (гамильтонова механика) и оптике.

Гаусс: Карл Фридрих, Carl Friedrich Gauß, 30.04.1777, Брауншвейг – 23.02.1855, Гёттинген – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён.

Гельмгольц: Герман Людвиг Фердинанд, Hermann von Helmholtz, 31.08.1821, Потсдам – 8.09.1894, Берлин – немецкий физик, врач, физиолог, психолог, акустик. Изучение процессов брожения и теплообразования в живых организмах приводит Гельмгольца к формулировке закона сохранения энергии. Гельмгольц способствует признанию теории трёхцветового зрения Томаса Юнга.

Герц: Генрих Рудольф, Heinrich Rudolf Hertz, 22.02.1857, Гамбург – 1.01.1894, Бонн – немецкий физик, экспериментально подтвердил электромагнитную теорию света Джеймса Максвелла, доказал существование электромагнитных волн, подробно исследовал отражение, интерференцию, дифракцию и поляризацию электромаг-

нитных волн, доказал, что скорость их распространения совпадает со скоростью распространения света, и что свет представляет собой разновидность электромагнитных волн.

Гершель: Фредерик Уильям, Friedrich Wilhelm Herschel, 15.11.1738, Ганновер – 25.08.1822, Слау близ Лондона – английский астроном, оптик и композитор немецкого происхождения, изучая Солнце, открыл в его спектре инфракрасные лучи (1800).

Гершун: Андрей Александрович, 22.10.1903, Санкт-Петербург – 6.12.1952, Ленинград – советский учёный в области фотометрии и светотехники, основатель научной школы по гидрооптике. Создатель теории светового поря.

Грассман: Герман Гюнтер, Hermann Günther Grassmann, 15.04.1809, Штеттин – 26.09.1877, там же – немецкий физик, математик и филолог.

Гримальди: Франческо Мария, Francesco Maria Grimaldi, 02.04.1618, Болонья – 28.12.1663, там же – итальянский физик и астроном ордена иезуитов, открыл дифракцию и интерференцию света, ввёл представление о волновой природе света, связал с нею цвета, описал солнечный спектр, полученный с помощью призмы

Грин: Герберт Сидней, Herbert Sydney Green, 17.12.1920, Ипсвич, Англия – 16.02.1999, Аделаида, Австралия – британский физик, докторант Нобелевского лауреата Макса Борна в Эдинбурге. Макс Борн и Берт Грин внесли вклад в создание современной кинетической теории. Берт Грин соответствует букве «Г» в аббревиатуре «цепочка ББГКИ».

Гук: Роберт, Robert Hooke, 18.07.1635, Фрешвотер, Остров Уайт – 3.03.1703, Лондон – английский естествоиспытатель и изобретатель, которого можно назвать одним из отцов физики, в особенности экспериментальной.

Гуревич: Михаил Моисеевич, 1903–1990 – специалист в области теории фотометрии, колориметрии, физической оптики, оптического приборостроения.

Гюйгенс: Христиан, Christiaan Huygens, 14.04.1629, Гаага – 8.07.1695, там же – голландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель, один из основоположников теоретической механики и теории вероятностей, внёс значительный вклад в оптику,

молекулярную физику, астрономию, геометрию, положил начало волновой оптике.

Дебай: Петер Йозеф Вильгельм, Peter Joseph William Debye; 24.03.1884, Маастрихт, Голландия – 2.11.1966, Итака, США – нидерландский физик и физико-химик, предложил модель твёрдого тела, теоретически описал влияние тепловых колебаний кристаллической решётки на дифракцию рентгеновских лучей, развил дипольную теорию диэлектриков, на основе которой объяснил их дисперсионные свойства, разработал метод перевала для вычисления некоторых интегралов специального вида, создал квантовую теорию эффекта Зеемана.

Декарт: Рене, René Descartes, 31.03.1596, Лаэ, Франция – 11.02.1650, Стокгольм, Швеция – французский философ, математик и естествоиспытатель; один из основоположников философии Нового времени, создатель аналитической геометрии, одна из ключевых фигур научной революции.

Джермер: Лестер Хэлберт, Lester Halbert Germer, 10.11.1896, Чикаго – 3.10.1971, Шауанганк-Ридж, США – американский физик, подтвердил совместно с Клинтон Дэйвиссоном гипотезу Де Бройля о корпускулярно-волновой природе микрочастиц в ходе эксперимента, который получил название опыт Дэвиссона - Джермера.

Джонс: Роберт Кларк, Robert Clark Jones, 30.06.1916, Толедо, США – 26.04. 2004 – американский физик, работавший в области оптики. Предложил математическую модель для описания поляризации когерентного света – матрица Джонса.

Джоуль: Джеймс Прескотт, James Prescott Joule, 24.12.1818, Солфорд, Англия – 11.11.1889, Сэйл, Англия – английский физик, внёсший значительный вклад в становление термодинамики. Обосновал на опытах закон сохранения энергии. Установил закон, определяющий тепловое действие электрического тока. Вычислил скорость движения молекул газа и установил её зависимость от температуры.

Дирак: Поль Адриен Морис Дирак, Paul Adrien Maurice Dirac, 8.08.1902, Бристоль – 20.10.1984, Таллахасси – английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

Долин Лев Сергеевич: 16.05.1936, Горький – российский радиофизик. Впервые сформулировал связь яркости светового поля с корреляционной функцией электромагнитного поля.

Доплер: Христиан Иоганн, Christian Johann Doppler, 29.11.1803, Зальцбург, Австрия – 17.03.1853, Венеция – австрийский математик и физик, первым обосновал зависимость частоты звуковых и световых колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения источника волн и наблюдателя относительно друг друга.

Дэвиссон: Клинтон Джозеф, Clinton Joseph Davisson, 22.11.1881, Блумингтон, США – 1.02.1958, Шарлотсвилл, США – американский физик, экспериментально открыл совместно с Дж. Томсоном дифракцию электронов на кристаллах.

Евклид: Εὐκλείδης, 325 – ок. 265 г. до н.э., Афины – древнегреческий математик, геометр, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

Зеебек: Томас Иоганн Зеебек, Thomas Johann Seebeck, 9.04.1770, Ревель – 10.12.1831, Берлин – немецкий физик, открыл явление возникновения ЭДС на концах последовательно соединённых разнородных проводников, контакты между которыми находятся при различных температурах.

Зейдель: Филипп Людвиг фон, Philipp Ludwig von Seidel, 24.10.1821, Цвайбрюккен – 13.08.1896, Мюнхен – немецкий математик и астроном. В 1856 г. создал теорию aberrаций оптических систем третьего порядка

Зоммерфельд: Арнольд Иоганнес Вильгельм, Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, 5.12.1868, Кёнигсберг – 26.04.1951, Мюнхен – немецкий физик-теоретик и математик, получил ряд важных результатов в рамках «старой квантовой теории», предшествовавшей появлению современной квантовой механики.

Ивон: Жак, Jacques Yvon, 26.04.1903, Ангулем, Франция – 28.09.1979, Париж – французский физик, известен своими работами в области статистической физики.

Кабан: Jean Cabannes, 12.08.1885, Марсель – 31.11.1959, Сен-Сир-сюр-Мер, Франция – французский физик, занимался рассеянием света чистыми газами.

Каджия: Джеймс, James T. Kajiya – уравнение получено в Ph.D. диссертации в университете Юты в 1979 г., с 1979 по 1994 гг. был профессором в Калифорнийском технологическом институте, в настоящее время исследователь в Microsoft Research.

Кельвин: Уильям Томсон (лорд Кельвин), William Thomson, 1st Baron Kelvin, 26.06.1824, Белфаст, Ирландия – 17.12.1907, Ларгс, Шотландия – британский физик, механик и инженер, известный своими работами в области термодинамики, механики, электродинамики.

Кеплер: Иоханнес, Johannes Kepler, 27.12.1571, Вайль-дер-Штадт – 15.11.1630, Регенсбург – немецкий математик, астроном, механик, оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

Кирквуд: Джон Гамбл, John Gamble Kirkwood, 30.05.1907, Готтебо, США – 9.08.1959, Нью-Хейвен, США – американский физик-теоретик и химик. Известен работами по статистической физике, неравновесной термодинамике.

Кирхгоф: Густав Роберт, Gustav Robert Kirchhoff, 12.03.1824, Кёнигсберг – 17.10.1887, Берлин – немецкий физик, прекрасный знаток математики, обладал в то же время редким умением плодотворно прилагать эти знания к труднейшим вопросам математической физики.

Коши: Огюстен Луи, Augustin Louis Cauchy, 21.08.1789, Париж – 23.05.1857, Со, Франция – французский математик и механик, вывел классические уравнения динамики изотропного упругого тела в перемещениях, дал математическую разработку волновой теории света.

Кронекер: Леопольд, Leopold Kronecker, 7.12.1823, Лигниц, Германия – 29.12.1891, Берлин – немецкий математик. Основные труды по алгебре и теории чисел.

Кубелка: Павел, Paul Kubelka, 17.04.1900, Кладно, Чехия в австрийской семье – 1956, Рио-де-Жанейро, Бразилия – химик, специалист по краскам.

Кулон: Шарль Огюстен де, Charles-Augustin de Coulomb; 14.06.1736, Ангулем, Франция – 23.09.1806, Блуа, Франция – французский военный инженер и учёный-физик, исследователь электромагнитных и механических явлений. Наиболее известен как одноименный первооткрыватель того, что сейчас называется законом Кулона, описанием электростатической силы притяжения и отталкивания.

Кюри: Пьер Кюри, Pierre Curie, 15.05.1859, Париж – 19.04.1906, там же – французский учёный-физик, один из первых исследователей радиоактивности.

Ламберт: Иоганн Генрих, Johann Heinrich Lambert, 1728, Мюлуз, Франция – 1777, Берлин – немецкий физик, врач, философ, математик и астроном, один из предшественников неевклидовой геометрии, дал теоретическую трактовку экспериментам П. Бугера.

Ландау: Лев Давидович, 22.01.1908, Баку – 1.04.1968, Москва – советский физик-теоретик, основатель научной школы теоретической физики.

Ландольт: Жак Родольф Эдмунд, Jacques Rodolphe Edmund Landolt, 17.05.1846, Кирхберг, Швейцария – 9.05.1926, Париж, Франция – швейцарский офтальмолог, работающий в Париже, известен исследованиями в области офтальмологии

Лармор: Джозеф, Sir Joseph Larmor, 11.07.1857, Белфаст – 19.05.1942, Холлируд, Северная Ирландия – ирландский физик-теоретик и математик, первым опубликовал (в 1900 г.) в законченном виде релятивистские преобразования пространства и времени, относительно которых уравнения Максвелла сохраняют свой вид, способствовал возникновению теории относительности и квантовой механики.

Ленард: Филипп Эдуард Антон, Philipp Eduard Anton von Lenard, 7.06.1862, Братислава – 20.05.1947, Штутгарт – немецкий физик-экспериментатор, автор многих работ в области физики твёрдого тела и атомной физики.

Ленц: Эмилий Христианович, при рождении Генрих Фридрих Эмиль Ленц, Heinrich Friedrich Emil Lenz, 24.02.1804, Дерпт – 10.02.1865, Рим – российский физик немецкого происхождения, является одним из основоположников электротехники. С его именем связано открытие закона, определяющего тепловые действия тока, и закона, определяющего направление индукционного тока.

Лиувиль: Жозеф, Joseph Liouville, 24.03.1809, Сент-Омер, Франция – 8.09.1882, Париж – французский математик. Систематически исследовал разрешимость ряда задач, дал строгое определение понятию элементарной функции и квадратуры, исследовал возможность интегрирования заданной функции, алгебраической или трансцендентной, в элементарных функциях.

Ломмель: Ойген, Eugen von Lommel, 19.03.1837, Эденкобен, Германия – 19.06.1899, Мюнхен – немецкий физик. Работы по оптике и спектроскопии. Исследовал интерференцию, дифракцию и дисперсию света, люминесценцию.

Лоренц: Антон Хендрик, Hendrik Antoon Lorentz, 18.06.1853, Арнем, Нидерланды – 4.02.1928, Хаарлем, Нидерланды – нидерландский физик-теоретик. Известен прежде всего своими работами в области электродинамики и оптики. Объединив концепцию непрерывного электромагнитного поля с представлением о дискретных электрических зарядах, входящих в состав вещества, он создал классическую электронную теорию.

Люс: Роберт Дункан, Robert Duncan Luce, 16.05.1925 – 11.08.2012 – американский математик и социолог, один из самых выдающихся деятелей в области математической психологии.

Майер: Юлиус Роберт фон, Julius Robert von Mayer, 25.11.1814, Хайльбронн – 20.03.1878 – немецкий медик и естествоиспытатель. В 1842 г. опубликовал работу «Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur» (Замечания о силах неживой природы), в которой указал на эквивалентность затрачиваемой работы и производимого тепла, тем самым обосновал первый закон термодинамики.

Майзель: Сергей Осипович, 14.12.1882, Санкт-Петербург – 5.07.1955, Москва – советский физик, специалист в области светотехники.

Мак Адам: Дэвид, David Lewis MacAdam, 1.07.1910, Аппер Дарби, США – 9.03.1998 – американский физик и специалист по цвету, внесший важный вклад в науку и технологию о цвете в области колориметрии, цветоразличения, цветной фотографии и телевидения, а также определения цвета.

Мак Куллах: Джеймс, James MacCullagh, 1809, Ландахаусси, Северная Ирландия – 24.11.1847, Дублин – британский ирландский физик-теоретик и геометр, предложил теорию несжимаемого эфира.

Максвелл: Джеймс Клерк, James Clerk Maxwell, 13.06.1831, Эдинбург, Шотландия – 5.11.1879, Кембридж, Англия – британский (шотландский) физик, математик и механик, заложил основы современной классической электродинамики (уравнения Максвелла), ввёл в физику понятия тока смещения и электромагнитного поля, предсказал электромагнитные волны, электромагнитную природу света, один из основателей кинетической теории газов. Пионер количественной теории цветов; автор трёхцветного принципа цветной фотографии.

Малюс: Этьенн Луи, Étienne Louis Malus, 23.07.1775, Париж – 23.02.1812, там же – французский инженер, физик и математик,

открыл явление поляризации света при отражении и преломлении от прозрачных сред, закон, впоследствии названный его именем, об интенсивности линейно поляризованного света, прошедшего через поляризатор.

Марци: Йоханнес Маркус (Ян Марек), Johannes Marcus (Jan Marek) Marci, 13.06.1595, Ланшкроун, Чехия – 10.04.1667, Прага – чешский учёный, его исследования посвящены механике и оптике, показал различие между упругими и неупругими столкновениями, открыл дисперсию света и впервые высказал идею о волновой природе света, объяснил радугу и окрашенность тонких плёнок.

Меллони: Мачедонио, Macedonio Melloni, 11.04.1798, Парма – 11.08.1854, Портичи – итальянский физик, доказал тождество инфракрасных, световых и ультрафиолетовых лучей.

Ми: Густав Адольф Феодор Вильгельм Людвиг, Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig Mie, 29.09.1869, Росток – 13.02.1957, Фрайбург, Германия – немецкий физик, создатель теории рассеяния электромагнитных волн на однородных металлических и диэлектрических шарах, основанной на строгом аналитическом решении уравнений Максвелла.

Мун: Парри Хирам, Parry Hiram Moon, 14.02.1898, Бивер Дам – 4.03.1988, Бостон – американский инженер-электрик, который вместе с Доминой Эберл Спенсер (Domina Eberle Spencer) написал восемь научных книг и более 200 статей по теории электромагнитного поля, цветовой гармонии, питанию, эстетической мере и углубленной математике.

Мунк: Франц, Franz Munk, 29.4.1900, Теплице, Чехия, ранее Теплиц-Шёнау, Германия – 24.2.1964, Гослар, Германия – немецкий химик, специалист по краскам.

Мюллер: Ганс, Hans Mueller, 27.10.1900, Амрисвиль, Швейцария – 10.07.1965, Белмонт, США – швейцарский физик и профессор Массачусетского технологического института (MIT). Первоначально развитие его матричного исчисления было засекречено, но в 1948 г. он представил свои работы Оптическому обществу Америки. Его ученик Натан Гриер Парк III написал диссертацию «Матричная оптика», в которой изложил этот метод.

Навье: Клод Луи Мари Анри, Claude Louis Marie Henri Navier, 10.02.1785, Дижон – 21.08.1836, Париж – французский механик и инженер, автор ряда трудов по строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, гидравлике и гидромеханике, считается одним из основателей современной теории упругости. Наиболее известный его вклад в науку – вывод в 1822 г. уравнений Навье – Стокса, играющих ключевую роль в гидродинамике.

Найквист: Гарри, Harry Nyquist, 7.02.1889, Нильсбю, Швеция – 4.04.1976, Фарр, Техас – один из пионеров теории информации, определил, что число независимых импульсов, которые могут быть переданы в единицу времени без искажений, ограничено двойной шириной частотного диапазона канала связи. Это правило сопряжено с известной теоремой Найквиста–Шеннона, сходные результаты получены русским учёным Котельниковым и в русскоязычной литературе называются теоремой Котельникова.

Нейман: Карл Готфрид, Carl Gottfried Neumann, 7.05.1832, Кёнигсберг – 27.03.1925, Лейпциг – немецкий математик. Основные труды по дифференциальным уравнениям и алгебраическим функциям. Работы по математической физике, электродинамике, механике, гидродинамике.

Ньютон: Исаак, Isaac Newton, 4.01.1643, Вулсторп, Англия – 31.03.1727, Лондон – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики и математического анализа, построил первый телескоп-рефлектор и разработал теорию цвета, заложив основы современной физической оптики. Его работы о свете были собраны в его книге «Оптика», опубликованной в 1704 г.

Нюберг: Николай Дмитриевич, 26.12.1898, Тулун, Россия – 21.007.1967, Ленинград, СССР – советский математик, физик, биофизик, поэт, переводчик, основатель математизированной колориметрии.

Пайерлс: Сэр Рудольф Эрнст, Rudolf Ernst Peierls, 5.06.1907, Берлин – 19.09.1995, Оксфорд – английский физик-теоретик немецкого происхождения. Научные труды Пайерлса посвящены квантовой механике и квантовой электродинамике, ядерной физике, физике твёрдого тела, вопросам магнетизма и математической физики.

Парсеваль: Марк-Антуан, Marc-Antoine Parseval des Chênes, 27.04.1755, Розьер-о-Салин, Франция – 16.04.1836, Париж – француз-

ский математик. Равенство Парсевалея – это аналог теоремы Пифагора в векторных пространствах со скалярным произведением.

Паули: Вольфганг Эрнст, Wolfgang Ernst Pauli, 25.04.1900, Вена – 15.12.1958, Цюрих – австро-швейцарский физик-теоретик, работавший в области физики элементарных частиц и квантовой механики, открыл новое квантовое число (позднее названное спином) и сформулировал фундаментальный принцип запрета Паули, объяснивший строение электронных оболочек атомов.

Пельтье: Жан Шарль Пельтье, Jean-Charles Peltier, 22.02.1785, Ам – 27.10.1845, Париж – французский физик, автор трудов по термоэлектричеству, электромагнетизму и метеорологии. Ему принадлежит открытие в 1834 г. явления выделения или поглощения тепла при прохождении электрического тока через контакт двух разнородных проводников, получившего название по его имени.

Пифагор: Πυθαγόρας, лат. Pythagoras, ок. 570, Самос – 490 гг. до н.э., Метапонт – древнегреческий философ, математик, теоретик музыки и мистик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев.

Планк: Макс Мах Karl Ernst Ludwig Planck, 23.04.1858, Киль – 4.10.1947, Гёттинген – немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой физики.

Пойнтинг: Джон Генри, John Henry Poynting, 9.09.1852, Манчестер – 30.03.1914, Бирминген – британский физик, разработал теорию вектора переноса потока энергии электромагнитного поля.

Птолемей: Κλαύδιος Πτολεμαῖος, лат. Claudius Ptolemaeus, ок. 100, Пелузий, Египет – ок. 170, Александрия – позднеллинистический астроном, астролог, математик, механик, оптик, теоретик музыки и географ.

Пуассон: Симеон Дени, Siméon Denis Poisson, 21.06.1781, Питивье – 25.04.1840, Со, Франция – французский математик, механик и физик. Число учёных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики.

Пуркине: Ян Эвангелиста, Jan Evangelista Purkyně, 17.12.1787, Либиховице – 28.07.1869, Прага – чешский физиолог, анатом, политик, педагог, член духовного ордена пиаристов. Эффект Пуркине –

открытое им в 1825 г. изменение восприятия глазом цветовых сочетаний в сумерках.

Рёмер: Оле, Ole Christensen Rømer, 25.09.1644, Орхус – 19.09.1710, Копенгаген – датский астроном, первым измеривший скорость света.

Риттер: Иоганн Вильгельм, Johann Wilhelm Ritter, 16.12.1776, Гаунау, Силезия (сейчас Хойнув, Польша) – 23.01.1810, Мюнхен – немецкий химик, физик, обнаружил ультрафиолетовые лучи в опытах по исследованию химического воздействия различных участков светового спектра, установив, что почернение хлорида серебра возрастает при переходе от красного к фиолетовому концу спектра и становится максимальным за его пределами.

Роса: Эдвард Беннетт, Edward Bennett Rosa, 4.11.1873, Рогерсвилль, штат Нью-Йорк – 17.05.1921, Вашингтон – американский физик, специалист в области измерений, являлся главой отдела электрических исследований в Национальном бюро стандартов США.

Саха: Мегнад, Meghnad Saha, Дакка, 6.10.1893 – 16.02.1956, Нью-Дели – индийский астрофизик, создал теорию термической ионизации с ее применением для интерпретации звездных спектров. Уравнение ионизации Саха позволило астрономам точно связать спектральные классы звезд с их фактическими температурами.

Серре: Жозеф Альфред, Joseph Alfred Serret, 30.08.1819, Париж – 2.03.1885, Версаль – французский математик, известный своими работами в области дифференциальной геометрии.

Снелл: Виллеброрд ван Ройен, Willebrord Snel van Royen, 13.07.1580, Лейден – 30.10.1626, там же – нидерландский математик, физик и астроном, печатался под латинизированным именем Снеллиус (Snellius), трудов в области геометрии, тригонометрии, оптики и астрономии, открыл закон преломления света («закон Снеллиуса»), лежащий в основании современной геометрической оптики.

Солпитер: Эдвин Эрнест, Edwin Ernest Salpeter, 3.12.1924, Вена – 26.11.2008, Итака, США – американский физик-теоретик и астрофизик, также занимался биофизикой, один из основоположников современной теории строения и эволюции звезд.

Стокс: Джордж Габриель, Sir George Gabriel Stokes, 13.08.1819, Скрин, Ирландия – 01.02.1903, Кембридж – английский математик,

механик и физик-теоретик ирландского происхождения, внёс значительный вклад в гидро- и газодинамику (уравнения Навье–Стокса), оптику и математическую физику.

Столетов: Александр Григорьевич, 1839, Владимир – 1896, Москва – русский физик, систематически исследовал внешний фотоэффект, открыл первый закон фотоэффекта.

Струтт: Джон Уильям, третий барон Релей, John Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 12.11.1842, Лэнгфорд-Гров, Англия – 30.06.1919, Уитэм, Англия – британский физик и механик, открывший (с Уильямом Рамзаем) газ аргон. Открыл также явление, ныне называемое рассеянием Рэлея, и предсказал существование поверхностных волн, которые также называются волнами Рэлея.

Сушкин: Николай Гаврилович, 1911 – изобретатель, профессор кафедры физики Московского энергетического института. После демобилизации из армии в 1944 г. создал в своей дипломной работе первый советский электронный микроскоп, который был продемонстрирован 15 октября 1946 г. на кафедре электронных приборов МЭИ. Он выполнил первые работы в области электронно-лучевого нагрева (электронной плавки), вместе с коллегами стал соавтором всемирно известного опыта по дифракции электронов Бибермана–Сушкина–Фабриканта.

Томсон: Джордж Паджет, George Paget Thomson, 3.05.1892, Кэмбридж – 10.09.1975, там же – английский физик; экспериментальное открытие дифракции электронов на кристаллах (совместно с Джозефом Дэвиссоном).

Фабри: Шарль, Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 11.06.1867, Марсель – 11.12.1945, Париж – французский физик, один из изобретателей интерферометра Фабри–Перо.

Фабрикант: Валентин Александрович Фабрикант, 9.10.1907, Москва – 3.03.1991, там же – советский физик. Сформулировал принцип усиления электромагнитного излучения при прохождении сред с инверсной населённостью, лежащий в основе квантовой электроники.

Фарадей: Майкл, Michael Faraday, 22.09.1791, Лондон – 25.08.1867, там же – английский физик-экспериментатор и химик, открыл электромагнитную индукцию – явление возникновения электрического тока, электрического поля при изменении магнитного поля во времени, основоположник учения об электромагнитном поле.

Фейнман: Ричард Филлипс, Richard Phillips Feynman, 11.05.1918, Куинс, США – 15.02.1988, Лос-Анжелес – американский физик; основные достижения относятся к области теоретической физики и квантовой физики. Один из создателей квантовой электродинамики.

Фехнер: Густав Теодор, Gustav Theodor Fechner, 19.04.1801, Гросс-Зерхен, Пруссия – 18.11.1887, Лейпциг, Германская империя – немецкий психолог, один из первых экспериментальных психологов, основоположник психофизиологии и психофизики.

Фойгт: Woldemar Voigt, 2.09.1850, Лейпциг – 13.12.1919, Гёттинген, Германия – немецкий физик-теоретик. Основные труды посвящены физике кристаллов, магнитооптике, теории упругости, термодинамике, механике, кинетической теории газов.

Фок: Владимир Александрович, 10.12.1898, Санкт-Петербург – 27.12.1974, там же – советский физик-теоретик, автор основополагающих трудов по квантовой теории поля, квантовой электродинамике, квантовой механике и общей теории относительности.

Френе: Жан Фредерик, Jean Frédéric Frenet, 7.02.1816, Перигё, Франция – 12.06.1900, там же – французский математик, астроном и метеоролог.

Френель: Огюстен Жан, Augustin-Jean Fresnel, 10.05.1788, Эр, Нормандия, Франция – 14.07.1827, Париж – французский физик, один из создателей волновой теории света.

Фурье: Жан Батист Jean Baptiste Joseph Fourier, 21.03.1768, Осер, Франция – 16.05.1830, Париж – французский математик и физик. Разработанные им ряды и интегралы он использовал в теории распространения тепла, но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач – особенно там, где есть волны и колебания.

Хвольсон: Орест Данилович, 22.11.1852, Санкт-Петербург – 11.05.1934, Ленинград – российский и советский учёный-физик и педагог. Автор пятитомного «Курса физики», который в значительной мере содействовал поднятию уровня преподавания физики и долгое время оставался основным пособием в советских вузах. Сформулировал уравнение переноса излучения.

Хевисайд: Оливер, Oliver Heaviside, 18.05.1850, Камден, Великобритания – 3.02.1925, Торки, Великобритания – английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, переформулировал уравнения Максвелла в терминах трехмерных векторов, напряжённостей электрического и магнитного полей и электрической и магнитной индукций, и, независимо от других математиков, создал векторный анализ.

Хинчин: Александр Яковлевич, 7.07.1894, Кондрово, Калужская губерния – 18.11.1959, Москва – советский математик, один из наиболее значимых учёных в советской школе теории вероятностей.

Холстейн: Теодор Дэвид, Theodore David Holstein, 18.09.1915, Нью-Йорк, – 8.05.1985, там же – американский физик-теоретик в области физики твёрдого тела и атомной физики. Его наиболее значимый вклад в атомную физику был сделан в 1947 г., когда он рассмотрел захват резонансного излучения в газах, позже применённый в лазерной физике, астрофизике и фотохимии, но также применявшийся к фононам и в твёрдом состоянии.

Чандрасекар: Субраманьян, Subrahmanyan Chandrasekhar, 19.10.1910, Лахор, Пакистан – 21.08.1995, Чикаго, США – американский астрофизик и физик-теоретик индийского происхождения. Основные работы посвящены гидродинамике, теории эволюции и внутреннего строения звёзд, звёздных атмосфер, звёздной динамики, теории чёрных дыр, стохастическим процессам. Проанализировал процессы переноса излучения в звёздных атмосферах, предложил ряд методов для решения уравнений, используемых для описания этих процессов.

Шварцшильд: Карл, Karl Schwarzschild, 9.10.1873, Франкфурт-на-Майне – 11.06.1916, Потсдам – немецкий астроном и физик, директор Астрофизической обсерватории в Потсдаме. Одна из ключевых фигур начального этапа развития теоретической астрофизики, отличался широтой научных интересов, оставил заметный след в фотографической фотометрии, теории звёздных атмосфер, общей теории относительности и старой квантовой механике.

Шмидт: Эрхард, Erhard Schmidt, 13.01.1876, Тарту – 06.12.1959, Berlin – немецкий математик; основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу. Определил и изучил геометрически гильбертово пространство, используя аналогии с геометрией Евклида.

Шрёдингер: Эрвин Рудольф Йозеф Александр, Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 12.08.1887, Вена – 4.01.1961, там же – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Шрёдингеру принадлежит ряд фундаментальных результатов в области квантовой теории, которые легли в основу волновой механики. Сформулировал волновые уравнения, показал тождественность развитого им формализма и матричной механики, предложил оригинальную трактовку физического смысла волновой функции.

Штарк: Йоханнес, Johannes Stark, 15.04.1874, Шикенхоф – 21.06.1957, Траунштайн, Германия – немецкий физик; работы по оптике, атомной физике, теории валентности. Открыл эффект расщепления спектральных линий в электрическом поле – эффект Штарка.

Шустер: Франц Артур Фридрих, Franz Arthur Friedrich Schuster, 12.09.1851, Франкфурт-на-Майне, Германия – 14.10.1934, Беркшир, Англия – английский физик; работы по оптике, спектроскопии, изучению прохождения тока через газы, земному магнетизму, калориметрии, радиометрии, сейсмологии.

Эйнштейн: Альберт, Albert Einstein, 14.03.1879, Ульм, Германия – 18.04.1955, Принстон, США – физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, философ науки и общественный деятель-гуманист.

Эрстед: Ханс Кристиан, Hans Christian Orsted, 14.08.1777, Рудкёбинг, о. Лангеланн – 9.03.1851, Копенгаген – датский учёный, физик, исследователь явлений электромагнетизма, впервые экспериментально установил связь между электрическими и магнитными явлениями: отклонение стрелки компаса при прохождении электрического тока рядом.

Юнг: Томас, Thomas Young, 13.06.1773, Милвертон, графство Сомерсет, Англия – 10.05.1829, Лондон – английский учёный

широкого профиля: физик (один из создателей волновой теории света, ввёл понятие механической энергии и представление о модуле упругости), механик, врач (впервые описал явление астигматизма), астроном, филолог и востоковед (ввёл понятие «индоевропейские языки»).

Юстова: Елизавета Николаевна, 29.10.1910, Варшава – 15.02.2008, Шапки, Ленинградская обл. – советский и российский учёный, крупный специалист в области колориметрии.

Учебное издание

Будак Владимир Павлович
Григорьев Андрей Андреевич
Смирнов Павел Александрович
Снетков Владимир Юрьевич

ОСНОВЫ СВЕТОТЕХНИКИ

Учебник

Редактор С.В. Казакова
Компьютерная верстка А.В. Худяковой

Подписано в печать	10.07.23.	Печать офсетная	Формат 60x90 1/16
Печ. л. 33,25	Тираж 120 экз.	Изд. № 23уК-006	Заказ №

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.